Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora: Prof$^{\underline{a}}$. Irina Sviridova

Álgebras Verbalmente Primas e Polinômios de Amitsur-Capelli

Keidna Cristiane Oliveira Souza

Brasília, 14 de setembro de 2012

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Álgebras verbalmente primas e polinômios de Amitsur-Capelli.

por

Keidna Cristiane Oliveira Souza*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 14 de setembro de 2012.

Comissão Examinadora:

Irina Sviridova

Profa. Dra. Irina Sviridova – MAT/UnB (Orientadora)

Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Profa. Dra. Viviane Ribeiro Tomaz da Silva – UFMG

Dimas José Gonçalves

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves - MAT/UnB

* O autor foi bolsista CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Sejam $\{c_n(St_k)\}, \{c_n(Cap_k)\}$ e $\{c_n(E^*_{k,l})\}$ as sequências de codimensões dos T-ideais gerados pelos polinômios standard de grau k, o k-ésimo de Capelli e o polinômio tipo Amitsur-Capelli, respectivamente. Recorde que duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são assintoticamente iguais se $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = 1$, e escreva $a_n \simeq b_n$. Nosso principal objetivo é apresentar os resultados demonstrados por F. Benanti e I. Sviridova e por A. Giambruno e M. Zaicev, onde mostraram que $c_n\left(M_k\left(G\right)\right) \simeq c_n\left(E^*_{k^2,k^2}\right)$, $c_n\left(M_{k,l}\left(G\right)\right) \simeq c_n\left(E^*_{k^2+l^2,2kl}\right)$ e $c_n\left(M_k\left(F\right)\right) \simeq c_n\left(E^*_{k^2,0}\right) \simeq c_n\left(St_{2k}\right) \simeq c_n\left(Cap_{k^2+1}\right)$, $c_n\left(M_{k\times 2k}\left(F\right) \oplus M_{2k\times k}\left(F\right)\right) \simeq c_n\left(St_{2k+1}\right)$ respectivamente, em que G é a álgebra de Grassmann, $M_{k\times l}\left(F\right)$ a álgebra de matrizes $(k+l)\times(k+l)$ que possui todas as linhas maiores ou iguais $(k+1)$-ésima linha e todas as colunas maiores ou iguais a $(l+1)$-ésimas colunas nulas e $M_k\left(G\right),\ M_k\left(F\right), M_{k,l}\left(G\right)$ são as álgebras verbalmente primas, caracterizadas por A. R. Kemer sobre corpos de característica zero. Para obtenção desses resultados recorremos a teoria de representações do grupo simétrico.

Abstract

Let $\{c_n(St_k)\}$, $\{c_n(Cap_k)\}$ and $\left\{c_n\left(E^*_{k,l}\right)\right\}$ be the sequences of codimensions of the T-ideals generated by the standard polynomial of degree k, k-th Capelli polynomial and Amitsur's Capelli-type polynomials, respectively. We recall that two sequences $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ are asymptotically equal, if and only if $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, and we write $a_n \simeq b_n$. Our main goal is to show the results proven by F. Benanti and I. Sviridova and by A. Giambruno and M. Zaicev, where they show that $c_n(M_k(G)) \simeq c_n\left(E^*_{k^2,k^2}\right)$, $c_n(M_{k,l}(G)) \simeq c_n\left(E^*_{k^2+l^2,2kl}\right)$ and $c_n(M_k(F)) \simeq c_n\left(E^*_{k^2,0}\right) \simeq c_n(St_{2k}) \simeq c_n(Cap_{k^2+1})$, $c_n(M_{k\times 2k}(F) \oplus M_{2k\times k}(F)) \simeq c_n(St_{2k+1})$ respectively, where G is the Grassmann algebra, $M_{k\times l}(F)$ the algebra of $(k+l)\times(k+l)$ matrices having the last k rows and last l columns equal to zero and $M_k(G)$, $M_k(F)$, $M_{k,l}(G)$ are the verbally prime algebras classified by A. R. Kemer over a field F of characteristic zero. To obtain these results we resort to the representation theory of the symmetric group.

À minha família.

Agradecimentos

A muitos tenho a agradecer, pois se cheguei onde estou é porque muitos contribuíram para que isso fosse possível.

Primeiramente, agradeço à Deus por todas as graças alcançadas e por sua presença em minha vida.

Agradeço à minha família pelo apoio, carinho e compreensão. Especialmente aos meus pais, Ana Carvalho de Souza Oliveira e Benicio Teixeira de Oliveira, à minha avó, Coraci Rodrigues Bomfim e aos meus irmãos, Kelle Oliveira Souza e Wipson ney Oliveira Souza, pelo amor incondicional, estando sempre ao meu lado nos bons e maus momentos da minha vida. A vocês qualquer conjunto de palavras não seria suficiente para expressar meu carinho, amor e gratidão.

À professora Irina Sviridova, meus sinceros agradecimentos pelas disciplinas ministradas na Pós-Graduação, pela orientação, incentivo e dedicação durante todo esse tempo e pelo grande exemplo de profissional que é.

Aos professores da banca examinadora, Dimas José Gonçalves e Viviane Ribeiro Tomaz da Silva pela leitura atenta e valiosas correções.

Aos professores do Departamento de Matemática-UnB, pelos grandes ensinamentos matemáticos. Em especial, aos professores Marco Pellegrini e Pavel Shumyatsky.

A UFT-Campus de Arraias, agradeço a cada professor que contribuiu, de uma forma ou de outra, para a minha formação. Em especial, aos professores Adriano Rodrigues, Eudes Costa, Kaled Khidir, Robson Mesquita e Waleria Andrade, pelo incentivo.

Aos professores da UFG, Shirlei Serconek e Rogerio de Queiroz Chaves, pelo apoio.

A todos os meus colegas de graduação, em especial aos meus amigos Alexsandra Mendes, Flávia Caraiba, Gabriela Costa, Danielle Ramalho, João Fernandes, Raidoney Lima, Mauricio Sardote e Raquel Caetano, pela preciosa amizade.

Aos meus colegas e amigos de Pós-Graduação do Departamento de Matemática-UnB, pelas inúmeras experiências compartilhadas, apoio, incentivo e amizade. Especialmente, Maria Leite Filha, Ilana Zuila, Mônica Cruvinel, Marina Gabriella Bardella, Kaliana Dias, Renata Alves, Thaynara Lima, Luiz Mateus, Aristóteles Soares, Edimilson dos Santos, Emerson Ferreira, Gilberto Assis, Vinicius Martins, Otto Costa, José Carlos (Zé), Fábio Nunes, Lauro Maycon, Tiago de Lima, Alan Kardec, Linniker Monteiro, Joaby Juca, Bruno Souza, Luis Felipe e Mayer Solorzano.

Agradeço às minhas colegas de moradia, Anádria Stéphanie, Gláucia Garcia, Fernanda Paulini e Andréa Carla (penetra), pela amizade e convivência harmoniosa.

A todos os meus tios, em especial a Levi Teixeira de Oliveira, Clea Carvalho de Souza, Cleuza Carvalho de Souza, Claudio Carvalho de Souza, Leide Maria, Luciana Teixeira de Oliveira, Evaristo Carvalho de Souza, Teresa Carvalho de Souza, Selma Regina de Oliveira e Valder, pelo apoio e incentivo.

Aos meus queridos primos, por tornarem a minha vida mais divertida.

Aos funcionários do Departamento de Matemática-UnB, pelo apoio, disposição e amizade. Em especial, Claudia, Fabiana, Bruna, Eveline, Selma, Luiz, Irene, Vivian, William e Thiago.

Aos funcionários do Colina bloco "K", pela disposição em ajudar. Em especial, ao Marcelo e à Raimunda.

À vó Primavera, Fátima e João, por terem me acolhido no momento que muito precisei. Jamais vou esquecer o que fizeram por mim.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que esse momento fosse possível, meu muito obrigada!

Sumário

Introdução

Sejam F um corpo de característica zero e $F\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre de posto enumerável no conjunto $X=\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$. Consideraremos (exceto menção contrária) $F\langle X\rangle$ não unitária e todas as álgebra do texto associativas e não comutativas. Diremos que uma F-álgebras A é uma PI-álgebra se existe um polinômio não nulo $f(x_1,\ldots,x_n)\in F\langle X\rangle$ tal que, para quaisquer $a_1,\ldots,a_n\in A$, vale $f(a_1,\ldots,a_n)=0$, e denotaremos o conjunto de todos esses polinômios por $Id\,(A)$. Chamaremos um ideal I de $F\langle X\rangle$ de T-ideal, se I é invariante por $End_F\,(F\langle X\rangle)$. Para cada T-ideal I, existe álgebra A tal que $I=Id\,(A)$. Denotaremos por $var\,(I)$ ou $var\,(A)$ todas as álgebras associativas que tem I como identidades polinomiais.

Uma álgebra A é dita verbalmente prima se para quaisquer T-ideais I_1 e I_2 de $F\langle X\rangle$ tal que $I_1I_2\subseteq I$ implica que $I_1\subseteq I$ ou $I_2\subseteq I$. A. R. Kemer em [13] caracterizou todas as álgebras verbalmente primas sobre corpos de característica zero: F, $F\langle X\rangle$, $M_k\,(F)$, $M_k\,(G)$, $M_{k,l}\,(G)$ $(k\geq l)$, em que $G=G_0\dot{+}G_1$ é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita gerada pelo conjunto enumerável $\{e_1,e_2,\ldots\,|\,e_ie_j=-e_je_i,\ i,j=1,2,\ldots\}$; G_0 e G_1 são os subespaços gerados pelos monômios de comprimento par e os monômios de comprimento ímpar respectivamente; $M_k\,(F)$ e $M_k\,(G)$ são as álgebras de matrizes $k\times k$ sobre F e G respectivamente e $M_{k,l}\,(G)=\left\{\begin{pmatrix} P & Q\\ R & S\end{pmatrix}\,\middle|\, P\in M_k(G_0), Q\in M_{k\times l}(G_1), R\in M_{l\times k}(G_1) \text{ e } S\in M_l(G_0)\right\}$.

Uma álgebra A é dita superálgebra com graduação $(A_0,\ A_1)$, se $A=A_0\dot{+}A_1$ é soma direta de seus subespaços A_0,A_1 e satisfaz: $A_0A_1\dot{+}A_1A_0\subseteq A_1$ e $A_0A_0\dot{+}A_1A_1\subseteq A_0$. Observe que toda álgebra admite uma graduação trivial $A_0=A,\ A_1=0$, e que a álgebra de Grassmann G é uma superálgebra. A seguinte superálgebra $G\,(A)=G_0\otimes A_0\dot{+}G_1\otimes A_1$ é chamada envolvente de Grassmann da álgebra A, em que A é uma superálgebra.

Pelo Teorema de Wedderburn-Malcev, toda superálgebra A de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero é escrita como $A=A_1\oplus\ldots\oplus A_n\dot{+}J\,(A)$, em que $J=J\,(A)$ é o radical de Jacobson de A e $A_1,\ldots,A_n$ são superálgebras simples. É bem conhecido que J é um ideal bilateral graduado de A e que uma superálgebra simple de dimensão finita, sobre um corpo de característica zero e algebricamente fechado, é isomorfa a umas das seguintes álgebras: $M_k(F)$, $M_k(F\dot{+}cF)$ e $M_{k,l}(F)$, em que $c^2=1$.

Outro fato conhecido é que, sobre corpo de característica zero cada T-ideal é equivalente a um conjunto de polinômios multilineares. Denotaremos o espaço de polinômios multilineares por $P_n=span_F\langle x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)}\ |\ \sigma\in S_n\rangle$. Há um isomorfismo de FS_n-módulos à esquerda entre P_n e a álgebra FS_n, em que S_n é o grupo simétrico em $\{1,\ldots,n\}$. Com isso, o quociente $P_n/P_n\cap Id\,(A)$ tem uma estrutura de FS_n-módulo à esquerda. Chamaremos a sequência $c_n(A) = dim_F(P_n/P_n \cap Id(A))$ de codimensões da álgebra A. Se A for uma PI-álgebra, então $c_n(A) < n!$ e se A for nilpotente, então $c_n(A) = 0$, a partir de um certo n_0.

Em 1972, A. Regev provou que se A satisfaz alguma identidade não nula, então existem constantes α, β tais que $c_n(A) \leq \alpha\beta^n$.

Se A é uma PI-álgebra, o seu PI-expoente é definido como $exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$. Na década de 1980, S. A. Amitsur conjecturou que o PI-expoente de uma PI-álgebra existe e é um inteiro não negativo. Apenas em 1999, A. Giambruno e M. Zaicev provaram a conjectura para PI-álgebras sobre um corpo de característica zero. Por exemplo, o PI-expoente das álgebras verbalmente primas, tem os seguintes valores: $exp(M_k(F)) = k^2$, $exp(M_k(G)) = 2k^2$ e $exp(M_{k,l}(G)) = (k+l)^2$.

Se $f \in F\langle X\rangle$ denotaremos por $\langle f\rangle_T$ o T-ideal gerado pelo polinômio f. Recorde que

$$St_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

é o polinômio standard de posto n e

$$Cap_n(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\, x_{\sigma(1)} y_1 \ldots y_{n-1} x_{\sigma(n)}$$

é o polinômio de Capelli de posto n, onde $sgn(\sigma)$ é o sinal da permutação σ. É interessante observamos que o polinômio standard pertence ao T-ideal gerado pelo polinômio de Capelli, mas esses dois polinômios não são PI-equivalentes (no caso de álgebra livre unitária). Sejam L, M dois naturais, $n = (L+1)(M+1)$ e $\mu = (L+1)^{M+1} \vdash n$ partição de n. Em 1982, S. A. Amitsur e A. Regev introduziram o polinômio tipo Amitsur-Capelli:

$$e^*_{M,L} = \sum_{\sigma\in S_n} \chi_\mu(\sigma)\, x_{\sigma(1)} y_1 \ldots y_{n-1} x_{\sigma(n)}$$

em que χ_μ é o caracter irredutível correspondente à partição μ. Note que se $L = 0$ obtemos o polinômio de Capelli.

O polinômio tipo Amitsur-Capelli generaliza o polinômio de Capelli no sentido que caracteriza todas as álgebras que tem cocaracter contido em uma gancho e um tira. Mais precisamente, dado inteiros $d, l \geq 0$, denotaremos por $H(d,l) = \bigcup_{n\geq 1} \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \vdash n \mid \lambda_{d+1} \leq l\right\}$ o gancho infinito de braço d e perna l.

Em 1979, A. Regev provou que uma álgebra A satisfaz o polinômio de Capelli de posto k se, e somente se, o seu n-ésimo cocaracter está contido em uma tira de altitude k. Em 1982, A. Regev e S. A. Amitsur generalizaram esse resultado provando que uma álgebra A satisfaz o polinômio tipo Amitsur-Capelli $e^*_{M,L}$ se, e somente se, o seu n-ésimo cocaracter está contido no gancho infinito $H(d,l)$. É provado que as álgebras verbalmente primas satisfazem essas identidades para um dado posto.

Denotaremos $E^*_{k,l}$ o conjunto dos polinômios gerado pelo polinômio $e^*_{k,l}$, incluindo os polinômios obtidos de $e^*_{k,l}$ ao substituir $y_i = 1$ de todas as possíveis maneiras. A. Berele e A. Regev mostram em

[3] que $exp\left(E^{*}_{k^2,k^2}\right) = 2k^2$, $exp\left(E^{*}_{k^2+l^2,2kl}\right) = (k+l)^2$ e $exp\left(E^{*}_{k^2,0}\right) = k^2$. Assim, $exp\left(E^{*}_{k^2,k^2}\right) = exp\left(M_k\left(G\right)\right)$, $exp\left(E^{*}_{k^2+l^2,2kl}\right) = exp\left(M_{k,l}\left(G\right)\right)$ e $exp\left(E^{*}_{k^2,0}\right) = exp\left(M_k\left(F\right)\right)$.

F. Benanti e I. Sviridova em [1] e A. Giambruno e M. Zaicev em [9] deram uma relação entre as codimensões das álgebras verbalmente primas e as codimensões do T-ideal gerado pelos polinômios tipo Amitsur-Capelli.

Este trabalho foi baseado em [1] e [9], tendo como objetivo principal apresentar a igualdade assintótica entre as codimensões das álgebras verbalmente primas e as codimensões do T-ideal gerado pelos polinômios tipo Amitsur-Capelli. Esses resultados foram demonstrados em [1] e [9].

No **Capítulo 1** apresentaremos alguns conceitos, exemplos e resultados da teoria de PI-álgebras sobre um corpo de característica zero e módulos que servirão como base para os capítulos seguintes. O leitor que tiver interesse em um maior aprofundamento no assunto, citaremos [6] e [7].

No **Capítulo 2** iremos trazer algumas propriedades, características e exemplos dos polinômios alternados e polinômios simétricos. Serão dados também exemplos de álgebras que satisfazem esses polinômios como identidade.

No **Capítulo 3** apresentaremos um pouco sobre à teoria de representações de grupos finitos, depois passaremos a teoria de representações do grupo simétrico. Definiremos o elemento quase idempotente central e o quase idempotente e o polinômio tipo Amitsur-Capelli.

O **Capítulo 4**, será destinado a mostrar que as superálgebras $M_k\left(F\right), M_k\left(G\right), M_{k,l}\left(G\right)$ isomorfas à Envolvente de Gassamann das superálgebras simples são verbalmente primas. Calcularemos o PI-expoente das álgebras verbalmente primas.

No **Capítulo 5** iremos analizar o caso de uma superálgebra reduzida do tipo especial. Em seguida mostraremos os resultados demonstrados em [1] e [9], que é nosso objetivo.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos e resultados que serão necessários para a compreensão do nosso trabalho. Mais especificamente, começaremos fazendo uma apresentação de álgebras, como por exemplo as álgebras de matrizes. Depois falaremos dos polinômios, identidades polinomiais, T-ideais e variedades. Apresentaremos, rapidamente, alguns conceitos de módulos sobre um anel, simples e semissimples. Neste trabalho, F sempre será um corpo de característica zero.

1.1 Álgebras

Definição 1.1.1. *Sejam F um corpo e A um espaço vetorial sobre F com uma operação bilinear $*$ em A. Em outras palavras, o par $(A, *)$ é chamado* F**-álgebra** *(ou uma álgebra sobre F), se $* : A \times A \longrightarrow A$ satisfaz:*

1. $a * (b + c) = a * b + a * c$;
2. $(a + b) * c = a * c + b * c$;
3. $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda (a * b)$,
   para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in F$.

A operação $*$ é chamada de multiplicação ou produto. Por simplicidade, denotaremos $a * b = ab$ e chamaremos A de álgebra em vez de F-álgebra.

Definição 1.1.2. *Diremos que a álgebra A é:*

1. **associativa**, *se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in A$;*
2. **comutativa**, *se $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in A$ e*
3. **unitária**, *se o produto de A possui elemento neutro, isto é, existe $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$.*

Todas as álgebras deste texto (salvo menção contrária) serão associativas, possivelmente não comutativas e sem unidade.

A **dimensão** de uma F-álgebra é a sua dimensão como espaço vetorial.

Exemplo 1.1.1. *A álgebra $M_n(F)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em F munido com o produto usual de matrizes é uma F-álgebra associativa, unitária, não comutativa de dimensão n^2.*

Exemplo 1.1.2. *Sejam G um grupo finito e F um corpo. Denotaremos*

$$FG = span_F \langle g_i \mid g_i \in G \rangle.$$

Com as seguintes operações:

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g \quad e$$

$$\lambda \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \beta_h h \right) = \left(\sum_{g,h \in G} \lambda \gamma_{g,h} gh \right),$$

em que $\gamma_{g,h} = \alpha_g \beta_h$ e $\lambda \in F$, temos que FG é uma F-álgebra e G é uma base para FG. Assim, $dim_F FG = |G|$. Diremos que FG é a **álgebra de grupo de G sobre F**. *Em geral, FG é uma F-álgebra associativa e com identidade $1_F 1_G$. A álgebra FG é comutativa se, e somente se, G é comutativo.*

Exemplo 1.1.3. *$UT_n(F)$ as matrizes triangulares superior $n \times n$ com entradas em F é uma F-álgebra associativa, não comutativa com identidade, para todo $n \geq 1$.*

Exemplo 1.1.4. *O F-espaço vetorial:*

$$M_{k,l}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \,\middle|\, P \in M_k(F), Q \in M_{k \times l}(F), R \in M_{l \times k}(F) \text{ e } S \in M_l(F) \right\}$$

é F-álgebra associativa, unitária, não comutativa de dimensão $(k+l)^2$, com produto usual de matriz em bloco.

Exemplo 1.1.5. *Seja G um grupo de ordem 2 gerado por c. O F-espaço vetorial $M_n(F \dot{+} cF)$, com entradas na álgebra $F \dot{+} cF$, é uma álgebra de dimensão $2n^2$.*

Exemplo 1.1.6. *Sejam A e B F-espaços vetoriais. O* **produto tensorial de** A **e** B *é definido como sendo o espaço vetorial gerado livremente pelo conjunto $\{v \otimes w \mid v \in A \text{ e } w \in B\}$, em que $\{v\}$ é base para A e $\{w\}$ é base para B, com as seguintes propriedades:*

1. $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$;

2. $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$;

3. $(\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w) = \lambda (v \otimes w)$, *para quaisquer* $\lambda \in F$, $v, v_1, v_2 \in A$, $w, w_1, w_2 \in B$ *e*

4. $v \otimes w \neq 0 \Longleftrightarrow v \neq 0$ *e* $w \neq 0$.

Se A e B são F-álgebras associativas, então o produto tensorial $A \otimes B$ também é uma F-álgebra associativa, com multiplicação:

$$\left(v' \otimes w'\right)\left(v'' \otimes w''\right) = \left(v'v'' \otimes w'w''\right),$$

em que $v', v'' \in A$ e $w', w'' \in B$.

Exemplo 1.1.7. *Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ um conjunto infinito enumerável. Chamaremos os elementos de X de* **variáveis**. *Uma* **palavra** *em X é uma sequência $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$, com $n \in \mathbb{N}$. A palavra $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ em que, $s = 0$ será a palavra vazia que denotaremos por 1. Geralmente, iremos considerar $s \geq 1$ (salvo menção contrária). Chamaremos de* **monômios** *o produto de um escalar por uma palavra em X, isto é, $\alpha x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ onde $\alpha \in F$ e $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in X$. Diremos que dois monômios $\alpha x_{i_1} \ldots x_{i_n} = \beta x_{j_1} \ldots x_{j_m}$ se, e somente se, $\alpha = \beta \in F$, $n = m$ e $i_t = j_t$.*

O F-espaço vetorial $F\langle X\rangle = \left\{ \sum_{(i)} \alpha_i x_{i_1} \ldots x_{i_n} \;\middle|\; \alpha_i \in F, \quad n \geq 1 \right\}$, munido com a multiplicação usual por justaposição, é uma F-álgebra, não comutativa, associativa e sem unidade.

Os elementos de $F\langle X\rangle$ são chamados de **polinômios**, isto é, a soma de monômios. Se $f \in F\langle X\rangle$, escreveremos $f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i$, para indicar que $x_1, \ldots, x_n$ são as únicas variáveis que aparecem em f, em que $\alpha_i \in F$ e w_i são palavras que dependem de $x_1, \ldots, x_n$.

Definição 1.1.3. *Sejam A e B F-álgebras. Uma transformação linear $\varphi\colon A \longrightarrow B$ é dita um* **homomorfismo de F-álgebras** *se:*

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \;\; \forall a, b \in A.$$

Diremos que φ é um **isomorfismo** de F-álgebras se φ é um homomorfismo bijetivo de F-álgebras. Neste caso diremos que A e B são **isomorfas** e denotaremos por $A \cong B$. Um homomorfismo de A em A é chamado um **endomorfismo**.

Além disso, φ é injetora se, e somente se, $Ker(\varphi) = \{0\}$. Se $Ker(\varphi) = \{0\}$, então

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Longleftrightarrow \varphi(a - b) \in Ker(\varphi).$$

Logo, φ é injetora. Reciprocamente, se φ é injetora, então o único $a \in A$ tal que $\varphi(a) = 0$ é $a = 0$. Logo, $Ker(\varphi) = \{0\}$.

Exemplo 1.1.8. *Sejam $M_n(F)$ e A uma álgebra sobre F. Então, $M_n(F) \otimes A \cong M_n(A)$ como álgebras. De fato, considere a aplicação linear*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M_n(F) \otimes A & \longrightarrow & M_n(A) \\ & e_{i,j} \otimes a & \longmapsto & a e_{i,j} \end{array},$$

em que $\{e_{i,j} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ são as matrizes elementares que formam uma base para $M_n(F)$, e $a \in A$. É possível mostrar que φ está bem definido e é um isomorfismo de F-álgebras.

Definição 1.1.4. *Sejam $\mathcal{B}$ uma classe de F-álgebras e $A \in \mathcal{B}$ uma F-álgebra gerada por um conjunto X. A F-álgebra A é chamada uma* **F-álgebra livre** *na classe $\mathcal{B}$, livremente gerada pelo conjunto X, se* *para qualquer álgebra $R \in \mathcal{B}$, qualquer aplicação $\varphi : X \longrightarrow R$ pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras $\phi : A \longrightarrow R$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamada* **posto** *de A.*

Exemplo 1.1.9. *A F-álgebra $F\langle X\rangle$ é livre na classe de todas as álgebras associativas.*

Definição 1.1.5. *Um subespaço S de A é chamado uma* **subálgebra** *se S é fechado com respeito ao produto, isto é, para quaisquer $s_1, s_2 \in S$ implica que $s_1 s_2 \in S$.*

Exemplo 1.1.10. *$UT_n(F)$ é uma subálgebra de $M_n(F)$.*

Exemplo 1.1.11. *$F\langle X_n\rangle$ é uma subálgebra de $F\langle X\rangle$, em que $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X = \{x_1, x_2, \ldots.\}$*

Definição 1.1.6. *Uma subálgebra I de A é chamado um* **ideal à esquerda** *(à direita) se, $AI \subseteq I$ ($IA \subseteq I$), isto é, para cada $r \in A$ e $i \in I$ ocorre: $ri \in I$ ($ir \in I$). Se I é um ideal à esquerda e à direita, então diremos que I é um* **ideal bilateral**.

Exemplo 1.1.12. *$I = (0)$ e $I = A$ são ideais bilaterais de A, e são chamados de* **ideais triviais**.

Diremos que um ideal I é **próprio** se, $I \neq (0)$ e $I \neq A$.

Exemplo 1.1.13. *$I = \{(\alpha_{ij})_{n\times n} \mid \alpha_{ij} \in F,\ \alpha_{i2} = 0,\ \forall\ i = 1, \ldots, n\}$ é um ideal à esquerda de $M_n(F)$.*

Exemplo 1.1.14. *$J = \{(\alpha_{ij})_{n\times n} \mid \alpha_{ij} \in F,\ \alpha_{1j} = 0,\ \forall\ j = 1, \ldots, n\}$ é um ideal à direita de $M_n(F)$.*

Exemplo 1.1.15. *$M_n(F)$ não possui ideais bilaterais próprios.*

Demonstração. Seja I um ideal bilateral de $M_n(F)$. Vamos considerar $X = \{(i,j) \mid (i,j) \in \bar{n}\times\bar{n}\}$, em que $\bar{n} = \{1, \ldots, n\}$. E para cada (i,j) o ideal bilateral de F, $J_{i,j} = \{x \in F \mid \exists\ (a_{ij})_{n\times n} \in I$ tal que $a_{ij} = x\}$, isto é, A possui o elemento x na i-ésima linha e j-ésima coluna.

Como F é corpo, não possui ideais bilaterais próprios, então $J_{i,j} = (0)$ para cada $(i,j) \in X$ e, neste caso, $I = (0)$, ou existe $(i_0, j_0) \in X$ tal que $J_{i_0,j_0} = F$. Sendo F corpo, existe $B \in I$ tal que $b_{i_0 j_0} = 1$. Como I é um ideal bilateral, temos que $e_{i_0,j_0} = e_{i_0,i_0} B e_{j_0,j_0}$ e, como $e_{k,l} = e_{k,i_0} e_{i_0,j_0} e_{j_0,l} \in I$ para quaisquer $k, l = 1, \ldots, n$, temos que $e_{k,l} \in I$. Já que as matrizes elementares formam uma base para $M_n(F)$ como espaço vetorial, temos que $I = M_n(F)$. Assim, concluímos a demonstração.

Em particular, $M_{k,l}(F)$ não possui ideais bilaterais próprios. □

Assim como para grupos e anéis, para álgebras também é válido o teorema do homomorfismo. Isto é, pode se provar que a imagem homomórfica de uma F-álgebra é isomorfa a um quociente, cujo ideal no denominador coincide com o núcleo do homomorfismo em questão.

Destacaremos agora alguns tipos especiais de álgebras.

Definição 1.1.7. *Seja A uma álgebra.*

1. *A é* **nilpotente** *se existe $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, tem-se $a_1 \ldots a_n = 0$. O menor natural n com essa propriedade é chamado de* **expoente de** A *ou* **grau de nilpotência**.

2. *A é* **nil** *de grau limitado se existe $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que para todo $a \in A$, tem-se $a^n = 0$. O menor natural n com essa propriedade é chamado de* **expoente de nil de** A.

Note que toda álgebra nilpotente é nil. E toda álgebra unitária é não nilpotente.

1.2 Polinômios e Identidades Polinomiais

Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i \in F\langle X\rangle$, em que $\alpha_i w_i$ são todos monômios.

Definição 1.2.1. *Seja $w_t = \alpha x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ um monômio e $f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio de $F\langle X\rangle$.*

1. *Se $x_j \in X$, então o* **grau de** *x_j em w_t, denotaremos por $deg_{x_j} w_t$, é o número de ocorrências de x_j em w_t.*

2. *O* **grau de** *w_t, denotaremos por $deg(w_t)$, é o número total n de variáveis presentes no monômio w_t, considerando também multiplicidades de cada variável.*

3. *O* **grau de** *f, denotaremos por $deg(f)$, é o maior grau obtido entre seus monômios.*

4. *O* **grau de** *x_i em f, denotaremos por $deg_{x_i}(f)$ é o $max_{1\leq t\leq m} deg_{x_i} w_t$.*

Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i$. Se $deg(w_1) = \ldots = deg(w_m)$, diremos que f é um **polinômio homogêneo**.

Definição 1.2.2. *Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i$, se $deg_{x_i}(w_1) = \ldots = deg_{x_i}(w_m)$, diremos que f é um polinômio homogêneo em x_i. Quando f é um polinômio homogêneo em todas as variáveis, diremos que f é um* **polinômio multi-homogêneo**.

Para um polinômio multi-homogêneo nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ existe a denominação de **multigrau**: uma n-úpla cuja i-ésima entrada é o número de vezes que x_i aparece em um monômio de f.

Exemplo 1.2.1.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3 + x_2 x_1^2 x_3 + x_3 x_1^2 x_2$$

é um polinômio multi-homogêneo de multigrau $(2, 1, 1)$.

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio. Uma **componente multi-homogênea** de f é a soma de todos os monômios de f com o mesmo multigrau. O leitor deve ter percebido que com essa definição f é multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea. Observe ainda que todo polinômio é escrito como soma de suas componentes multi-homogêneas.

Definição 1.2.3. *Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é* **linear** *na variável x_i, se x_i ocorre com grau 1 em cada monômio de f. Um polinômio que é* **multi-homogêneo** *e linear em cada uma de suas variáveis é chamado de* **multilinear**, *isto é, f é multilinear se f é multi-homogêneo de multigrau (1,...,1).*

Observação 1.2.1. *Como em um polinômio multilinear cada variável aparece em cada monômio de $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ com grau 1, então f é da seguinte forma: $f = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$, em que $\alpha_\sigma \in F$.*

Os polinômios multilineares são de grande importância para T-ideais em corpos de característica zero.

Observação 1.2.2. *Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é linear em uma variável, digamos x_1, então*

$$f\left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i y_i, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i f(y_i, x_2, \ldots, x_n),$$

para $\alpha_i \in F$, $\quad y_i \in X$.

De modo geral, se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é multilinear, então aplicando o mesmo processo para cada x_i, obtemos

$$f\left(\sum_{i_1=1}^{t_1} \alpha_{i_1} y_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{t_n} \alpha_{i_n} y_{i_n}\right) = \sum_{i_1=1}^{t_1} \alpha_{i_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{t_n} \alpha_{i_n} f(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}).$$

Definição 1.2.4. *Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é dito uma* **identidade** *da álgebra A, se para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, ocorre:*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Definição 1.2.5. *Seja $Id(A) = \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$ o conjunto de todas as identidades de A. Se $Id(A) \neq (0)$, então diremos que A é uma* **PI-álgebra**.

Pode se mostrar que $Id(A)$ é um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$. Além disso, $Id(A)$ é fechado por endomorfismos de $F\langle X\rangle$. De fato, sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in Id(A), g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle$ e um $\varphi \in End_F(F\langle X\rangle)$

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F\langle X\rangle & \longrightarrow & F\langle X\rangle \\ & x_i & \longmapsto & g_i \end{array}.$$

Assim,

$$\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = f(g_1, \ldots, g_n) = f(g_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}), \ldots, g_n(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})).$$

Note que $f(g_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}), \ldots, g_n(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})) = 0$ em A, pois para quaisquer $a_1, \ldots, a_m \in A$, temos que $g_i(a_1, \ldots, a_m) \in A$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Logo, $f(g_1, \ldots, g_n) \in Id(A)$. Concluímos que $\varphi(Id(A)) \subseteq Id(A)$.

Definição 1.2.6. *Um ideal I de $F\langle X\rangle$ é um* **T-ideal** *se $\varphi(I) \subseteq I$, para todo $\varphi \in End(F\langle X\rangle)$.*

Note que se B é uma subálgebra de A, então $Id(A) \subseteq Id(B)$.

Proposição 1.2.3. *Seja I um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Então, $I = Id(F\langle X\rangle/I)$.*

Demonstração. Seja $A = F\langle X\rangle/I$ a álgebra quociente.

($\subseteq$) Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$. Vamos mostrar que $f \in Id(A)$. Como I é T-ideal, para quaisquer $g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle$, temos que $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$. Assim, se $g_1 + I, \ldots, g_n + I \in A$, então

$$f(g_1 + I, \ldots, g_n + I) = f(g_1, \ldots, g_n) + I = I = \bar{0}.$$

Logo, concluímos que $I \subset Id(A)$.

($\supseteq$) Reciprocamente, seja $f \in Id\,(A)$. Como

$$f\,(x_1, \ldots, x_n) + I = f\,(x_1 + I, \ldots, x_n + I) = \bar{0} = I$$

temos que $f \in I$. Portanto, $I = Id\,(A)$. $\square$

Proposição 1.2.4. *Seja A uma álgebra gerada como espaço vetorial por um conjunto $\mathcal{B}$ e seja $f = f\,(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio multilinear. Então, f é uma identidade para álgebra A se, e somente se, $f\,(b_1, \ldots, b_n) = 0$ para qualquer sequência de elementos $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{B}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como f é uma identidade da álgebra A, então $f\,(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Em particular, para os elementos de $\mathcal{B}$.

($\Leftarrow$) Qualquer elemento $a \in A$ é escrito como combinação linear finita de elementos de $\mathcal{B}$. Sejam $a_i = \sum_{j_i=1}^{t_i} \alpha_{j_i}^{(i)} w_{j_i}$, onde $\alpha_{j_i}^{(i)} \in F$, $\quad w_{j_i} \in \mathcal{B}$ e $i = 1, \ldots, n$.
Daí, como f é multilinear, pela **Observação 1.2.2**, temos que

$$\begin{aligned}
f\,(a_1, \ldots, a_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{t_1} \alpha_{j_1}^{(1)} w_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{t_n} \alpha_{j_n}^{(n)} w_{j_n}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{t_1} \alpha_{j_1}^{(1)} \ldots \sum_{j_n=1}^{t_n} \alpha_{j_n}^{(n)} f\,(w_{j_1}, \ldots, w_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{t_1,\ldots,t_n} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_n} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, f é uma identidade de A. $\square$

1.3 Variedades

Definição 1.3.1. *Dado um conjunto não-vazio $S \subseteq F\langle X\rangle$, a classe de todas as F-álgebras A tal que $f = 0$ em A para todo $f \in S$, é chamado de* **variedade** *$\mathcal{V} = var\,(S)$ determinada por S.*

Além disso, se $\langle S\rangle_T$ é o T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por S, então $\mathcal{V} = var\,(S) = var\,(\langle S\rangle_T)$ e $\langle S\rangle_T = \bigcap_{A \in \mathcal{V}} Id\,(A)$ e diremos que $Id\,(\mathcal{V}) = \langle S\rangle_T$. Quando existe uma álgebra A tal que $Id\,(A) = Id\,(\mathcal{V})$, denotaremos por $\mathcal{V} = var\,(A)$ e diremos que $\mathcal{V}$ é a **variedade gerada pela álgebra** A.
Diremos que $\mathcal{V}$ é **trivial** se $\mathcal{V}$ é gerada pela álgebra trivial $\{0\}$, e é dita **total** se ela é gerada por $F\langle X\rangle$.

Definição 1.3.2. *A variedade $\mathcal{D}$ é chamada de* **subvariedade** *de $\mathcal{V}$ se $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}$.*

Proposição 1.3.1. *I é um T-ideal de $F\langle X\rangle \Longleftrightarrow$ existe alguma álgebra associativa B tal que $Id\,(B) = \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0$ em $B\}$ é igual a I.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Pela **Proposição 1.2.3**, tomando $B = F\langle X\rangle/I$, tem-se $Id\,(B) = I$.

($\Leftarrow$) Mostramos logo após a **Definição 1.2.5**. $\square$

Proposição 1.3.2. *Se $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ é uma variedade de álgebras, então existe uma álgebra A tal que $\mathcal{V} = \mathcal{V}(A)$.*

Demonstração. Seja o T-ideal $\langle S \rangle_T = I$. Considerando $A = F\langle X \rangle / I$, temos $var(A) = \mathcal{V}$. □

Exemplo 1.3.1. *A classe de todas as álgebras comutativas forma uma variedade própria $\mathcal{V}_1(S_1)$, com $S_1 = \{[x, y]\}$.*

Exemplo 1.3.2. *A classe de todas as álgebras nil de expoente n forma uma variedade $\mathcal{V}_2(S_2)$, com $S_2 = \{x^n\}$.*

Exemplo 1.3.3. *A classe de todas as álgebras nilpotentes de expoente n forma uma variedade, com $S_3 = \{x_1 \ldots x_n\}$. Note que, $\mathcal{V}_3(S_3) \subset \mathcal{V}_2(S_2)$.*

1.4 Polinômios Multilineares

Definição 1.4.1. *Seja S um conjunto de polinômios em $F\langle X \rangle$ e $f \in F\langle X \rangle$. Diremos que f é uma* **consequência dos polinômios em** *S (ou segue dos polinômios em S) se $f \in \langle S \rangle_T$, o T-ideal gerado pelo conjunto S.*

Definição 1.4.2. *Dois conjuntos de polinômios são* **equivalentes** *se eles geram o mesmo T-ideal.*

Definição 1.4.3. *Duas PI-álgebras A e B são* **PI-equivalentes** *se $Id(A) = Id(B)$.*

Teorema 1.4.1. *Sejam F um corpo infinito, e $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade para uma álgebra A. Então cada componente multi-homogênea de f também é uma identidade de A. Consequentemente, todo T-ideal sobre um corpo infinito é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*

Demonstração. Seja $deg_{x_1} f = m$, observe que podemos decompor $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{m} f_j$, em que cada f_j é a parcela de f que tem grau j em relação à variável x_1.
Como F é infinito, existem distintos elementos $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in F$. Por outro lado, como f_j é homogêneo em x_1, obtemos que $f_j(\alpha x_1, \ldots, x_n) = \alpha^j f_j(x_1, \ldots, x_n)$, para todo $\alpha \in F$. Assim,

$$f(\alpha x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{m} \alpha^j f_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Como f é uma identidade de A, temos que, para quaisquer $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in A$, $\alpha \in F$

$$f(\alpha \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{m} \alpha^j f_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0.$$

Assim, obtemos um sistema de equações com $m+1$ variáveis, $f_0, \ldots, f_m$:

$$\begin{cases} f_0 & + & \alpha_0 f_1 & + & \ldots & + & \alpha_0^m f_m & = & 0 \\ f_0 & + & \alpha_1 f_1 & + & \ldots & + & \alpha_1^m f_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ldots & \vdots & & \\ f_0 & + & \alpha_m f_1 & + & \ldots & + & \alpha_m^m f_m & = & 0. \end{cases}$$

Vamos analisar se o sistema homogêneo tem solução não trivial, isto é, vamos verificar se o determinante da matriz C abaixo é nulo:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \ldots & \alpha_0^m \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^m \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \ldots & \alpha_m^m \end{pmatrix}.$$

Sabemos que C é não singular se $detC \neq 0$. Como $detC = detC^t = \prod_{0 \leq i < j \leq m} (\alpha_i - \alpha_j)$, já que escolhemos os $\alpha' s$ todos distintos, temos que $detC \neq 0$. Assim, concluímos que $f_0, \ldots, f_n$ são identidades da álgebra A.

Agora, para cada $j = 1, \ldots, m;\ t = 1, 2, \ldots$, tomemos f_{jt} a componente homogênea de x_2 de grau t em f_j. Aplicando os mesmos argumentos anteriores, obtemos que f_{jt} é uma identidade para A. Fazendo este processo para cada variável $x_i, 1 \leq i \leq n$, obtemos que cada componente multi-homogênea de f é uma identidade para A, isto é, $\bar{f}_k \in \langle f \rangle_T$, em que $\bar{f}_k$, $\forall k$, é componente multi-homogênea de f. Por outro lado, já que podemos escrever f como soma de suas componentes multi-homogêneas, temos $f \in \langle \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_u \rangle_T$. De onde concluímos que todo T-ideal é consequência de seus polinômios multi-homogêneos. □

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multi-homogêneo e $deg_{x_i} f = a_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Seja o polinômio obtido de f,

$$h(x_{11}, \ldots, x_{1a_1}, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{11} + \ldots + x_{1a_1}, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{a_1} f(x_{1i}, x_2, \ldots, x_n).$$

As componentes multi-homogêneas de h são chamadas **linearizações parciais próprias** com respeito à variável x_1. Entre eles existe linearização parcial que é linear em todas as variáveis $x_{11}, \ldots, x_{1a_1}$. Este processo pode ser feito em relação a cada uma das variáveis, e vamos conseguir a linearização de f que é um polinômio multilinear. Ela chama-se **linearização completa** (componente multilinear) do polinômio $f(x_{11} + \ldots + x_{1a_1}, \ldots, x_{n1} + \ldots + x_{na_n})$.

Exemplo 1.4.1. *Multilinearização do polinômio* $f(x) = x^n$ *é*

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}.$$

Exemplo 1.4.2. *Multilinearização do polinômio* $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ *é*

$$h(y_1, y_2, x_2) = y_1 y_2 x_2 + y_2 y_1 x_2.$$

Teorema 1.4.2. *Se a característica de* F *é zero, todo polinômio não nulo* $f \in F\langle X\rangle$ *é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração. Pelo **Teorema 1.4.1**, podemos supor que $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é polinômio multi-homogêneo. Suponha que f é multi-homogêneo de $deg_{x_i} f = a_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
Seja $h(x_{11}, \ldots, x_{1a_1}, x_{21}, \ldots, x_{2a_2}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{na_n})$ a linearização completa de f. Pelo **Teorema 1.4.1**, temos que $\langle h\rangle_T \subseteq \langle f\rangle_T$. Agora vamos substituir $x_{i1}, \ldots, x_{ia_i}$ por x_i no polinômio h. Obtemos

$$h(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_n) = a_1! a_2! \cdots a_n! f(x_1, \ldots, x_n).$$

Como a característica de F é zero, temos que $a_1!a_2!\cdots a_n! \neq 0$. Logo, $\langle f\rangle_T \subseteq \langle h\rangle_T$. Portanto, $\langle f\rangle_T = \langle h\rangle_T$. □

Este teorema nos diz que sobre um corpo de caracterítica zero, se um polinômio f é uma identidade de alguma álgebra, então podemos supor f multilinear. Pois caso não seja, podemos multilinearizá-lo e o polinômio multilinear obtido de f gera o mesmo T-ideal que f.

Proposição 1.4.3. *Sejam* A *e* C *duas* F*-álgebras, onde* F *é corpo de característica zero. Se* C *é álgebra comutativa não nilpotente, então,* $Id(A \otimes C) = Id(A)$.

Demonstração. $(\subseteq)$ Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ um polinômio multilinear em $Id(A \otimes C)$. Como C é não nilpotente, existem $c_{i_1}, \ldots, c_{i_n} \in C$ tais que $c_{i_1} \cdots c_{i_n} \neq 0$. Assim, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, temos

$$\begin{aligned} 0 = f(a_1 \otimes c_{i_1}, \ldots, a_n \otimes c_{i_n}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(1)} \otimes c_{i_{\sigma(1)}}) \cdots (a_{\sigma(n)} \otimes c_{i_{\sigma(n)}}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}) \otimes (c_{i_{\sigma(1)}} \cdots c_{i_{\sigma(n)}}) \\ &= f(a_1, \ldots, a_n) \otimes c_{i_1} \cdots c_{i_n}. \end{aligned}$$

Logo, $f \in Id(A)$. Pelo **Teorema 1.4.2** segue que $Id(A \otimes C) \subseteq Id(A)$.

$(\supseteq)$ Se $\mathcal{B}_A$ e $\mathcal{B}_C$ são bases para A e C respectivamente, sabemos que $\mathcal{B} = \{a \otimes b \mid a \in \mathcal{B}_A \text{ e } b \in \mathcal{B}_C\}$ é base para $A \otimes C$. Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear em $Id(A)$. Se $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B}_A$ e $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{B}_C$, temos

$$f(a_1 \otimes c_1, \ldots, a_n \otimes c_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes f(c_1, \ldots, c_n) = 0 \otimes c_{j_1} \cdots c_{j_n} = 0.$$

Pela **Proposição 1.2.4**, temos $f \in Id(A \otimes C)$ e portanto, $Id(A) \subseteq Id(A \otimes C)$. □

O símbolo " $\oplus$ " denota no texto, a soma direta de álgebras e o símbolo " $\dot{+}$ " a soma direta de subespaços vetoriais.

Lema 1.4.4. *Sejam A e B álgebras sobre F. Então, $Id\,(A \oplus B) = Id\,(A) \cap Id\,(B)$.*

Demonstração. Seja $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear tal que $f \in Id\,(A) \cap Id\,(B)$. Para quaisquer $a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n \in A \oplus B$, em que $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $b_1, \ldots, b_n \in B$, temos que $f\,(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) = f\,(a_1, \ldots, a_n) + f\,(b_1, \ldots, b_n) = 0 + 0 = 0$, pois $A \oplus B$ é soma direta de álgebras e $f \in Id\,(A) \cap Id\,(B)$. Logo, $Id\,(A) \cap Id\,(B) \subseteq Id\,(A \oplus B)$.

$Id\,(A \oplus B) \subseteq Id\,(A) \cap Id\,(B)$, pois $A, B \subseteq A \oplus B$ e assim, $Id\,(A \oplus B) \subseteq Id\,(A)\,, Id\,(B)$. Portanto, concluímos a afirmação. □

Note ainda que se A, B são PI-álgebras tais que $A \cong B$, então $Id\,(A) = Id\,(B)$.

1.5 Anéis e Módulos

A maioria das demonstrações desta seção não fazem parte do objetivo principal do trabalho; assim, muitas dessas demonstracões serão omitidas. O leitor interessado pode consultar [14].

Definição 1.5.1. *Seja R um anel. Um conjunto $(M, +)$ com operação binária definida nele, chama-se* R-**módulo** (**módulo sobre** R) *à esquerda, se:*

1. *$(M, +)$ é grupo abeliano;*
2. *Para qualquer $m \in M$ e $r \in R$ tem-se $rm \in M$;*
3. *$(r_1 + r_2)\,m = r_1 m + r_2 m$, para quaisquer $m \in M, r_1, r_2 \in R$;*
4. *$r\,(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$, para quaisquer $m_1, m_2 \in M, r \in R$;*
5. *$(r_1 r_2)\,m = r_1\,(r_2 m)$, para quaisquer $m \in M, r_1, r_2 \in R$.*

A definição de R-módulo à direita é análogo, mas agora R age em M pelo lado direito.

Um R-módulo à esquerda M chama-se **unitário** se satisfaz $1_R m = m$, para todo $m \in M$ (se R é unitário).

Observe que se $R = F$ é um corpo, então um R-módulo é um espaço vetorial. Assim, uma álgebra é um F-módulo.

Note que todo anel (álgebra) R é um módulo sobre si mesmo. Chamaremos tal módulo de **módulo regular à esquerda** (à direita respectivamente).

Exemplo 1.5.1. *Seja $R = M_n\,(F)$ o anel de matrizes. Note que $M_1 = M_{n \times 1}\,(F)$ e $M_2 = M_{1 \times n}\,(F)$ são R-módulos à esquerda e à direita respectivamente.*

Definição 1.5.2. *Um subconjunto $N \leq M$ de um R-módulo M é um submódulo se N é um R-módulo com as operações induzidas de M.*

Consideraremos R-módulos à esquerda e omitiremos o nome à esquerda, mas tudo pode ser feito para R-módulos à direita.

Definição 1.5.3. *Seja R um anel unitário. Um R-módulo M chama-se semissimples se todo submódulo de M é um somando direto: para todo $N \leq M$, $\exists\, P \leq M:\ M = N \oplus P$.*

Definição 1.5.4. *Um R-módulo $M \neq (0)$ chama-se* **simples** *se não possui submódulos próprio.*

Note que todo módulo simples é semissimples.

Proposição 1.5.1. *Sejam R um anel e M um R-módulo. M é semissimples se, e somente se, M é soma direta de submódulos simples.*

Demonstração. Ver [14], Proposição 8.42. □

Definição 1.5.5. *Seja R um anel unitário. Diremos que R é semissimples se R é semissimples como R-módulo.*

Pela **Proposição 1.5.1**, se R é um anel semissimples, então R é uma soma direta finita de ideais à esquerda minimais, ou seja , $R = \oplus_{j=1}^{n} I_j$, em que I_j são ideais à esquerda minimais de R.

Proposição 1.5.2. *Seja R um anel unitário semissimples. Então, $R = B_1 \oplus \ldots \oplus B_t$, em que $B_1, \ldots, B_t$ são ideais minimais bilaterais de R.*

Demonstração. Ver [14], Lema 8.61. □

Proposição 1.5.3. *Seja R um anel unitário. Se R é anel semissimples, então todo R-módulo é semissimples.*

Demonstração. Ver [14], Corolário 8.4.3. □

Definição 1.5.6. *Uma álgebra A diz-se simples se não possui ideais bilaterais próprios e $A^2 \neq \{0\}$.*

Exemplo 1.5.2. *As álgebras $M_n(F)$ e $M_{k,l}(F)$ são simples, pois pelo* **Exemplo 1.1.15***, não possuem ideais bilaterais próprios.*

Toda álgebra simples é semissimples. Pela proposição anterior, qualquer módulo sobre $M_n(F)$ é semissimples, este resultado será usado no **Capítulo 5**.

Proposição 1.5.4. *[Teorema de Mascke] Sejam F um corpo de característica zero e G um grupo finito. Então, FG é semissimples.*

Demonstração. Ver [11], Teorema 1.9. □

O *Teorema de Mascke* será de grande importância no **Capítulo 3**, em que apresentaremos alguns resultados sobre a álgebra de grupo FS_n, pois como F é de característica zero, teremos que FS_n é semissimples, ou seja, é escrita como soma direta finita de ideais minimais bilaterais.

Capítulo 2

Polinômios Alternados e Simétricos

Neste capítulo, apresentaremos caracterizações e exemplos de dois polinômios que nos darão suporte para trabalhar com o polinômio tipo Amitsur-Capelli. Mostraremos também algumas identidades que são satisfeitas por álgebras de dimensão finita, principalmente as álgebras de matrizes.

2.1 Polinômios Alternados

Definição 2.1.1. *Seja* $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) \in F\langle X\rangle$*. Diremos que* f *é* **alternado** *em* $x_1, \ldots, x_n$ *se, para cada* $\sigma \in S_n$*, ocorre* $f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) = sgn(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$*, em que* $sgn(\sigma)$ *é o sinal da permutação* σ*.*

A proposição a seguir caracteriza os polinômios alternados.

Proposição 2.1.1. *Seja* $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) \in F\langle X\rangle$*. Então* f *é alternado em* $x_1, \ldots, x_n$ *se, e somente se,* $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) = \sum\limits_{\tau \in S_n} sgn(\tau)\, g\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}, y_1, \ldots, y_t\right)$ *para algum polinômio* $g \in F\langle X\rangle$*.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) = \sum_{\tau \in S_n} sgn(\tau)\, g\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}, y_1, \ldots, y_t\right),$$

para algum polinômio $g \in F\langle X\rangle$. Mostraremos que f é alternado. De fato, para qualquer $\sigma \in S_n$,

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) = \sum_{\tau \in S_n} sgn(\tau)\, g\left(x_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, x_{\sigma(\tau(n))}, y_1, \ldots, y_t\right),$$

consideraremos $\pi = \sigma\tau$, quando τ percorre S_n, teremos que π também percorre S_n. Assim,

$$\begin{aligned} f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) &= sgn\left(\sigma^{-1}\right) \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)\, g\left(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) \\ &= sgn(\sigma)\, f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t). \end{aligned}$$

Portanto, f é alternado em $x_1, \ldots, x_n$.

($\Rightarrow$) Reciprocamente, suponha que f seja alternado em $x_1, \ldots, x_n$, e consideremos o seguinte polinômio

$$g\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t\right) = \frac{1}{n!} f\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t\right).$$

Temos

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in S_n} sgn\left(\tau\right) g\left(x_{(\tau(1))}, \ldots, x_{(\tau(n))}, y_1, \ldots, y_t\right) &= \tfrac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} sgn\left(\tau\right)^2 f\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t\right) \\ &= f\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t\right). \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. □

Corolário 2.1.2. *Se $f\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t\right)$ é alternado em $x_1, \ldots, x_n$ então, quando substituirmos $x_i = x_j$, f se torna um polinômio nulo.*

Demonstração. Primeiro observe que, para qualquer transposição $(i\ j)$ de S_n, tem-se que o conjunto de permutações ímpares A'_n é igual a $(i\ j)A_n$, em que A_n é o grupo alternado. Além disso pode-se decompor S_n da seguinte forma, $S_n = A'_n \cup A_n$. Seja $f\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t\right)$ alternado em $x_1, \ldots, x_n$. Pela proposição anterior,

$$f\left(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t\right) = \sum_{\tau \in S_n} sgn\left(\tau\right) g\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(i)}, \ldots, x_{\tau(j)}, \ldots, x_{\tau(n)}, y_1, \ldots, y_t\right),$$

para algum polinômio $g \in F\langle X \rangle$. Assim,

$$\begin{aligned} f\left(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t\right) &= \sum_{\tau \in S_n} sgn\left(\tau\right) g\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_{\tau(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) \\ &= \sum_{\bar{\tau} \in A_n} sgn\left(\bar{\tau}\right) g\left(x_{\bar{\tau}(1)}, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_{\bar{\tau}(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) \\ &+ \sum_{\tau' \in A'_n} sgn\left(\tau'\right) g\left(x_{\tau'(1)}, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_{\tau'(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) \\ &= \sum_{\bar{\tau} \in A_n} sgn\left(\bar{\tau}\right) g\left(x_{\bar{\tau}(1)}, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_{\bar{\tau}(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) \\ &- \sum_{\bar{\tau} \in A_n} sgn\left(\bar{\tau}\right) g\left(x_{\bar{\tau}(1)}, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_{\bar{\tau}(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) \\ &\Rightarrow f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0. \end{aligned}$$

E segue o resultado. □

Observação 2.1.3. *A recíproca do* **Corolário 2.1.2** *é verdadeira se $f = f\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t\right)$ for linear em cada x_i, $i = 1, \ldots, n$.*

Observação 2.1.4. *Seja $f = f\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t\right)$ um polinômio linear em cada $x_1, \ldots, x_n$ e alternado nessas variáveis. Se $\alpha x_{i_1} \cdots x_{i_k} \cdots x_{i_t} \cdots x_{i_n}$ é um monômio em f, então o monômio $x_{i_1} \cdots x_{i_t} \cdots x_{i_k} \cdots x_{i_n}$*

aparece em f*, com coeficiente* $-\alpha$*. Assim, por um processo de indução, para qualquer* $\sigma \in S_n$ *o monômio* $x_{i_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_{\sigma(k)}} \cdots x_{i_{\sigma(t)}} \cdots x_{i_{\sigma(n)}}$ *aparece em* f *com coeficiente* $sgn\,(\sigma)\,\alpha$*.*

Definição 2.1.2. *O polinômio* $Cap_m\,(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_{m-1}) = \sum_{\sigma \in S_m} sgn(\sigma)\ x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} \cdots y_{m-1} x_{\sigma(m)}$ *é chamado o* **polinômio de Capelli** *de posto* m *ou o* m*-ésimo* **polinômio de Capelli**.

Consideraremos $\langle Cap_k^* \rangle_T$ o T-ideal gerado pelo polinômio de Capelli e por todos os polinômios obtidos de Cap_k ao substituir em cada conjunto de variáveis y_i igual a 1. Note que existem 2^{m-1} tais polinômios. Se A é unitária, então $\langle Cap_k^* \rangle_T = \langle Cap_k \rangle_T$.

Definição 2.1.3. *O polinômio* $St_m\,(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} sgn\,(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)}$ *é chamado* **polinômio standard** *de posto* m*.*

Exemplo 2.1.1. *Pela* **Proposição 2.1.1***, os polinômios* $Cap_m\,(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_{m-1})$ *e* $St_m\,(x_1, \ldots, x_m)$ *são alternados em* $x_1, \ldots, x_m$*.*

Para as duas proposições seguintes vamos supor que a álgebra livre $F\langle X \rangle$ seja unitária, isto é, vamos considerar o monômio vazio.

Proposição 2.1.5. *Se* $f \in F\langle X \rangle$ *é um polinômio alternado em* $x_1, \ldots, x_m$ *e linear em cada* $x_1, \ldots, x_m$*, então*

$$f = \sum_{w_0, \ldots, w_m} \alpha_{w_0, \ldots, w_m} w_0 Cap_m\,(x_1, \ldots, x_m; w_1, \ldots, w_{m-1})\, w_m$$

é uma combinação linear do polinômio de Capelli, em que $w_0, \ldots, w_m$ *são convenientes monômios em* $F\langle X \rangle$*.*

Demonstração. Seja $\beta w_0 x_{i_1} w_1 x_{i_2} \ldots w_{m-1} x_{i_m} w_m$ um monômio em f, em que $\beta \in F$ e $w_0, \ldots, w_m$ são adequados monômios em $F\langle X \rangle$ obtidos das variáveis restantes que aparecem em f, podendo ser até mesmo triviais. Pela **Observação 2.1.4**, para qualquer $\sigma \in S_m$ o monômio $w_0 x_{i_{\sigma(1)}} w_1 x_{i_{\sigma(2)}} \ldots w_{m-1} x_{i_{\sigma(m)}} w_m$ aparece em f com coeficiente $sgn\,(\sigma)\,\beta$. Então, $w_0 Cap_m\,(x_1, \ldots, x_m, w_1, \ldots, w_{m-1})\, w_m$ é um somando de f com coeficiente $\pm\beta$. Portanto, f é combinação linear de polinômios desta forma. □

O leitor deve ter percebido que, pela proposição anterior, se f é alternado em $x_1, \ldots, x_k$ e linear em cada uma dessas variáveis, então $f \in \langle Cap_k^* \rangle_T$, mesmo a álgebra não sendo unitária. Note também que $St_k \in \langle Cap_k^* \rangle_T$. Mas mostraremos no capítulo seguinte que se A satisfaz o polinômio standard não necessariamente satisfaz o polinômio de Capelli do mesmo posto.

Proposição 2.1.6. *Seja* $f\,(x_1, \ldots, x_m) \in F\langle X \rangle$*.*

1. *Se* $f\,(x_1, \ldots, x_m)$ *é um polinômio alternado em* $x_1, \ldots, x_m$ *e multilinear de grau* m*, então*

$$f = \alpha St_m\,(x_1, \ldots, x_m)\,,$$

para algum $\alpha \in F$*.*

2.

$$\begin{aligned} St_{m+1}(x_1,\ldots,x_{m+1}) &= \sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i+1}x_iSt_m(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{m+1}),\ \textit{em que} \\ St_m(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{m+1}) &= St_m(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{m+1}). \end{aligned}$$

Portanto, se St_m é uma identidade para uma álgebra A, então St_{m+1} também é uma identidade para A.

Demonstração. O item 1 é um caso particular da proposição anterior, em que $w_i's$ são triviais.

Primeiro observe que podemos decompor S_{m+1} por $S_1' \cup S_2' \cup \ldots \cup S_{m+1}'$, em que $S_i' = \{\tau(1\ i\ i-1\ \ldots\ 2) \mid \tau \in S_m(1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,m+1) = S_m^i\} \subseteq S_{m+1},\ \forall\ i=1,\ldots,m+1$. Daí,

$$\begin{aligned} St_{m+1}(x_1,\ldots,x_{m+1}) &= \sum_{\sigma\in S_{m+1}} sgn(\sigma)\,x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(m+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{\sigma_i\in S_i'} sgn(\sigma_i)\,x_{\sigma_i(1)}\cdots x_{\sigma_i(m+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} sgn(\pi_i)\,x_i \sum_{\tau_i\in S_m^i} sgn(\tau_i)\,x_{\tau_i(1)}\cdots x_{\tau_i(i-1)}x_{\tau_i(i+1)}\cdots x_{\tau_i(m+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i+1}x_iSt_m(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{m+1}), \end{aligned}$$

em que $\pi_i = (1\ i\ i-1\ \ldots\ 2)$ e $\sigma_i = \tau_i\pi_i$. □

Proposição 2.1.7. *Sejam $f(x_1,\ldots,x_{n+1},y_1,\ldots,y_t)$ um polinômio alternado em $x_1,\ldots,x_{n+1}$, linear em cada $x_1,\ldots,x_{n+1}$. Se A é uma álgebra de $dim_F A = n$, então A satisfaz o polinômio f.*

Demonstração. Sejam $C = \{a_1,\ldots,a_{n+1}\} \subseteq A$ um conjunto qualquer sobre F, e $b_1\ldots b_t \in A$. Como C é linearmente dependente sobre F, suponhamos que $a_1 = \sum_{i=2}^{n+1}\alpha_i a_i$, em que $\alpha_i \in F$. Assim,

$$f\left(\sum_{i=2}^{n+1}\alpha_i a_i, a_2,\ldots,a_{n+1},b_1,\ldots,b_t\right) = \sum_{i=2}^{n+1}\alpha_i f(a_i,a_2\ldots a_{n+1},b_1,\ldots,b_t) = \sum_{i=2}^{n+1} 0 = 0,$$

a primeira igualdade segue de f ser multilinear em $x_1,\ldots,x_{n+1}$, e a segunda igualdade segue de f ser alternado em $x_1,\ldots,x_{n+1}$. Logo, A satistaz f. □

2.2 Polinômios Simétricos

Definição 2.2.1. *Seja $f = f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_t) \in F\langle X\rangle$. Diremos que f é* **simétrico** *em $x_1,\ldots,x_n$ se, para cada $\sigma \in S_n$, ocorre $f\left(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)},y_1,\ldots,y_t\right) = f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_t)$.*

O seguinte resultado caracteriza todos os polinômios simétricos.

Proposição 2.2.1. *Seja* $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) \in F\langle X\rangle$*. Então* f *é simétrico em* $x_1, \ldots, x_n$ *se, e somente se,* $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) = \sum_{\tau \in S_n} g\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}, y_1, \ldots, y_t\right)$ *para algum polinômio* $g \in F\langle X\rangle$*.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) = \sum_{\tau \in S_n} g\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}, y_1, \ldots, y_t\right),$$

para algum polinômio $g \in F\langle X\rangle$. Mostraremos que f é simétrico. De fato, $\forall\ \sigma \in S_n$,

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) = \sum_{\tau \in S_n} g\left(x_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, x_{\sigma(\tau(n))}, y_1, \ldots, y_t\right),$$

consideraremos $\pi = \sigma\tau$, quando τ percorre S_n, teremos que π também percorre S_n. Assim,

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) = \sum_{\pi \in S_n} g\left(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t).$$

Portanto, f é simétrico em $x_1, \ldots, x_n$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que f seja simétrico em $x_1, \ldots, x_n$. Consideremos

$$g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) = \frac{1}{n!} f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t).$$

Temos

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in S_n} g\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) &= \tfrac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} f\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}, y_1, \ldots, y_t\right) \\ &= f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t). \end{aligned}$$

Concluímos o resultado. □

Exemplo 2.2.1. *Pela* **Proposição 2.2.1***, o polinômio* $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ *é um polinômio multilinear e simétrico em* $x_1, \ldots, x_n$*.*

2.3 Exemplos de Identidades Matriciais

Exemplo 2.3.1. *A álgebra de matrizes* $M_n(F)$ *satisfaz* Cap_{n^2+1} *e* St_{n^2+1}*.*

Demonstração. É consequência da **Proposição 2.1.7**, pois $dim M_n(F) = n^2$. □

Proposição 2.3.1. Cap_{n^2} *não é uma identidade para* $M_n(F)$*, mas é satisfeito por qualquer subálgebra própria de* $M_n(F)$*.*

Demonstração. Considere a seguinte substituição:

$$x_1 = e_{1,1}, \ldots, x_n = e_{1,n}, x_{n+1} = e_{2,1}, \ldots, x_{2n} = e_{2,n}, \ldots, x_{n^2} = e_{n,n},$$

todas distintas. Como y_i está entre as variáveis x_i e x_{i+1}, se $x_i = e_{l,k}$ e $x_{i+1} = e_{t,v}$, então considere $y_i = e_{k,t}$. Observe que, para qualquer $\sigma \in S_n$ e $\sigma \neq \epsilon$, em que ϵ é a identidade de S_n, temos pelo menos um produto do tipo $e_{i,j}e_{t,l} = 0, \quad t \neq j$. Assim, o único termo não nulo será o

$$e_{1,1}e_{1,1}e_{1,2}e_{2,1} \cdots e_{i,k}e_{k,i}e_{i,k+1} \cdots e_{n,n} = e_{1,n}.$$

Daí,

$$Cap_{n^2}(e_{1,1}, e_{1,2}, \ldots, e_{n,n}, e_{1,1}, e_{2,1}, \ldots, e_{n,1}) = e_{1,n}.$$

Logo, $M_n(F)$ não é uma identidade para Cap_{n^2}. Por outro lado, qualquer subálgebra própria de $M_n(F)$ possui dimensão menor que n^2. Assim, pela **Proposição 2.1.7**, qualquer subálgebra própria de $M_n(F)$ satisfaz a identidade de Capelli de posto n^2. □

Proposição 2.3.2. *$M_k(F)$ não satisfaz qualquer identidade de grau $< 2k$.*

Demonstração. Seja f um polinômio de grau menor que $2k$. Como a caracteristica de F é zero, suponha f multilinear e também $f = f(x_1, \ldots, x_{2k-1})$; assim, é suficiente fazer as substituições apenas nos elementos da base de $M_k(F)$. Seja

$$f(x_1, \ldots, x_{2k-1}) = \sum_{\sigma \in S_{2k-1}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(2k-1)}$$

com $\alpha_1 \neq 0$. Fazendo a seguinte substituição matricial

$$x_1 = e_{11}, \ldots, x_{2t} = e_{t,t+1}, \; x_{2t+1} = e_{t+1,t+1}, \; t = 1, \ldots, k-1.$$

Substituindo em f, obtem-se

$$f(e_{11}, e_{12}, e_{22}, \ldots, e_{k-1,k}e_{kk}) = \alpha_1 e_{1k} \neq 0.$$

Portanto, f não é uma identidade para $M_k(F)$. □

Teorema 2.3.3. *[Amitsur-Levitzki] A álgebra $M_k(F)$ satisfaz a identidade standard St_{2k}.*

Demonstração. Faremos a demonstração no **Capítulo 4**. □

Pela **Proposição 2.3.1**, $M_k(F)$ não satisfaz a identidade de Capelli de posto $2k$. Portanto, o polinômio de Capelli e o polinômio standard do mesmo posto não são PI-equivalentes.

Exemplo 2.3.2. *Seja*

$$UT(d_1, \ldots, d_m) = \begin{pmatrix} M_{d_1}(F) & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ 0 & M_{d_2}(F) & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{d_m}(F) \end{pmatrix},$$

em que

$$B_{ij} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d_j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d_j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{d_i1} & a_{d_i2} & \cdots & a_{d_id_j} \end{pmatrix} \right\},$$

em que $a_{kt} \in F$ *para qualquer* $k = 1, \ldots, d_i,\ t = 1, \ldots, d_j$ *e* $i < j$. *A álgebra* $UT(d_1, \ldots, d_m)$ *é uma subálgebra de* $M_d(F)$, *em que* $d = d_1 + \ldots + d_m$. *Observe ainda que*

$$B = B_{12} \dot{+} \ldots \dot{+} B_{1m} \dot{+} B_{23} \dot{+} \ldots \dot{+} B_{2m} \dot{+} \ldots \dot{+} B_{(m-1)m}$$

é um ideal bilateral e nilpotente de $UT(d_1, \ldots, d_m)$.

Lema 2.3.4. *A álgebra de matriz triangular superior* $A = UT(d_1, \ldots, d_m)$ *satisfaz a identidade* $St_k \equiv 0 \iff k \geq 2(d_1 + \ldots + d_m)$

Demonstração. Pelo *Teorema de Amitsur-Levitzki*, A satisfaz a identidade St_{2q}, em que $q = d_1 + \ldots + d_m$, pois A é subálgebra de $M_q(F)$. Mostraremos que A não satisfaz a identidade St_{2q-1}. De fato, A contém as matrizes elementares, $e_{1,1}, e_{1,2}, e_{2,2}, e_{2,3}, \ldots, e_{q-1,q}, e_{q,q}$ de $M_q(F)$. Assim, ao substituirmos, obtemos $St_{2q-1}(e_{1,1}, e_{1,2}, e_{2,2}, e_{2,3}, e_{3,3}, \ldots, e_{q-1,q}, e_{q,q}) = e_{1,q} \neq 0$. Portanto, A não satisfaz identidade St_p para $p < 2q$. $\square$

Capítulo 3

Representações de S_n e as Tabelas de Young

Neste capítulo, falaremos rapidamente sobre a Teoria de representações de grupos finitos, depois nos restringiremos ao grupo simétrico. Apresentaremos, um pouco, a teoria desenvolvida por Young através dos diagramas. Já vista as representações de S_n, prosseguiremos definindo o polinômio tipo Amitsur-Capelli e caracterizando as álgebras que satisfazem tal polinômio. As demonstrações omitidas neste capítulo podem ser encontradas em [7], [11] e [12]. Iremos considerar F, de característica zero e algebricamente fechado.

3.1 Representações de Grupos Finitos

Consideraremos nesta seção apenas álgebras unitárias e módulos à esquerda.

Definição 3.1.1. *Sejam A uma F-álgebra e V um F-espaço vetorial. Um homomorfismo de F-álgebras $\varphi\colon A \longrightarrow End_F(V)$ tal que $\varphi(1_A) = 1_{End_F(V)}$ é chamado de uma* **representação** *de A sobre F com espaço de representação V.*

Se $dim_F(V) = n$, n diz-se o **grau da representação** φ.

Definição 3.1.2. *Sejam G um grupo finito, V um F-espaço vetorial e denote por $GL(V)$ o grupo das transformações lineares invertíveis. Um homomorfismo de grupos $f\colon G \longrightarrow GL(V)$ é chamado de uma* **representação** *de G com espaço de representação V.*

Se $dim_F(V) = n$, n diz-se o **grau da representação** f.

Definição 3.1.3. *Seja A uma álgebra sobre F. Duas representações $\varphi\colon A \longrightarrow End_F(V)$ e $\phi\colon A \longrightarrow End_F(W)$, em que W, V são F-espaços vetoriais, chamam-se* **equivalentes***, se V e W são isomorfos como A-módulos.*

Definição 3.1.4. *Seja G um grupo finito. Duas representações $f\colon\ G \longrightarrow GL(V)$ e $h\colon G \longrightarrow GL(W)$ em que W, V são F-espaços vetoriais dizem-se* **equivalentes***, se V e W são isomorfos como FG-módulos.*

Seja $f\colon G \longrightarrow GL(V)$ uma representação de G. Podemos estender f para FG pondo

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & FG & \longrightarrow & End_F(V) \\ & \sum\limits_{g\in G} \alpha_g g & \longmapsto & \sum\limits_{g\in G} \alpha_g f(g) \end{array}.$$

Note que φ é uma representação de FG.

Reciprocamente, se $\varphi\colon FG \longrightarrow End_F(V)$ é representação de FG, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & g & \longmapsto & \varphi(1_F g) \end{array},$$

que é uma representação do grupo G.

Seja M um FG-módulo. Podemos ver M como um F-módulo, ou seja, um F-espaço vetorial. De fato, primeiro note que, para cada $m \in M$ e $\lambda \in F$, temos que $\lambda m = (\lambda 1_G)\, m \in M$. Agora, para cada $\epsilon \in FG$, definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\epsilon: & M & \longrightarrow & M \\ & m & \longmapsto & \epsilon m \end{array},$$

em que $\varphi_\epsilon \in End_F(M)$. Assim, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & FG & \longrightarrow & End_F(M) \\ & \epsilon & \longmapsto & \varphi_\epsilon \end{array},$$

é um homomorfismo de F-álgebras, ou seja, φ é uma representação de FG com espaço de representação M.

Isto nos diz que cada FG-módulo M dá origem a uma representação de FG. Por outro lado, se $\phi : FG \longrightarrow End_F(M)$ é uma representação de FG com espaço de representação M, podemos dar a M uma estrutura de FG-módulo, definindo para quaisquer $m \in M$, $\epsilon \in FG$: $\epsilon m := (\phi(\epsilon))(m)$.

Definição 3.1.5. *Uma representação f do grupo finito G com espaço de representação M diz-se* **completamente redutível** *se M é FG-módulo semissimples. E chama-se* **irredutível** *se M é simples.*

Considere V um FG-módulo de dimensão finita sobre F. Sabe-se que $GL(V)$ é isomorfo ao grupo de matrizes não singulares $n \times n$ sobre F. Isso induz a seguinte definição.

Definição 3.1.6. *Sejam G um grupo, V um F-espaço vetorial de dimensão n e $\phi\colon G \longrightarrow GL(V)$ uma representação de G. A função definida por*

$$\begin{array}{rccc} \chi: & G & \longrightarrow & F \\ & g & \longmapsto & tr(\phi(g)) \end{array}$$

é chamada de **caracter** *da representação ϕ e n é chamado de* **grau** *do caracter χ.*

Recorde que o traço de matriz tem as seguintes propriedades: $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$, $tr(AB) = tr(BA)$ e $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)\,,\ \forall \lambda \in F$.

Vamos mostrar que χ não depende da escolha da base de V. Sejam $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ duas bases para V.

Sejam $\varphi \colon G \longrightarrow GL(V)$ uma representação e A, Y as matrizes associadas ao operador linear $\varphi(g)$ na base B e na base C respectivamente. Recordemos que existe uma única matriz de passagem P tal que $Y = P^{-1}AP$. Assim, $tr(A) = tr(PYP^{-1}) = tr(P^{-1}PY) = tr(Y)$. Logo, caracter não depende da escolha da base de V.

Diremos que χ é um **caracter irredutível** se ϕ for uma representação irredutível.

Definição 3.1.7. *Uma* **função de classe** *sobre um grupo G é uma função $f \colon G \longrightarrow F$ que é constante sobre as classes de conjugação: se $g \sim g_1 \Rightarrow f(g) = f(g_1)$. Denotaremos por $\mathcal{CF}(G)$ o conjunto das funções de classe de G.*

Como vimos acima, os caracteres são invariantes por conjugação. Logo, pertencem a $\mathcal{CF}(G)$.

Pelo *Teorema de Mascke*, FG é semissimples, isto é, $FG = \oplus_i FGe_i$, em que e_i é um idempotente minimal central ortogonal, que gera um ideal bilateral minimal. O seguinte teorema nos permite determinar e_i.

Proposição 3.1.1. *O idempotente minimal central ortogonal é dado por:*

$$e_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(1_G)\, \chi_i(g^{-1})\, g,$$

em que χ_i é um caracter irredutível.

Demonstração. Ver [11], Teorema 2.12. □

Proposição 3.1.2. *[Primeira relação de ortogonalidade] Sejam $\chi_i, \chi_j \in Irr(G)$.*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\, \chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij},$$

em que $Irr(G)$ são os caracteres irredutíveis do grupo G.

Demonstração. Ver [11], Corolário 2.14. □

O que sugere a seguinte definição.

Definição 3.1.8. *Sejam $\phi, \varphi \in \mathcal{CF}(G)$. Definimos o* **produto interno***:*

$$(\phi, \varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\, \varphi(g^{-1}).$$

Essa definição, juntamente com a **Proposição 3.1.2**, nos diz que se dois caracteres irredutíveis são ortogonais, então o produto interno deles é nulo.

Proposição 3.1.3. *Suponha que F seja um corpo algebricamente fechado e de característica zero e $M_1, \ldots, M_k$ é lista completa de representações irredutíveis de G não equivalente com caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_k$, respectivamente. Seja $\phi : G \longrightarrow GL(M)$ uma representação de G e escreva $M \cong m_1 M_1 \oplus \ldots \oplus m_k M_k$, com $m_i \geq 0$. Então:*

1. $\chi_\phi = \sum_{i=1}^{k} m_i \chi_i$;
2. $(\chi_\phi, \chi_i) = m_i \ \forall \ i$;
3. $(\chi_\phi, \chi_\phi) = \sum_{i=1}^{k} m_i^2$;
4. χ_ϕ *é irredutível se, e somente se,* $(\chi_\phi, \chi_\phi) = 1$;
5. *seja* ϕ' *outra representação de* G*, então* ϕ *é equivalente a* ϕ' *se, e somenente se,* $\chi_\phi = \chi_{\phi'}$;
6. $|Irr(G)|$ *é igual ao número de classes de conjugação do grupo* G*, em que* $Irr(G)$ *são os caracteres irredutíveis de* G;
7. *seja* G' *o subgrupo derivado do grupo* G*. O número de caracteres lineares de* G*, isto é, caracteres de grau 1, é igual a* $|G : G'|$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [11]. □

Exemplo 3.1.1. *Seja $G = S_n$. Recorde que $G' = A_n$; assim, $|S_n : A_n| = 2$. Considere os seguintes homomorfismos de grupos*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & S_n & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}) \\ & \sigma & \longmapsto & sgn(\sigma)\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \gamma : & S_n & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}) \\ & \tau & \longmapsto & 1 \end{array} .$$

Ambas são representações lineares. Logo, pela **Proposição 3.1.3**, *são as únicas.*

Exemplo 3.1.2. *Pelo exemplo anterior, $\chi_\varphi(\sigma) = sgn(\sigma)\,1_{\mathbb{C}}$ e $\chi_\gamma(\sigma) = 1_{\mathbb{C}}$, $\sigma \in S_n$ são os caracteres correspondentes a φ e γ respectivamente. Além disso, são os únicos caracteres lineares de S_n.*

3.2 O Grupo Simétrico S_n e as Tabelas de Young.

Os conceitos apresentados nesta seção podem ser vistos em [7] (na Seção 2.2 e Seção 2.3).

Definição 3.2.1. *Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma sequência de inteiros não-negativos, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, é uma* **partição de** *n se, e somente se, satisfaz:*

1. $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \ \forall i \geq 1$;
2. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

Denotamos por $\lambda \vdash n$ e $h(\lambda) = k$.

Se $k = 1$, então $\lambda_1 = n$ e denotaremos a partição $\lambda = (n)$. Se $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = d$, denotaremos $\lambda = (d^k)$, em que $n = kd$.

Denotaremos por $P(n)$ o conjunto de partições de n, e por $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_r\}$ o conjunto das classes de conjugação de S_n. Recordemos que dois elementos de S_n estão na mesma classe de conjugação se, e somente se, eles possuem o mesmo tipo cíclico.

Lema 3.2.1. *Há uma bijeção entre $\mathcal{C}$ e $P(n)$.*

Demonstração. Seja $\pi \in S_n$. Recorde que qualquer elemento de S_n pode ser representado por produto de ciclos disjuntos de S_n, isto é , $\pi = \left(i_1^1 \ldots i_{l_1}^1\right)\left(i_1^2 \ldots i_{l_2}^2\right)\ldots\left(i_1^t \ldots i_{l_t}^t\right)$, em que i_v^j são todos números naturais entre $1, \ldots, n$, distintos. A decomposição é única a menos de ordem dos fatores. Vamos pedir que o comprimento de cada ciclo obedeça $l_k \geq l_{k+1},\ 1 \leq k \leq t-1$. Dessa forma, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{C} & \longrightarrow & P(n) \\ & \pi_j & \longmapsto & (l_1, \ldots, l_t) \end{array},$$

em que $\pi_j = \left(i_1^1\ \ldots\ i_{l_1}^1\right)\left(i_1^2\ \ldots\ i_{l_2}^2\right)\ldots\left(i_1^t\ \ldots\ i_{l_t}^t\right),\ 1 \leq j \leq r$ é representante da classe de conjugação $\mathcal{C}_j$ tal que satisfaça $l_k \geq l_{k+1},\ 1 \leq k \leq t-1$. Se $\sum_{1}^{t} l_i < n$, então completamos π_j com ciclos de comprimento um, isto é, $\pi_j = \left(i_1^1\ \ldots\ i_{l_1}^1\right)\left(i_1^2\ \ldots\ i_{l_2}^2\right)\ldots\left(i_1^t\ \ldots\ i_{l_t}^t\right)(s_1)\ldots(s_v),\ s_u \neq i_z$, até obter $\sum_{i=1}^{t} l_i + v = n$, caso contrário, deixe π_j da forma inicial.

Como dois elementos de S_n que estão em uma mesma classe de conjugação possuem o mesmo tipo cíclico, temos que f está bem definida. Vamos mostrar que f é bijeção. Sejam α e β os respectivos representantes das classes de conjugação $\mathcal{C}_i$ e $\mathcal{C}_j$. Suponha que

$$f(\alpha) = f(\beta) = (l_1, \ldots, l_r).$$

Isso significa que α e β tem o mesmo tipo cíclico, mas duas partições que tem o mesmo tipo cíclico são conjugadas, isto é, pertencem à mesma classe de conjugação; assim, $j = i$. Logo, f é injetiva.

Vamos mostrar que f é sobrejetiva. Seja $\lambda = (l_1, \ldots, l_r) \in P(n)$, considere

$$\pi = (1\ 2\ \ldots\ l_1)(l_1 + 1 \ldots l_1 + l_2)\ldots(l_1 + l_2 + \ldots + l_{r-1} + 1 \ldots l_1 + \ldots + l_r) \in S_n.$$

Assim, $f(\pi) = \lambda$. Logo, f é sobrejetiva. Portanto, f é bijetiva. □

Recorde, pela teoria de representações de grupos finitos, que o número de caracteres irredutíveis de um grupo é a ordem do conjunto de classes de conjugação desse grupo. Como em S_n o número de classes de conjugação é igual ao número de partições de n, temos, por consequência, que existe uma correspondência bijetiva entre os S_n-caracter irredutíveis e as partições de n.

Denotaremos por χ_λ o S_n-caracter irredutível correspondente à partição $\lambda \vdash n$ e por $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ o seu grau.

Lema 3.2.2. *$e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$ é um quase idempotente central da álgebra FS_n.*

Demonstração. Seja $e = \frac{d_\lambda}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma^{-1})\sigma = \frac{d_\lambda}{n!} e_\lambda$ o idempotente ortogonal da **Proposição 3.1.1**, em que d_λ é o grau do caracter irredutível χ_λ associado à partição $\lambda \vdash n$. Note que $\chi_\lambda(\sigma^{-1}) = \chi_\lambda(\sigma)$, para todo $\sigma \in S_n$ e $\lambda \vdash n$, pois σ e σ^{-1} são conjugados em S_n. Então

$$e^2 = e \Rightarrow \left(\frac{d_\lambda}{n!}\right)^2 e_\lambda^2 = \frac{d_\lambda}{n!} e_\lambda \Rightarrow \frac{d_\lambda}{n!} e_\lambda^2 = e_\lambda \Rightarrow e_\lambda^2 = \frac{n!}{d_\lambda} e_\lambda.$$

Portanto, e_λ é um quase idempotente.

Agora mostraremos que é central. É suficiente verificarmos que e_λ comuta com os elementos da base de FS_n. Seja $\pi \in S_n$, então

$$\begin{aligned} \pi e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \pi \chi_\lambda(\sigma)\sigma = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\pi\sigma\pi^{-1}\pi &= \sum_{\tau \in S_n} \chi_\lambda(\pi^{-1}\tau\pi)\tau\pi \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \chi_\lambda(\tau)\tau\pi = e_\lambda \pi. \end{aligned}$$

Portanto, e_λ é quase idempotente central. $\square$

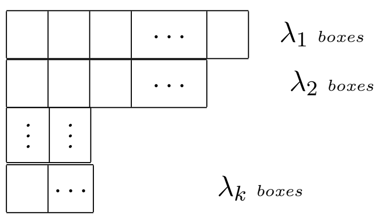
Proposição 3.2.3. *[[7], Proposição 2.2.2.] Sejam F um corpo de característica zero e $n \geq 1$. Então*

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(F),$$

em que $I_\lambda = e_\lambda FS_n \cong M_{d_\lambda}(F)$ é ideal minimal bilateral de FS_n e $e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$ é um escalar multiplicado pela unidade de I_λ.

Definição 3.2.2. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$. O* **diagrama de Young** *associado a λ é o subconjunto finito de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definido como $D_\lambda = \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, \lambda_i\}$. O diagrama de Young associado a λ, é constituído de n boxes distribuídos de modo que se tenha k linhas de boxes dispostos lado a lado, os primeiros boxes à esquerda de cada linha sejam colocados um abaixo do outro para cada $i = 1, \ldots, k$ e o número de boxes da i-ésima linha seja λ_i.*

$D_\lambda =$



Para cada partição λ, denotaremos por $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ a **partição conjugada** de λ tal que $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s$ são os comprimentos das colunas de D_λ. Logo, $D_{\lambda'}$ é obtido de D_λ através de reflexão de D_λ

em relação à diagonal principal.

Exemplo 3.2.1. *Se $\lambda = (2,2,1)$, então $\lambda' = (3,2)$ e $D_{\lambda'}$ é:*

$$D_{\lambda'} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}.$$

Definição 3.2.3. *Seja $\lambda \vdash n$. Uma* **tabela de Young** *T_λ do diagrama D_λ é um preenchimento dos boxes de D_λ com inteiros $1, 2, \ldots, n$. Diremos também que T_λ é uma tabela de tipo λ.*

Note que existem $n!$ tabelas distintas do tipo λ.

Definição 3.2.4. *Uma tabela T_λ do tipo λ é* **standard** *se os inteiros em cada linha e em cada coluna de T_λ crescem da esquerda para direita e de cima para baixo, respectivamente.*

Exemplo 3.2.2. *Seja $\lambda = (3,2,1,1,1)$. A seguinte tabela é standard.*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 8 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 3 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 5 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 6 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

O seguinte teorema mostra uma relação entre as tabelas standard e o grau dos S_n-caracteres irredutíveis.

Teorema 3.2.4. *[[7], Teorema 2.2.6] Seja $\lambda \vdash n$. O número de tabelas standard do tipo λ é igual ao grau do caracter irredutível correspondente a λ, χ_λ.*

Dado um diagrama D_λ, $\lambda \vdash n$, identificaremos um **box** de D_λ como o correspondente ponto (i,j). Por exemplo, o segundo box da primeira coluna tem coordenada $(2,1)$.

Dada qualquer tabela T_λ do tipo $\lambda \vdash n$, denotaremos $T_\lambda = D_\lambda\,(a_{ij})$, em que a_{ij} é o inteiro no box (i,j). Então,

Definição 3.2.5. *O* **estabilizador-linha** *de T_λ é*

$$R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}\left(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\lambda_1}\right) \times \ldots \times S_{\lambda_k}\left(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{k\lambda_k}\right),$$

em que $S_{\lambda_i}\left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\lambda_i}\right)$ denota o grupo simétrico que age nos inteiros $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\lambda_i}$. Logo, R_{T_λ} é o subgrupo de S_n constituído de todas as permutações que deixa invariante as linhas de T_λ.

Definição 3.2.6. *O* **estabilizador-coluna** *de T_λ é*

$$C_{T_\lambda} = S_{\lambda'_1}\left(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{\lambda'_1 1}\right) \times \ldots \times S_{\lambda'_s}\left(a_{1\lambda_1}, a_{2\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda'_s \lambda_1}\right),$$

em que $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de λ. C_{T_λ} é o subgrupo de S_n constituído de todas as permutações que deixa invariante as colunas de T_λ.

Exemplo 3.2.3. *Para as seguintes tabelas standard*

$$T_{\lambda_1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad e \qquad T_{\lambda_2} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Obtemos os respectivos estabilizadores de colunas e linhas:

$$\begin{array}{lll} C_{T_{\lambda_1}} = \{(1\ 3)(2), (1)(3)(2)\} & e & R_{T_{\lambda_1}} = \{(1\ 2)(3), (1)(2)(3)\}; \\ C_{T_{\lambda_2}} = \{(1\ 2)(3), (1)(2)(3)\} & e & R_{T_{\lambda_2}} = \{(1\ 3)(2), (1)(3)(2)\}. \end{array}$$

Definição 3.2.7. *Para uma dada tabela T_λ, definimos o* **quase idempotente** *correspondente a $\lambda \vdash n$ por*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (sgn\tau)\, \sigma\tau.$$

Lema 3.2.5. $e_{T_\lambda}^2 = \gamma e_{T_\lambda}$*, em que* $\gamma = \frac{d_\lambda}{n!}$.

Demonstração. Ver [12], página 106. □

Seja $\pi \in R_{T_\lambda}$, então

$$\pi e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (sgn\tau)\, \pi\sigma\tau = \sum_{\sigma' \in R_{T_\lambda}} \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (sgn\tau)\, \sigma'\tau = e_{T_\lambda}.$$

Isso significa que e_{T_λ} é simétrico em respeito a cada conjunto de índices correspondentes às linhas de T_λ.

Similarmente, para cada $\pi \in C_{T_\lambda}$, obtemos que

$$\pi \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} sgn\tau\ \tau e_{T_\lambda} = sgn\pi \sum_{\tau' \in C_{T_\lambda}} sgn\tau'\ \tau' e_{T_\lambda},$$

ou seja, $\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} sgn\tau\ \tau e_{T_\lambda}$ é alternado em respeito a cada conjunto de índices correspondentes às colunas de T_λ.

Exemplo 3.2.4. *No exemplo anterior temos,*

$$e_{T_{\lambda_1}} = \epsilon + (1\ 2) - (1\ 3) - (1\ 3\ 2) \quad e \quad e_{T_{\lambda_2}} = \epsilon + (1\ 3) - (1\ 2) - (1\ 2\ 3),$$

em que ϵ é a identidade de S_3.

Sejam $\lambda \vdash n$, $\pi \in S_n$. A ação de S_n na tabela $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$ é a seguinte: $\pi T_\lambda = D_\lambda(\pi(a_{ij}))$.

Definição 3.2.8. *Sejam T_λ e T_λ^* tabelas de Young do mesmo tipo λ. Diremos que T_λ e T_λ^* são* **linhas equivalentes** *se, e somente se, existe $\pi \in R_{T_\lambda}$ tal que $T_\lambda^* = \pi T_\lambda$, e denotaremos por $T_\lambda \sim T_\lambda^*$. De forma similar, diremos que T_λ e T_λ^* são* **colunas equivalentes** *se, e somente se, existe $\tau \in C_{T_\lambda}$ tal que $T_\lambda^* = \tau T_\lambda$.*

Exemplo 3.2.5. *Considere a seguinte tabela*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

As tabelas:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

são linhas e coluna equivalentes a T_λ respectivamente.

Denotaremos por $\{T_\lambda\}$ o conjunto de todas as tabelas linhas equivalentes a T_λ do tipo $\lambda \vdash n$.

Exemplo 3.2.6. *Considere a seguinte tabela de Young associada à partição $\lambda = (2, 2)$*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

O conjunto de todas as tabelas linhas equivalentes a T_λ é:

$$\{T_\lambda\} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array} \right\}.$$

Lema 3.2.6. *Seja T_λ uma tabela do tipo $\lambda \vdash n$. Então, para todo $\sigma \in S_n$, temos:*

1. $R_{\sigma T_\lambda} = \sigma R_{T_\lambda} \sigma^{-1}$;
2. $C_{\sigma T_\lambda} = \sigma C_{T_\lambda} \sigma^{-1}$;
3. $e_{\sigma T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda} \sigma^{-1}$.

Demonstração. Faremos a demonstração do item *1*. A demonstração do item *2* é similar ao item *1* e o item *3* é consequência dos itens *1* e *2*.

Sejam $\{T_\lambda\}$ o conjunto de todos as tabelas linhas equivalentes a T_λ do tipo $\lambda \vdash n$, e $\pi \in S_n$. Assim,

$$\begin{aligned} \pi \in R_{\sigma T_\lambda} \iff \pi\{\sigma T_\lambda\} = \{\sigma T_\lambda\} \iff \pi\sigma\{T_\lambda\} = \sigma\{T_\lambda\} \iff \sigma^{-1}\pi\sigma\{T_\lambda\} = \{T_\lambda\} &\iff \sigma^{-1}\pi\sigma \in R_{T_\lambda} \\ &\iff \pi \in \sigma R_{T_\lambda}\sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, concluímos a afirmação. □

O algoritmo chamado de **regra de Littlewood-Richardson** mostra como obter o diagrama da partição $\gamma = \lambda \widehat{\otimes} \mu$, em que $\widehat{\otimes}$ é o produto de partições chamado de produto externo, $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash m$ e $\gamma \vdash n + m$. O diagrama dessa operação é construído a partir dos diagramas correspondentes a λ e μ.

O algoritmo para determinar a decomposição da regra de Littlewood-Richardson é o seguinte: Sejam $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$. Considere $T_\mu = D_\mu(a_{ij})$ em que os $a'_{ij}s$ são símbolos. Então:

1. Adicione para D_λ todos os boxes com os símbolos $a'_{1j}s$. Após a adição, nenhuma linha da nova tabela pode ter mais boxes que a linha anterior.

2. Em seguida, adicione todos os boxes com os símbolos $a'_{2j}s$, de acordo com a mesma regra, e assim por diante, até todos os boxes com os símbolos serem adicionados.

3. Esses acréscimos devem ser tais que para todo i, se $y < j$, então a_{iy} vai em uma coluna posterior à de a_{ij}, e para todo j, se $x < i$, então a_{xj} vai em uma linha anterior à de a_{ij}.

Exemplo 3.2.7. *Sejam $\lambda = (3,2)\,,\ \mu = (2,1)$ e*

$$T_\mu = \begin{ytableau} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} \end{ytableau},$$

vamos determinar o produto dessas partições através do algoritmo acima. Por simplicidade, vamos denotar o diagrama correspondente a λ por

$$\begin{ytableau} X & X & X \\ X & X \end{ytableau}.$$

Seguiremos os passos do algoritmo: adicionaremos os boxes da primeira linha de μ.

$$\begin{ytableau} X & X & X & a_{11} \\ X & X \\ a_{12} \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} X & X & X \\ X & X & a_{11} \\ a_{12} \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} X & X & X \\ X & X \\ a_{12} & a_{11} \end{ytableau}$$

$$\begin{ytableau} X & X & X & a_{12} & a_{11} \\ X & X \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} X & X & X & a_{11} \\ X & X & a_{12} \end{ytableau}.$$

Agora adicionaremos os boxes da segunda linha de μ:

$$\begin{ytableau} X & X & X & a_{12} & a_{11} \\ X & X \\ a_{12} \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} X & X & X & a_{11} \\ X & X & a_{21} \\ a_{12} \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} X & X & X & a_{11} \\ X & X \\ a_{12} & a_{12} \end{ytableau}$$

$$\begin{ytableau} X & X & X & a_{11} \\ X & X \\ a_{12} \\ a_{21} \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} X & X & X \\ X & X & a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} X & X & X \\ X & X \\ a_{12} & a_{11} \\ a_{21} \end{ytableau}$$

$$\begin{ytableau} X & X & X & a_{12} & a_{11} \\ X & X & a_{21} \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} X & X & X & a_{11} \\ X & X & a_{12} & a_{21} \end{ytableau}$$

$$\begin{ytableau} X & X & X \\ X & X & a_{11} \\ a_{12} & a_{21} \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} X & X & X & a_{11} \\ X & X & a_{12} \\ a_1 \end{ytableau}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(3,\ 2)\widehat{\otimes}(2,\ 1) &= (5,\ 3)+(5,\ 2,\ 1)+(4,\ 4)+2(4,\ 3,\ 1)+(4,\ 2,\ 2)+(4,\ 2,\ 1,\ 1)+(3,\ 3,\ 2)\\ &+ (3,\ 3,\ 1,\ 1)+(3,\ 2,\ 2,\ 1).\end{aligned}$$

Observação 3.2.7. *Em [12], pode ser encontrado que se χ_λ e χ_μ são caracteres, em que $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$, então $\chi = \chi_\lambda \widehat{\otimes} \chi_\mu = \sum_{\gamma \vdash n+m} m_\gamma \chi_\gamma$ também é caracter, onde $\lambda \widehat{\otimes} \mu = \sum_{\gamma \vdash n+m} m_\gamma \gamma$.*

A proposição seguinte nos diz que o elemento quase idempotente e_{T_λ} gera um FS_n-módulo à esquerda minimal, e se duas tabelas standard T_1 e T_2 são do mesmo tipo, então os FS_n-módulos minimais gerados por e_{T_1} e e_{T_2} são isomorfos.

Proposição 3.2.8. *[[7], Proposição 2.2.13] Para cada tabela de Young T_λ do tipo $\lambda \vdash n$, o elemento e_{T_λ} é um quase idempotente minimal de FS_n e $FS_n e_{T_\lambda}$ é um ideal à esquerda minimal de FS_n com caracter χ_λ. Se T e T^* são tabelas de Young do mesmo tipo λ, então e_T e e_{T^*} são conjugados em FS_n, ou seja, existe $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma e_T \sigma^{-1} = e_{\sigma T^*}$.*

Proposição 3.2.9. *[[7], Proposição 2.2.14] Se $T_1, \ldots, T_{d_\lambda}$ são tabelas standard do mesmo tipo λ, então I_λ, o ideal bilateral de FS_n correspondente a λ, tem a seguinte decomposição:*

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} FS_n e_{T_i}.$$

Observação 3.2.10. *Seja $\lambda = (1^n) \vdash n$. Para λ, obtemos apenas uma tabela standard:*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline\end{array}.$$

Pelo **Teorema 3.2.4**, *$d_\lambda = 1$. Temos também que $C_{T_\lambda} \cong S_n(1, 2, \ldots, n)$ e $R_{T_\lambda} \cong \varepsilon_n$ o que implica*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\tau \in C_\lambda} sgn(\tau)\tau = \sum_{\tau \in S_n} sgn(\tau)\tau.$$

Recorde que χ_φ é irredutível (do **Exemplo 3.1.2***) e $\chi_\varphi(\sigma) = sgn(\sigma)$, para cada $\sigma \in S_n$. Assim, obtemos que*

$$e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\sigma = e_{T_\lambda}.$$

Proposição 3.2.11. *Seja M um FS_n-módulo à esquerda irredutível com caracter $\chi(M) = \chi_\lambda$, $\lambda \vdash n$. Então, M é gerado como um FS_n-módulo por um elemento da forma $e_{T_\lambda} f$, para algum $f \in M$ e alguma tabela standard de Young T_λ do tipo λ. Além disso, para qualquer tabela T_λ^* standard do tipo λ, existe $f' \in M$ tal que $M = FS_n e_{T_\lambda^*} f'$.*

Demonstração. Primeiro recorde que $FS_n = \bigoplus_{\mu' \vdash n} I_{\mu'}$, em que $I_{\mu'} = FS_n e_{\mu'} = \bigoplus_{i=1}^{d_{\mu'}} FS_n e_{T_i}$, e $T_1, \ldots, T_{d_{\mu'}}$

são tabelas standard do tipo μ'. Recorde ainda que $e_\lambda e_\mu = 0$ se $\lambda \neq \mu$, pois os caracteres irredutíveis são ortogonais. Como $0 \neq M = FS_nM = \bigoplus_{\mu' \vdash n} I_{\mu'}M$ e por hipótese M é irredutível com caracter $\chi(M) = \chi_\lambda$, temos que $M = I_\lambda M = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} FS_n e_{T_i} M$. Assim, existe um tabela standard T_λ tal que $M = FS_n e_{T_\lambda} M$, pois M é irredutível. Daí se $0 \neq e_{T_\lambda} f \in M$, temos que $FS_n e_{T_\lambda} f = M$ pela irredutibilidade de M.
Suponha que T_λ^* é outra tabela de Young do tipo λ. Sabe-se que $e_{T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda^*}\sigma^{-1}$ para algum $\sigma \in S_n$, então considere $f' = \sigma^{-1} f$. Logo, $FS_n e_{T_\lambda} = FS_n e_{T_\lambda^*} f'$. □

3.3 Codimensões e Cocaracteres de uma Álgebra

Definição 3.3.1. *Denotaremos por $P_n = span_F\langle x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\rangle$ o espaço vetorial de todos os polinômios multilineares em $F\langle X\rangle$ de grau n.*

Observe que $dim_F P_n = n!$.

Sejam $\sum_{\tau \in S_n} \alpha_\tau x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)} = f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$ e $\sigma \in S_n$. Definimos a ação à esquerda de S_n em P_n por

$$\sigma f(x_1, \dots, x_n) := f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = \sum_{\tau \in S_n} \alpha_\tau x_{\sigma\tau(1)} \cdots x_{\sigma\tau(n)} = \sum_{\pi \in S_n} \beta_\pi x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} \in P_n,$$

em que $\pi = \sigma\tau$.

Lema 3.3.1. *Seja P_n o espaço vetorial de todos os polinômios multilineares de grau n. Então, P_n é isomorfo a FS_n como FS_n-módulo à esquerda.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & FS_n & \longrightarrow & P_n \\ & \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma & \longmapsto & \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \end{array},$$

em que $\alpha_\sigma \in F$. Sem dificuldades é possível mostrar que φ é isomorfismo de F-espaços vetoriais.

Sejam $\sigma \in S_n$ e o monômio $M_\sigma(x_1, \dots, x_n) = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$. Considere $y_i = x_{\tau(i)}$, para cada $\tau \in S_n$, temos

$$M_\sigma\left(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}\right) = M_\sigma(y_1, \dots, y_n) = y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(n)} = x_{\tau\sigma(1)} \cdots x_{\tau\sigma(n)} = \tau M_\sigma(x_1, \dots, x_n).$$

Assim, considere o isomorfismo definido acima φ, e seja $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$. Temos

$$\varphi\left(\pi\varphi^{-1}(f)\right) = \varphi\left(\pi \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma\right) = \varphi\left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \pi\sigma\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\pi\sigma(1)} \cdots x_{\pi\sigma(n)} = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}),$$

para qualquer $\pi \in S_n$. Logo P_n é FS_n são isomorfos como FS_n-módulo à esquerda. □

Seja A uma PI-álgebra, considere $Id(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A. Como P_n é um FS_n-módulo à esquerda, temos que $P_n \cap Id(A)$, o conjunto de todas as identidades multilineares de grau n de A, e o quociente $\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ também são FS_n-módulos à esquerda, já que $Id(A)$ é fechado por permutações das variáveis.

Definição 3.3.2. *O não- negativo inteiro*

$$c_n(A) = dim \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

*é chamado a n-**ésima codimensão** da álgebra A. Se $\mathcal{V}$ é uma variedade de álgebras e $\mathcal{V} = var(A)$, então definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$. Temos:*

$$dim\left(\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}\right) = dim(P_n) - dim(P_n \cap Id(A)) \Rightarrow dim(P_n \cap Id(A)) = n! - c_n(A).$$

Exemplo 3.3.1. *Seja A uma álgebra. Então, A é uma PI-álgebra se, e somente se, $c_n(A) < n!$.*

Pois se A é uma PI-álgebra, então $Id(A) \cap P_n \neq (0)$. Logo, $dim(P_n \cap Id(A)) \neq 0$.

Exemplo 3.3.2. *Seja A uma álgebra nilpotente de grau m. Então, $c_n(A) = 0$ para todo $n \geq m$.*

Pois, para qualquer $n \geq m$, pela definição de nilpotente, $a_1 \cdots a_n = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Assim,

$$dim(P_n/P_n \cap Id(A)) = dim(P_n) - dim(P_n \cap Id(A)) = n! - n! = 0.$$

Proposição 3.3.2. *Sejam A e B PI-álgebras sobre o mesmo corpo F. Considere $I = Id(A)$, $Id(B) = J$.*

1. *Se $I \subseteq J$, então $c_n(B) \leq c_n(A)$.*
2. *Se $I \subseteq J$ e $c_n(A) = c_n(B)$ $\forall\, n \geq 1$, então $I = J$.*

Demonstração. Seja $I \subseteq J$, então

1. $$\begin{aligned} P_n \cap I \subseteq P_n \cap J \Rightarrow dim_F(P_n \cap I) &\leq dim_F(P_n \cap J) \\ \Rightarrow -dim_F(P_n \cap I) \geq -dim_F(P_n \cap J) &\Rightarrow c_n(A) \geq c_n(B),\ \forall\, n \geq 1. \end{aligned}$$

2. Temos que $P_n \cap I \subseteq P_n \cap J$. Como $c_n(A) = c_n(B)$, para todo $n \geq 1$, segue que

$$dim_F(P_n \cap I) = dim_F(P_n \cap J) \Rightarrow P_n \cap I = P_n \cap J,\ \forall\, n \geq 1.$$

Portanto, A é PI-equivalente a B.

□

Sejam F um corpo de característica zero, A uma F-álgebra e K uma extensão de F. Note que podemos dar a A uma estrutura de K-álgebra através do produto tensorial $\bar{A} = A \otimes_F K$, definindo: $\lambda(a \otimes k) := a \otimes (\lambda k)$, $\forall\, \lambda \in K,\ a \in A,\ k \in K$.

O seguinte teorema nos diz que à sequência de codimensões de A sobre F é igual à sequência de codimensões de $\bar{A}$ sobre K.

Teorema 3.3.3. *Se A é uma F-álgebra e K é uma extensão de F, então*

$$c_n^F(A) = c_n^K\left(\bar{A}\right), \ \forall\ n = 1, 2, \ldots$$

Demonstração. Ver [7], Teorema 4.1.9. □

A partir de agora, vamos assumir que o corpo F é algebricamente fechado.

Proposição 3.3.4. *Se A e B são PI-álgebras, então $c_n(A), c_n(B) \leq c_n(A \oplus B) \leq c_n(A) + c_n(B)$.*

Demonstração. Como $Id(A), Id(B) \supseteq Id(A \oplus B) = Id(A) \cap Id(B)$ então pela **Proposição 3.3.2**,

$$c_n(A), c_n(B) \leq c_n(A \oplus B), \ \forall\ n \geq 1.$$

Por outro lado, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : P_n & \longrightarrow & \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)} \oplus \frac{P_n}{P_n \cap Id(B)} \\ a & \longmapsto & (a + P_n \cap Id(A), a + P_n \cap Id(B)) \end{array}$$

é um homomorfismo de FS_n-módulos e $ker\varphi = P_n \cap Id(A) \cap Id(B)$. Como $Id(A \oplus B) = Id(A) \cap Id(B)$, temos que $ker\varphi = P_n \cap Id(A \oplus B)$ e, pelo teorema do homomorfismo, obtemos que $\frac{P_n}{P_n \cap Id(A \oplus B)}$ é isomorfo a um submódulo de $\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)} \oplus \frac{P_n}{P_n \cap Id(B)}$. Então, podemos ver $\frac{P_n}{P_n \cap Id(A \oplus B)}$ imerso em $\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)} \oplus \frac{P_n}{P_n \cap Id(B)}$. Assim, $c_n(A \oplus B) \leq c_n(A) + c_n(B)$. Logo, concluímos a afirmação. □

O seguinte teorema, demonstrado por A. Regev, mostrou que se A é uma PI-álgebra, então sua sequência de codimensões é limitada por função exponencial de n.

Teorema 3.3.5. *Se a álgebra A satisfaz uma identidade de grau $d \geq 1$, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$.*

Demonstração. Ver [7], Teorema 4.2.4. □

Definição 3.3.3. *Para $n \geq 1$, o S_n-caracter de $\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ é chamado o* **n-ésimo cocaracter** *de A, e o denotaremos por $\chi_n(A)$.*

Sabemos que qualquer caracter χ é escrito como combinação linear dos caracteres irredutíveis, em que os coeficientes são as multiplicidades do caracteres irredutíveis. Assim, $\chi_n(A) = \sum_i m_i \chi_i$. Como há uma correspondência bijetiva entre os caracteres irredutíveis de S_n e as partições de n, podemos decompor o n-ésimo cocaracter como

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

em que χ_λ é S_n-caracter irredutível que corresponde à partição λ e $m_\lambda \geq 0$ é a correspondente multiplicidade.

O seguinte teorema foi demonstrado por A. Berele e A. Regev. Eles deram uma regra para calcular o n-ésimo cocaracter do produto de T-ideais, através da regra de Littlewood-Richardson.

Teorema 3.3.6. *Sejam A, A_1 e A_2 PI-álgebras com identidades $Id\,(A_j) = I_j \subseteq F\langle X\rangle$, $j = 1,2$ e $Id\,(A) = I_1I_2$. Seja $\{\chi_n\,(A)\}$ a sequência de cocaracteres de A. Então,*

$$\chi_n\,(A) = \chi_1\widehat{\otimes}\chi_{n-1}\,(A_2) + \sum_{j=1}^{n-1}\chi_j\,(A_1)\,\widehat{\otimes}\left[\chi_1\widehat{\otimes}\chi_{n-j-1}\,(A_2) - \chi_{n-j}\,(A_2)\right],$$

em que χ_1 significa adicionar um box ao diagrama correspondente a χ_t, e $\widehat{\otimes}$ denota o produto externo de caracter.

Demonstração. Ver [3], Teorema 1.1. □

Definição 3.3.4. *Diremos que um polinômio $f \in P_n$ corresponde à tabela T_λ se $f = e_{T_\lambda}f_0$ para algum $f_0 \in P_n$.*

Observe que neste caso

$$e_{T_\lambda}f = e_{T_\lambda}e_{T_\lambda}f_0 = \gamma e_{T_\lambda}f_0 = \gamma f,\ \ \gamma \in \mathbb{Q}.$$

Portanto, $f = \gamma^{-1}e_{T_\lambda}f$.

Daremos alguns exemplos de polinômios correspondentes as tabelas standard para $f_0(x_1,\ldots,x_n) = x_1\cdots x_n$.

Exemplo 3.3.3. *Sejam $n = 3$ e $\lambda \vdash 3$.*

1. *Para $\lambda_1 = (3,0,0)$, temos apenas uma tabela standard:*

$$T_{\lambda_1} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}.$$

Assim,

$$R_{\lambda_1} \cong S_3\,(1,2,3)\ \ e\ \ C_{\lambda_1} \cong \varepsilon_3,$$

em que ε_3 é a identidade de S_3. Logo, o polinômio correspondente a T_{λ_1} é :

$$f_{\mathrm{T}_{\lambda_1}} = \sum_{\sigma\in R_{\lambda_1}} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}$$

é sistema completo de linearização de x^3. Pelo **Teorema 3.2.4**, *$dimFS_3f_{\mathrm{T}_{\lambda_1}} = \frac{3!}{3.2} = 1$.*

2. *Para $\lambda_2 = (2,1,0)$, temos duas tabelas standard que são:*

$$T'_{\lambda_2} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad e \quad T''_{\lambda_2} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Para essas tabelas temos:

$$R'_{\lambda_2} \cong S_2(1,2) \quad e \quad C'_{\lambda_2} \cong S_2(1,3);$$
$$R''_{\lambda_2} \cong S_2(1,3) \quad e \quad C''_{\lambda_2} \cong S_2(1,2).$$

Seus respectivos polinômios correspondentes:

$$f_{\mathrm{T}'_{\lambda_2}} = \sum_{\sigma\in R'_\lambda}\sum_{\tau\in C'_{\lambda_2}} sgn(\tau)x_{\sigma\tau(1)}x_{\sigma\tau(2)}x_{\sigma\tau(3)} = x_1x_2x_3 + x_2x_1x_3 - x_3x_2x_1 - x_2x_3x_1$$

$$f_{\mathrm{T}''_{\lambda_2}} = \sum_{\sigma\in R''_\lambda,\ \tau\in C''_\lambda} sgn(\tau)x_{\sigma\tau(1)}x_{\sigma\tau(2)}x_{\sigma\tau(3)} = x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3 + x_3x_2x_1 - x_2x_3x_1$$

$$dimFS_3f_{\mathrm{T}'_{\lambda_2}} = \frac{3!}{3.1.1} = 2 \quad e \ dimFS_3f_{\mathrm{T}''_{\lambda_2}} = \frac{3!}{3.2.1} = 2.$$

3. *Para $\lambda_3 = (1,1,1)$, temos apenas um tabela standard:*

$$T_{\lambda_3} = \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}.$$

Tem-se:

$$R_{\lambda_3} \cong \varepsilon_3 \quad e \quad S_3(1,2,3) \cong C_{\lambda_3}.$$

Seu polinômio correspondente é:

$$f_{\mathrm{T}_{\lambda_3}} = \sum_{\tau\in C_{\lambda_3}} sgn(\tau)x_{\tau(1)}x_{\tau(2)}x_{\tau(3)} = St_3(x_1,x_2,x_3)$$

$$dimFS_3f_{T_{\lambda_3}} = \frac{3!}{3.1} = 1.$$

Exemplo 3.3.4. *Para partição $\lambda = (n)$ e sua conjugada $\lambda' = (1^n)$, temos apenas uma tabela de Young standard :*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & \ldots & n\\\hline\end{array} \Rightarrow f_{T_\lambda} = \sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$$

$$T_{\lambda'} = \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline \vdots\\\hline n\\\hline\end{array} \Rightarrow f_{T_{\lambda'}} = \sum_{\tau\in S_n} sgn(\tau)x_{\tau(1)}x_{\tau(2)}x_{\tau(3)}x_{\tau(4)}\cdots x_{\tau(\mathrm{n})} = St_n(x_1,\ldots,x_n).$$

Proposição 3.3.7. *Para qualquer polinômio multilinear $f \in P_n$, existe um conjunto finito de polinômios $g_1,\ldots,g_r \in P_n$ e partições $\lambda(1),\ldots,\lambda(r)$ de n (não necessariamente diferentes) tais que $FS_nf = FS_ne_{T_{\lambda(1)}}g_1 + \ldots + FS_ne_{T_{\lambda(r)}}g_r$.*

Demonstração. Seja $M = FS_nf$. Pelo *Teorema de Mascke*, todo FS_n-módulo é completamente redutível. Decompondo M em soma de submódulos irredutíveis $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_r$, segue da **Proposição 3.2.11** que $M_i = FS_n e_{T_{\lambda(i)}} g_i$, para algum $g_i \in P_n$, $i = 1, \ldots, r$ e alguma tabela standard $T_{\lambda(i)}$ do tipo $\lambda(i) \vdash n$. Portanto, $FS_n f = FS_n e_{T_{\lambda(1)}} g_1 + \ldots + FS_n e_{T_{\lambda(r)}} g_r$. $\square$

Exemplo 3.3.5. *Seja $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$. O FS_3-módulo à esquerda, $FS_3 f = span_F\langle \sigma f \mid \sigma \in S_3\rangle$ tem como base o conjunto $\{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} \mid \sigma \in S_3\}$. Logo, $P_3 = FS_3 f = FS_3 f_1 \oplus FS_3 f_2 \oplus FS_3 f_3 \oplus FS_3 f_4$, em que f_1, f_2, f_3, f_4 são os polinômios do* **Exemplo 3.3.3**.

Exemplo 3.3.6. *$f = f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$. O FS_2-módulo à esquerda,*

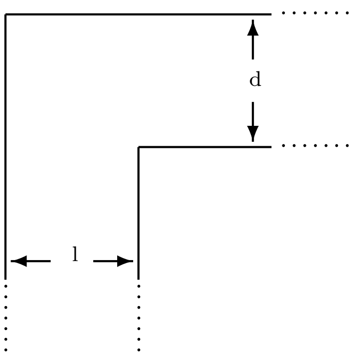
$$FS_2 f = span_F\langle [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \mid \sigma \in S_2\rangle = span_F\langle [x_1, x_2], [x_2, x_1]\rangle = span_F\langle [x_2, x_1]\rangle,$$

pois $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$. Assim, $f_2 = [x_1, x_2] \in FS_2 f$ e $f_1 = x_1 x_2 + x_2 x_1 \notin FS_2 f$. Logo, $FS_2 f = FS_2 f_2$ e $dim FS_2 f_1 = 1$, em que f_1, f_2 são os polinômios correspondentes as tabelas standard do tipo $(2, 0)$ e $(1, 1)$.

Definição 3.3.5. *Definimos o* **gancho infinito** $H(d, l)$ *como*

$$H(d, l) = \bigcup_{n \geq 0}^{\infty} \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \vdash n \mid \lambda_{d+1} \leq l\}.$$

O gancho infinito $H(d, l)$ pode ser dado como o conjunto de todos os diagramas cuja forma está na região em forma de gancho dado na figura abaixo.



O inteiro d é chamado o **braço** e l, o pé do **gancho**.

Diremos que a partição λ está no gancho $H(d, l)$ se o correspondente diagrama de Young D_λ está contido em $H(d, l)$, e escreveremos $\lambda \in H(d, l)$.

Analogamente, seja V um FS_n-módulo com caracter $\chi_n(V) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$. Diremos que $\chi_n(V) \subseteq H(d, l)$ se $\lambda \in H(d, l)$, para toda partição $\lambda \vdash n$ tal que $m_\lambda \neq 0$.

Para $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \vdash n$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_q) \vdash m$ vamos dizer que $\lambda \geq \mu$ se, e só se, $p \geq q$ e $\lambda_i \geq \mu_i$, $\forall\, i = 1, \ldots, p$. Portanto, $\lambda \geq \mu$ significa que D_μ é subdiagrama de D_λ.

Lema 3.3.8. *Sejam A, A_1 e A_2 álgebras tais que $Id(A) = Id(A_1)\, Id(A_2)$. Se $\{\chi_n(A_1)\} \subseteq H(d_1, l_1)$ e $\{\chi_n(A_2)\} \subseteq H(d_2, l_2)$, então $\{\chi_n(A)\} \subseteq H(d_1 + d_2, l_1 + l_2) \widehat{\otimes} \chi_1$.*

Demonstração. Sejam $\lambda \in H(d_1, l_1)$ e $(\mu_1, \ldots, \mu_z) = \mu \in H(d_2, l_2)$, em que $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$. Considere γ a partição de $n + \mu_1$, obtida de λ e μ por adicionar ao diagrama D_λ apenas os boxes da primeira linha de D_μ segundo a regra de Littlewood-Richardson. Assim, pela regra de Littlewood-Richardson,

$$\gamma_1 \geq \lambda_1 \geq \gamma_2 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \gamma_{d_1} \geq \lambda_{d_1} \geq \gamma_{d_1+1} \geq \lambda_{d_1+1} \geq \gamma_{d_1+2} \geq \ldots \geq \gamma_{n+\mu_1},$$

pois não pode ter dois boxes da mesma linha de D_μ na mesma coluna de D_γ. Pela desigualdade anterior, tem-se que

$$\gamma_{d_1+2} \leq l_1,$$

pois $\lambda_{d_1+1} \leq l_1$. Prosseguindo com este algoritmo, seja γ^{d_2} partição de $n + \mu_1 + \ldots + \mu_{d_2}$, obtida de λ e μ por adicionar ao diagrama D_λ os boxes das μ_1-linha,..., μ_{d_2}-linha de D_μ. Pelo mesmo argumento anterior, obtem-se que

$$\gamma_1^{d_2} = \gamma_1 \geq \gamma_2^{d_2} \geq \gamma_2^{d_2-1} \geq \gamma_3^{d_2} \geq \ldots \geq \gamma_{d_1+d_2}^{d_2} \geq \gamma_{d_1+d_2}^{d_2-1} \geq \gamma_{d_1+d_2+1}^{d_2} \geq \cdots \geq \gamma_{n+\mu_1+\ldots+\mu_{d_2}}^{d_2},$$

$$\Rightarrow \gamma_{d_1+d_2+1}^{d_2} \leq l_1,$$

pois $\gamma_{d_1+d_2}^{d_2-1} \leq l_1$.

Seja α a partição de $n + \mu_1 + \ldots + \mu_{d_2+1}$, obtida de γ^{d_2} e μ_{d_2+1} por adicionar ao diagrama $D_{\gamma^{d_2}}$ apenas os boxes da μ_{d_2+1} de D_μ. Conseguimos para α uma desigualdade similar às anteriores, ou seja, ao adicionar μ_{d_2+1} boxes em γ^{d_2}, tem-se que $\alpha_{d_1+d_2+1} \leq \gamma_{d_2+d_1+1}^{d_2} + l_2 \leq l_1 + l_2$.

Agora, ao adicionar os boxes de $\mu_{d_2+i},\ i = 2, \ldots, t$ tal que $d_2 + t = z$, ao diagrama D_α, devido ao novo diagrama a ser obtido $D_{\alpha'}$, os índices correspondentes aos boxes devem ser monótonos crescentes ao longo de cada linha e estritamente crescentes ao longo das colunas, obtem-se que o número máximo de boxes na $(d_1 + d_2 + 1)$-linha de $D_{\alpha'}$ não ultrapassa $\gamma_{d_2+d_1}^{d_2} + l_2 \leq l_1 + l_2$.

Se acaso colocar todos os boxes da (μ_{d_2+1})-linha de D_μ na $(d_2 + d_1 + 1)$-linha de D_α, não pode adicionar mais nenhum box das linhas $d_2 + i$ de $D_\mu,\ i = 2, \ldots, t$, na $(d_2 + d_1 + 1)$-linha D_α.

Observe que, para que possa adicionar os boxes da $(d_2 + i)$-linha de $D_\mu,\ i = 2, \ldots, t$, na linha $(d_1 + d_2 + 1)$ de D_α, deve-se diminur o número de boxes da $(d_2 + 1)-$linha de D_μ, a ser adicionados na $(d_2 + d_1 + 1)$-linha de $D_{\gamma^{d_2}}$. Mas, pelo mesmo motivo acima, do diagrama ser monótono crescente ao longo de cada linha e estritamente crescente ao longo das colunas não deve ultrapassar $l_1 + l_2$. Assim, segue o resultado. $\square$

Como consequência do lema anterior e **Teorema 3.3.6**, obtemos que se $A_1, \ldots, A_t, A$ são *PI*-álgebras com $Id(A) = I_1 \ldots I_t$, em que $I_i = Id(A_i)$ é tal que $\{\chi_n(A_i)\} \subseteq H(d_i, l_i)$ para cada $i = 1, \ldots, t$, então

$$\{\chi_n(A)\} \subseteq H(d_1 + d_2 + \ldots + d_t, l_1 + l_2 + \ldots + l_t)\, \widehat{\otimes} \chi_1^{\widehat{\otimes}(t-1)},\ \forall\, n \geq 1.$$

3.4 Polinômios de Amitsur

Sejam L e M dois números naturais, $n = (L+1)(M+1)$ e $\mu = \left((L+1)^{M+1}\right)$ uma partição de n. Consideremos χ_μ o caracter irredutível associado à partição μ e o elemento da álgebra do grupo S_n $e_\mu = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\mu(\sigma)\sigma$. O polinômio multilinear

$$e^*_{M,L}(\bar{x}, \bar{y}) = e^*_{M,L}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\mu(\sigma) x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} \cdots y_{n-1} x_{\sigma(n)}$$

é chamado **polinômio tipo Amitsur-Capelli** ou **polinômio de Amitsur.**

Observe que, para $L = 0$, temos $\mu = \left((0+1)^{M+1}\right) = (1)^{M+1} = (1)^n$. Vimos anteriormente que $\chi_\mu(\sigma) = sgn(\sigma), \ \forall \ \sigma \in S_n$. Dessa forma,

$$e^*_{M,L}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\mu(\sigma) x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} \cdots y_{n-1} x_{\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} \cdots y_{n-1} x_{\sigma(n)},$$

coincide com o polinômio de Capelli de posto n.

Suponha que o polinômio tipo Amitsur-Capelli é uma identidade para alguma álgebra A. Recorde que e_λ gera o ideal bilateral $I_\mu = FS_n e_\mu$ e $I_\mu(x_1 y_1 \cdots y_{n-1} x_n) = FS_n e_\mu(x_1 y_1 \cdots y_{n-1} x_n) = FS_n e^*_{M,L}$, onde S_n age nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Já que $e^*_{M,L} \in Id(A)$, temos que $I_\mu(x_1 y_1 \cdots y_{n-1} x_n) = FS_n e_\mu(x_1 y_1 \cdots y_{n-1} x_n) = FS_n e^*_{M,L} \subseteq Id(A)$, pois $Id(A)$ é um T-ideal. Por outro lado, $I_\mu = \bigoplus_{i=1}^{d_\mu} e_{T_i}$, em que T_i, para todo $i = 1, \ldots, d_\mu$ são tabelas standard. Assim,

$$\bigoplus_{i=1}^{d_\mu} FS_n e_{T_i}(x_1 y_1 \cdots y_{n-1} x_n) = I_\mu(x_1 y_1 \cdots y_{n-1} x_n) = FS_n e^*_{M,L} \subseteq Id(A).$$

Logo, $e_{T_i}(x_1 y_1 \cdots y_{n-1} x_n) \in Id(A)$, para todo $i = 1, \ldots, d_\mu$. Dessa forma, se $e^*_{M,L}$ é uma identidade para A, temos que os polinômios correspondentes as tabelas standard do tipo μ com $f_0 = x_1 y_1 \cdots y_{n-1} x_n$ também são identidades para a álgebra A.

Reciprocamente, se para qualquer tabela standard do tipo $\mu \vdash n$, o polinômio correspondente para tabela standard $f_\mu = e_{T_\mu} f_0$ é uma identidade para álgebra A, então $FS_n f_\mu \subseteq Id(A)$. Assim, temos que $e^*_{M,L}$ também é uma identidade para A.

Denotaremos por $E^*_{d,l}$ o conjunto gerado por $e^*_{d,l}$ e por todos os polinômios obtidos de $e^*_{d,l}$ ao substituir as variáveis $y_i = 1$ de todas as possíveis maneiras. Chamaremos os elementos de $E^*_{d,l}$ de **polinômios tipo Amitsur-Capelli** ou **polinômios de Amitsur**.

Os polinômios tipo Amitsur-Capelli generalizam o polinômio de Capelli no sentido que o polinômio de Capelli caracteriza as álgebras que têm o cocaracter contido em uma dada tira e o polinômio de Amitsur caracteriza as álgebras que têm o cocaracter contido em um dado gancho.

O seguinte teorema caracteriza as álgebras que satisfazem os polinômios tipo Amitsur-Capelli.

Teorema 3.4.1. *Sejam A uma PI-álgebra e $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ o seu n-ésimo cocaracter. Então, A satisfaz as identidades de Amitsur, $E^*_{d,l} \equiv 0 \Leftrightarrow m_\lambda = 0$ quando $\lambda \notin H(d,l)$.*

Demonstração. Ver [7], Teorema 4.7.2 . □

O seguinte resultado caracteriza todas as álgebras que satisfazem o polinômio de Capelli.

Corolário 3.4.2. *[Teorema da Tira] Sejam A uma PI-álgebra e $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ o seu n-ésimo cocaracter. Então, A satisfaz $Cap^*_k \Leftrightarrow m_\lambda = 0$ quando $h(\lambda) \geq k$, em que $h(\lambda)$ é a altitude do diagrama.*

Demonstração. Como vimos anteriormente, se $l = 0$, obtemos

$$e^*_{d,0}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} \cdots y_{n-1} x_{\sigma(n)} = Cap_n(\bar{x}, \bar{y}).$$

Logo, $Cap^*_n = E^*_{d,0}$. Pelo **Teorema 3.4.1**, segue o resultado. □

Corolário 3.4.3. *Seja A uma álgebra de $dim_F A = k$. Então, para qualquer $n \geq 1$,*

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n;\ \ h(\lambda) \leq k} m_\lambda \chi_\lambda,$$

isto é, o n-ésimo cocaracter de A está em uma tira de altitude k.

Demonstração. Como $dim_F A = k$, então A satisfaz o polinômio de Capelli de posto $k+1$. Daí, pelo **Corolário 3.4.2**, temos que $m_\lambda = 0$ se $h(\lambda) \geq k+1$, ou seja, o n-ésimo cocaracter de A é decomposto como

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n;\ \ h(\lambda) \leq k} m_\lambda \chi_\lambda,$$

isto é, o n-ésimo cocaracter de A está em uma tira de altitude k. □

É importante o leitor observar que, pelo **Corolário 3.4.3**, o n-ésimo cocaracter de $M_k(F)$ está em uma tira de altitude k^2.

Capítulo 4

Algumas Álgebras Concretas e o PI-expoente

Neste capítulo, falaremos sobre a álgebra de Grassmann, superálgebras simples, álgebras minimais e reduzidas e álgebras verbalmente primas sobre um corpo de característica zero, que são umas das principais ferramentas do nosso trabalho. Apresentaremos algumas propriedades dessas álgebras. Em seguida, calcularemos o PI-expoente de tais álgebras.

4.1 Álgebra de Grassmann

Seja $F\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre. Vamos considerar I o ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto $\{x_ix_j + x_jx_i \mid i,j \geq 1\}$. Para cada $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, definimos $e_i \in F\langle X\rangle/I$ da forma $e_i = x_i + I$. Note que

$$e_ie_j = x_ix_j + x_iI + x_jI + I^2 = x_ix_j + I.$$

Por outro lado,

$$x_ix_j + x_jx_i \in I \;\Rightarrow e_ie_j = x_ix_j + I = -x_jx_i + I = -e_je_i.$$

Definimos a F-álgebra de **Grassmann**, G, por:

$$G = \langle e_1, e_2, \ldots \mid e_ie_j = -e_je_i\rangle.$$

Note que a relação $e_ie_j = -e_je_i$ implica que $e_i^2 = 0$, para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Além disso, qualquer elemento da álgebra de Grassmann é combinação linear de palavras da forma $e_{i_1}\cdots e_{i_j},\ j \in \mathbb{N}$.

Se $\sigma \in S_n$, temos:

$$e_{\sigma(1)}e_{\sigma(2)}\cdots e_{\sigma(n)} = sgn\,(\sigma)\, e_1\cdots e_n.$$

Note que G é soma direta dos seguintes subespaços vetoriais:
$G_0 = span_F\langle e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k}, k \geq 1\rangle$ gerado pelas palavras de comprimento par;
$G_1 = span_F\langle e_{i_1}\cdots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k+1}, k \geq 0\rangle$, gerado pelas palavras de comprimento ímpar.

Esses subespaços vetoriais satisfazem as seguintes propriedades:

1. $G_0G_0 + G_1G_1 \subseteq G_0$;
2. $G_0G_1 + G_1G_0 \subseteq G_1$;
3. $G_0 = Z(G)$;
4. $[G, G] \subseteq G_0$;
5. $G = G_0 \dot{+} G_1$;
6. $g_1g_2 = -g_2g_1, \ \forall \ g_1, g_2 \in G_1$.

O item 1 ou 3 nos dá que G_0 é uma subálgebra de G. Pelo itens 3 e 4, a álgebra de Grassmann G é uma PI-álgebra, pois usando os elementos da base de G, tem-se que o polinômio

$$f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3] = x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3 - x_3x_1x_2 + x_3x_2x_1$$

é uma identidade polinomial para G.

Uma álgebra que satisfaz as propriedades 1, 2 e 5 é chamada **superálgebra**. Nas próximas seções iremos discutir esse conceito com mais detalhes.

Daremos, a seguir, exemplos de duas álgebras que serão de grande importância no nosso texto.

Exemplo 4.1.1. *$M_n(G)$ é uma F-álgebra de dimensão infinita.*

Exemplo 4.1.2. *A álgebra*

$$M_{k,l}(G) = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \middle| \ P \in M_k(G_0), Q \in M_{k\times l}(G_1), R \in M_{l\times k}(G_1) \ e \ S \in M_l(G_0) \right\},$$

é uma subálgebra de $M_{(p+q)\times(p+q)}(G)$.

Daremos exemplos de polinômios que não são satisfeitos pela álgebra de Grassmann.

Exemplo 4.1.3. *A álgebra de Grassmann não satisfaz a identidade standard, St_q, $\forall \ q \geq 1$.*

Sejam $g_1, \ldots, g_q \in G_1$ tais que $g_1 \cdots g_q \neq 0$ e lembre-se que para qualquer $\sigma \in S_q$, temos

$$g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(q)} = sgn(\sigma)\, g_1 \cdots g_q.$$

Então,

$$St_q(g_1, \ldots, g_q) = \sum_{\sigma \in S_q} sgn(\sigma)\, g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(q)} = \sum_{\sigma \in S_q} (sgn(\sigma))^2\, g_1 \cdots g_q = q!\,(g_1 \cdots g_q) \neq 0.$$

Portanto, St_q, para qualquer $q \geq 1$.

Por consequência, a álgebra de matriz com entradas em G também não satisfaz a identidade standard, pois, caso contrário, G satisfazeria o polinômio standard.

Exemplo 4.1.4. *Álgebra de Grassmann não satisfaz o polinômio de Capelli. Como no exemplo anterior, considere* $g_1, \ldots, g_q \in G_1$ *e* $g'_1, \ldots, g'_{q-1} \in G_0$ *tais que* $g_1 \cdots g_q g'_1 \cdots g'_{q-1} \neq 0$ *e faça a seguinte substituição* $y_i = g'_i \in G_0$, *para quaisquer* $i = 1, \ldots, q-1$, *e* $x_j = g_j \in G_1$, $j = 1, \ldots, q$. *Primeiro recorde que* $G_0 = Z(G)$. *Assim,*

$$Cap_q\left(g_1, \ldots, g_q; g'_1, \ldots, g'_{q-1}\right) = \sum_{\sigma \in S_q} sgn\left(\sigma\right) g'_1 g_{\sigma(1)} g'_2 \cdots g'_{q-1} g_{\sigma(t)} = q! g_1 \cdots g_q g'_1 \cdots g'_{q-1} \neq 0.$$

Enunciaremos alguns resultados que nos darão suporte para demonstração do *Teorema de Amitsur-Levitzki.*

Lema 4.1.1. *Seja* C *uma álgebra comutativa sobre* $\mathbb{Q}$. *Se* $a \in M_k(C)$ *é tal que* $tr\left(a\right) = tr\left(a^2\right) = \ldots = tr\left(a^k\right)$, *então* $a^k = 0$.

Demonstração. Ver [7], Lema 1.7.4. □

Lema 4.1.2. *Se* $a, b \in M_k\left(G_1\right)$, *então* $tr\left(ab\right) = -tr\left(ba\right)$.

Demonstração. Ver [7], Lema 1.7.5. □

Corolário 4.1.3. *Sejam* $r \geq 1$ *e* $a_1, \ldots, a_{2r} \in M_k\left(F\right)$. *Então,* $tr\left(St_{2r}\left(a_1, \ldots, a_{2r}\right)\right) = 0$.

Demonstração. Ver [7], Lema 1.7.6. □

Agora apresentaremos a demonstração do *Teorema de Amitsur-Levitzki*, **Teorema 2.3.3**.

Demonstração. Mostraremos que St_{2k} é satisfeito por $M_k\left(\mathbb{Q}\right)$. Sejam $a_1, \ldots, a_{2k} \in M_k\left(\mathbb{Q}\right)$, $G = G_1 \dot{+} G_0$ a álgebra de Grassmann sobre o corpo dos racionais e considere $a = \sum_{i=1}^{2k} a_i e_i \in M_k\left(G_1\right)$. Temos $a^{2k} = \sum_{\sigma \in S_{2k}} sgn\left(\sigma\right) a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(2k)} e_1 \cdots e_{2k}$. Como $a, a^{2i-1} \in M_k\left(G_1\right)$, pelo **Lema 4.1.2**, temos que $tr\left(a^{2i}\right) = tr\left(aa^{2i-1}\right) = -tr\left(a^{2i-1}a\right) = -tr\left(a^{2i}\right) \Rightarrow tr\left(a^{2i}\right) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Pelo **Lema 4.1.1**, temos que $a^{2k} = 0$. Logo, concluímos que $St_{2k} = 0$ em $M_k\left(\mathbb{Q}\right)$. □

4.2 Superálgebras Simples

Definição 4.2.1. *Uma* F*-álgebra* A *é dita* **superálgebra** *(ou álgebra* $\mathbb{Z}_2$*-graduada) se existem dois subespaços vetoriais* A_0 *e* A_1, *tais que:*

1. $A = A_0 \dot{+} A_1$;

2. $A_0 A_0 + A_1 A_1 \subseteq A_0$;

3. $A_0A_1 + A_1A_0 \subseteq A_1$.

Note que A_0 é uma F-subálgebra de A. Denotaremos a $\mathbb{Z}_2$-graduação de A pelo par (A_0, A_1). Chamaremos A_0 de componente par e, A_1 de componente ímpar. Diremos que os elementos de A_0 são homogêneos de grau 0 e os elementos de A_1 são homogêneos de grau 1.

Exemplo 4.2.1. *A álgebra de Grassmann é uma superálgebra com graduação* (G_0, G_1).

Exemplo 4.2.2. *Toda álgebra admite uma graduação trivial* $(A_0 = A, A_1 = (0))$.

Exemplo 4.2.3. *A álgebra* $M_n(F)$ *é* $\mathbb{Z}_2$*-graduada, com graduação trivial* $(M_n(F), 0)$.

Exemplo 4.2.4. *A álgebra* $M_{k,l}(F)$ *possui graduação* $\left((M_{k,l}(F))_0, (M_{k,l}(F))_1\right)$, *em que*

$$(M_{k,l}(F))_0 = \begin{pmatrix} M_{k\times k}(F) & 0 \\ 0 & M_{l\times l}(F) \end{pmatrix} \ e \ (M_{k,l}(F))_1 = \begin{pmatrix} 0 & M_{k\times l}(F) \\ M_{l\times k}(F) & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 4.2.5. *Considere* G *um grupo de ordem 2 e* c *o seu gerador. A álgebra* FG *é uma* F*-superálgebra com a seguinte* $\mathbb{Z}_2$*-graduação:*

$$(F, cF).$$

Exemplo 4.2.6. *A* F*-álgebra* $M_n\left(F \dotplus cF\right)$ *é* Z_2*-graduada com graduação* $(M_n(F), cM_n(F))$.

Exemplo 4.2.7. *Seja* $A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, *em que* $A_1, \ldots, A_m$ *são superálgebras, então* $A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$ *também é uma superálgebra com graduação* $((A_1)_0 \oplus \ldots \oplus (A_m)_0, (A_1)_1 \oplus \ldots \oplus (A_m)_1)$.

Exemplo 4.2.8. *Sejam* A, B *superálgebras, então* $A \otimes B$ *é superálgebra, com umas das seguintes graduações:*

$$\left(A_0 \otimes B_0 \dotplus A_1 \otimes B_1,\ A_0 \otimes B_1 \dotplus A_1 \otimes B_0\right) \quad , \quad \begin{array}{l} \left(A_0 \otimes B_0 \dotplus A_0 \otimes B_1,\ A_1 \otimes B_0 \dotplus A_1 \otimes B_1\right), \\ \left(A_0 \otimes B_0 \dotplus A_1 \otimes B_0,\ A_0 \otimes B_1 \dotplus A_1 \otimes B_1\right). \end{array}$$

Neste texto, consideraremos apenas a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação para o produto tensorial:

$$\left(A_0 \otimes B_0 \dotplus A_1 \otimes B_1,\ A_0 \otimes B_1 \dotplus A_1 \otimes B_0\right).$$

Definição 4.2.2. *Diremos que uma subálgebra* B *(subespaço ou ideal) possui uma* **graduação induzida** *de* A *se* B *herda a graduação de* A, *isto é ,* $B = \bigoplus_{g\in\mathbb{Z}_2} B \cap A_g$, *em que* $A = \bigoplus_{g\in\mathbb{Z}_2} A_g$.

Definição 4.2.3. *Sejam* A *e* B *duas* F*-superálgebras e* $\varphi\colon\ A \longrightarrow B$ *um homomorfismo de* F*-álgebras. Diremos que* φ *é um* **homomorfismo de F-superálgebras** *se* $\varphi(A_0) \subseteq B_0$ *e* $\varphi(A_1) \subseteq B_1$.

A proposição seguinte nos permite verificar se a F-álgebra é uma superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação não-trivial.

Proposição 4.2.1. *Seja* A *uma álgebra. Então,* A *admite* $\mathbb{Z}_2$*-graduação não trivial se existe* φ *automorfismo de* A *de ordem 2, e é trivial se a ordem de* φ *for 1. Em particular,* V, *uma subálgebra de* A, *possui graduação induzida de* A *se* V *for invariante por automorfismo de* A.

Demonstração. Suponha que A seja uma F-superálgebra. Considere o seguinte homomorfismo de F-álgebras:

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & A & \longrightarrow & A \\ & a_0 + a_1 & \longmapsto & a_0 - a_1 \end{array}$$

em que $a_0 \in A_0$ e $a_1 \in A_1$. Se A possui $\mathbb{Z}_2$-graduação não trivial, é possível ver que φ é um automorfismo de A de ordem 2.

Reciprocamente, suponha que A seja álgebra e existe φ automorfismo de ordem 2. Defina os subespaços

$$A_0 = \{a \in A \mid \varphi(a) = a\} \text{ e } A_1 = \{a \in A \mid \varphi(a) = -a\}.$$

Notemos que se $a \in A_0 \cap A_1 \Rightarrow a = 0$ e portanto, $A_0 \cap A_1 = \{0\}$. Observe ainda que

$$A_0A_0 + A_1A_1 \subseteq A_0 \text{ e } A_0A_1 + A_1A_0 \subseteq A_1.$$

Além disso, se $a \in A$, existem $a_0 \in A_0$ e $a_1 \in A_1$ tais que $a = a_0 + a_1$. De fato, considere os seguintes candidatos,

$$a_0 = \frac{a + \varphi(a)}{2} \; e \; a_1 = \frac{a - \varphi(a)}{2}$$

e observe que

$$\varphi(a_0) = \frac{\varphi(a) + \varphi^2(a)}{2} = a_0 \; e \; \varphi(a_1) = \frac{\varphi(a) - \varphi^2(a)}{2} = -a_1.$$

Logo, A é uma superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação não trivial.

Suponha que $\varphi(V) = V$. Para cada $x \in V$, temos que $x = x_0 + x_1$, em que $x_i \in A_i,\ i = 0, 1$. Como $\varphi(x) = x_0 - x_1 \in V$ e $x \in V$, sendo V subespaço vetorial, temos que $x_1 = \frac{x - \varphi(x)}{2}$, $x_0 = \frac{x + \varphi(x)}{2} \in V$. Logo, $V = (V \cap A_0) \dot{+} (V \cap A_1)$.

Reciprocamente, suponha V subespaço $\mathbb{Z}_2$-graduado. Seja $x \in V$, então $x = x_0 + x_1$, onde $x_0, x_1 \in V$. Como V é subsepaço, temos que $\varphi(x) = x_0 - x_1 \in V$. Temos assim que $\varphi(V) \subseteq V$. Já que ordem de φ é 2 segue que $V = \varphi^2(V) \subseteq \varphi(V)$. Logo, $\varphi(V) = V$. □

Definição 4.2.4. *Sejam R um anel e M um R-módulo. O* **anulador** *de M em R:*

$$Ann_R(M) = \{r \in R \mid rm = 0,\ \forall m \in M\}.$$

Diremos que M é um R-módulo **fiel** *se $Ann_R(M) = (0)$.*

Notemos que $Ann_R(M)$ é um ideal bilateral de R.

Definição 4.2.5. *O* **radical de Jacobson** *de um anel R é a interseção dos anuladores de todos os R-módulos simples. Denotaremos por $J(R) = J$.*

Observe que $J(R)$ é ideal bilateral de R. Se R for unitário, temos que $J(R) \neq R$.

Observação 4.2.2. *O radical de Jacobson de uma álgebra A coincide com o radical de Jacobson de A como anel.*

Proposição 4.2.3. *Seja A uma álgebra de dimensão finita. Então, o radical de Jacobson de A é o maior ideal nilpotente de A.*

Demonstração. Ver [14], Proposição 8.34. □

Definição 4.2.6. *Uma* **superálgebra** A **é dita simples** *se não possui ideais graduados não triviais e* $A^2 \neq 0$.

Observe que se A é simples como álgebra, então ela é simples como superálgebra.

Exemplo 4.2.9. *Como $M_n(F)$ e $M_{k,l}(F)$ são álgebras simples, temos que são superálgebras simples.*

Exemplo 4.2.10. $M_k\left(F \dot{+} cF\right)$*, em que $c^2 = 1$, é uma álgebra semissimples e uma superálgebra simples.*

Demonstração. É semissimples, pois $M_k\left(F \dot{+} cF\right) = \frac{1-c}{2}M_k(F) \oplus \frac{1+c}{2}M_k(F)$.

Vamos mostrar que é simples como superálgebra, isto é, que os únicos ideais não triviais de $M_k\left(F \dot{+} cF\right)$ são $\frac{1-c}{2}M_k(F), \frac{1+c}{2}M_k(F)$ e esses não são graduados.

Suponha que J é um ideal de $M_k\left(F \dot{+} cF\right) = \frac{(1-c)}{2}M_k(F) \oplus \frac{(1+c)}{2}M_k(F)$. Se $x \in J$, então $x = a + b$, em que $a \in A = \frac{(1-c)}{2}M_k(F)$ e $b \in \frac{(1+c)}{2}M_k(F) = B$. Considere

$$J_1 = \{a \in A \mid a + b \in J, \text{ para algum } b \in B\} \text{ e } J_2 = \{b \in B \mid y + b \in J, \text{ para algum } y \in A\}.$$

Vamos mostrar que J_1 é ideal de A e J_2 é ideal de B.

Sejam $a, \lambda d \in J_1$, em que $\lambda \in F$, então existem $b, c \in B$ tais que $a + b \in J$ e $\lambda d + c \in J$. Como J é ideal, temos que $a - \lambda d + b - c \in J$, em que $a - \lambda d \in A$ e $b - c \in B$. Logo, J_1 é F-subespaço vetorial de J.

Agora vamos mostrar que é fechado para o produto: sejam $a, c \in J_1$, então existem $b, d \in B$ tais que $a + b, c + d \in J$. Assim,

$$J \ni (a + b)(d + c) = ad + bc + ac + bd = ac + bd,$$

pois $ad = bc = 0$ o que implica $ac \in J_1$. Portanto, J_1 é ideal de A. Analogamente, mostra-se que J_2 é ideal de B. Segue que $J = J_1 \oplus J_2$. Sendo J_1 ideal de $\frac{(1-c)}{2}M_k(F)$, então ele é da forma $\frac{(1-c)}{2}I_1$, em que I_1 é ideal de $M_k(F)$, mas $M_k(F)$ é simples, então $I_1 = 0$ ou $I_1 = M_k(F)$. Fazemos o mesmo raciocínio para J_2, obtemos que J é igual a algum dos ideais abaixo:

$$0; \frac{(1-c)}{2}M_k(F); \frac{(1+c)}{2}M_k(F); \frac{(1-c)}{2}M_k(F) \oplus \frac{(1+c)}{2}M_k(F).$$

Portanto, os únicos ideais não triviais de $M_k\left(F \dot{+} cF\right)$ são $\frac{(1-c)}{2}M_k(F)$ e $\frac{(1+c)}{2}M_k(F)$.

Note que $\frac{(1-c)}{2}M_k(F)$ e $\frac{(1+c)}{2}M_k(F)$ não são graduados, pois $\frac{1\pm c}{2}M_k(F) \cap cM_k(F) = \{0\} = \frac{1\pm c}{2}M_k(F) \cap M_k(F)$. Logo, $M_k(F \dot{+} cF)$ é superálgebra simples. □

Os dois seguintes teoremas nos permitem uma descrição das álgebras de dimensão finita sobre um corpo de característica zero e algebricamente fechado.

Teorema 4.2.4. *[Descrição de superálgebras simples] Seja A uma superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então, A é uma das seguintes superálgebras:*

1. *$M_k(F)$ com graduação $(M_k(F), 0)$;*
2. *$M_k\left(F \dot{+} cF\right)$, em que $c^2 = 1$ com graduação $(M_k(F), cM_k(F))$;*
3. *$M_{k,l}(F)$, com graduação $\left((M_{k,l}(F))_0, (M_{k,l}(F))_1\right)$, em que*

$$(M_{k,l}(F))_0 = \begin{pmatrix} M_{k\times k}(F) & 0 \\ 0 & M_{l\times l}(F) \end{pmatrix} \quad (M_{k,l}(F))_1 = \begin{pmatrix} 0 & M_{k\times l}(F) \\ M_{l\times k}(F) & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Ver [7], Teorema 3.5.3. □

Observe que as superálgebras simples de dimensão finita são unitárias, e a unidade pertence à parte par da graduação. Consequentemente, as álgebras semissimples são unitárias.

Exemplo 4.2.11. *Seja A uma álgebra simples. Como $J(A)$ é um ideal de A, temos que $J = A$ ou $J = (0)$. Não podemos ter $J = A$, pois A é unitária. Portanto, $J = (0)$.*

Exemplo 4.2.12. *Se $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ é uma álgebra semissimples, então $J(A) = (0)$.*

Exemplo 4.2.13. *$J(UT(d_1, \ldots, d_m)) = B_{12} \dot{+} \ldots \dot{+} B_{1m} \dot{+} B_{23} \dot{+} \ldots \dot{+} B_{2m} \dot{+} B_{(m-1)m}$ é o ideal bilateral, nilpotente maximal de expoente m do* **Exemplo 2.3.2**.

Lema 4.2.5. *Seja A uma superálgebra de dimensão finita, então o radical de Jacobson J herda a graduação de A.*

Demonstração. Como $dim_F A$ é finita, temos que J é o maior ideal nilpotente de A. Suponha que o expoente de nilpotência de J seja m. Mostraremos que $\varphi(J) = J$, pois pela **Proposição 4.2.1**, J é graduado se, e somente se , $\varphi(J) = J$.

Como A é $\mathbb{Z}_2$-graduado, então existe φ automorfismo de A,

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A & \longrightarrow & A \\ & a_0 + a_1 & \longmapsto & a_0 - a_1 \end{array},$$

em que $a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1$.

$(\subseteq)$ Considere ϕ um qualquer automorfismo de A restrito a J. Como J é subálgebra, temos que $\phi(J)$ também é, e mais $\phi(J)$ é ideal bilateral de A. De fato, se para quaisquer $x \in \phi(J),\ a, b \in A$, como ϕ é automorfismo, então $x = \phi(y),\ a = \phi(a')$ e $b = \phi(b')$, para alguns $y \in J$ e $a', b' \in A$. Assim,

$$\phi\left(a'yb'\right) = \phi(a')\phi(y)\phi(b') = axy \in \phi(J),$$

pois $a'yb' \in J$ $(a', b' \in A$ e $x \in J)$. Portanto, $\varphi(J)$ é ideal bilateral de A.

Agora observe que, para quaisquer $x_1, \ldots, x_m \in J$, temos $x_1 \cdots x_m = 0$, pois J é nilpotente de expoente m. Então,

$$\phi(x_1) \cdots \phi(x_m) = \phi(x_1 \cdots x_m) = \phi(0) = 0, \ \forall \ x_1, \ldots, x_m \in J.$$

Logo, $\phi(J)$ é nilpotente. Em particular, temos que $\varphi(J)$ é nilpotente. Já que J é o maior ideal nilpotente de A, temos que $\varphi(J) \subseteq J$.

$(\supseteq)$ Como φ é automorfismo, temos que φ^{-1} também é automorfismo. Então,

$$\varphi^{-1}(J) \subseteq J \Rightarrow \quad J = \varphi\left(\varphi^{-1}(J)\right) \subseteq \varphi(J).$$

Assim, pela **Proposição 4.2.1**, segue que J é $\mathbb{Z}_2$-graduado. □

Teorema 4.2.6. *[Teorema de Wedderburn-Malcev para superálgebras] Seja A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado e de característica zero. Então A pode ser decomposta como:*

$$A = B \dotplus J(A),$$

em que B é uma F-subálgebra maximal semissimples graduado de A, $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A. O radical de Jacobson de A, J, é um ideal bilateral graduado de A, $B = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$ e $A_1, \ldots, A_m$ são F-subálgebras simples com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de A isomorfa a uma das seguintes superálgebras: $M_k(F)$, $M_k(F \dotplus cF)$, $M_{k,l}(F)$.

Demonstração. Ver [7], Teorema 3.5.4. □

4.3 Envolvente de Grassmann

Definição 4.3.1. *Sejam $A = A_0 \dotplus A_1$ uma superálgebra e G a álgebra de Grassmann G. A álgebra*

$$G(A) = (A_0 \otimes G_0) \dotplus (A_1 \otimes G_1)$$

é chamada a **envolvente de Grassmann** *da álgebra A.*

Note que $G(A)$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $((A_0 \otimes G_0), \ (A_1 \otimes G_1))$.

Se A possui graduação trivial, temos que $G(A) = A \otimes G_0$. Neste caso, $Id(A) = Id(G(A))$, já que G_0 é comutativa e não nilpotente.

Sem dificuldades mostrar-se que $G(A \oplus B) = G(A) \oplus G(B)$.

Exemplo 4.3.1. *Como $M_n(F)$ possui graduação trivial, então $G(M_n(F)) = M_n(F) \otimes G_0 \cong M_n(G_0)$ como álgebras.*

Exemplo 4.3.2. $G\left(M_k(F \dot{+} cF)\right) = G_0 \otimes M_k(F) \dot{+} G_1 \otimes cM_k(F) \cong M_k(G)$ *como álgebra (onde* $c^2 = 1$*).*

Exemplo 4.3.3. $G(M_{k,l}(F)) = G_0 \otimes ((M_{k,l}(F))_0 \dot{+} G_1 \otimes (M_{k,l}(F))_1 \cong M_{k,l}(G)$ *como álgebras.*

Teorema 4.3.1. *[A. R. Kemer] Toda variedade não trivial $\mathcal{V}$ de álgebras é gerada pela envolvente de Grassmann de alguma superálgebra de dimensão finita $A = A_0 \dot{+} A_1$. Se uma variedade não contém a álgebra de Grassmann, então ela é gerada por alguma álgebra de dimensão finita.*

Demonstração. Ver [13], Teorema 2.3. □

Como consequência do teorema anterior, temos que uma variedade $\mathcal{V}$ definida pelo polinômio de Capelli ou pelo polinômio standard é gerada por uma álgebra de dimensão finita.

Teorema 4.3.2. $\chi_n(M_{k,l}(G)) \subseteq H(k^2 + l^2, 2kl),\ \forall\ n \geq 1.$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [2]. □

Teorema 4.3.3. $\chi_n(M_k(G)) \subseteq H(k^2, k^2),\ \forall\ n \geq 1.$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [5]. □

Como consequência dos teoremas anteriores e do **Teorama 3.4.1**, temos que:

Corolário 4.3.4. $E^*_{k^2+l^2,2kl} \subseteq Id(M_{k,l}(G)).$

Corolário 4.3.5. $E^*_{k^2,k^2} \subseteq Id(M_k(G)).$

4.4 Álgebras Verbalmente Primas

Definição 4.4.1. *Um* **ideal verbal** *de uma F-álgebra A é o conjunto de avaliações em A de um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Em outras palavras, se $\mathcal{I}$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, o ideal verbal de A é o conjunto*

$$\{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{I},\quad a_i \in A\},$$

e denotaremos por $\mathcal{I}(A)$.

Sem muitas dificuldades é possível mostrar que ideal verbal é fechado por endomorfismos.

Lema 4.4.1. *Todo ideal verbal é um ideal bilateral.*

Demonstração. Seja $\mathcal{I}(A)$ um ideal verbal de A e suponha que $r = f(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{I}(A)$ e $a \in A$. Considere $g = g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} f(x_1, \ldots, x_n)$, onde $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{I}$. Como $f \in \mathcal{I}$, temos que $g \in \mathcal{I}$. Logo, $ar = af(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n, a) \in \mathcal{I}(A)$. De modo similar, mostra-se que $\mathcal{I}(A)$ é um ideal à direita e um subespaço vetorial. Portanto, $\mathcal{I}(A)$ é um ideal bilateral de A. □

Demonstração. Seja

$$\mathcal{I}_1(A)\,\mathcal{I}_2(A)=\Big\{\sum_{i,j} f_i(a_{i_1},\ldots,a_{i_t})\,g_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_l}) \mid f_i(x_{i_1},\ldots,x_{i_t})\in\mathcal{I}_1, g_j(x_{j_1},\ldots,x_{j_l})\in\mathcal{I}_2,\ a_{u_k}\in A\Big\},$$

considere

$$\sum_{i,j} f_i(a_{i_1},\ldots,a_{i_t})\,g_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_l})=h(x_{i_1},\ldots,x_{i_t},x_{j_1},\ldots,x_{j_t})\in\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} f_i(a_{i_1},\ldots,a_{i_t})\,g_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_l})=h(a_{i_1},\ldots,\ldots,a_{i_t},a_{j_1},\ldots,a_{j_t})\in\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2(A).$$

Logo, $\mathcal{I}_1(A)\,\mathcal{I}_2(A)\subseteq\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2(A)$.

$(\supseteq)$

$$\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2(A)=\{h(a_1,\ldots,a_t)\ \mid h(x_1,\ldots,x_t)\in\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ a_i\in A\}.$$

Seja $h\in\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2$, então

$$h(x_1,\ldots,x_t)=\sum_{i,j} f_i(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})\,g_j(x_{j_1},\ldots,x_{j_l}),$$

em que $f_i\in\mathcal{I}_1,\ g_j\in\mathcal{I}_2$ e $x_{i_1},\ldots,x_{i_t},x_{j_1},\ldots,x_{j_l}\in\{x_1,\ldots,x_t\}$; assim

$$h(a_1,\ldots,a_t)=\sum_{i,j} f_i(a_{i_1},\ldots,a_{i_k})\,g_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_l})\in\mathcal{I}_1(A)\,\mathcal{I}_2(A),$$

pois $f_i(a_{i_1},\ldots,a_{i_k})\in\mathcal{I}_1(A),\ g_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_l})\in\mathcal{I}_2(A)$. Concluímos a igualdade. □

Definição 4.4.2. *Um T-ideal I é* **verbalmente primo** *se para quaisquer T-ideais I_1, I_2 o fato, $I_1I_2\subseteq I$ implica que $I_1\subseteq I$ ou $I_2\subseteq I$. Diremos que uma* **variedade $\mathcal{V}$ é prima** *se o correspondente T-ideal é verbalmente primo. E chamaremos uma álgebra A de verbalmente prima se ela gera uma variedade prima, isto é, se $Id(A)$ é verbalmente primo.*

Primeiro, observe que $F\langle X\rangle$ não é uma PI-álgebra. De fato, suponha que $f(x_1,\ldots,x_n)$ é uma identidade não nula para $F\langle X\rangle$, então para todo $h_i\in F\langle X\rangle$, temos que $f(h_1,\ldots,h_n)=0$, em particular para $h_i=x_i,\ i=1,\ldots,n$, contradição. Portanto, $Id(F\langle X\rangle)=(0)$.

Temos claramente que a variedade $\mathcal{V}=var(F\langle X\rangle)$ de todas as álgebras associativas, é prima.

O teorema seguinte mostra que as álgebras $M_n(F),\ \ M_{k,l}(G)\ \ e\ \ M_l(G)$ geram uma variedade prima.

Teorema 4.4.2. *Seja $A=M_n(F)$ ou $M_{k,l}(G)$ ou $M_l(G)$. Então, $\mathcal{V}=var(A)$ é prima.*

Demonstração. Suponhamos que Γ_1,Γ_2 são T-ideais de $F\langle X\rangle$ tais que $\Gamma_1,\Gamma_2\nsubseteq Id(A)$ e $\Gamma_1\Gamma_2\subseteq Id(A)$. Consideramos os ideais verbais de A, $\Gamma_1(A)$ e $\Gamma_2(A)$ correspondentes a Γ_1,Γ_2. Como $\Gamma_i\nsubseteq Id(A)$, temos $\Gamma_i(A)\neq\{0\},\ \ \forall\, i=1,2$. Por outro lado, $\Gamma_i(A)$ é ideal de A.

Se $A=M_n(F)$, temos que $\Gamma_i(A)=A$, pois A é álgebra simples. Como $\Gamma_1\Gamma_2\subseteq Id(A)$, temos que $\Gamma_1(A)\,\Gamma_2(A)=\Gamma_1\Gamma_2(A)=0$; assim, $0=\Gamma_1(A)\,\Gamma_2(A)=A^2$, mas $A=M_n(F)$ é álgebra simples, então $A^2\neq 0$, contradição. Logo, $\Gamma_1\Gamma_2\nsubseteq Id(A)$.

Agora suponhamos que $A = M_l(G)$. Então A pode ser vista como uma álgebra sobre G_0, isto é , se $a \in G_0$ e $x = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,l} \in M_l(G)$, então

$$ax = \begin{pmatrix} ab_{11} & \ldots & ab_{1l} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ ab_{l1} & \ldots & ab_{ll} \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que $x \in \Gamma_k(A)$, $k = 1$ ou $k = 2$. Como $\Gamma_i(A) \neq 0$, escolhemos $x \neq 0$, então $b_{ij} \neq 0$ para algum i, j. Consideramos os seguintes elementos de A:

$$y = g_1 \otimes e_{s,i} \ \text{ e } z = g_2 \otimes e_{j,t}, \ g_2, g_1 \in G \ \Rightarrow \ yxz = (g_1 b_{ij} g_2 \otimes e_{s,t}) \in \Gamma(A), \ \forall\ s, t = 1, \ldots, l$$

$$\Rightarrow (\alpha_{st} \otimes 1)\, yxz = (\alpha_{st} \otimes 1)(g_1 b_{ij} g_2 \otimes e_{s,t}) = \alpha_{st} g_1 b_{ij} g_2 \otimes e_{s,t} \in \Gamma(A), \forall\ \alpha_{st} \in G.$$

Em particular, podemos escolher os elementos $g_1, g_2 \in G$ tais que $g_1 b_{ij} g_2 = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{2N}}$, para algum N, em que $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{2N}}$ são todos distintos elementos da base de G, de forma que $g_1 b_{ij} g_2 \in G_0$.

De fato, seja $b_{ij} = \sum_k \beta_{i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, em que $\beta_{i_k} \in F$ e e_{i_j} são elementos geradores de G. Suponhamos que $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\}$ são elementos geradores de G tais que os momômios de b_{ij} sejam escritos como produto de alguns desses elementos (ou todos, pois pode haver um monômio que dependa de todos). Consideramos w o monômio de menor comprimento que aparece em b_{ij} e suponhamos que w seja escrito como produto de elementos de $\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\} \subseteq \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\}$, ponhamos g_1 e g_2 como $e_{k_1} \cdots e_{k_t}$ e $e_{k_{t+1}} \cdots e_{k_m}$ respectivamente, em que $\{e_{k_1}, \ldots, e_{k_m}\} = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\} - \{e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\}$. Como $e_{i_t} e_{i_t} = 0$, obtemos $g_1 b_{ij} g_2 = g_1 w_1 g_2$. Se comprimento de $g_1 b_{ij} g_2$ for ímpar, ponhamos $g_1 = e_{k_1} \cdots e_{i_t} e_u$, onde e_u é um elemento gerador de G tal que $e_u \notin \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\}$. Assim, $g_1 b_{ij} g_2$ é um monômio de comprimento par, ou seja, existe N tal que $g_1 b_{ij} g_2 = e_{i_1} \cdots e_{i_{2N}} \in G_0$. Logo, para qualquer $\alpha_{st} \in G$ para todo s, t, temos que $\alpha_{st} g_1 b_{ij} g_2 \otimes e_{s,t} = e_{i_1} \cdots e_{i_{2N}} \alpha_{st} e_{s,t} \in \Gamma(A)$. Assim, $e_{i_1} \cdots e_{i_{2N}} A \in \Gamma(A)$.

Recordamos que um ideal verbal de uma álgebra é invariante por endomorfismo. Consideramos $B = \{e_1, e_2, \ldots\}$ um conjunto de geradores G, e $B_j = \{e_{t_1}, \ldots, e_{t_{2N}}\} \subseteq B$, $j \in \mathbb{N}$, definimos a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_j : & G & \longrightarrow & G \\ & e_{i_p} & \longmapsto & e_{t_p} \\ & e_{t_p} & \longmapsto & e_{i_p} \\ & e_q & \longmapsto & e_q \end{array},$$

para quaisquer $p = 1, \ldots, 2N$ e $q \notin \{i_1, \ldots, i_{2N}, t_1, \ldots, t_{2N}\}$, ou seja, para $e_{i_k} \in \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{2N}}\}$, $e_{t_k} \in B_j$ e $e_q \notin B_j$. Daí, estendemos φ_j até $\bar{\varphi}_j : G \longrightarrow G$ dado por

$$\bar{\varphi}_j \left(\sum_{u,v} \beta_{u,v} e_{u_1} \cdots e_{u_v} \right) = \sum_{u,v} \beta_{u,v} \varphi_j(e_{u_1}) \cdots \varphi_j(e_{u_v}), \ \beta_{u,v} \in F.$$

$\bar{\varphi}_j$ é um automorfismo de G. Note ainda que o automorfismo $\bar{\varphi}_j$ induz um automofismo

$$\begin{array}{rccc} \phi_j & : & M_l(G) & \longrightarrow & M_l(G) \\ & & e_r \otimes e_{s,t} & \longmapsto & \bar{\varphi}_j(e_r) \otimes e_{s,t} \end{array}$$

Dessa forma, como $e_{i_1} \cdots e_{i_{2N}} A \subseteq \Gamma(A)$ e $\Gamma(A)$ é fechado por endomorfismo, temos $G_0^N A \subseteq \Gamma(A)$. Agora sejam Γ_1, Γ_2 conforme consideramos anteriormente, mostramos que existem N_1, N_2 tais que $G_0^{N_1} A \subseteq \Gamma_1(A)$ e $G_0^{N_2} A \subseteq \Gamma_2(A)$; assim, $0 \neq G_0^{N_1+N_2} A^2 \subseteq \Gamma_1(A)\Gamma_2(A) = 0$, contradição, já que $G_0^{N_1+N_2}$ e A^2 são não nulos e teremos que $G_0^{N_1+N_2} A^2 \neq \{0\}$. Logo, $\Gamma_1\Gamma_2 \not\subseteq Id(A)$ o que implica $var(A)$ é prima.

Se $A = M_{k,l}(G)$, a demonstração é similar ao caso $A = M_l(G)$. Suponhamos que $x \in \Gamma(A)$, e pegamos $y, z \in A$ da mesma forma como no caso anterior, em que $yxz = g_1 b_{ij} g_2 \otimes e_{s,t}$. Se $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ *ou* $i, j \in \{k+1, \ldots, k+l\}$, então $b_{ij} \in G_0$, se $i \in \{1, \ldots, k\}$ *e* $j \in \{k+1, \ldots, k+l\}$ ou $j \in \{1, \ldots, k\}$ *e* $i \in \{k+1, \ldots, k+l\}$, então $b_{ij} \in G_1$. Podemos escolher g_1, g_2 tais que $g_1 b_{ij} g_2$ é ímpar ou par, corresponde à posição (s,t).

A partir de agora a demonstração segue de forma análoga como no caso de $A = M_l(G)$.

Portanto, $var(A)$ é prima, em que $A = M_n(F)$ ou $M_{k,l}(G)$ ou $M_l(G)$. □

Corolário 4.4.3. *As álgebras $M_n(F)$, $M_{k,l}(G)$ e $M_l(G)$ são verbalmente primas.*

A. R. Kemer caracterizou os T-ideais verbalmente primos sobre um corpo de característica zero e afirmou que este estudo de T-ideais verbalmente primos pode ser reduzido a T-ideais de identidades das seguintes álgebras verbalmente primas: $F\langle X\rangle$, $M_k(F)$, $M_k(G)$, $M_{k,l}(G)$, para $k, l > 0$.

Teorema 4.4.4. *[A. R. Kemer] Seja uma variedade não trivial $\mathcal{V}$ sobre um corpo de característica zero. Então, $\mathcal{V}$ é verbalmente prima se, e somente se, $\mathcal{V} = var(G(A))$, em que A é uma das superálgebras simples.*

Demonstração. Ver [13], Teorema 1.2. □

4.5 O PI-expoente de uma Álgebra

Sejam A uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero e $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ a sua sequência de codimensões.

Sabemos que se A é uma álgebra nilpotente de expoente N, então a sua sequência de codimensões é $c_n(A) = 0$, para $n \geq N$ inteiro. A. Regev provou que se A satisfaz alguma identidade de grau $d \geq 1$, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$.
Dessa maneira, se A é uma PI-álgebra, existe uma constante $a \in \mathbb{N}$ tal que:

$$0 \leq c_n(A) \leq a^n.$$

Portanto, a sequência da n-ésima raiz $\sqrt[n]{c_n(A)}$, $n = 1, 2, \ldots$ é limitada e podemos definir:

Definição 4.5.1.

$$\overline{exp\,(A)} := \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{c_n\,(A)}$$

é chamado o **expoente superior** *de* A.

Definição 4.5.2.

$$\underline{exp\,(A)} := \lim_{n\to\infty} inf \sqrt[n]{c_n\,(A)}$$

é chamado o **expoente inferior** *de* A.

Definição 4.5.3. *Quando* $\overline{exp\,(A)} = \underline{exp\,(A)}$*, definimos o* **PI-expoente** *de* A *por:*

$$exp\,(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n\,(A)}.$$

No caso em que $\mathcal{V} = var\,(A)$ é uma variedade de álgebras sobre F gerada por A, escreveremos $exp\,(\mathcal{V}) = exp\,(A)$

Assumiremos F um corpo algebricamente fechado de característica zero. Seja $A = A_0 \dot{+} A_1$ uma álgebra Z_2-graduada de dimensão finita sobre F. Pelo Teorema de Wedderburn-Malcev para superálgebras de dimensão finita,

$$A = A_{ss} \dot{+} J,$$

em que $A_{ss} = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_k$ é subálgebra maximal semissimples $\mathbb{Z}_2$-graduada de A, $A_1, \ldots, A_k$ são superálgebras simples, e $J = J\,(A)$ é o radical de Jacobson de A, que também é graduado. Denotaremos por $m = dim_F A$.

Consideraremos todos os produtos do tipo

$$B_1 J B_2 \ldots B_{r-1} J B_r \neq 0 \tag{4.1}$$

em que $B_1, \ldots, B_r$ são distintas subálgebras retiradas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_k\}$, com $r \leq k$.
Seja

$$q := max\{dim_F\,(B_1 \oplus \ldots \oplus B_r)\} \tag{4.2}$$

em que $B_1, \ldots, B_r$ satistaz (4.1).

A. Giambruno e M. Zaicev provaram que existe uma estreita conexão entre $exp\,(G\,(A))$ e o número q definido acima. Provaram que se U é uma PI-álgebra sobre um corpo qualquer de característica zero, então $exp\,(U)$ existe e é um inteiro. E mais, se incluir a hipótese de F ser algebricamente fechado e A uma álgebra de dimensão finita $\mathbb{Z}_2$-graduada cuja $G\,(A)$ satisfaz as mesmas identidades de U, então $exp\,(U) = exp\,(G\,(A)) = dim_F B_{ss}$, em que B_{ss} é uma adequada subálgebra de A $\mathbb{Z}_2$-graduada semissimples.

Teorema 4.5.1. *Seja* A *uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado* F *de característica zero e* $q \geq 0$ *o inteiro definido anteriormente . Então, existem constantes dependendo apenas da* $dim_F A$, C_1, C_2, r_1, r_2 *tais que* $C_1, C_2 \neq 0$ *e*

$$C_1 n^{r_1} q^n \leq c_n\,(G\,(A)) \leq C_2 n^{r_2} q^n.$$

Em particular, $\exp(G(A)) = q$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [7]. $\square$

Corolário 4.5.2. *Seja U uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero. Então existem constantes C_1, C_2, r_1, r_2, $q \geq 0$ tal que $C_1, C_2 \neq 0$ e*

$$C_1 n^{r_1} q^n \leq c_n(U) \leq C_2 n^{r_2} q^n.$$

Consequentemente, $exp(U)$ existe e é um inteiro não negativo.

Demonstração. Pelo **Teorema 3.3.3**, $c_n^F(U) = c_n^{\bar{F}}\left(U \otimes \bar{F}\right)$ para todo $n \geq 1$, em que $\bar{F}$ é o fecho algébrico de F. Então, sem perda de generalidade, podemos supor que F é algebricamente fechado. Considere $\mathcal{V} = var(U)$. Pelo **Teorema 4.3.1**, existe uma superálgebra de dimensão finita A tal que $\mathcal{V} = var(U) = var(G(A))$. Por outro lado, como $Id(U) = Id(G(A))$, temos que $c_n(U) = c_n(G(A))$, para todo $n \geq 1$. Assim, pelo **Teorema 4.5.1**, concluímos o resultado. $\square$

Vamos considerar alguns casos particulares.

Seja A uma álgebra de dimensão finita, então ela pode considerada como uma superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial. Neste caso,

$$G(A) = A \otimes G_0 \dot{+} 0 \otimes G_0 = A \otimes G_0.$$

Como $Id(A) = Id(A \otimes G_0)$, pois G_0 coincide com o centro da álgebra de Grassmann e é não nilpotente, temos que $Id(A) = Id(G(A))$. Assim,

$$c_n(G(A)) = c_n(A) \ \Rightarrow exp(A) = exp(G(A)), \ \forall\ n.$$

Se $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$ é superálgebra semissimples, então $J(A) = 0$, onde $A_1, \ldots, A_m$ são superálgebras simples. Para que (4.1) seja satisfeito, temos que $r = 1$. Assim, $q = max_{1 \leq i \leq n}\{dim_F\ A_i\}$.

Se A é superálgebra simples, então $exp(G(A)) = dim_F A$.

Assim, é possível calcular o PI-expoente das álgebras verbalmente prima.

Exemplo 4.5.1. *$exp(M_k(F)) = dim(M_k(F)) = k^2 = exp(M_k(G_0))$, pois $M_k(F)$ é superálgebra simples.*

Exemplo 4.5.2. *Recorde que $G\left(M_k\left(F \dot{+} cF\right)\right) \cong M_k(G)$ e $M_k\left(F \dot{+} cF\right)$ é superalgebra simples, em que $c^2 = 1$. Assim, obtemos que $exp(M_k(G)) = 2k^2 = dim_F(M_k(F \dot{+} cF))$.*

Exemplo 4.5.3. *Como $G(M_{k,l}(F)) \cong M_{k,l}(G)$, temos que $exp(M_{k,l}(G)) = (k+l)^2 = dim_F(M_{k,l}(F))$, pois $M_{k,l}(F)$ é superálgebra simples.*

Corolário 4.5.3. *$exp(UT(d_1, \ldots, d_m)) = d_1^2 + \ldots + d_m^2$.*

Demonstração. $B = UT(d_1, \ldots, d_m) \cong M_{d_1}(F) \oplus \ldots \oplus M_{d_m}(F) \dotplus J(B)$. Considere $q_i = d_1 + \ldots + d_i$ e observe que o seguinte produto:

$$e_{q_1,q_1} e_{q_1,q_1+1} e_{q_1+1,q_2} e_{q_2,q_2+1} \cdots e_{q_{m-1},q_{m-1}+1} e_{q_{m-1}+1,q_m} \neq 0$$

é não nulo, em que $e_{q_1,q_1} \in M_{q_1}(F)$, $e_{q_i,q_i+1} \in J$, $\forall\, i = 1, \ldots, m-1$, $e_{q_{i-1}+1,q_i} \in M_{d_i}(F)$, $\forall\, i = 1, \ldots, m$. Logo,

$$d_1{}^2 + \ldots + d_m{}^2 = dim_F\left(M_{d_1}(F) \oplus \ldots \oplus M_{d_m}(F)\right) = exp(B).$$

□

Proposição 4.5.4. *Sejam A, B duas PI-álgebras sobre F, então $exp(A \oplus B) = max\{exp(A), exp(B)\}$.*

Demonstração. Pelo **Corolário 4.5.2**, temos que $c_n(A) \leq g(n)\, q_1^n$ e $c_n(B) \leq h(n)\, q_2^n$, em que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{g(n)} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{h(n)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{g(n)}{h(n)}} = 1,\ q_1 = exp(A) \text{ e } q_2 = exp(B).$$

Suponhamos que $q_1 > q_2$. Assim, temos $q_1^n > q_2^n$, para todo $n \geq 1$. Considere $z(n) = max\{h(n), g(n)\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Assim, $z(n) \geq h(n), g(n)$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{z(n)} = 1$.

Recorde que, pela **Proposição 3.3.4**,

$$c_n(A), c_n(B) \leq c_n(A \oplus B) \leq c_n(A) + c_n(B).$$

Daí,

$$exp(A) = q_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \leq exp(A \oplus B) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A \oplus B)} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{g(n)\, q_1^n + h(n)\, q_2^n} \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{z(n)\, q_1^n + z(n)\, q_2^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{z(n)} \sqrt[n]{q_1^n} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{q_2^n}{q_1^n}\right)} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{z(n)} q_1 \left(1 + \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^n\right) = q_1,$$

pois $\lim_{n\to\infty} \frac{q_2^n}{q_1^n} = 0$. Portanto,

$$exp(A) = exp(A \oplus B).$$

Como $exp(A) = max\{exp(A), exp(B)\}$, concluímos que

$$exp(A \oplus B) = max\{exp(A), exp(B)\}.$$

□

4.6 Superálgebra Minimal

Nesta seção, iremos assumir F um corpo algebricamente fechado e de característica zero, e A uma superálgebra de dimensão finita.

Lema 4.6.1. *Se $A = A_0 \dot{+} A_1$ é uma superálgebra simples de dimensão finita, então existem idempotentes ortogonais $e_1, \ldots, e_n \in A_0$ tais que $e_1 + \ldots + e_n = 1$ e, para cada $i = 1, \ldots, n$, Ae_i (respectivamente e_iA) é um* **ideal minimal graduado à esquerda de** *A (respectivamente à direita).*

Demonstração. Basta recordar que as superálgebras simples de dimensão finita possuem identidade e sua identidade é a soma das matrizes elementares que estão na diagonal principal e, tais matrizes são idempotentes ortogonais e são homogêneos de grau 0. □

Definição 4.6.1. *Os idempotentes do lema anterior são chamados* **idempotentes minimais ortogonais graduados** *da superálgebra simples A.*

Se $A = A_0 \dot{+} A_1$ é uma superálgebra de dimensão finita, pelo Teorema de Wedderburn-Malcev, escrevemos $A = A_{ss} \dot{+} J$, em que A_{ss} é uma superálgebra semissimples e $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A. Escrevemos $A_{ss} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, em que $A_1, \ldots, A_m$ são superálgebras simples.

Definição 4.6.2. *Sejam A uma superálgebra de dimensão finita e $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \dot{+} J$ com $A_1, \ldots, A_m$ superálgebras simples. Então, A é* **superálgebra minimal** *se:*

1. *existem elementos homogêneos $w_{1,2}, \ldots, w_{m-1,m} \in J_0 \cup J_1$ e idempotentes minimais graduados $e_1 \in A_1, \ldots, e_m \in A_m$ tais que $e_iw_{i,i+1} = w_{i,i+1}e_{i+1} = w_{i,i+1}$, $i = 1, \ldots, m-1$, e $w_{1,2}w_{2,3} \cdots w_{m-1,m} \neq 0$;*
2. *$\{w_{1,2}, \ldots, w_{m-1,m}\}$ gera J como um ideal bilateral de A.*

Exemplo 4.6.1. *As álgebras $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ e $M_n\left(F \dot{+} cF\right)$ são superálgebras minimais, satisfazem trivialmente a definição.*

Lema 4.6.2. *Seja B uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, de característica zero e $B = B_{ss} \dot{+} J$, em que $B_{ss} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, com $A_1, \ldots, A_n$ superálgebras simples. Se $m \leq n$ é tal que $A_1JA_2J \ldots JA_m \neq 0$, então existe uma superálgebra minimal A contida em B tal que $A_{ss} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$.*

Demonstração. Como $A_1J \ldots JA_m \neq 0$, então existem $a_1 \in A_1, \ldots, a_m \in A_m$ e $x_1, \ldots, x_{m-1} \in J$, tais que

$$a_1x_1a_2 \cdots x_{m-1}a_m \neq 0. \tag{4.3}$$

Para cada i, $a_i = a_i^0 + a_i^1$ e $x_i = x_i^0 + x_i^1$, com $a_i^0 \in A_0$, $a_i^1 \in A_1$, $x_i^0 \in J_0$, $x_i^1 \in J_1$. Substituindo em (4.3), obtemos que

$$a_1^{q_1}x_1^{p_1}a_2^{q_2} \cdots x_{m-1}^{p_{m-1}}a_m^{q_m} \neq 0, \quad \text{para alguns } q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_{m-1} \in \{0, 1\}. \tag{4.4}$$

Vamos assumir que $x_1, \ldots, x_{m-1}, a_1, \ldots, a_m$ são homogeneos na $\mathbb{Z}_2$-graduação.
Sejam $1_1, \ldots, 1_m$ as unidades das álgebras $A_1, \ldots, A_m$, respectivamente. Então, podemos escrever

$$1_1 (a_1 x_1 a_2) 1_2 (x_2 a_3) 1_3 \cdots 1_{m-1} (x_{m-1} a_m) 1_m \neq 0. \tag{4.5}$$

Pelo **Lema 4.6.1**, $1 = e'_1 + \ldots + e'_m$, em que $e''_i s$ são idempotentes minimais ortogonais graduados de A_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Assim, obtemos

$$e_1 (a_1 x_1 a_2) e_2 (x_2 a_3) e_3 \cdots e_{m-1} (x_{m-1} a_m) e_m \neq 0, \tag{4.6}$$

para alguns idempotentes minimais ortogonais graduados $e_1 \in A_1, \ldots, e_m \in A_m$.

Definimos $w_{1,2} = e_1 (a_1 x_1 a_2) e_2$, $w_{23} = e_2 (x_2 a_3) e_3, \ldots,$ $w_{m-1,m} = e_{m-1} (x_{m-1} a_m) e_m$. Observemos que $w_{1,2}, w_{2,3}, \ldots, w_{m-1,m} \in J$, pois J é ideal bilateral de B, e que

$$e_i w_{i,i+1} = e_i e_i (x_i a_{i+1}) e_{i+1} = e_i (x_i a_{i+1}) e_{i+1} = w_{i,i+1} = e_i (x_i a_{i+1}) e_{i+1} e_{i+1} = w_{i,i+1} e_{i+1},$$

$\forall\ i = 2, \ldots, m-1$. De modo análogo temos $e_1 w_{12} = w_{12} e_2$.

Seja $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_m \dot{+} J(A)$, a álgebra gerada por $A_1, \ldots, A_m, w_{1,2}, \ldots, w_{m-1,m}$ sobre F, em que $J(A)$ é o radical de Jacobson de A gerado pelos elementos $w_{12}, \ldots, w_{m-1,m} \in J(B)$, assim $J(A) \subseteq J(B)$. Portanto, A satisfaz todas as condições da **Definição 4.6.2**. Logo, concluímos que A é uma superálgebra minimal. $\square$

O leitor deve ter percebido que, se $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_s \dot{+} J(B)$ é uma superálgebra minimal, então

$$exp\,(G(B)) = dim_F\{B_1 \oplus \ldots \oplus B_s\} = dim_F B_1 + \ldots + dim_F B_s,$$

pois satisfaz (4.1).

Lema 4.6.3. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo F algebricamente fechado e de característica zero. Se $exp\,(\mathcal{V}) \geq 2$, então existem uma superálgebra minimal A com subálgebra maximal semissimples A_{ss}, tal que $G(A) \in \mathcal{V}$ e $exp\,(\mathcal{V}) = dim_F A_{ss}$.*

Demonstração. Seja B uma superálgebra de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = var\,(G(B))$ e $B = B_{ss} \dot{+} J$, em que $B_{ss} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, com $A_1, \ldots, A_n$ superálgebras simples.
Vamos considerar todos os possíveis produtos da forma

$$A_{i_{\sigma(1)}} J \ldots J A_{i_{\sigma(m)}} \neq 0, \tag{4.7}$$

para algum $\sigma \in S_m$ e $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ são todas distintas. Então

$$exp\,(var\,(G(B))) = max\ dim_F\{A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_m}\},\ 1 \leq m \leq n,$$

tais que $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ satisfazem (4.7). Pelo **Lema 4.6.2**, existe uma superálgebra minimal A contida em B tal que $A = A_{ss} \dotplus J(A) = A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_m} \dotplus J(A)$. Portanto, $dim_F A_{ss} = exp(\mathcal{V})$ e como $G(A) \subseteq G(B)$, pois $A \subseteq B$, temos que $G(A) \in \mathcal{V}$. □

Lema 4.6.4. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, de característica zero F, e $A = A_{ss} \dotplus J$, em que $A_{ss} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ com $A_i \cong M_{d_i}(F)$, $1 \leq i \leq n$. Se para algum $m \leq n$, $A_1 J \ldots J A_m \neq 0$, então A contém uma subálgebra isomorfa a $UT(d_1, \ldots, d_m)$.*

Demonstração. Ver [7], Teorema 8.2.1. □

Teorema 4.6.5. *Se $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \dotplus J$ é uma superálgebra minimal, então*

$$Id(G(A)) = Id(G(A_1)) \ldots Id(G(A_m))$$

Demonstração. Ver [10], Corolário 4.4. □

Definição 4.6.3. *Seja $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \dotplus J$ uma superálgebra de dimensão finita com radical de Jacobson $J = J(A)$ e subálgebra maximal semissimples $A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, onde $A_1, \ldots, A_m$ superálgebras simples. Se $A_1 J \ldots J A_m \neq 0$, chamaremos A de* **superálgebra reduzida**.

Observe que toda álgebra minimal é reduzida.

Seja $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \dotplus J$ uma álgebra reduzida, então $A_1 J \ldots J A_m \neq 0$. Pelo **Lema 4.6.2**, existe uma superálgebra minimal $C = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \dotplus J(C)$ contida em A. Pelo **Lema 4.6.3**, $exp(G(A)) = \sum_{i=1}^{m} dim_F A_i = exp(G(C))$, e pelo **Teorema 4.6.5**, $Id(G(C)) = \mathcal{I}_1 \ldots \mathcal{I}_m$ é o produto de T-ideais verbalmente primos, $\mathcal{I}_i = Id(G(A_i))$.

Lema 4.6.6. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade própria não nilpotente de álgebras sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero. Então, existe um número finito de superálgebras reduzidas $B_1, \ldots, B_t$ e uma superálgebra D de dimensão finita tais que*

$$\mathcal{V} = var(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t) \oplus G(D))$$

com

$$exp(G(B_1)) = \ldots = exp(G(B_t)) = exp(\mathcal{V}) \quad e \quad exp(G(D)) < exp(\mathcal{V}).$$

Demonstração. Pelo **Teorema 4.3.1**, existe uma superálgebra de dimensão finita A tal que $\mathcal{V} = var(G(A))$, e pelo **Teorema 4.2.6**, $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \dotplus J$, em que $A_1, \ldots, A_m$ são superálgebras simples e J é o radical de Jacobson de A. Suponha que $exp(\mathcal{V}) = d$. Então existem distintas superálgebras $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ tais que

$$A_{i_1} J \ldots J A_{i_k} \neq 0 \text{ e } dim_F(A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}) = d.$$

Considere $L_1, \ldots, L_t$ todos os possíveis subconjuntos de $\{1, \ldots, m\}$ da forma $\{i_1, \ldots, i_k\}$ com a seguinte propriedade: se por exemplo, $L_j = \{i_1, \ldots, i_k\}$, então

$$dim_F(A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}) = d \;\text{ e }\; A_{i_{\sigma(1)}} J \ldots J A_{i_{\sigma(k)}} \neq 0, \tag{4.8}$$

para algum $\sigma \in S_k$.

Defina $B_j = A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k} \dot{+} J(A)$, para L_j, $j = 1, \ldots, t$. Assim, $exp(G(B_j)) = d$, pois satisfaz (4.1). Logo,

$$exp(G(B_j)) = d = exp(\mathcal{V}),$$

para quaisquer $j = 1, \ldots, t$.

Considere $D_1, \ldots, D_p$ todas as subálgebras de A do tipo $A_{j_1} \oplus \ldots \oplus A_{j_q} \dot{+} J(A)$, em que $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq m$ e satisfaçam

$$A_{j_{\sigma(1)}} J \ldots J A_{j_{\sigma(q)}} \neq 0 \quad \text{e} \quad \dim_F \left(A_{j_1} \oplus \ldots \oplus A_{j_q}\right) < d, \tag{4.9}$$

para $\sigma \in S_q$. Seja $D = D_1 \oplus \ldots \oplus D_p$, então $exp(G(D)) < exp(\mathcal{V})$. Vamos mostrar que

$$\mathcal{V} = var(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t) \oplus G(D)).$$

Como para cada $i = 1, \ldots, t$, $G(B_i)$, $G(D) \subseteq G(A)$, temos que

$$Id(G(A)) \subseteq Id(G(B_i)), Id(G(D)), \forall\, i = 1, \ldots, t \Rightarrow var(G(A)) \subseteq var(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t) \oplus G(D)).$$

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear tal que $f \in \cap_{i=1}^{t} Id(G(B_i)) \cap Id(G(D))$. Já que f é multilinear, podemos verificar que f é identidade para $G(A)$ apenas na base da álgebra A. Seja $\{b_1, \ldots, b'_p, r_1, \ldots, r'_q\}$ uma base para A, em que $\{b_1, \ldots, b'_p\}$ é base de $A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$ e $\{r_1, \ldots, r'_q\}$ é base de J. Considere as substituições $x_i = c_i \otimes g_i$, em que $c_i \in \{b_1, \ldots, b'_p, r_1, \ldots, r'_q\}$ e $g_i \in G_0 \cup G_1$. Sejam $c_1, \ldots, c_n \in A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_s} \cup J$, onde $\{i_1, \ldots, i_s\}$ é minimal conjunto assim. Existem duas possibilidades: $A_{i_1} J \ldots J A_{i_s} \neq 0$, ou $A_{i_1} J \ldots J A_{i_s} = 0$.

No primeiro caso $f(c_1 \otimes g_1, \ldots, c_n \otimes g_n) = 0$, pois significa que $c_1 \otimes g_1, \ldots, c_n \otimes g_n \in G(B_i)$, para algum i ou $c_1 \otimes g_1, \ldots, c_n \otimes g_n \in G(D)$.

Suponha que o segundo caso ocorra. Primeiro observe que se $c_i \in A_k$ e $c_j \in A_u$ tal que $k \neq u$, então $c_i.c_j = 0$, pois $A_k A_u = 0$ (soma direta). Ao substituir em f, $c_1 \otimes g_1, \ldots, c_n \otimes g_n$, obtem:

$$f(c_1 \otimes g_1, \ldots, c_n \otimes g_n) = \left(\sum \alpha_j b_{j_1} r_{l_1} \cdots r_{l_{u-1}} b_{j_u} + \sum \beta_l w_l\right) \otimes g_1 \cdots g_n,$$

em que $\sum \beta_l w_l$ é uma combinação linear de monômios $\beta_l w_l$ que contém expressões da forma $b_{j_1} b_{j_2}$, com $b_{j_1} \in A_i, b_{j_2} \in A_k,\ i \neq k$, pela observação acima,

$$\sum \beta_l w_l = 0$$

e

$$\sum \alpha_j b_{j_1} r_{l_1} \cdots r_{l_{u-1}} b_{j_u} \in A_{i_1} J \ldots J A_{i_s} = 0 \Rightarrow \sum \alpha_j b_{j_1} r_{l_1} \cdots r_{l_{u-1}} b_{j_u} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(c_1 \otimes g_1, \ldots, c_n \otimes g_n) &= \left(\sum \alpha_j b_{j_1} r_{l_1} \cdots r_{l_{u-1}} b_{j_u} + \sum \beta_l w_l\right) \otimes g_1 \cdots g_n = 0 \otimes g_1 \cdots g_n = 0 \\ &\Rightarrow f \in Id(G(A)) \Rightarrow \cap_{i=1}^{t} Id(G(B_i)) \cap Id(G(D)) \subseteq Id(G(A)). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{V} \subseteq var(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t) \oplus G(D))$. Concluímos a afirmação. $\square$

Corolário 4.6.7. *Seja A uma álgebra de dimensão finita. Então, existe um número finito de álgebras reduzidas $B_1, \ldots, B_t$ e uma álgebra de dimensão finita D tal que*

$$\mathcal{V} = var(B_1 \oplus \ldots \oplus B_t \oplus D)$$

com

$$exp(B_1) = \ldots = exp(B_t) = exp(\mathcal{V}) \quad e \; exp(D) < exp(\mathcal{V}).$$

Demonstração. Recorde que qualquer álgebra admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial. Assim, temos que $Id(A) = Id(G(A)) = Id(A \otimes G_0)$. Logo, $var(A) = var(G(A))$. $\square$

Pelo **Lema 4.6.6**, temos:

Corolário 4.6.8. $exp(G(B_1) \oplus \cdots \oplus G(B_t)) = exp(\mathcal{V})$.

Definição 4.6.4. *Diremos que duas sequências $f(n)$ e $g(n)$ são* **assintoticamente iguais**, *se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, e denotaremos por $f(n) \simeq g(n)$.*

Corolário 4.6.9. *Para qualquer variedade própria $\mathcal{V}$, existe um número finito de superálgebras reduzidas $B_1, \ldots, B_t$, tais que*

$$c_n(\mathcal{V}) \simeq c_n(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t)).$$

Demonstração. Pelo **Lema 4.6.6**, existem $B_1, \ldots, B_t$ superálgebras reduzidas tais que

$$\mathcal{V} = var(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t) \oplus G(D)) \quad \text{e} \quad exp(\mathcal{V}) = exp(G(B_1)) = \ldots = exp(G(B_t)) > exp(G(D)).$$

Pela **Proposição 3.3.4**, temos que

$$c_n(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t)) \leq c_n(\mathcal{V}) \leq c_n(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t)) + c_n(G(D)).$$

Sejam $k = exp(G(D)) < exp(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t)) = exp(\mathcal{V}) = q$, então para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned} \sqrt[N]{c_N(G(D))} &< \sqrt[N]{c_N(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t))} \Rightarrow \\ c_N(G(D)) &< c_N(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t)) \Rightarrow \\ 0 &\leq b_N = \frac{c_N(G(D))}{c_N(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t))} < 1. \end{aligned}$$

Sabemos, também, que $0 \leq \lim\limits_{N\to\infty} \sqrt[N]{b_N} = \dfrac{k}{q} < 1$.

Vamos mostrar que o *limsup* $b_N = 0$. Como b_N é limitada, então $\liminf b_N$ e $\limsup b_N$ existem. Suponhamos que $\limsup b_N = 0$, como $0 \leq \liminf b_N \leq \limsup b_N = 0$, temos que $\lim\limits_{N\to\infty} b_N = 0$. Suponhamos que $\limsup b_N = l > 0$, então dado $\epsilon > 0$, para um número infinito de $N_k \in \mathbb{N}$, ocorre

$$0 < l - \epsilon < b_{N_k} \Rightarrow 0 \leq \sqrt[N]{l-\epsilon} \leq \sqrt[N]{b_{N_k}}.$$

Como $\lim\limits_{N\to\infty} \sqrt[N]{b_N} = \dfrac{k}{q}$ converge, então qualquer subsequência de $\sqrt[N]{b_N}$ também converge para o mesmo valor. Assim,

$$0 < 1 = \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{l-\epsilon} \leq \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{b_{N_k}} = \frac{k}{q} < 1;$$

contradição. Logo, $l = 0$. Dessa forma,

$$\lim_{n\to\infty} 1 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{c_n(\mathcal{V})}{c_n(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t))} \leq \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{c_n(G(D))}{c_n(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t))} = 1 + 0.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n(\mathcal{V})}{c_n(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t))} = 1$ e obtemos a igualdade assintótica:

$$c_n(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t)) \simeq c_n(\mathcal{V}).$$

$\square$

Definição 4.6.5. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Diremos que $\mathcal{V}$ é* **minimal de expoente** $d \geq 2$ *se $exp(\mathcal{V}) = d$ e, para cada subvariedade própria $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, teremos $exp(\mathcal{U}) < d$.*

Teorema 4.6.10. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras tal que $exp(\mathcal{V}) \geq 2$. Então, $\mathcal{V}$ é variedade minimal se, e somente se, $\mathcal{V} = var(G(A))$, para alguma superálgebra minimal A, tal que $dim A_{ss} = d$, em que A_{ss} é a parte semissimples de A.*

Demonstração. Ver [7], Teorema 8.5.6. $\square$

Denotaremos por $var(f)$ a variedade cujo T-ideal é $\langle f \rangle_T$, o T-ideal gerado por f.

Definição 4.6.6. *O expoente da variedade $var(f)$ é chamado o* **expoente do polinômio** f *e é definido $exp(f) = exp(var(f))$.*

Similarmente, defina o expoente de qualquer conjunto de polinômios como o expoente da variedade correspondente.

Observação 4.6.11. *Uma outra estratégia foi dado em [7] página 214, para computar o PI-expoente de um polinômio. Foi dado que*

$$exp(f) = max\{exp(\mathcal{V}) \mid \mathcal{V} \text{ é uma variedade minimal que satisfaz } f \equiv 0\}.$$

Lema 4.6.12. $exp(St_{2m}) = exp(St_{2m+1}) = m^2, \ \forall m \geq 1.$

Demonstração. Pela observação anterior,

$$exp\,(St_q) = max\{exp\,(\mathcal{V}) \mid \mathcal{V} \text{ é uma variedade minimal que satisfaz } \ St_q\}.$$

Pelo **Teorema 4.6.10**, $var\,(G\,(A)) = \mathcal{V}$, em que A é uma superálgebra minimal de dimensão finita. Sabemos também que $\mathcal{V}$ satisfaz a identidade standard, então $\mathcal{V}$ não pode ser gerada pela envolvente de Grassmann de uma álgebra que contenha $M_{k,l}\,(F)$ ou $M_k\left(F \dot{+} cF\right)$ como subálgebra, pois $G\,(M_{k,l}\,(F)) \cong M_{k,l}\,(G)$ e $G\left(M_k\left(F \dot{+} cF\right)\right) \cong M_k\,(G)$ e essas álgebras não satisfazem o polinômio standard de qualquer posto. Assim, $\mathcal{V}$ é gerada pela envolvente de Grassmann de uma superálgebra minimal com graduação trivial. Pelo **Lema 4.6.4**, segue que $\mathcal{V}$ é gerada por uma álgebra do tipo, $UT\,(d_1, \ldots, d_r)$. Então,

$$exp\,(St_q) = max\{exp\,(UT\,(d_1, \ldots, d_r)) \ \mid UT\,(d_1, \ldots, d_r) \ \text{ satisfaz } \ St_q \equiv 0\} \tag{4.10}$$

Pelo **Lema 2.3.4**, $UT(d_1, \ldots, d_r)$ satisfaz $St_q \equiv 0$ se , e somente se, $q \geq 2\,(d_1 + \ldots + d_r)$. Outro fato é que, $exp\,(UT\,(d_1, \ldots, d_r)) = d_1^2 + \ldots + d_r^2$, guardemos essas informações.

1. Se $q = 2m$ é par, pelo *Teorema de Amitsur-Levitzki*, $M_m\,(F)$ satisfaz a identidade St_{2m}, além disso, $exp\,(M_m\,(F)) = m^2$, então por (4.10), $exp\,(St_{2m}) \geq m^2$.

   Se $r \geq 2$ e $2m \geq 2\,(d_1 + \ldots + d_r)$, temos $m^2 > d_1^2 + \ldots + d_r^2 = exp\,(UT\,(d_1, \ldots, d_r))$; assim, $m^2 = exp\,(St_{2m})$.

2. Se $q = 2m + 1$ é ímpar e $UT\,(d_1, \ldots, d_r)$ satisfaz St_q, em que $r \geq 2$. Então,

   $$2m + 1 \geq 2\,(d_1 + \ldots + d_r) \Rightarrow m + \frac{1}{2} \geq d_1 + \ldots + d_r,$$

   como $m, d_1, \ldots, d_r$ são inteiros não negativos, temos que

   $$m \geq d_1 + \ldots + d_r \Rightarrow m^2 > d_1^2 + \ldots + d_r^2 \Rightarrow m^2 \geq exp\,(St_{2m+1})\,.$$

   Como $M_m\,(F)$ satisfaz o polinômio St_{2m+1}, pois satisfaz St_{2m}, teremos como no primeiro item que $exp\,(St_{2m}) \geq m^2$. Assim, concluímos a afirmação.

□

Lema 4.6.13. *Se $d = d_1^2 + \ldots + d_m^2$, a álgebra $A = UT\,(d_1, \ldots, d_m)$ satisfaz a identidade de Capelli de posto $d + m$, mas não satisfaz o polinômio de Capelli de posto $d + m - 1$.*

Demonstração. Sejam $B = M_{d_1}\,(F) \oplus \ldots \oplus M_{d_m}\,(F)$ a parte semissimples da álgebra A e $J^m = 0$, em que J é o radical de Jacobson de $A = UT\,(d_1, \ldots, d_m) = B \dot{+} J$.

Primeiro vamos mostrar que Cap_{d+m} é uma identidade para A. Seja o polinômio de Capelli

$$Cap_{d+m}\,(x_1, \ldots, x_{d+m}; y_1, \ldots, y_{d+m-1}) = \sum_{\sigma \in S_{d+m}} (sgn\,(\sigma))\, x_{\sigma(1)} y_1 \ldots y_{d+m-1} x_{\sigma(d+m)},$$

de posto $d+m$. Consideramos uma avaliação (substituição) $\varphi : F\langle X\rangle \longrightarrow A$ deste polinômio nos elementos de A. Observamos que:

1. como o polinômio de Capelli é alternado em $x_1, \ldots, x_{d+m}$ e linear em cada uma dessas variáveis e $dim_F B = d$, temos que, se existir mais que d elementos de B entre $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{d+m})$, obtemos que $Cap_{d+m} = 0$ em A sobre esta substituição.

2. Se há no máximo d elementos em B, então substituimos em $x_1, \ldots, x_{d+m}$ no minimo m elementos de J. Logo, $Cap_{d+m} = 0$ em A, já que $J^m = 0$.

Portanto, $Cap_{d+m} = 0$ em A.

Agora vamos mostrar que A não satisfaz $Cap_{d+m-1} = 0$. Sabemos que $Cap_{d_i^2}$ não é uma identidade para $M_{d_i}(F)$. Podemos escolher elementos todos distintos $v_1, \ldots, v_{d_i^2}$ de $M_{d_i}(F)$ e elementos $a_1, \ldots, a_{d_i^2-1} \in M_{d_i}(F)$ de forma a obtermos : $v_1 a_1 \cdots a_{n-1} v_n = e_{s,t}$ e qualquer produto do tipo $v_{k-1} a_p v_k$, com $p \neq k$ é nulo. Consequentemente $Cap_n(v_1, \ldots, v_n, a_1, \ldots, a_{n-1}) = e_{s,t} \neq 0$, em que $n = d_i^2$.

Escrevemos

$$B_j \cong M_{d_j}(F) = span_F\langle e_{r_j+p, r_j+q} \mid 1 \leq p, q \leq d_j\rangle, \ j = 1, \ldots, m, \text{ em que } r_1 = 0, r_j = d_1 + \ldots + d_{j-1}.$$

Para cada B_j, podemos fazer como no parágrafo acima, isto é, escolhemos: $a_1^j, \ldots, a_{n_{j-1}}^j, v_1^j, \ldots, v_{n_j}^j \in B_j$ tais que

$$v_1^j a_1^j \cdots a_{n_{j-1}}^j v_{n_j}^j = e_{r_j+1, r_j+1} = c_j \neq 0,$$

e para qualquer $\sigma \in S_{n_j}$, σ difetente da identidade de S_n, obtemos

$$v_{\sigma(1)}^j a_1^j \cdots a_{n_j-1}^j v_{\sigma(n_j)}^j = 0,$$

em que $n_j = d_j^2 = dim_F B_j$.

Consideramos $w_i = e_{r_i, r_i+1} \in J$, $i = 1, \ldots, m-1$. Mostramos no **Corolário 4.5.3** que $c_1 w_1 c_2 \cdots w_{m-1} c_m \neq 0$. Observamos que $w_i \in B_i J B_{i+1}$; e $1_{B_i} w_i 1_{i+1} = w_i$, em que $1_i \in B_i$ é a identidade. Então, podemos reescrever $c_1 w_1 c_2 \cdots w_{m-1} c_m \neq 0$, como

$$(c_1 1_1) w_1 (1_2 c_2 1_2) w_2 \cdots w_{m-1} (1_m c_m) \neq 0.$$

Note ainda que $1_i r 1_{i+1} = 0$, para todo $r \in B_j J B_{j+1}$ tal que $j \neq i$ ou $r \in B_1 + \ldots + B_m$. Agora vamos fazer no Cap_{d+m-1} a seguinte substituição:

$$x_1, \ldots, x_{m+d-1} \text{ por } v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1, w_1, v_1^2, \ldots, v_{n_2}^2, w_2, \ldots, w_{m-1} v_1^m, \ldots, v_{n_m}^m,$$

correspondentes, e as variáveis

$$y_1, \ldots, y_{m+d-2} \text{ por } a_1^1, \ldots, a_{n_1-1}^1, 1_1, a_1^2, \ldots, a_{n_2-1}^2, 1_2, \ldots, 1_{m-1} a_1^m, \ldots, a_{n_m-1}^m.$$

Obtemos um produto não nulo:

$$\left(v_1^1 a_1^1 \cdots a_{n_1-1}^1 v_{n_j}^1 1_1\right) w_1 \left(1_2 v_1^2 a_1^2 \cdots a_{n_2-1}^2 v_{n_2}^2 1_2\right) w_2 \cdots w_{m-1} \left(1_m v_1^m a_1^m \cdots a_{n_m-1}^m v_{n_m}^m\right) \neq 0,$$

claro que para qualquer permutação de $v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1, w_1, v_1^2, \ldots, v_{n_2}^2, \ldots, v_1^m, \ldots, v_{n_m}^m, w_2, w_3, \ldots, w_{m-1}$, obtemos uma expressão nula e $a_s^j v_q^p a_{s+1}^j = 0$, para qualquer $p \neq j$. Logo, A não satisfaz o polinômio de Capelli de posto menor que $d + m$. □

Pelo **Teorma 4.3.2**, para todo $n \geq 1$, o $n-$ésimo cocaracter de $M_{k,l}(G)$ está contido no gancho infinito $H\left(k^2 + l^2, 2kl\right)$; pelo **Teorema 4.3.3**, o $n-$ésimo cocaracter de $M_k(G)$ está contido no gancho infinito $H\left(k^2, k^2\right)$. Mostramos que $M_k(F)$ satisfaz o polinômio de Capelli de posto $k^2 + 1$, então pelo **Teorema 3.4.1** o $n-$ésimo cocaracter de $M_k(F)$ está contido em $H\left(k^2, 0\right)$. Baseado nesses resultados para calcular o PI expoente do polinômio de Amitsur, A. Berele e A. Regev introduziram a definição de gancho verbalmente primo e quadrado generalizado.

Os **ganchos verbalmente primos** são os ganchos $H\left(k^2 + l^2, 2kl\right)$, $H\left(k^2, k^2\right)$ *e* $H\left(k^2, 0\right)$ correspondente às álgebras verbalmente primas $M_{k,l}(G)$, $M_k(G)$ e $M_k(F)$ respectivamente.

Sejam $k \geq l \geq 0$, o conjunto $\mathcal{P} = \left\{\left(k^2 + l^2, 2kl\right), \left(k^2, k^2\right) \mid k, l \in \mathbb{N}\right\}$ é chamado de **quadrado generalizado**.

Teorema 4.6.14. *Sejam $k \geq l \geq 0$. Então, $k + l - 3 \leq exp\left(E_{k,l}^*\right) \leq k + l$.*
Em particular, $exp\left(E_{k,l}^*\right) = k + l$ se, e somente se, $(k, l) \in \mathcal{P}$.

Demonstração. A demonstração é encontrada em [4]. □

Assim, $exp\left(E_{k^2+l^2,2kl}^*\right) = (k + l)^2$ e $exp\left(E_{k^2,k^2}^*\right) = 2k^2$.

Note ainda que quando $l = 0$, obtemos que $exp(Cap_{k^2+1}^*) = exp(E_{k,0}^*) = k^2$, já que o polinômio de Amitsur coincide com o polinômio de Capelli quando $\mu = (1^n)$.

Capítulo 5

Igualdade Assintótica

O objetivo principal deste capítulo, e de fato da dissertação, é apresentar a igualdade assintótica da codimensão das álgebras verbalmente primas e os polinômios tipo Amitsur-Capelli. As álgebras consideradas neste capítulo são superálgebras reduzidas de dimensão finita dadas. Primeiro apresentaremos alguns lemas que juntamente com os resultados apresentados anteriormente nos darão suporte para a obtenção desses resultados.

5.1 Igualdade Assintótica para $E^*_{k^2+l^2,2kl}$ e $M_{k^2+l^2,2kl}(G)$

Analisaremos o caso de uma superálgebra reduzida do tipo especial. Relembremos que a matriz $M_{k,l}(F)$ denota a superálgebra simples de dimensão $(k+l)^2$ sobre o corpo F com graduação $((M_{k,l}(F))_0, (M_{k,l}(F))_1)$. Até o **Teorema 5.1.5** assumiremos que $A = M_{k,l}(F) \dotplus J$ é uma superálgebra de dimensão finita, em que $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A.

Lema 5.1.1. *O radical de Jacobson J pode ser decomposto em soma direta de quatro $M_{k,l}(F)$-bimódulos*

$$J = J_{00} \dotplus J_{01} \dotplus J_{10} \dotplus J_{11},$$

em que para $p, q \in \{0,1\}$, J_{pq} é um módulo à esquerda fiel ou um 0-módulo à esquerda de acordo com $p = 1$ ou $p = 0$ respectivamente. Similarmente, J_{pq} é um módulo à direita fiel ou um 0-módulo à direita de acordo com $q = 1$ ou $q = 0$ respectivamente. Além disso, para $p, q, i, l \in \{0,1\}, J_{pq}J_{ql} \subseteq J_{pl}, J_{pq}J_{il} = 0$ para $q \neq i$. E existe uma superálgebra nilpotente de dimensão finita N tal que $J_{11} \cong M_{k,l}(F) \otimes_F N$ é isomorfismo de $M_{k,l}(F)$-bimódulos e de superálgebras.

Demonstração. Vamos considerar E, a identidade de $M_{k,l}(F)$, e as transformações lineares

$$\begin{array}{rccc} L_E: & J & \longrightarrow & J \\ & x & \longmapsto & Ex \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} R_E: & J & \longrightarrow & J \\ & x & \longmapsto & xE \end{array}.$$

Note que L_E e R_E são operadores lineares idempotentes. Como todo operador linear idempotente é diagonalizável, com autovalores 0_F e 1_F, temos que L_E e R_E, são diagonalizáveis com autovalores 0_F e

1_F (pode ser encontrado em [16]).

Uma outra observação a ser feita é que, para cada $x \in J$:

$$L_E(R_E(x)) = L_E(xE) = ExE = R_E(Ex) = R_E(L_E(x)).$$

Consideramos os autoespaços correspondentes para cada autovalor. Sejam

$$J_{0L_E} = \{x \in J \mid Ex = 0x = 0\} \text{ e } J_{1L_E} = \{x \in J \mid Ex = 1_F x = x\},$$

os autoespaços correspondentes aos autovalores $0_F = 0$ e $1_F = 1$ respectivamente. Analogamente

$$J_{0R_E} = \{x \in J \mid xE = x0 = 0\} \text{ e } J_{1R_E} = \{x \in J \mid xE = x1 = x\}.$$

Como L_E e R_E são operadores lineares diagonalizáveis, temos que

$$J_{1L_E} \dot{+} J_{0L_E} = J = J_{1R_E} \dot{+} J_{0R_E}.$$

Além disso,

1. $J_{0L_E} = J_{00} \dot{+} J_{01}$, em que $J_{00} = \{x \in J \mid Ex = xE = 0\}$ e $J_{01} = \{x \in J \mid Ex = 0, xE = x\}$ são F-subálgebras de J;

2. $J_{1L_E} = J_{10} \dot{+} J_{11}$, em que $J_{10} = \{x \in J \mid Ex = x, xE = 0\}$ e $J_{11} = \{x \in \ \mid Ex = xE = x\}$ são F-subálgebra de J.

Assim, podemos decompor J como

$$J = J_{00} \dot{+} J_{01} \dot{+} J_{10} \dot{+} J_{11}.$$

Vamos mostrar que J_{01} é um $M_{k,l}(F)$- módulo à direita fiel e um 0-módulo à esquerda, e para as outras subálgebras J_{00}, J_{10}, J_{11}, a demostração é similar.

$$\begin{array}{rccc} f: & J_{01} \times M_{k,l}(F) & \longrightarrow & J_{01} \\ & (m, a) & \longmapsto & ma \end{array}$$

Para cada $m \in J_{01}$ e $a \in M_{k,l}(F)$, temos que $ma \in J$, pois J é ideal bilateral de A.

1. Para cada $m \in J_{01}$ e $a \in M_{k,l}(F)$, temos que $E(ma) = Ema = 0a = 0$ e $(ma)E = maE = mEa = ma$. Portanto, $ma \in J_{01}$;

2. $(m_1 + m_2)a = m_1 a + m_2 a \in J_{01}$, pois $m_1 a, m_2 a \in J_{01}$ e J_{01} é F-subágebra de A;

3. $m(a + b) = ma + mb$, mesmo argumento que o anterior;

4. $mE = m$, pela própria definição dos elementos de J_{01}.

Claro que J_{01} é um 0-módulo à esquerda, já que para qualquer $a \in M_{k,l}(F)$ e $m \in J_{01}$, temos que $am = 0$.

Para verificar que é fiel à direita, vamos mostrar que

$$Ann\,(J_{01}) = \{a \in M_{k,l}\,(F) \ \mid xa = 0, \forall \ x \in J_{01}\} = \{0\}.$$

De fato, observemos que

$$0 \neq x \in J_{01} \Rightarrow xE = x \Rightarrow 0 \neq x = xE = x\sum_{i=1}^{k+l} e_{i,i} = \sum_{i=1}^{k+l} xe_{i,i} \Rightarrow \ \exists \ i_0 \in \{1, \ldots, k+l\} \ \text{ tal que } xe_{i_0,i_0} \neq 0.$$

Para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, k+l\}$ temos que $xe_{i_0,i}e_{i,j} \neq 0$, isso implica que para qualquer $a \in M_{k,l}(F)$ existe $m \in J_{10}$ tal que $ma \neq 0$ ($a \neq 0$ e $m \neq 0$). Portanto, $Ann\,(J_{01}) = \{0\}$, ou seja, J_{01} é fiel à direita. A mesma demonstração pode ser feito para J_{10} à esquerda, e para J_{11} de ambos os lados.

Vamos mostrar a seguinte afirmação: $J_{pq}J_{qi} \subseteq J_{pi}$ e $J_{pq}J_{ij} = (0)$. Faremos dois casos e para os outros a demonstração é similar.

1. Para todo $x \in J_{10}, y \in J_{11}$, temos $Exy = xy = xyE = xEy = 0 \Rightarrow xy = 0$. Logo, $J_{10}J_{11} = (0)$;
2. Para todo $x \in J_{01}, y \in J_{11}$, temos $Exy = 0y = 0$ e $xyE = xEy = xy \Rightarrow xy \in J_{01}$. Portanto, $J_{01}J_{11} \subseteq J_{01}$.

Assim, concluímos a primeira parte do lema.

Mostraremos que J_{11} é graduado. De fato, para qualquer $x \in J_{11}$, temos que $x = x_0 + x_1$, em que $x_0 \in A_0$ e $x_1 \in A_1$. Assim, $ExE = x \Rightarrow Ex_0E + Ex_1E = x_0 + x_1 \Rightarrow Ex_0E - x_0 = x_1 - Ex_1E \Rightarrow Ex_0E = x_0$ e $x_1 = Ex_1E \Rightarrow x_0, x_1 \in J_{11}$. Portanto, J_{11} é graduado.

Seja $\{j_1, \ldots, j_d\}$ uma base de J_{11}. Podemos adimitir que todos os j_w são elementos homogêneos graduados, isto é, ou par ou ímpar. Pois, podemos escolher uma base entre elementos j_w^0, j_w^1.

Como $\{e_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq k+l\}$ é uma base para $M_{k,l}\,(F)$; $\{j_1, \ldots, j_d\}$ é uma base para J_{11} e J_{11} é $M_{k,l}\,(F)$-bimódulo fiel, temos que

$$J_{11} = span_F\langle e_{r,s}je_{m,t} \mid r, s, m, t \in \{1, \ldots, k+l\}, j \in \{j_1, \ldots, j_d\}\rangle.$$

Considere $N = span_F\langle d_{s,t}\,(j) \ \mid s, t \in \{1, \ldots, k+l\}, j \in \{j_1, \ldots, j_d\}\rangle$, em que $d_{s,t}\,(j) = \sum_{i=1}^{k+l} e_{i,s}je_{t,i}$. Seja $S = \{d_{s,t}(j) \mid s, t \in \{1, \ldots, k+l\},\ j \in \{j_1, \ldots, j_d\}\}$, $|S| = d(k+l)^2$. Claro que $\left(\sum_{m \in S} \alpha_m m\right)\left(\sum_{n \in S} \beta_n n\right) = \sum_{m,n \in S} \alpha_m \beta_n mn$, onde $\alpha_m, \beta_n \in F$. Então, se N é subálgebra, $\sum_{m,n \in S} \alpha_m \beta_n mn \in N$, se e somente se, $mn \in N$, $\forall \ m, n \in S$ (N é subespaço vetorial). Assim,

$$d_{s,t}\,(j_{a_1})\,d_{u,v}\,(j_{a_2}) = \sum_{i=1}^{k+l} e_{i,s}j_{a_1}e_{t,u}j_{a_2}e_{v,i},$$

como $j_1 e_{t,u} j_2 \in J_{11}$, então

$$j_{a_1} e_{t,u} j_{a_2} \in J_{11} = \sum_{b=1}^{d} \gamma_b j_b.$$

Assim, obtemos que

$$d_{s,t}\left(j_{a_1}\right) d_{u,v}\left(j_{a_2}\right) = \sum_{i=1}^{k+l} \sum_{b=1}^{d} \gamma_b e_{i,s} j_b e_{v,i} = \sum_{b=1}^{d} \gamma_b d_{s,v}(j_b) \in N,$$

em que $\gamma_b \in F$, para quaisquer $s, t, u, v \in \{1, \ldots, k+l\}$ e $a_1, a_2 \in \{1, \ldots, d\}$. Portanto, N é subálgebra.

Como $dim_F A$ é finita, temos que J é o maior ideal nilpotente de A. Logo, N também é nilpotente e de dimensão finita.

Note que N comuta com $M_{k,l}(F)$. De fato,

$$e_{r,m} d_{s,t}(j) = e_{r,m}\left(\sum_{i=1}^{k+l} e_{i,s} j e_{t,i}\right) = \sum_{i=1}^{k+l} e_{r,m} e_{i,s} j e_{t,i} \overset{i=m}{=} e_{r,m} e_{m,s} j e_{t,m} = e_{r,s} j e_{t,m} \quad \text{e}$$

$$d_{s,t}(j)\, e_{r,m} = \left(\sum_{i=1}^{k+l} e_{i,s} j e_{t,i}\right) e_{r,m} \overset{i=r}{=} e_{r,s} j e_{t,r} e_{r,m} = e_{r,s} j e_{t,m}.$$

Logo, $e_{r,m} d_{s,t}(j) = d_{s,t}(j)\, e_{r,m}$. Segue a afirmação.

Agora note que os elementos $\{e_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq k+l\}$, da base de $M_{k,l}(F)$, são graduados homogêneos. Basta observar que :

1. se $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, então $e_{i,j} \in M_{k,l}(F)_0$, isto é, homogênio de grau 0;
2. se $i, j \in \{k+1, \ldots, k+l\}$, então $e_{i,j} \in M_{k,l}(F)_0$, isto é, homogêneo de grau 0;
3. se $i \in \{1, \ldots, k\}$ e $j \in \{k+1, \ldots, k+l\}$, então $e_{i,j} \in M_{k,l}(F)_1$, isto é, homogêneo de grau 1;
4. se $i \in \{k+1, \ldots, k+l\}$ e $j \in \{1, \ldots, k\}$, então $e_{i,j} \in M_{k,l}(F)_1$, isto é, homogêneo de grau 1;

Observe ainda que $deg_{\mathbb{Z}_2}(e_{r,s} j e_{t,m}) = deg_{\mathbb{Z}_2}(e_{s,t} j e_{r,m})$. Para verificar esse fato, é necessário analisar o grau dos elementos matriciais e recordar que $deg\,(e_{r,s} j e_{t,m}) = deg\,(e_{r,s}) + deg\,(j) + deg\,(e_{t,m})$. São 16 casos, faremos três, e os outros são verificados da mesma forma.

1. se $r, s, t, m \in \{1, \ldots, k\}$, temos que

$$deg\,(e_{r,s}) + deg\,(j) + deg\,(e_{t,m}) = deg\,(j) = deg\,(e_{s,t}) + deg\,(j) + deg\,(e_{r,m});$$

2. se $r, s \in \{1, \ldots, k\}$ e $t, m \in \{k+1, \ldots, k+l\}$, temos

$$deg\,(e_{r,s}) + deg\,(j) + deg\,(e_{t,m}) = deg\,(j) = deg\,(e_{s,t}) + deg\,(j) + deg\,(e_{r,m}) = 1 + deg\,(j) + 1;$$

3. se $r \in \{k+1, \ldots, k+l\}$ e $s, t, m \in \{1, \ldots, k\}$, temos

$$deg\,(e_{r,s}) + deg\,(j) + deg\,(e_{t,m}) = 1 + deg\,(j) = deg\,(e_{s,t}) + deg\,(j) + deg\,(e_{r,m}) = 0 + deg\,(j) + 1.$$

Assim, $deg\,(e_{i,t} j e_{r,i}) = deg\,(e_{t,r}) + deg\,(j) + deg\,(e_{i,i})$. Como $deg\,(e_{i,i}) = 0$, teremos

$$deg\,(e_{i,t} j e_{r,i}) = deg\,(e_{t,r}) + deg\,(j)\,.$$

Logo, $d_{r,t}\,(j) = \sum_{i=1}^{k+l} e_{i,r} j e_{t,i}$ tem grau igual ao grau de j mais o grau de $e_{r,t}$ módulo 2, pois é a soma de elementos de mesmo grau, ou seja, é a soma de elementos que estão na mesma componente homogênea. Donde segue que $d_{r,t}\,(j)$ é homogêneo, $\forall\ r, t$. Assim, $N = N_0 \dot{+} N_1$, em que N_0 são todos os elementos $d_{s,t}\,(j)$ com grau 0 e N_1 são todos os elementos com grau 1.

Seja $M_{k,l}\,(F) \otimes N$ o produto tensorial. Defina para quaisquer $a, b, c \in M_{k,l}\,(F)\,,\ n \in N$:

$$a\,(c \otimes n)\,b := (acb \otimes n) \in M_{k,l}\,(F) \otimes N.$$

Com essa definição, é possível ver que $M_{k,l}\,(F) \otimes N$ é $M_{k,l}\,(F)\,-$bimódulo.

Seja $\bar{S}$ uma base de N como espaço vetorial, $\bar{S} \subseteq S$. Vamos denotar:

$$\Omega = \{(s,t,i) \mid d_{s,t}(j_i) \in \bar{S}\},$$

$$\bar{S} = \{d_{s,t}(j_i) \mid (s,t,i) \in \Omega\}.$$

Seja $\{e_{u,v} \otimes d_{s,t}(j_i) \mid u, v = 1, \ldots, k+l,\ (s,t,i) \in \Omega\}$ uma base de $M_{k,l}(F) \otimes N$. Vamos mostrar que os elementos $\{e_{u,s} j_i e_{t,v} \mid u, v = 1, \ldots, k+l,\ (s,t,i) \in \Omega\} = \tilde{S}$ é uma base para J_{11}.

1. $\tilde{S}$ é linearmente independente: seja

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{u,v=1}^{k+l} \sum_{(s,t,i)\in\Omega} \alpha_{u,v,(s,t,i)} e_{u,s} j_i e_{t,v} \\ &\Rightarrow e_{m,u_0} \sum_{u,v=1}^{k+l} \sum_{(s,t,i)\in\Omega} \alpha_{u,v,(s,t,i)} e_{u,s} j_i e_{t,v} e_{v_0,m} \\ &= \sum_{m=1}^{k+l} \sum_{(s,t,i)\in\Omega} \alpha_{u_0,v_0,(s,t,i)} e_{m,s j_i} e_{t,m} = 0, \end{aligned}$$

para todo $m \in \{1, \ldots, k+l\}$. Como $\bar{S}$ é uma base de N, temos que $\alpha_{u_0,v_0,(s,t,i)} = 0$ para todo u_0, v_0.

2. Para quaisquer $r, \omega, m, y = 1, \ldots, k+l$ e $c = 1, \ldots, d$, mostraremos que

$$e_{r,m} j_c e_{y,\omega} = \sum_{u,v=1}^{k+l} \sum_{(s,t,i)\in\Omega} \alpha_{u,v,(s,t,i)} e_{u,s} j_i e_{t,v},$$

pata algum $\alpha_{u,v,(s,t,i)} \in F$. Seja $d_{m,y}(j_c) = \sum_{(s,t,i)\in\Omega} \alpha'_{(s,t,i)} d_{s,t}(j_i) = \sum_{(s,t,i)\in\Omega} \sum_{x=1}^{k+l} \alpha'_{(s,t,i)} e_{x,s} j_i e_{t,x} \in N$, onde $\alpha'_{(s,t,i)} \in F$. Por outro lado, também podemos escrever

$$\begin{aligned} d_{m,y}(j_c) = \sum_{x=1}^{k+l} e_{x,m} j_c e_{y,x} \Rightarrow e_{r,m} j_c e_{y,\omega} = e_{r,x_0} d_{m,y}(j_c) e_{x_0,\omega} &= \sum_{(s,t,i)\in\Omega} \alpha'_{(s,t,i)} e_{r,s} j_i e_{t,\omega} \\ &= \sum_{u,v=1}^{k+l} \sum_{(s,t,i)\in\Omega} \alpha_{u,v,(s,t,i)} e_{u,s} j_i e_{t,v}, \end{aligned}$$

onde $\alpha_{u,v,(s,t,i)} = \alpha'_{(s,t,i)}$ quando $r = u$ e $\omega = v$, e $\alpha_{u,v,(s,t,i)} = 0$ caso contrário.

Portanto, $\tilde{S}$ é uma base para J_{11}.

Vamos definir a transformação linear

$$\begin{aligned} \varphi : \quad M_{k,l}(F) \otimes N &\longrightarrow J_{11} \\ e_{r,t} \otimes d_{s,m}(j) &\longmapsto e_{r,s} j e_{m,t} \end{aligned}$$

e estendemos φ por linearidade. Como φ leva base em base, temos que φ está bem definida e é bijeção. Então falta mostrar que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, que é homomorfismo de $M_{k,l}(F)$-bimódulos e que preserva graduação.

Sejam $e_{r,t} \otimes d_{s,m}(j)$ e $e_{u,v} \otimes d_{w,x}(j') \in M_{k,l}(F) \otimes N$. Então,

$$\begin{aligned} (e_{r,t} \otimes d_{s,m}(j))(e_{u,v} \otimes d_{w,x}(j')) = \delta_{t,u} e_{r,v} \otimes d_{s,m}(j) d_{w,x}(j') &= \delta_{t,u} e_{r,v} \otimes d_{s,x}(j e_{m,w} j') \Rightarrow \\ \varphi\left((e_{r,t} \otimes d_{s,m}(j))(e_{u,v} \otimes d_{w,x}(j'))\right) &= \delta_{t,u} e_{r,s} j e_{m,w} j' e_{x,v}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \varphi\left(e_{r,t} \otimes d_{s,m}(j)\right) \varphi\left(e_{u,v} \otimes d_{w,x}(j')\right) &= (e_{r,s} j e_{m,t})(e_{u,w} j' e_{x,v}) = \delta_{t,u} e_{r,s} j e_{m,w} j' e_{x,v} \\ &= \varphi\left((e_{r,t} \otimes d_{s,m})((j) e_{u,v} \otimes d_{w,x}(j'))\right). \end{aligned}$$

Logo, $\varphi\left((e_{r,t} \otimes d_{s,m})((j) e_{u,v} \otimes d_{w,x}(j'))\right) = \varphi\left(e_{r,t} \otimes d_{s,m}(j)\right) \varphi\left(e_{u,v} \otimes d_{w,x}(j')\right)$.

Agora sejam, $e_{r,t} \otimes d_{s,m}(j) \in J_{11}$ e $e_{p,q}, e_{x,y} \in M_{k,l}(F)$. Se $q = r$ e $x = t$, temos que $e_{p,q} e_{r,t} e_{x,y} \otimes d_{s,m}(j) = e_{p,y} \otimes d_{s,m}(j)$. Assim,

$$\varphi(e_{p,q} e_{r,t} e_{x,y} \otimes d_{s,m}(j)) = \varphi\left(e_{p,q} \otimes d_{s,m}(j)\right) = e_{p,s} j e_{m,q} = e_{p,q} \varphi\left(e_{r,t} \otimes d_{s,m}(j)\right) e_{x,y}.$$

Observe ainda que, se $q \neq r$ ou $x \neq t$, obtemos

$$\begin{aligned} e_{p,q} e_{r,t} e_{x,y} \otimes d_{s,m}(j) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi(e_{p,q} e_{r,t} e_{x,y} \otimes d_{s,m}(j)) = \varphi(0) = 0 \\ &= \quad e_{p,q} e_{r,s} j e_{m,t} e_{x,y} = e_{p,q} \varphi\left(e_{r,t} \otimes d_{s,m}(j)\right) e_{x,y}. \end{aligned}$$

Logo, φ é homomorfismo de $M_{k,l}(F)$ −bimódulos.

Para verificar que φ preserva a graduação, basta recordar que

$$deg\,(e_{r,s}je_{m,t}) = deg(e_{s,m}je_{r,t}) = deg\,(e_{s,m}) + deg\,(j) + deg\,(e_{r,t}) \text{ e}$$

$$deg\,(e_{r,t} \otimes d_{s,m}\,(j)) = deg\,(e_{r,t}) + deg\,(d_{s,m}(j))\,.$$

Assim, temos que $deg\,(e_{r,s}je_{m,t}) = deg\,(e_{r,t} \otimes d_{s,m}\,(j))$. Portanto, $deg\,(e_{r,s}je_{m,t}) = deg\,(\varphi\,(e_{r,s}je_{m,t}))$, isto é, φ preserva a graduação.

Portanto, φ é isomorfismo de superálgebras e $M_{k,l}\,(F)$ $-$bimódulo. □

Lema 5.1.2. *Sejam $M = k^2 + l^2$ e $L = 2kl$ com $k, l \in \mathbb{N}$. Se $E^*_{M,L} \subseteq Id\,(G\,(A))$, então $J_{10} = J_{01} = (0)$.*

Demonstração. Para demonstrar o lema, vamos determinar um polinômio $e^*_1\,(\bar{x}, \bar{y})$ que será consequência de $E^*_{M,L}$ e utilizar oportunas substituições de elementos de $G\,(A)$ em $e^*_1\,(\bar{x}, \bar{y})$. Assim, obeteremos o resultado.

Seja $\lambda \vdash n = (L+1)\,(M+1)$, em que $\lambda = \left((L+1)^{M+1}\right)$. Consideremos a seguinte tabela standard de Young associado a λ

$T_\lambda =$

1	1+(M+1)	...	1+L(M+1)
2	2+(M+1)	...	2+L(M+1)
⋮	⋮	...	⋮
M+1	M+1+(M+1)	...	(L+1)(M+1)

.

Sejam

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\rho \in R_{T_\lambda}} \sum_{\sigma \in C_{T_\lambda}} sgn(\sigma)\rho\sigma,$$

$$R_{T_\lambda} = S^1_{L+1} \times S^2_{L+1} \times \ldots \times S^{M+1}_{L+1},$$

$$C_{T_\lambda} = \bar{S}^1_{M+1}\,(1, 2, \ldots, M+1) \times \cdots \times \bar{S}^{L+1}_{M+1}\,(1 + L\,(M+1)\,, \ldots, (L+1)\,L\,(M+1))\,,$$

o quase idempotente, o estabilizador de linha e estabilizador de colunas de T_λ respectivamente, em que $S^i_{L+1} = S^i_{L+1}\,(i, \ldots, i + L\,(M+1))$ e $S^j_{M+1} = S^j_{M+1}\,(1 + (j-1)\,(M+1)\,, \ldots, (M+1) + (j-1)\,(M+1))\,,$ são os grupos simétricos $\bar{S}_{L+1}$ e S_{M+1} que agem sobre os conjuntos de índices $\{i, \ldots, i + L\,(M+1)\}$ e $\{(1 + (j-1)\,(M+1)\,, \ldots, (M+1) + (j-1)\,(M+1))\}$, $i = 1, \ldots, M+1$, $j = 1, \ldots, L+1$ respectivamente.

Definimos o polinômio

$$\begin{aligned}
e^*_1\,(\bar{x}, \bar{y}) &= e^*_{T_\lambda}\,(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\rho \in R_{T_\lambda}} \rho g^*_{T_\lambda}\,(\bar{x}, \bar{y}), \quad \text{em que} \\
g^*_{T_\lambda}\,(\bar{x}, \bar{y}) &= \prod_{i=1}^{L+1} \left(\sum_{\sigma_i \in \bar{S}^i_{M+1}} sgn(\sigma_i) \left(\prod_{j=1}^{M+1} y_{(j+(i-1)(M+1))} x_{\sigma_i(j+(i-1)(M+1))} \right) \right) \\
&= \sum_{\sigma \in C_{T_\lambda}} sgn(\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} \cdots y_n x_{\sigma(n)},
\end{aligned}$$

onde S_n age em $\{x_1, \ldots, x_n\}$ por permutações.

O polinômio $g^*_{T_\lambda}(\bar{x}, \bar{y})$ é alternado em cada conjunto de variáveis

$$\hat{x}_i = \{x_{1+(i-1)(M+1)}, \ldots, x_{M+1+(i-1)(M+1)}\},$$

para cada $i = 1, \ldots, L+1$, e $e^*_1(\bar{x}, \bar{y})$ é simétrico em cada conjunto

$$\widetilde{x}_j = \{x_j, \ldots, x_{j+L(M+1)}\},$$

para cada $j = 1, \ldots, M+1$, ambos polinômios são multilineares. Além disso, como $e^*_{M,L}(\bar{x}, \bar{y})$ é identidade da álgebra $G(A)$, então $e^*_1(\bar{x}, \bar{y})$ também é uma identidade de $G(A)$.

Sejam $\overline{sx} = \{\overline{sx_1}, \ldots, \overline{sx_n}\}$ e $\overline{sy} = \{\overline{sy_1}, \ldots, \overline{sy_n}\}$, em que $\overline{sx_i}, \overline{sy_j} \in G(A)$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Já que $e^*_1(\bar{x}, \bar{y})$ é multilinear, é suficiente substituirmos apenas nos elementos da base de $G(A)$. Assim, consideremos $e^0_1, \ldots, e^0_M$, uma ordenada base de $M_{k,l}(F)_0$ de matrizes unitárias de grau par na graduação, e $e^1_1, \ldots, e^1_L$, uma ordenada base de $M_{k,l}(F)_1$ de matrizes unitárias de grau ímpar. Faremos as seguintes substituições:

1. $\overline{sx}_{\mathbf{i+(j-1)(M+1)}} := e^0_{\mathbf{i}} \otimes g^0_{\mathbf{i+(j-1)(M+1)}}$, para quaisquer $j = 1, \ldots, L+1$, $i = 1, \ldots, M$, em que $g^0_{\mathbf{i+(j-1)(M+1)}}$ são todos elementos distintos de G_0;
2. $\overline{sx}_{\mathbf{j(M+1)}} := e^1_{\mathbf{j}} \otimes g^1_{\mathbf{j(M+1)}}$, $j = 1, \ldots, L$, em que $g^1_{\mathbf{j(M+1)}}$ são todos elementos distintos de G_1;
3. $\overline{sx}_{\mathbf{(L+1)(M+1)}} := r_{10} \otimes g$, em que $r_{10} \in J_{10}$ e $g \in G$.
4. Para qualquer $i = 2, \ldots, n-1$, $\overline{sy}_{\mathbf{i}} := e_{\mathbf{h,k}} \otimes g_i$, onde $g_i \in G_0 \cup G_1$ e $e_{\mathbf{hk}}$ são fixas matrizes oportunas de $M_{k,l}(F)$.
5. Para $\overline{sy}_{\mathbf{1}} := e_{\mathbf{i,1}} \otimes g'_i$, $\overline{sy}_{\mathbf{n}} := e_{\mathbf{k+l,j}} \otimes g''_i$, onde $g'_i, g''_i \in G_0 \cup G_1$.

Observemos que todos os elementos de $M_{k,l}(F)^0$ que estão na i-ésima linha de T_λ são iguais, a saber $e^0_{\mathbf{i}}$, para cada $i = 1, \ldots, M$. Escolhemos os elementos $e^0_{\mathbf{1}}, e^0_{\mathbf{2}}, \ldots, e^0_{\mathbf{M}}$ como os respectivos elementos abaixo:

$$e_{\mathbf{1,1}}, e_{\mathbf{1,2}}, \ldots, e_{\mathbf{1,k}}, e_{\mathbf{2,1}}, \ldots, e_{\mathbf{2,k}}, \ldots, e_{\mathbf{k,1}}, \ldots, e_{\mathbf{k,k}}, e_{\mathbf{k+1,k+1}}, \ldots, e_{\mathbf{k+1,k+l}}, \ldots, e_{\mathbf{k+l,k+1}}, \ldots, e_{\mathbf{k+l,k+l}};$$

e para os elementos $e^1_{\mathbf{1}}, e^1_{\mathbf{2}}, \ldots, e^1_{\mathbf{L}}$ como os respectivos elementos:

$$e_{\mathbf{1,k+1}}, e_{\mathbf{1,k+2}}, \ldots, e_{\mathbf{1,k+l}}, e_{\mathbf{2,k+1}}, \ldots, e_{\mathbf{2,k+l}}, \ldots, e_{\mathbf{k,k+1}}, \ldots, e_{\mathbf{k,k+l}}, e_{\mathbf{k+1,1}}, \ldots, e_{\mathbf{k+1,k}}, \ldots, e_{\mathbf{k+l,1}}, \ldots, e_{\mathbf{k+l,k}};$$

os elementos matriciais correspondentes para $\bar{sy}_{\mathbf{i}}$ escolhemos da seguinte forma: por simplicidade, suponhamos que $\overline{sx}_{\mathbf{i}} = e_{\mathbf{t,v}} \otimes g$ e $\overline{sx}_{\mathbf{i+1}} = e_{\mathbf{u,z}} \otimes g'$, então o elemento matricial correspondente para $\overline{sy}_{\mathbf{i+1}}$ será $e_{\mathbf{v,u}}$. Por escolha das substituições acimas e para os elementos y_1 e y_n podemos fazer que,

$$\overline{sy}_{\mathbf{1}}\overline{sx}_{\mathbf{1}}\overline{sy}_{\mathbf{2}}\overline{sx}_{\mathbf{2}} \cdots \overline{sx}_{\mathbf{M}}\overline{sy}_{\mathbf{M}}\overline{sx}_{\mathbf{M+1}} \cdots \overline{sy}_{\mathbf{n}}\overline{sx}_{\mathbf{n}} = e_{\mathbf{i,j}} r_{10} \otimes g', \text{ para arbitrários } i, j,$$

em que $g' \in G_0 \cup G_1$ e para qualquer $\tau \in C_{T_\lambda}$ diferente da identidade do estabilizador de colunas, temos:

$$\overline{sy}_{\mathbf{1}}\overline{sx}_{\tau(\mathbf{1})}\overline{sy}_{\mathbf{2}}\overline{sx}_{\tau(\mathbf{2})}\cdots\overline{sx}_{\tau(\mathbf{M})}\overline{sy}_{\mathbf{M}}\overline{sx}_{\tau(\mathbf{M+1})}\cdots\overline{sy}_{\mathbf{n}}\overline{sx}_{\tau(\mathbf{n})}=0,$$

pois haverá pelo menos um termo da forma $e_{\mathbf{h,t}}e_{\mathbf{v,w}}$ com $v \neq t$ e relembremos que J_{10} é um $M_{k,l}$-módulo à esquerda fiel, e um 0-módulo à direta, então $r_{10}e_{\mathbf{h,k}}=0$, para qualquer $e_{\mathbf{h,k}} \in M_{k,l}(F)$. Dessa forma,

$$g^*_{T_\lambda}\left(\overline{sx},\overline{sy}\right)=\overline{sy}_1\overline{sx}_1\overline{sy}_2\overline{sx}_2\cdots\overline{sx}_M\overline{sy}_M\overline{sx}_{M+1}\cdots\overline{sy}_n\overline{sx}_n \Rightarrow$$
$$e^*_1\left(\overline{sx},\overline{sy}\right)=\sum_{\rho\in R_{T_\lambda}}(\rho)g^*_{T_\lambda}\left(\bar{x},\bar{y}\right)=\sum_{\rho\in R_{T_\lambda}}(\rho)\overline{sy}_1\overline{sx}_1\overline{sy}_2\overline{sx}_2\cdots\overline{sx}_M\overline{sy}_M\overline{sx}_{M+1}\cdots\overline{sy}_n\overline{sx}_n.$$

Como observamos acima, todos os elementos matriciais correspondentes à i-ésima linha de T_λ, para todo i, são iguais. Assim, para qualquer permutação $\sigma \in R_{T_\lambda}$ tal que

$$\sigma\left(i+t_1\left(M+1\right)\right)=i+t_2\left(M+1\right),\ t_1,t_2=0,\ldots,L;\ i=1,\ldots,M,$$

teremos

$$\overline{sy}_1\overline{sx}_{\sigma(1)}\cdots\overline{sx}_{\sigma(M)}\overline{sy}_M\overline{sx}_{\sigma(M+1)}\cdots\overline{sy}_n\overline{sx}_{\sigma(n)}=\overline{sy}_1\overline{sx}_1\cdots\overline{sx}_M\overline{sy}_M\overline{sx}_{(M+1)}\cdots\overline{sy}_n\overline{sx}_{(n)},$$

desde que $G_0 = Z(G)$. Notemos ainda que para qualquer permutação $\sigma \in R_{T_\lambda}$ tal que $\sigma\left(j\left(M+1\right)\right) \neq j\left(M+1\right)$, para qualquer $j=1,\ldots,L$ temos que o resultado da nossa substituição

$$\sigma g_{T_\lambda}\left(\overline{sx},\overline{sy}\right)=0.$$

Seja $R'_{T_\lambda}=S^1_{L+1}\times\cdots\times S^M_{L+1}$ subgrupo de R_{T_λ}, em que $S_{L+1}\left(i,i+M+1,\ldots,i+L\left(M+1\right)\right)=S^i_{L+1}$, em que $i=1,\ldots,M$ e $S_{L+1}\left(i,i+M+1,\ldots,i+L\left(M+1\right)\right)$ é o grupo simétrico S_{L+1} que age sobre o conjunto de índices $\{(i,i+M+1,\ldots,i+L\left(M+1\right))\}$, observemos que cardinalidade de R'_{T_λ} é igual a $\left((L+1)!\right)^M$.

Qualquer que seja $\sigma \in R'_{T_\lambda}$, obtemos

$$\overline{sy}_1\overline{sx}_{\sigma(1)}\cdots\overline{sx}_{\sigma(M)}\overline{sy}_M\overline{sx}_{\sigma(M+1)}\cdots\overline{sy}_n\overline{sx}_{\sigma(n)}=\overline{sy}_1\overline{sx}_1\cdots\overline{sx}_M\overline{sy}_M\overline{sx}_{M+1}\cdots\overline{sy}_n\overline{sx}_n,$$

pois como $G_0 = Z\left(G\right)$, então para cada $\sigma' \in R'_{T_\lambda}$, temos

$$\left(\sigma'\left(g^0_1\cdots g^0_M g^1_{M+1}g^1_{1+M+1}g^1_{1+M+1}\cdots g^1_{2(M+1)}g^0_{1+2(M+1)}\cdots g^0_{M+(i-1)}g^1_{i(M+1)}\cdots g^0_{M-1+L(M+1)}\right)\right)g=\bar{g},$$

ou seja, podemos "reorganizar"os elementos de $G_0 \cup G_1$ de maneira a obter o mesmo monômio, já que os elementos permutados são de G_0. Logo, obtemos

$$e^*_1\left(\overline{sx},\overline{sy}\right)=\left((L+1)!\right)^M e_{i,j}r_{10}\otimes\bar{g},\quad \text{para arbitrários } i,j, \text{ em que}$$

$$\bar{g}=g^0_1\cdots g^0_M g^1_{M+1}g^0_{1+M+1}\cdots g^0_{M+(i-1)(M+1)}g^1_{i(M+1)}\cdots g^0_{M-1+L(M+1)}g.$$

Como $e_1^*(\overline{sx}, \overline{sy}) \in Id(G(A))$, temos que $0 = e_1^*(\overline{sx}, \overline{sy}) = ((L+1)!)^M e_{i,j} r_{10} \otimes \bar{g}$ para arbitrários i, j, já que $\bar{g} \neq 0$, pois consideramos todos os elementos $h \in G$ de geradores distintos. Assim, $r_{10} = 0$, para qualquer $r_{10} \in J_{10}$. Logo, concluímos o resultado. A demonstração para $J_{01} = (0)$ é similar, em vez de considerarmos $r_{10} \in J_{10}$, consideramos $r_{01} \in J_{01}$. $\square$

Lema 5.1.3. *Sejam $M = k^2+l^2$ e $L = 2kl$, com $k, l \in \mathbb{N}$. Seja $J_{11} \cong M_{k,l}(F) \otimes N$, em que $N = N_0 \dot{+} N_1$, como no Lema 5.1.1. Se $E_{M,L}^* \subseteq Id(G(A))$, então $N_0 \subseteq Z(N)$ o centro de N e N_1 é anticomutativo.*

Demonstração. Vamos determinar um polinômio $e_2^*(\bar{x}, \bar{y})$ como no lema anterior, a diferença é que agora teremos uma linha a mais.

Seja $\mu \vdash n = (L+1)(M+2)$, em que $\mu = \left((L+1)^{M+2}\right)$. Consideramos a seguinte tabela standard de Young associada a μ:

$$T_\mu = \begin{array}{|l|l|l|l|}\hline 1 & 1+(M+2) & \cdots & 1+L(M+2) \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline M+1 & M+1+(M+2) & \cdots & (M+1)+L(M+2) \\ \hline M+2 & 2(M+2) & \cdots & (L+1)(M+2) \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{aligned} R_{T_\mu} &= S_{L+1}^1(1, \ldots, 1+L(M+2)) \times \ldots \times S_{L+1}^{M+2}(M+2, \ldots, (L+1)(M+2)) \\ C_{T_\mu} &= \bar{S}_{M+2}^1(1, 2, \ldots, M+2) \times \ldots \times \bar{S}_{M+2}^{L+1}(1+L(M+2), \ldots, (L+1)(M+2)), \end{aligned}$$

em que C_{T_μ} é o estabilizador de colunas de T_μ e R_{T_μ} é o estabilizador de linhas de T_μ.

Consideramos o polinômio

$$\begin{aligned} e_2^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\rho \in R_{T_\mu}} \rho g_{T_\mu}(\bar{x}, \bar{y}), \text{ em que} \\ g_{T_\mu}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\sigma \in C_{T_\mu}} sgn(\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma_2} \cdots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1}. \end{aligned}$$

onde S_n age em $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Como no lema anterior, $g_{T_\mu}(\bar{x}, \bar{y}), e_2^*(\bar{x}, \bar{y})$ são multilineares em $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_{n+1}$, $g_{T_\mu}(\bar{x}, \bar{y})$ é alternado em cada conjunto de variáveis para as quais os índices correspondem as colunas de T_μ e $e_2^*(\bar{x}, \bar{y})$ é simétrico em cada conjunto de variáveis os quais os índices correspondem as linhas de T_μ.

Sejam $e_1^0, \ldots, e_M^0$, uma base ordenada de $M_{k,l}(F)_0$ de matrizes unitárias de grau par na graduação, e uma base ordenada de $M_{k,l}(F)_1$ de matrizes unitárias de grau ímpar. Vamos considerar as seguintes substituições:

1. $\overline{sx}_{\mathbf{i+(j-1)(M+2)}} := e_{\mathbf{i}}^0 \otimes g_{\mathbf{i+(j-1)(M+2)}}^0$, $j = 1, \ldots, L+1$ $\forall$ $i = 1, \ldots, M$, em que $g_{\mathbf{i+(j-1)(M+2)}}^0$ são todos elementos distintos de G_0;

2. $\overline{sx}_{\mathbf{(M+1)+(j-1)(M+2)}} := e_{\mathbf{j}}^1 \otimes g_{\mathbf{j(M+1)}}^1$, $j = 1, \ldots, L$, em que $g_{\mathbf{j(M+1)}}^1$ são todos elementos distintos de G_1;

3. $\overline{sx}_{\mathbf{j(M+2)}} := e_{\mathbf{j}}^1 \otimes g_{\mathbf{j(M+2)}}^1$, $j = 1, \ldots, L$, em que $g_{\mathbf{j(M+2)}}^1$ são todos elementos distintos de G_1;

4. $\overline{sx}_{(\mathbf{M+1})+\mathbf{L}(\mathbf{M+2})} := d_1 \otimes g_1$ e $\overline{sx}_{(\mathbf{L+1})(\mathbf{M+2})} := d_2 \otimes g_2$, em que $d_1, d_2 \in N_0 \cup N_1$ e $g_1, g_2 \in G_0 \cup G_1$;

5. $\overline{sy}_i := e_{\mathbf{h},\mathbf{u}} \otimes g_i'$, em que $g_i' \in G_0 \cup G_1, e_{\mathbf{h},\mathbf{u}}$ são fixas matrizes unitárias oportunas de $M_{k,l}(F)$, escolhidos como no **Lema 5.1.2**. Para o elemento $\overline{sy}_{n-1} := e_{\mathbf{h_{n-1}},\mathbf{u_{n-1}}} \otimes g_{n-1}$ escolhemos $g_{n-1} \in G_0$.

Escolhemos os e_i como no **Lema 5.1.2**, e faremos a seguinte observação: do modo como foi definido as substituições, o elemento e_i correspondente para $x_{\mathbf{M+1+(j-1)(M+2)}}$ é o mesmo que para $x_{\mathbf{j(M+2)}}$, para qualquer $j = 1, \ldots, L$. Então qualquer

$$\sigma \in C'_{T_\mu} = \{\epsilon; (M+1, M+2)\} \times \ldots \times \{\epsilon; (M+1+(L-1)L(M+2), L(M+2))\} \leq C_{T_\mu},$$
$$\sigma g_{T_\mu}(\overline{sx}, \overline{sy}) \neq 0 \quad \text{e} \quad \tau g_{T_\mu}(\overline{sx}, \overline{sy}) = 0,$$

em que $\tau \in C_{T_\mu}$, $\tau \notin C'_{T_\mu} \times \bar{S}_{M+2}^{L+1}(1 + L(M+2), \ldots, (L+1)(M+2))$ e ϵ é a identidade de S_n.

Decompomos $C'_{T_\mu} = C \cup D$, em que C são as permutações pares de C'_{T_μ} e D são as permutações ímpares de C'_{T_μ}, a cardinalidade de C'_{T_μ} é 2^L e as cardinalidade de C e D são 2^{L-1}. Então,

$$\begin{aligned} g_{T_\mu}(\overline{sx}, \overline{sy}) &= \sum_{\sigma \in C'_{T_\mu}} sgn(\sigma) \overline{sy}_1 \overline{sx}_{\sigma(1)} \overline{sy}_2 \overline{sx}_{\sigma(2)} \ldots \overline{sx}_{\sigma(M)} \overline{sy}_M \overline{sx}_{\sigma(M+1)} \ldots \overline{sy}_n \overline{sx}_{\sigma(n)} \overline{sy}_{n+1} \\ &= \sum_{\sigma \in C} \overline{sy}_1 \overline{sx}_{\sigma(1)} \overline{sy}_2 \overline{sx}_{\sigma(2)} \cdots \overline{sx}_{\sigma(M)} \overline{sy}_M \overline{sx}_{\sigma(M+1)} \cdots \overline{sy}_n \overline{sx}_{\sigma(n)} \overline{sy}_{n+1} \\ &- \sum_{\sigma \in D} \overline{sy}_1 \overline{sx}_{\sigma(1)} \overline{sy}_2 \overline{sx}_{\sigma(2)} \cdots \overline{sx}_{\sigma(M)} \overline{sy}_M \overline{sx}_{\sigma(M+1)} \cdots \overline{sy}_n \overline{sx}_{\sigma(n)} \overline{sy}_{n+1}. \end{aligned}$$

Recorde que, para quaisquer $g_1, g_2 \in G_1$, tem-se $g_1 g_2 = -g_2 g_1$. Então, quando aplicarmos uma permutação par de C'_{T_μ} em $\overline{sy}_1 \overline{sx}_{\sigma(1)} \overline{sy}_2 \overline{sx}_{\sigma(2)} \cdots \overline{sx}_{\sigma(M)} \overline{sy}_M \overline{sx}_{\sigma(M+1)} \cdots \overline{sy}_n \overline{sx}_{\sigma(n)} \overline{sy}_{n+1}$ de um lado do produto tensorial, obtemos o mesmo valor para o produto de matrizes unitárias, já que tais matrizes permutadas são as mesmas. Do outro lado do produto tensorial, obtemos o mesmo produto com sinal de menos, pois os elementos permutados são de G_1 e para que cada um volte à posição inicial, terá que anticomutar com os outros elementos de G_1. Para os elementos da última coluna, alguns irão se cancelar restando apenas quatro. Dessa forma, obtemos a seguinte igualdade:

$$g_{T_\mu}(\overline{sx}, \overline{sy}) = 2^{L+1} e_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \left[d_1 d_2 \otimes g g_1 g'_{((L+1)(M+2))} g_2 - d_2 d_1 \otimes g g_2 g'_{((L+1)(M+2))} g_1 \right],$$

em que g é obtido dos elementos $g_i's$ substituidos acimas. Cabe lembrar que N comuta com os elementos $M_{k,l}(F)$; assim, $d_1 e_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = e_{\mathbf{u},\mathbf{v}} d_1$.

Como no lema anterior, todos os elementos de $M_{k,l}(F)_0$, e_i^0, que estão na i-ésima linha são iguais, e os elementos $g_i^0 \in G_0$ da i-ésima linha comutam com qualquer elemento de G, pois $Z(G) = G_0$, para qualquer $i = 1, \ldots, M$. Assim, quando aplicarmos as permutações σ' que pertence a:

$$R'_{T_\mu} = S_{L+1}(1, 1+(M+1), \ldots, 1+L(M+1)) \times \ldots \times S_{L+1}(M, M+2(M+1), \ldots, M+L(M+1))$$

temos,

$$\sigma' g_{T_\mu}(\overline{sx}, \overline{sy}) = g_{T_\mu}(\overline{sx}, \overline{sy}) \Rightarrow \sum_{\sigma \in R'_{T_\mu}} \sigma g_{T_\mu}(\overline{sx}, \overline{sy}) = \left((L+1)!^M\right) g_{T_\mu}(\overline{sx}, \overline{sy}),$$

pois os elementos matriciais são os mesmos, e os elementos comutados de G pertencem a G_0 que comutam com todos os outros elementos. Nenhum dos elementos $\overline{sx}_{j(M+2)},\ j = 1, \ldots, L$ e $\overline{sx}_{(M+1)+(j-1)(M+2)},\ j = 1, \ldots, L$ das linhas com números $(M+2)$ e $(M+1)$ não pode aparecer em nenhum lugar de nenhuma outra coluna além dele própria, sem obter pelo menos um termo da forma, $e_{\mathbf{t},\mathbf{u}} e_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = 0$, com $u \neq v$. Portanto, para os últimos elementos das linhas $(M+2)$ e $(M+1)$ também so sobram colunas deles. Logo, para qualquer permutação $\tau \notin R'_{T_\mu}$, obtemos $\tau g_{T_\mu}(\overline{sx}, \overline{sy}) = 0$. Assim,

$$0 = e_2^*(\overline{sx}, \overline{sy}) = \left((L+1)!^M\right) 2^{L+1} e_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \left[(d_1 d_2) \otimes (g g_1 g' g_2 - (d_2 d_1) \otimes g g_2 g' g_1)\right], \tag{5.1}$$

em que $g \in G,\ \forall\ i, j$ e $g' \in G_0$. Vamos analisar os casos.

1. Se $d_1, d_2 \in N_0$, então $g_1, g_2 \in G_0$, temos $g_1 g'_{(L+1)(M+2)} g_2 = g_1 g_2 g'_{(L+1)(M+2)} = g$. Substituindo em (5.1), obtemos

$$\left((L+1)!^M\right) 2^{L+1} \left[(e_{\mathbf{i},\mathbf{j}} d_1 d_2) \otimes g - (e_{\mathbf{i},\mathbf{j}} d_2 d_1) \otimes g\right] = 0 \Rightarrow d_1 d_2 = d_2 d_1,$$

   pois todos os g_i são distintos, já que escolhemos todos os elementos $g_i's \in G_0 \cup G_1$ com geradores distintos;

2. para $d_1 \in N_0,\ d_2 \in N_1, g_1 \in G_0, g_2 \in G_1$ e para $d_2 \in N_0,\ d_1 \in N_1, g_2 \in G_0, g_1 \in G_1$ vamos obter o resultado, pois $g_1 \in G_0 = Z(G)$ ou $g_2 \in G_0$;

3. para $d_1, d_2 \in N_1, g_1, g_2 \in G_1$. Como $g_1 g_2 = -g_2 g_1$, substituindo em (5.1), obtemos

$$e_2^*(\overline{sx}, \overline{sy}) = \left((L+1)!^M\right) 2^{L+1} e_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \left[(d_1 d_2) \otimes g g_1 g_2 + (d_2 d_1) \otimes (g g_1 g_2)\right] = 0$$

$$\Rightarrow d_1 d_2 = -d_2 d_1,\ \forall\ d_1, d_2 \in N_1.$$

Concluímos o resultado. Em particular, $d_1^2 = 0$. □

Lema 5.1.4. *Sejam $M = k^2 + l^2$ e $L = 2kl$ com $k, l \in \mathbb{N}$, e $E^*_{M,L} \subseteq Id(G(A))$. Se $N^\#$ denota a álgebra obtida de N ao adicionar o elemento unidade, então*

$$Id\left(G(M_{k,l}(F) \otimes N^\#)\right) = Id\left(G(M_{k,l}(F))\right).$$

Demonstração. $(\subseteq) Id\left(G(M_{k,l}(F) \otimes N^\#)\right) \subseteq Id\left(G(M_{k,l}(F))\right)$ é trivial, pois $1 \in N^\#$ e como $G\left(M_{k,l}(F) \otimes 1\right) \cong G\left(M_{k,l}(F)\right)$, obtemos o resultado.

$(\supseteq)$ Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear tal que $f \in Id\left(G\left(M_{k,l}(F)\right)\right)$.

Suponhamos que $f \notin Id\left(G(M_{k,l}(F) \otimes N^\#)\right)$, então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in G\left(M_{k,l}(F) \otimes N^\#\right)$ tais que $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. Como $N^\#$ é obtido de N ao adicionar o elemento unidade, temos que $N^\#$ herda a graduação de N. Podemos assumir que existem elementos

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \left(\left(N^{\#}\right)_0 \otimes G_0 \dot{+} \left(N^{\#}\right)_1 \otimes G_1\right) \cup \left(\left(N^{\#}\right)_1 \otimes G_0 \dot{+} \left(N^{\#}\right)_0 \otimes G_1\right) \quad \text{e}$$

$$\beta_1, \ldots, \beta_n \in M_{k,l}(F)_0 \cup M_{k,l}(F)_1$$

tais que

$$f(\beta_1 \otimes \gamma_1, \ldots, \beta_n \otimes \gamma_n) \neq 0. \tag{5.2}$$

Sejam

$$\beta_1, \ldots, \beta_r \in M_{k,l}(F)_0, \ \gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \left(N^{\#}\right)_0 \otimes G_0 \dot{+} \left(\left(N^{\#}\right)_1 \otimes G_1\right),$$

$$\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n \in M_{k,l}(F)_1, \ \gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n \in \left(N^{\#}\right)_1 \otimes G_0 \dot{+} \left(\left(N^{\#}\right)_0 \otimes G_1\right),$$

e escrevemos

$$\gamma_i = n_i^0 \otimes g_i^0 + n_i^1 \otimes g_i^1, \ i = 1, \ldots, r \text{ e } \gamma_j = n_j^1 \otimes g_j^0 + n_j^0 \otimes g_j^1, \ j = r+1, \ldots, n.$$

Substituindo em (5.2), e aplicando as propriedades de produto tensorial e o usando fato de f ser multilinear, temos

$$\begin{aligned} 0 \neq f(\beta_1 \otimes \gamma_1, \ldots, \beta_n \otimes \gamma_n) &= f\left(\beta_1 \otimes \left(n_1^0 \otimes g_1^0 + n_1^1 \otimes g_1^1\right), \ldots, \beta_n \otimes \left(n_n^1 \otimes g_n^0 + n_n^0 \otimes g_n^1\right)\right) \\ &= f\left(\beta_1 \otimes n_1^0 \otimes g_1^0 + \beta_1 \otimes n_1^1 \otimes g_1^1, \ldots, \beta_n \otimes n_n^1 \otimes g_n^0 + \beta_n \otimes n_n^0 \otimes g_n^1\right) \\ &= \sum_k f\left(\beta_1 \otimes \delta_{1k}^0, \ldots, \beta_r \otimes \delta_{rk}^0, \beta_{r+1} \otimes \delta_{r+1k}^1, \ldots, \beta_n \otimes \delta_{nk}^1\right), \end{aligned}$$

em que $\begin{cases} \delta_{ik}^0 \in \{n_i^0 \otimes g_i^0; n_i^1 \otimes g_i^1\} & \text{para } i = 1, \ldots, r. \\ \delta_{ik}^1 \in \{n_i^1 \otimes g_i^0; n_i^0 \otimes g_i^1\} & \text{para } i = r+1, \ldots, n. \end{cases}$

Então, existe k tal que $f\left(\beta_1 \otimes \delta_{1k}^0, \ldots, \beta_n \otimes \delta_{nk}^1\right) \neq 0$, ou seja,

$$f\left(\beta_1 \otimes \left(n_1^{i_1} \otimes g_1^{j_1}\right), \ldots, \beta_r \otimes \left(n_r^{i_r} \otimes g_r^{j_r}\right), \ldots, \beta_n \otimes \left(n_n^{i_n} \otimes g_n^{j_n}\right)\right) \neq 0, \quad i_k, j_k \in \{1, 0\},$$

com $j_k = i_k$, para $k = 1, \ldots, r$ e $j_k \neq i_k$, para $k = r+1, \ldots, n$. Como $f \in P_n$, escrevemos $f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$. Pelo **Lema 5.1.3**, os elementos $n_{i's}^0$ comutam com quaisquer elementos de N, e $n_{i's}^1$ são anticomutativos entre si, usando esse fato e aplicando as propridedades de produto tensorial, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 \neq f\left(\beta_1 \otimes \left(n_1^{i_1} \otimes g_1^{j_1}\right), \ldots, \beta_n \otimes \left(n_n^{i_n} \otimes g_n^{j_n}\right)\right) &= \sum_{\sigma \in S_n} \frac{+}{-} \alpha_\sigma \beta_{\sigma(1)} \cdots \beta_{\sigma(n)} \otimes n_1^{i_1} \cdots n_n^{i_n} \otimes g_1^{j_1} \cdots g_{\sigma(n)}^{j_1} \\ &= b \otimes n_1 \cdots n_n \otimes g_1 \cdots g_n, \end{aligned} \tag{5'.3}$$

tal que $j_1 < \ldots < j_n$, onde $0 \neq b \in M_{k,l}(F)$ e $0 \neq n_1 \cdots n_n \otimes g_1 \cdots g_n \in N^{\#} \otimes G$. Agora substituiremos em (5'.3), δ_{ik}^0 por distintos $g_1^0 \in G_0$, para $i = 1, \ldots, r$, e δ_{ik}^1 por $g_i^1 \in G_1$, para $i = r+1, \ldots, n$. Observe que δ^0_{ik} comutam com quaisquer elementos de $N^\# \otimes G$ e os elementos δ^1_{ik} anticomutam. Assim, temos que

$$f\left(\beta_1 \otimes g^0_1, \ldots, \beta_r \otimes g^0_r, \beta_{r+1} \otimes g^1_{r+1}, \ldots, \beta_n \otimes g^1_n\right) = b \otimes g^0_1 \cdots g^0_r g^1_{r+1} \cdots g^1_n \neq 0,$$

pois b é o elemento não nulo de (5'.3) e $g^0_1 \cdots g^0_r g^1_{r+1} \cdots g^1_n \neq 0$. Logo, f não é uma identidade para $G\left(M_{k,l}\left(F\right)\right) \cong M_{k,l}\left(G\right)$. Assim, $Id\left(G(M_{k,l}(F))\right) \subseteq Id\left(G(M_{k,l}(F) \otimes N^\#)\right)$. O que completa a demonstração. □

Teorema 5.1.5. *[[1], Teorema 5] Sejam $k, l \in \mathbb{N}$. Então, $var\left(E^*_{k^2+l^2,2kl}\right) = var\left(M_{k,l}\left(G\right) \oplus G\left(D'\right)\right)$, em que D' é uma superálgebra de dimensão finita tal que $exp\left(G(D')\right) < (k+l)^2$.*

Demonstração. Pelo **Teorema 4.6.14**, temos que $exp\left(E^*_{k^2+l^2,2kl}\right) = (k+l)^2$. Pelo **Lema 4.6.6**, existe um número finito de superálgebras reduzidas $B_1, \ldots, B_t$ e uma superálgebra de dimensão finita D, tais que

$$\mathcal{V} = var\left(G\left(B_1\right) \oplus \ldots \oplus G\left(B_t\right) \oplus G\left(D\right)\right) \quad \text{e}$$

$$exp\left(\mathcal{V}\right) = exp\left(G\left(B_1\right)\right) = \ldots = exp\left(G\left(B_t\right)\right) = \left(k+l\right)^2 > exp\left(G\left(D\right)\right).$$

Seja A qualquer uma das superálgebras $B_1, \ldots, B_t$. Vamos analisar estrutura dela, A é uma superálgebra reduzida, com

$$exp\left(G\left(A\right)\right) = \left(k+l\right)^2 \text{ e } E^*_{k^2+l^2,2kl} \subseteq Id\left(G\left(A\right)\right).$$

Como A é superálgebra de dimensão finita, então $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_q \dotplus J$, em que $A_1, \ldots, A_q$ são superálgebras simples de dimensão finita e $J\left(A\right) = J$, o radical de Jacobson de A. Pelo *Teorema de descrição das superálgebras simples*, sabemos que $A_i \cong M_{d_i}(F)$ ou $A_i \cong M_{k_i,l_i}(F)$ ou $A_i \cong M_{s_i}(F \dotplus cF)$, em que $c^2 = 1$. Recordemos que, $G\left(U \oplus W\right) = G\left(U\right) \oplus G\left(W\right)$. Logo,

$$G\left(A\right) = G\left(A_1\right) \oplus \ldots \oplus G\left(A_q\right) \dotplus \left(G_0 \otimes J_0 \dotplus G_1 \otimes J_1\right),$$

em que $G\left(A_i\right) \cong M_{d_i}\left(G_0\right)$, ou $G\left(A_i\right) \cong M_{s_i}\left(G\right)$ ou $G\left(A_i\right) \cong M_{k_i,l_i}\left(G\right)$.

Pelos **Lema 4.6.3** e **Lema 4.6.2** e o comentário feito após a **Definição 4.6.3**, existe uma superálgebra minimal $C = A_1 \oplus \ldots \oplus A_q \dotplus J\left(C\right)$ contida em A. Assim, obtemos que $G\left(C\right) \subseteq G\left(A\right)$ tal que

$$\left(k+l\right)^2 = exp\left(G\left(C\right)\right) = dim_F\left(A_1 \oplus \ldots \oplus A_q\right) = d_1 + l_1,$$

em que $d_1 = dim_F\left(A_1 \oplus \ldots \oplus A_q\right)_0$ e $l_1 = dim_F\left(A_1 \oplus \ldots \oplus A_q\right)_1$.

Pelo **Teorema 4.6.5**, se C é uma álgebra minimal, então

$$Id\left(G\left(C\right)\right) = Id\left(G\left(A_1\right)\right) \ldots Id\left(G\left(A_q\right)\right),$$

em que $Id\left(G\left(A_i\right)\right)$, para quaisquer $i = 1, \ldots, q$, são T-ideais verbalmente primos, isto é,

$$Id\left(G\left(A_i\right)\right) \in \{Id\left(M_{d_i}\left(F\right)\right) = Id\left(M_{d_i}\left(G_0\right)\right); Id\left(M_{s_i}\left(G\right)\right); Id\left(M_{k_i,l_i}\left(G\right)\right)\}.$$

Suponhamos que, para $i \in \{1, \ldots, a\}$, tenhamos $A_{j_i} \cong M_{d_{j_i}}(F)$; para $i \in \{a+1, \ldots, b+a\}$, tenhamos $A_{j_i} \cong M_{s_{j_i}}(F \dot{+} tF)$; e para $i \in \{b+a+1, \ldots, z+b+a\}$, tenhamos $A_{j_i} \cong M_{k_{j_i}, l_{j_i}}(F)$, com $a+b+z=q$. Assim,

$$d_1 = \sum_{i=1}^{a} {d_{j_i}}^2 + \sum_{i=a+1}^{b+a} {s_{j_i}}^2 + \sum_{i=b+a+1}^{z+b+a} {k_{j_i}}^2 + l_{j_i}^2 \ \text{ e } \ l_1 = \sum_{i=a+1}^{b+a} {s_{j_i}}^2 + \sum_{i=b+a+1}^{z+b+a} 2k_{j_i} l_{j_i}.$$

Como as álgebras verbalmente primas satisfazem o polinômio de Amitsur-Capelli, então

$$\chi_n\left(M_{k_i,l_i}(G)\right) \subseteq H\left({k_i}^2 + {l_i}^2, 2k_i l_i\right);$$
$$\chi_n\left(M_{d_i}(F)\right) \subseteq H\left({d_i}^2, 0\right);$$
$$\chi_n\left(M_{s_i}(G)\right) \subseteq H\left({s_i}^2, {s_i}^2\right),$$

para todo i e $n \geq 1$, e pelo **Lema 3.3.8**, $\chi_n(G(C)) \subseteq H(d_1, l_1) \widehat{\otimes} \left(\chi_1^{\widehat{\otimes}(q-1)}\right)$. Por outro lado,

$$G(C) \subseteq G(A) \Rightarrow Id(G(A)) \subseteq Id(G(C)) \Rightarrow E^*_{k^2+l^2,2kl} \subseteq Id(G(C)).$$

Dessa forma pelo **Teorema 3.4.1**, $\chi_n(G(C)) \subseteq H\left(k^2+l^2, 2kl\right)$.

Vamos mostrar que $d_1 = k^2 + l^2$ e $l_1 = 2kl$. Como $d_1 + l_1 = k^2 + l^2 + 2kl$, temos três possibilidades:

1. $d_1 = k^2 + l^2$ e $l_1 = 2kl$;
2. $d_1 > k^2 + l^2$ e $l_1 < 2kl$;
3. $d_1 < k^2 + l^2$ e $l_1 > 2kl$.

Mostraremos que (2) e (3) não podem ocorrer.
Suponhamos que (3) ocorre, seja $\lambda \in H(d_1, l_1) \widehat{\otimes} \left(\chi_1^{\widehat{\otimes}(q-1)}\right)$ tal que $2kl < \lambda_d \leq l_1$ e $m_\lambda \neq 0$, em que $d \in \{k^2+l^2+1, \ldots\}$. Como $2kl < \lambda_d \leq \lambda_{k^2+l^2} \Rightarrow \lambda \notin H\left(k^2+l^2, 2kl\right)$, temos pelo **Teorema 3.4.1**, $m_\lambda = 0$, pois $E^*_{k^2+l^2,2kl} \subseteq Id(G(C))$, contradição. Logo, $l_1 \leq 2kl$.

Suponhamos que (2) ocorre, seja $\mu \in H(d_1, l_1) \widehat{\otimes} \left(\chi_1^{\widehat{\otimes}(q-1)}\right)$ tal que $\mu_d > 2kl$ e $m_\mu \neq 0$, em que $d \in \{k^2+l^2+1, \ldots, d_1\} \Rightarrow \mu \notin H\left(k^2+l^2, 2kl\right)$, temos pelo **Teorema 3.4.1**, $m_\mu = 0$, pois $E^*_{k^2+l^2,2kl} \subseteq Id(G(C))$, contradição. Logo, $d_1 \leq k^2+l^2$. Como, $d_1 + l_1 = k^2+l^2+2kl$, temos $d_1 = k^2+l^2$ *e* $l_1 = 2kl$. Assim,

$$H(d_1, l_1) \widehat{\otimes} \left(\chi_1^{\widehat{\otimes}(q-1)}\right) = H\left(k^2+l^2, 2kl\right) \widehat{\otimes} \left(\chi_1^{\widehat{\otimes}(q-1)}\right) \subseteq H\left(k^2+l^2, 2kl\right) \cup D\left(k^2+l^2+m, 2kl+m\right),$$

é o gancho infinito de braços k^2+l^2 e pernas $2kl$ mais um retângulo de tamanho $m = (q-1)^2$. Vamos mostrar que $q = 1$. Suponhamos que existe um diagrama D_μ com não zero multiplicidade e contendo um retângulo D_λ, em que $\lambda = (2kl+1)^{\left(k^2+l^2+q-1\right)}$. Então,

$$E^*_{k^2+l^2+q-2,2kl} \nsubseteq Id(G(C)) \quad \text{e como } E^*_{k^2+l^2,2kl} \subseteq Id(G(C)),$$

temos que

$$q \leq 1 \;\Rightarrow\; q = 1 \Rightarrow Id\,(G\,(C)) = Id(G(A_1)) \Rightarrow A_1 \in \{M_{k_1}(F), M_{k_1,l_1}(F), M_{k_1}(F \dot{+} tF)\}.$$

Assim, $A = A_1 \dot{+} J$. Temos que

$$\begin{array}{rcl} \chi_n\,(M_{k_1,l_1}\,(G)) \subseteq H\left(k_1^2 + l_1^2, 2k_1l_1\right) & \text{e} & exp\,(M_{k_1,l_1}\,(G)) = k_1^2 + l_1^2 + 2k_1l_1; \\ \chi_n\,(M_{k_1}\,(G)) \subseteq H\left(k_1^2, k_1^2\right) & \text{e} & exp\,(M_{k_1}\,(G)) = 2k_1^2; \\ \chi_n\,(M_{k_1}\,(F)) \subseteq H\left(k_1^2, 0\right) & \text{e} & exp\,(M_{k_1}\,(F)) = k_1^2, \end{array} .$$

Como o tamanho do gancho determina unicamente as constantes k, l (ou seja, se $H(s,t)$, em que $s = k^2+l^2$ e $t = 2kl$, então $k = \frac{\sqrt{s-t}+\sqrt{s+t}}{2}$ e $l = \frac{\sqrt{s+t}-\sqrt{s-t}}{2}$), concluímos que, $A_1 = M_{k_1,l_1}\,(F)$. Logo, $k_1 = k, l_1 = l$ e $A = M_{k,l}\,(F) \dot{+} J$.

Pelo **Lema 5.1.1**, $J = J_{00} \dot{+} J_{10} \dot{+} J_{01} \dot{+} J_{11}$ e, pelo **Lema 5.1.2**, $J_{10} = J_{01} = (0)$, já que $E^*_{k^2+l^2,2kl} \subseteq Id\,(G\,(A))$. Assim, $A = M_{k,l}(F) \dot{+} (J_{11} \dot{+} J_{00})$. Por outro lado, $J_{11} \cong M_{k,l}\,(F) \otimes N$, em que N é uma superálgebra de dimensão finita. Daí,

$$A \cong (M_{k,l}(F) \otimes 1_N) \dot{+} (M_{k,l}(F) \otimes N \dot{+} J_{00}) \cong (M_{k,l}(F) \otimes N^{\#}) \oplus J_{00},$$

em que $N^{\#}$ é uma F-álgebra obtida de N ao adicionar a unidade. Pelo **Lema 5.1.4**,

$$Id\left(G(M_{k,l}(F) \otimes N^{\#})\right) = Id\,(G(M_{k,l}(F)))\,, \text{ então } Id\,(G(A)) = Id\,(G(M_{k,l}(F))) \cap Id\,(G(J_{00}))\,.$$

Logo, $var\,(G\,(A)) = var\,(G\,(M_{k,l}\,(F)) \oplus G\,(J_{00}))$. Mostramos que, para cada álgebra reduzida B_i, para quaisquer $i = 1, \ldots, t$, temos $B_i = M_{k,l}\,(F) \dot{+} J\,(B_i)$. Segue daí que

$$G(B_1 \oplus \ldots \oplus B_t \oplus D) \text{ e } (M_{k,l}(G) \oplus \ldots \oplus M_{k,l}(G) \oplus G(D) \oplus G(J_{00}(B_1)) \oplus \ldots \oplus G(J_{00}(B_t))),$$

são PI-equivalentes.

Relembremos que $J_{00}\,(B_i)$ é nilpotente, então $G(J_{00}(B_i))$ é nilpotente para todo $i = 1, \ldots, t$. Logo,

$$c_n\,(G(J_{00}\,(B_i))) = 0 \;\Rightarrow exp\,(G(J_{00}\,(B_i))) = 0 = exp\,(G\,(J_{00}\,(B_i))) = 0,$$

para n sufucientemente grande. Dessa forma:

$$exp\,(G\,(D) \oplus G\,(J_{00}\,(B_1)) \oplus \ldots \oplus G\,(J_{00}\,(B_t))) = exp\,(G\,(D))\,.$$

Como $Id\,(M_{k,l}\,(G) \oplus \ldots \oplus M_{k,l}\,(G)) = Id\,(M_{k,l}\,(G))$, temos que

$$Id\,(\mathcal{V}) = Id\,(M_{k,l}\,(G)) \cap Id\,(G\,(D)) \cap Id\,(G\,(J_{00}\,(B_1)) \oplus \ldots \oplus G\,(J_{00}\,(B_t)))\,.$$

Consideramos $G(D') = G(D) \oplus (G(J_{00}(B_1)) \oplus \ldots \oplus G(J_{00}(B_t)))$. Logo, obtemos que

$$\mathcal{V} = var\,(G(B_1) \oplus \ldots \oplus G(B_t) \oplus G(D)) = var\left(M_{k,l}(G) \oplus G\left(D'\right)\right).$$

$\square$

Corolário 5.1.6. $c_n\left(E^*_{k^2+l^2,2kl}\right) \simeq c_n\left(M_{k,l}(G)\right).$

Demonstração. Consequência direta dos **Corolário** 4.6.9 e do teorema anterior. $\square$

5.2 Igualdade Assintótica para $E^*_{s^2,s^2}$ e $M_s(G)$

Considere a álgebra verbalmente prima $M_s(G), s \in \mathbb{N}$. Até o **Teorema** 5.2.5 assumiremos que $A = M_s(D) \dotplus J$, em que $D = F \dotplus tF$ $\left(t^2 = 1\right)$, a matriz $M_s(D)$ é superálgebra simples reduzida sobre $F \dotplus tF$ com graduação $(M_s(F), tM_s(F))$ e $J = J(A)$ é o radical de Jacobson da superálgebra de dimensão finita A.

Lema 5.2.1. *O radical de Jacobson J pode ser decomposto em soma direta de quatro $M_s(D)$-bimódulos*

$$J = J_{00} \dotplus J_{01} \dotplus J_{10} \dotplus J_{11}$$

em que, para $p, q \in \{0,1\}, J_{pq}$ é um módulo à esquerda fiel ou um 0-módulo à esquerda de acordo com $p = 1$ ou $p = 0$ respectivamente. Similarmente, J_{pq} é um módulo à direita fiel ou um 0-módulo à direita de acordo com $q = 1$ ou $q = 0$ respectivamente. Além disso, para $p, q, i, l \in \{0,1\}, J_{pq}J_{ql} \subseteq J_{pl}, J_{pq}J_{il} = 0$, para $q \neq i$. E existe uma superálgebra nilpotente de dimensão finita N tal que $J_{11} \cong M_s(D) \otimes_F N$ (isomorfismo de $M_s(D)$-bimódulos e de superálgebras).

Demonstração. A primeira parte do lema é similar ao **Lema** 5.1.1.

Podemos escolher um sistema Q de elementos homogêneos, $j \in J_{11}$, que geram J_{11} como um $M_s(D)$-bimódulo. Seja $Q = Q_0 \cup Q_1$, em que Q_0 contém os elementos pares e Q_1 contém os elementos ímpares de Q.

Como no **Lema** 5.1.1, vamos considerar os elementos $d_{k,m}(j) = \sum_{i=1}^{s} e_{i,k} j e_{m,i},\ k, m = 1, \ldots, s,\ j \in Q$. Observe que $d_{k,m}(j)$ tem a mesma graduação que j, já que $deg\,(e_{i,k}) = 0,\ \ \forall\ i, k = 1, \ldots, s$ e, como no **Lema** 5.1.1, $d_{k,m}(j)$ comuta com os elementos de $M_s(D)$. Ponha $N = N_0 \dotplus N_1$, em que $N_0 = span_F\langle d_{k,m}(j) \mid j \in Q_0,\ \ k, m = 1, \ldots, s\rangle$ e $N_1 = span_F\langle d_{k,m}(j) \mid j \in Q_1,\ \ k, m = 1, \ldots, s\rangle$. Considere a natural $\mathbb{Z}_2$-graduação de $M_s(D) \otimes N$:

$$\left(M_s(F) \otimes N_0 \dotplus tM_s(F) \otimes N_1, M_s(F) \otimes N_1 \dotplus tM_s(F) \otimes N_0\right).$$

Como no **Lema 5.1.1**, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & M_s(D)\otimes N & \longrightarrow & J_{11} \\ & e_{r,q}\otimes d_{k,m}(j) & \longmapsto & e_{r,k} j e_{m,q} \end{array}$$

é isomorfismo de superálgebras e $M_s(D)$-bimódulos. □

Lema 5.2.2. *Seja $M = L = s^2$, com $s \in \mathbb{N}$. Se $E^*_{M,L} \subseteq Id(G(A))$, então $J_{10} = J_{01} = (0)$.*

Demonstração. Como no **Lema 5.1.2** vamos construir um polinômio que seja consequência de $E^*_{M,L}$.

Seja $\lambda \vdash n = (L+1)(M+1)$, em que $\lambda = \left((L+1)^{M+1}\right)$ é partição de n. Vamos considerar a seguinte tabela standard de Young associada a λ:

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1+(M+1) & \dots & 1+L(M+1) \\ \hline 2 & 2+(M+1) & \dots & 2+L(M+1) \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline M+1 & M+1+(M+1) & \dots & (L+1)(M+1) \\ \hline \end{array}.$$

Para a nossa tabela standard de Young acima temos:

$$R_{T_\lambda} = S_{L+1}(1,\dots,1+L(M+1)) \times \dots \times S_{L+1}(M+1,\dots,(L+1)(M+1)),$$

$$C_{T_\lambda} = \bar{S}_{M+1}(1,2,\dots,M+1) \times \dots \times \bar{S}_{M+1}(1+L(M+1),\dots,(L+1)(M+1)),$$

em que C_{T_λ} é o estabilizador de colunas de T_λ e R_{T_λ} é o estabilizador de linhas de T_λ.

Seja

$$\begin{aligned} e_1^*(\bar{x},\bar{y}) &= \sum_{\rho\in R_{T_\lambda}} \rho g^*_{T_\lambda}(\bar{x},\bar{y}), \text{ em que} \\ g^*_{T_\lambda}(\bar{x},\bar{y}) &= \sum_{\sigma\in C_{T_\lambda}} sgn(\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \cdots y_n x_{\sigma(n)}, \end{aligned}$$

o mesmo polinômio do **Lema 5.1.2**.

Sejam $e_1,\dots,e_{s^2}$, uma base ordenada de matrizes unitárias de $M_s(F)$. Vamos considerar a seguinte substituição: para $i = 1,\dots,M$, $\;j = 1,\dots,L+1$

1. $\overline{sx}_{\mathbf{i+(j-1)(M+1)}} := e_{\mathbf{i}} \otimes g^{\mathbf{0}}_{\mathbf{i+(j-1)(M+1)}}$, $j \neq i$;
2. $\overline{sx}_{\mathbf{i+(i-1)(M+1)}} := e_{\mathbf{i}} \otimes g^{\mathbf{1}}_{\mathbf{i+(i-1)(M+1)}}$, $j = i$; em que $g^0_{ji} \in G_0$ $\;g^1_{ii} \in G_1$ são todos distintos.
3. $\overline{sx}_{\mathbf{j(M+1)}} := e_{\mathbf{j}} \otimes g^{\mathbf{1}}_{j(M+1)}$, $1 \leq j \leq L$, em que $g^1_{j(M+1)} \in G_1$ são todos distintos;
4. $\overline{sx}_{\mathbf{(L+1)(M+1)}} := r_{10} \otimes g$, em que $g \in G_0 \cup G_1$ $\;r_{10} \in J_{10}$.

Substituimos $y's$ por elementos do tipo $e_{\mathbf{h,k}} \otimes g^0$, em que $e_{\mathbf{h,k}}$ são todas distintas matrizes unitárias oportunas e $g^0 \in G_0$, fixam posições iniciais de matrizes substituidos $x's$.

Observe que qualquer permutação que não pertença ao conjunto

$$\sigma \in C' = S_2(1, M+1) \times S_2(2+M+1, 2(M+1)) \times \ldots \times S_2(L+(L-1)(M+1), L(M+1)) < C_{T_\lambda}$$

anulará g_{T_λ} e, como para quaisquer $g_1, g_2 \in G_1$, tem-se $g_1 g_2 = -g_2 g_1$ e $G_0 = Z(G)$, então ao substituir os elementos, $\overline{sx}_i, \overline{sy}_j$ em g_{T_λ}, obtemos

$$g_{T_\lambda}(\overline{sx}, \overline{sy}) = 2^L e_{\mathbf{ij}} r_{10} \otimes h$$

pela argumentação similar ao **Lema 5.1.2** e **Lema 5.1.3**, em que $h \in G$ é obtido dos $g_i's$ substituidos acimas.

Como os elementos matriciais em cada linha são iguais, exceto na $(M+1)$-linha, e nestas linhas temos apenas um elemento de G_1 que fica exatamente na diagonal, e todos os outros elementos são de G_0 obtemos

$$\sigma g_{T_\lambda} = g_{T_\lambda},$$

para toda permutação σ de R'_{T_λ} subgrupo de R_{T_λ} que fixa os elementos da $(M+1)$-ésima linha e fixa os elementos da diagonal, e qualquer permutação $\tau \notin R'_{T_\lambda}$, obtemos

$$\tau g_{T_\lambda} = 0.$$

Pois, suponhamos que σ permuta os elementos da última linha. Então como o último elemento $(r_{10} \otimes g)$ pode aparecer apenas no último lugar, vai ser uma coluna com o número i no qual temos dois lugares (garantidos por substituições $\overline{sy}_i$) para elementos $e_i \otimes g'$ e vamos ter nessa coluna apenas um elemento e_i. Então, um dos lugares vai ser ocupado por um elemento estranho e_j, com $i \neq j$. Assim, o resultado da substituição será sempre zero. Se $\sigma \in R_{T_\lambda}$, a permutação mexe com os elementos da diagonal, então vamos obter uma coluna com número i no qual no lugar i temos o elemento $e_i \otimes g'$ e na última linha $e_i \otimes g'_2$, onde $g' \in G_0$ e $g'_2 \in G_1$ e entre eles aparecem apenas elementos multiplicados por elementos de G_0. Esses elementos comutam entre si e como eles são alternados vai ser zero. Assim, obtemos que

$$e_1^*(\overline{sx}, \overline{sy}) = (L)!^M 2^L e_{ij} r_{10} \otimes g = 0.$$

Logo, concluímos que $r_{10} = 0$, $\forall\ r_{10} \in J_{10}$. Analogamente temos $J_{01} = (0)$. □

Lema 5.2.3. *Sejam M e L, com $M = L = s^2$, $s \in \mathbb{N}$. Seja $J_{11} \cong M_s(D) \otimes N$, em que $N = N_0 \dot{+} N_1$, como no* **Lema 5.2.1**. *Se $E^*_{M,L} \subseteq Id(G(A))$, então $N_0 \subseteq Z(N)$, o centro de N, e N_1 é anticomutativo.*

Demonstração. Seja $\mu \vdash n = (L+1)(M+2)$, em que $\mu = \left((L+1)^{M+2}\right)$. Considere a seguinte tabela standard de Young associada a μ:

$$T_\mu = \begin{array}{|l|l|l|l|}\hline 1 & 1+(M+2) & \cdots & 1+L(M+2) \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline M+1 & M+1+(M+2) & \cdots & (M+1)+L(M+2) \\ \hline M+2 & 2(M+2) & \cdots & (L+1)(M+2) \\ \hline \end{array},$$

$$R_{T_\mu} = S^1_{L+1}\left(1, \ldots, 1 + L\left(M+1\right)\right) \times \ldots \times S^{M+2}_{L+1}\left(M+2, \ldots, \left(L+1\right)\left(M+2\right)\right),$$

$$C_{T_\mu} = \bar{S}^1_{M+2}\left(1, 2, \ldots, M+2\right) \times \ldots \times \bar{S}^{L+1}_{M+2}\left(1 + L\left(M+2\right), \ldots, \left(L+1\right)\left(M+2\right)\right),$$

em que C_{T_μ} é o estabilizador de colunas de T_μ e R_{T_μ} é o estabilizador de linhas de T_μ.
E considere o polinômio

$$\begin{aligned} e^*_2\left(\bar{x}, \bar{y}\right) &= \sum_{\rho \in R_{T_\mu}} \rho g_{T_\mu}\left(\bar{x}, \bar{y}\right), \text{ em que} \\ g_{T_\mu}\left(\bar{x}, \bar{y}\right) &= \sum_{\sigma \in C_{T_\mu}} sgn(\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \cdots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1}. \end{aligned}$$

Sejam $e_1, \ldots, e_{s^2}$, uma base ordenada de matrizes unitárias de $M_s\left(F\right)$. Considere a seguinte substituição: para $i = 1, \ldots, M+2$; $j = 1, \ldots, L+1$

1. $\overline{sx}_{\mathbf{i+(j-1)(M+2)}} := e_i \otimes g^{\mathbf{0}}_{ji}$, $j \neq i$;
2. $\overline{sx}_{\mathbf{i+(i-1)(M+2)}} := e_i \otimes g^{\mathbf{1}}_{ii}$, $j = i$, em que $g^0_{ji} \in G_0$ $g^1_{ii} \in G_1$ são todos distintos;
3. $\overline{sx}_{\mathbf{M+1+(j-1)(M+2)}} := e_j \otimes g^{\mathbf{0}}_{j(M+1)}$, $1 \leq j \leq L$, em que $g^0_{j(M+1)} \in G_0$ são todos distintos;
4. $\overline{sx}_{\mathbf{j(M+2)}} := e_j \otimes g^{\mathbf{1}}_{j(M+2)}$, em que $g^1_{j(M+2)} \in G_1$ são todos distintos;
5. $\overline{sx}_{\mathbf{(M+1)(M+2)}} := d_1 \otimes g_1$;
6. $\overline{sx}_{\mathbf{(L+1)(M+2)}} := d_2 \otimes g_2$, em que $d_1, d_2 \in N_0 \cup N_1$ $g_1, g_2 \in G_0 \cup G_1$

E os $y's$ por elementos do tipo $e_{\mathbf{h,k}} \otimes g^p_i$, em que $e_{\mathbf{h,k}}$ são todas distintas matrizes unitárias oportunas, $g^p_i \in G_p$ e $y_{n-1} = e_{h_{n-1},k_{n-1}} \otimes g^0_{n-1}$.

Observe que, para g_{T_μ}, tem-se que qualquer permutação de

$$\begin{aligned} &C' = S_3\left(1, M+1, M+2\right) \times S_3\left(2, 2\left(M+1\right), 2\left(M+2\right)\right) \times \ldots \times \\ &S_3\left(L + \left(L-1\right)\left(M+1\right), L\left(M+1\right), L\left(M+2\right)\right) \times S_2\left(M+1+\left(L-1\right)\left(M+2\right), L\left(M+2\right)\right) < C_{T_\mu} \end{aligned}$$

não anulará g_{T_μ}. Porém alguns termos irão se cancelar e, como é possível reorganizar os elementos g'_is, então restará apenas 2^L permutações de C' que não anula os monômios de g_{T_μ}. Para as permutações das últimas colunas alguns irão se cancelar restando apenas quatro termos. Assim, tem-se

$$g_{T_\mu}\left(\overline{sx}, \overline{sy}\right) = 2^{L+1} e_{\mathbf{i,j}}(d_1 d_2 \otimes g'_1 g_1 g'_2 g_2 - d_2 d_1 \otimes g'_1 g_2 g'_2 g_1).$$

Quando aplicar as permutações de R_{T_μ}, observe que os elementos em cada linha são iguais até a M-ésima linha. Como no **Lema 5.2.2** se a permutação mexe com a diagonal até a M-linha, então g_{T_μ} irá se anular. Qualquer permutação das últimas linhas também vai dar zero, a menos de uma transposição para cada linha (última e penúltima) que permuta último elemento com o elemento e_a que pode aparecer apenas nessa última posição (garantido por substituições de $\overline{sy}_i$). Como os elementos de N comutam com todos os elementos de $M_s(D)$, essas duas transposições vai dá coeficiente quatro. Assim, obtem-se

$$e_2^*\left(\overline{sx}, \overline{sy}\right) = 4(L)!^M 2^{L+1} e_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \left[d_1d_2 \otimes g_1'g_1g_2'g_2 - d_2d_1 \otimes g_1'g_2g_2'g_1\right] = 0 \tag{5.3}$$

Analisando os casos:

1. se $d_1, d_2 \in N_0$, então $g_1, g_2 \in G_0$. Daí, $g_1'g_1g_2'g_2 = g_1'g_2g_2'g_1$, substituindo em (5.3), obtemos

$$\begin{aligned} [(e_{\mathbf{i},\mathbf{j}}d_1d_2) \otimes g_1'g_1g_2'g_2 - (e_{\mathbf{i},\mathbf{j}}d_2d_1) \otimes g_1'g_2g_2'g_1] = 0 \Rightarrow e_{\mathbf{i},\mathbf{j}}d_1d_2 \otimes g_1'g_1g_2'g_2 &= e_{\mathbf{i},\mathbf{j}}d_2d_1 \otimes g_1'g_2g_2'g_1 \\ &\Rightarrow d_1d_2 = d_2d_1, \end{aligned}$$

   pois todos os g_i são distintos;

2. para $d_1 \in N_0, d_2 \in N_1, g_1 \in G_0, g_2 \in G_1$ e para $d_2 \in N_0, d_1 \in N_1, g_2 \in G_0, g_1 \in G_1$ vamos obter o resultado, pois $g_1 \in G_0 = Z(G)$ ou $g_2 \in G_0$;

3. para $d_1, d_2 \in N_1, g_1, g_2 \in G_0$. Como $g_1g_2 = -g_2g_1$, tem-se que

$$\begin{aligned} e_2^*\left(\bar{sx}, \bar{sy}\right) &= \left((L)!^M\right) 2^{L+1} e_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \left[d_1d_2 \otimes g_1'g_1g_2'g_2 + d_2d_1 \otimes g_1'g_2g_2'g_1\right] = 0 \Rightarrow \\ d_1d_2 &= -d_2d_1, \ \forall\, d_1, d_2 \in N_1. \end{aligned}$$

□

Lema 5.2.4. *Seja $M = L = s^2$, com $s \in \mathbb{N}$, e $E_{M,L}^* \subseteq Id\,(G\,(A))$. Se $N^\#$ denota a álgebra obtida de N ao adicionar o elemento unidade, então*

$$Id\left(G(M_s(D) \otimes N^\#)\right) = Id\left(G(M_s(D))\right).$$

Demonstração. A demonstração é similar ao **Lema 5.1.4**. □

Teorema 5.2.5. *[[1], Teorema 10] Sejam $s \in \mathbb{N}, s > 0$. Então, $var\left(E_{s^2,s^2}^*\right) = var\left(M_s\left(G\right) \oplus G\left(D'\right)\right)$, em que D' é uma superálgebra de dimensão finita tal que $exp\left(G(D')\right) < 2s^2$.*

Demonstração. Pelo **Teorema 4.6.14**, temos que $exp\left(E_{s^2,s^2}^*\right) = 2s^2$. Pelo **Lema 4.6.6**, existem um número finito de superálgebras reduzidas $B_1, \ldots, B_u$ e uma superálgebra de dimensão finita P, tais que

$$\mathcal{V} = var\left(G\left(B_1\right) \oplus \ldots \oplus G\left(B_u\right) \oplus G\left(P\right)\right) \quad \text{e}$$

$$exp\left(\mathcal{V}\right) = exp\left(G\left(B_1\right)\right) = \ldots = exp\left(G\left(B_u\right)\right) = 2s^2 > exp\left(G\left(D\right)\right).$$

Seja A umas das superálgebras reduzidas $B_1, \dots, B_u$ e vamos analisar sua estrutura. Então, A é uma superálgebra reduzida com

$$exp\,(G\,(A)) = 2s^2 \text{ e } E^*_{s^2,s^2} \subseteq Id\,(G\,(A))\,.$$

Seja $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_q \dotplus J$, em que $A_1, \dots, A_q$ superálgebras simples de dimensão finita e $J\,(A) = J$, o radical de Jacobson de A. Pelo *Teorema de descrição de superálgebras simples*, sabemos que

$$A_i \cong M_{d_i}\,(F) \text{ ou } A_i \cong M_{k_i,l_i}\,(F) \text{ ou } A_i \cong M_{s_i}\,(D)\,,$$

em que $t^2 = 1$.

Como A é reduzida, pelos **Lema 4.6.2** e **Lema 4.6.3**, existe uma superálgebra minimal $C = A_1 \oplus \ldots \oplus A_q \dotplus J\,(C)$ contida em A. Assim, $G\,(C) \subseteq G\,(A)$ tal que

$$2s^2 = exp\,((A)) = dim_F\,(A_1 \oplus \ldots \oplus A_q) = dim_F\,(A_1 \oplus \ldots \oplus A_q)_0 + dim_F\,(A_1 \oplus \ldots \oplus A_q)_1 = d_1 + l_1,$$

em que $d_1 = dim_F\,(A_1 \oplus \ldots \oplus A_q)_0$ e $l_1 = dim_F\,(A_1 \oplus \ldots \oplus A_q)_1$. Pelo **Teorema 4.6.5**, sendo C uma superálgebra minimal, ocorre

$$Id\,(G\,(C)) = Id\,(G\,(A_1)) \ldots Id\,(G\,(A_q))\,,$$

em que $Id\,(G\,(A_i))\,,$ para qualquer $i = 1, \dots, q$ são T-ideais verbalmente primos.

Suponhamos que, para $i \in \{1, \dots, a\}$, tenhamos $A_{j_i} \cong M_{d_{j_i}}\,(F)$; para $i \in \{a+1, \dots, b+a\}$, tenhamos $A_{j_i} \cong M_{s_{j_i}}\,(D)$; e para $i \in \{b+a+1, \dots, z+b+a\}$, tenhamos $A_{j_i} \cong M_{k_{j_i},l_{j_i}}\,(F)$, com $a+b+z = q$. Assim,

$$d_1 = \sum_{i=1}^{a} {d_{j_i}}^2 + \sum_{i=a+1}^{b+a} {s_{j_i}}^2 + \sum_{i=b+a+1}^{z+b+a} {k_{j_i}}^2 + l_{j_i}^2 \text{ e } l_1 = \sum_{i=a+1}^{b+a} {s_{j_i}}^2 + \sum_{i=b+a+1}^{z+b+a} 2k_{j_i}l_{j_i}.$$

Sabemos que

$$\chi_n\,(M_{k_i,l_i}\,(G)) \subseteq H\,\left({k_i}^2 + {l_i}^2, 2k_il_i\right); \chi_n\,(M_{d_i}\,(F)) \subseteq H\,\left({d_i}^2, 0\right); \chi_n\,(M_{s_i}\,(G)) \subseteq H\,\left({s_i}^2, {s_i}^2\right),\ \forall\, i,\ \forall\, n \geq 1,$$

e pelo **Lema 3.3.8**,

$$\chi_n\,(G\,(C)) \subseteq H\,(d_1, l_1)\,\widehat{\otimes}\left(\chi_1^{\widehat{\otimes}(q-1)}\right).$$

Por outro lado,

$$G\,(C) \subseteq G\,(A) \Rightarrow Id\,(G\,(A)) \subseteq Id\,(G\,(C)) \Rightarrow E^*_{s^2,s^2} \subseteq Id\,(G\,(C))\,.$$

Dessa forma, pelo **Teorema 3.4.1**, $\chi_n\,(G\,(C)) \subseteq H\,\left(s^2, s^2\right)$.

Vamos mostrar que $d_1 = s^2$ e $l_1 = s^2$. Como $d_1 + l_1 = 2s^2$, temos três possibilidades:

1. $d_1 = s^2$ e $l_1 = s^2$;

2. $d_1 > s^2$ e $l_1 < s^2$;

3. $d_1 < s^2$ e $l_1 > s^2$.

Mostraremos que (2) e (3) não podem ocorrer.
Suponha que (3) ocorre, seja $\lambda \in H(d_1, l_1) \widehat{\otimes} \left(\chi_1^{\widehat{\otimes}(q-1)}\right)$ tal que $s^2 < \lambda_d \leq l_1$ e $m_\lambda \neq 0$, em que $d \in \{s^2+1, \ldots\}$. Como $s^2 < \lambda_d \leq \lambda_{s^2}$, teremos $\lambda \notin H(s^2, s^2)$. Pelo **Teorema 3.4.1**, $m_\lambda = 0$, pois $E^*_{s^2,s^2} \subseteq Id(G(C))$, contradição. Logo, $l_1 \leq s^2$. Agora suponha que (2) ocorre, seja $\mu \in H(d_1, l_1) \widehat{\otimes} \left(\chi_1^{\widehat{\otimes}(q-1)}\right)$ tal que $\mu_d > s^2$ e $m_\mu \neq 0$, em que $d \in \{s^2+1, \ldots, d_1\} \Rightarrow \mu \notin H(s^2, s^2)$, pelo **Teorema 3.4.1**, $m_\mu = 0$, pois $E^*_{s^2,s^2} \subseteq Id(G(C))$, contradição. Logo, $d_1 \leq s^2$. Como, $d_1 + l_1 = s^2 + s^2$, temos $d_1 = s^2$ *e* $l_1 = s^2$. Assim,

$$H(d_1, l_1) \widehat{\otimes} \left(\chi_1^{\widehat{\otimes}(q-1)}\right) = H(s^2, s^2) \widehat{\otimes} \left(\chi_1^{\widehat{\otimes}(q-1)}\right) \subseteq H(s^2, s^2) \cup D(s^2+m, s^2+m),$$

é o gancho infinito de braços s^2 e pernas s^2 mais um retângulo de tamanho $m = (q-1)^2$.

Vamos mostrar que $q = 1$. Suponha que existe um diagrama D_μ com não zero multiplicidade e contendo um retângulo D_λ, em que $\lambda = (s^2+1)^{(s^2+q-1)}$. Então, $E^*_{s^2+q-2,s^2} \nsubseteq Id(G(C))$ e, como $E^*_{s^2,s^2} \subseteq Id(G(C))$, temos que

$$q \leq 1 \;\Rightarrow\; q = 1 \Rightarrow Id(G(C)) = Id(G(A)) \text{ com } A_1 \in \{M_{k_1}(F), M_{k_1,l_1}(F), M_{k_1}\left(F \dotplus tF\right)\}.$$

Assim, $A = A_1 \dotplus J$. De forma similar ao **Teorema 5.1.5**, como

$$\begin{aligned}
\chi_n(M_{s_1,s_1}(G)) \subseteq H(2s_1^2, 2s_1^2) \quad &\text{e} \quad exp(M_{s_1,s_1}(G)) = 4s_1^2;\\
\chi_n(M_{s_1}(G)) \subseteq H(s_1^2, s_1^2) \quad &\text{e} \quad exp(M_{s_1}(G)) = 2s_1^2;\\
\chi_n(M_{s_1}(F)) \subseteq H(s_1^2, 0) \quad &\text{e} \quad exp(M_{s_1}(F)) = s_1^2,
\end{aligned}$$

concluímos que $A_1 = M_s(D)$. Assim, $A = M_s(D) \dotplus J$.

Pelo **Lema 5.2.1**, $J = J_{00} \dotplus J_{10} \dotplus J_{01} \dotplus J_{11}$ e, pelo **Lema 5.2.2**, $J_{10} = J_{01} = (0)$, já que $E^*_{s^2,s^2} \subseteq Id(G(A))$. Assim, $A = M_s(D) \dotplus \left(J_{11} \dotplus J_{00}\right)$. Por outro lado, $J_{11} \cong M_s(D) \otimes N$, em que N é uma superálgebra de dimensão finita. Daí,

$$A \cong \left(M_s(D) \otimes N^{\#}\right) \oplus J_{00},$$

em que $N^{\#}$ é uma F-álgebra obtida de N ao adicionar a unidade.

Pelo **Lema 5.2.4**, $Id\left(G\left(M_s(D) \otimes N^{\#}\right)\right) = Id(G(M_s(D)))$. Assim,

$$Id(G(A)) = Id\left(G\left(M_s(D) \otimes N^{\#}\right)\right) \cap Id(G(J_{00})) \Rightarrow Id(G(A)) = Id(G(M_s(D))) \cap Id(G(J_{00})).$$

Logo, $var(G(A)) = var(G(M_s(D)) \oplus G(J_{00}))$. Mostramos que para qualquer álgebra reduzida B_i, para cada $i = 1, \ldots, u$, tem-se $B_i = M_s(D) \dotplus J(B_i)$. Portanto, concluímos que

$$\mathcal{V} = var\left(M_s(G) \oplus G(D')\right),$$

em que $G(D') = G(P) \oplus G(J_{00}(B_1) \oplus \ldots \oplus J_{00}(B_u))$. □

Corolário 5.2.6. $c_n\left(E^*_{s^2,s^2}\right) \simeq c_n(M_s(G))$.

Demonstração. Consequência direta dos **Corolário 4.6.9** e do teorema anterior. □

5.3 Igualdade Assintótica para Cap_{k^2+1}, St_{2k} e $M_k(F)$

Agora analisaremos o caso de uma superálgebra reduzida do tipo especial. Recorde que a matriz $M_k(F)$ denota a superálgebra simples de dimensão k^2, com entradas em F e com graduação $(M_k(F), 0)$. Até o **Teorema 5.3.6** assumiremos que $R = M_k(F) \dot{+} J$, em que $J = J(R)$ é o radical de Jacobson da superálgebra de dimensão finita R, além disso denotaremos $M_k(F)$ por A.

Lema 5.3.1. *O radical de Jacobson J pode ser decomposto em soma direta de quatro $M_k(F)$-bimódulos*

$$J = J_{00} \dot{+} J_{01} \dot{+} J_{10} \dot{+} J_{11},$$

em que, para $p, q \in \{0,1\}$, J_{pq} é um módulo à esquerda fiel ou um 0-módulo à esquerda de acordo com $p = 1$ ou $p = 0$ respectivamente. Similarmente, J_{pq} é um módulo à direita fiel ou um 0-módulo à direita de acordo com $q = 1$ ou $q = 0$ respectivamente. Além disso, para $p, q, i, l \in \{0,1\}, J_{pq}J_{ql} \subseteq J_{pl}, J_{pq}J_{il} = 0$, para $q \neq i$. E existe uma superálgebra nilpotente de dimensão finita N tal que $J_{11} = M_k(F)N \cong M_k(F) \otimes_F N$ são isomorfos como $M_k(F)$-bimódulos e superálgebras.

Demonstração. A demonstração é análoga ao **Lema 5.1.1**. A diferença é que $deg(d_{s,t}(j)) = deg(j)$, pois $deg(e_{is}) = 0,\ \forall\, i, s \in \{1, \ldots, k\}$. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & M_k(F) \otimes N & \longrightarrow & J_{11} \\ & e_{r,t} \otimes d_{s,m}(j) & \longmapsto & e_{r,s}je_{m,t} \end{array}$$

é um isomorfismo de superálgebras e de $M_k(F)$-bimódulos. □

Lema 5.3.2. *Suponha que $J_{01} \dot{+} J_{10} \neq 0$. Então, $St_{2k} \notin Id(R)$ e $Cap_{k^2+1} \notin Id(R)$.*

Demonstração. Faremos a demonstração para $J_{10} \neq (0)$.

Suponhamos que $J_{10} \neq (0)$, então existe $0 \neq d \in J_{10}$. Sabemos que, $dA = 0$, pois J_{10} é 0-módulo à direita e $e_{ii}d \neq 0$, para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$, pois J_{10} é A-módulo à esquerda fiel. Faremos indução sobre k.

1. Se $k = 1$, temos que $St_2(e_{11}, d) = e_{11}d \neq 0$.

2. Suponha que $k \geq 2$. Já que St_{2k-1} não é identidade para A, então existem $a_1, \ldots, a_{2k-1} \in A$ tais que $St_{2k-1}(a_1, \ldots, a_{2k-1}) \neq 0$. Mais precisamente, podemos escolher

$$(a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{2k-1}) = (e_{i+1,i+1}, e_{i+1,i+2}, e_{i+2,i+2}, \ldots, e_{i,i})$$

matrizes elementares todas distintas, substituindo em St_{2k-1} obtemos que

$$St_{2k-1}\left(a_1,\ldots,a_{2k-1}\right) = e_{i+1,i} \Rightarrow$$

$$e_{i,i+1}St_{2k}\left(a_1,\ldots,a_{2k-1},d\right) = e_{i,i+1}St_{2k-1}\left(a_1,\ldots,a_{2k-1}\right)d = e_{i,i+1}e_{i+1,i}d = e_{i,i}d \neq 0.$$

Portanto, St_{2k} não é uma identidade para R.

Sabemos que A não satisfaz o polinômio de Capelli de posto k^2. Assim, existem matrizes elementares

$$a_1,\ldots,a_{k^2} \in A,$$

todas distintas e matrizes elementares

$$b_1,\ldots,b_{k^2-1} \in A,$$

tais que

$$Cap_{k^2}\left(a_1,\ldots,a_{k^2},b_1,\ldots,b_{k^2-1}\right) = e_{kk}.$$

Então

$$Cap_{k^2+1}\left(a_1,\ldots,a_{k^2},d;b_1,\ldots,b_{k^2-1},e_{kk}\right) = Cap_{k^2}\left(a_1,\ldots,a_{k^2};b_1,\ldots,b_{k^2-1}\right)e_{kk}d = e_{kk}d \neq 0,$$

pois $d \in J_{10}$. Portanto, Cap_{k^2+1} não é identidade de R. Donde segue a afirmação. A demonstração para J_{01} é similar.

□

Lema 5.3.3. *Seja $J_{11} = AN \cong A \otimes N$. Se N não é comutativa, então $St_{2k+1} \notin Id\left(R\right)$.*

Demonstração. Ver [9], Lema 4. □

Lema 5.3.4. *Se $J_{10}J_{00} \dot{+} J_{01}J_{10} \dot{+} J_{10}J_{01} \dot{+} J_{00}J_{01} \neq (0)$, então $St_{2k+1} \notin Id\left(R\right)$.*

Demonstração. Ver [9], Lema 5. □

Lema 5.3.5. *Seja $R = A \dot{+} J$, onde $A = M_k\left(F\right)$ e J é o radical de Jacobson da álgebra R, e St_{2k+1}. Se $J_{01}J_{10} = J_{10}J_{01} = J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = (0)$, então $var\left(R\right) = var\left(A_1 \oplus A_2 \oplus J_{00}\right)$, em que $A_1 = A \dot{+} J_{10}$ e $A_2 = A \dot{+} J_{01}$.*

Demonstração. ($\subseteq$) Como $A_1, A_2, J_{00} \subseteq R$, temos que $Id\left(R\right) \subseteq Id\left(A_1 \oplus A_2 \oplus J_{00}\right)$.

($\supseteq$) Primeiro vamos fazer a seguinte observação: Suponha que o polinômio multilinear $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ é tal que $f \notin Id\left(R\right)$. Então, existem $b_1,\ldots,b_n \in R$ tais que $f\left(b_1,\ldots,b_n\right) \neq 0$. Suponha por absurdo que

$$f \in Id\left(A \dot{+} J_{11} \dot{+} J_{10}\right) \cap Id\left(A \dot{+} J_{11} \dot{+} J_{01}\right) \cap Id\left(J_{00}\right).$$

Suponha que $b_1,\ldots,b_n \in A\cup J_{10}\cup J_{01}\cup J_{11}\cup J_{00}$. Note que $b_1,\ldots,b_n$ não pode pertencer a nenhum dos conjuntos $A\cup J_{11}\cup J_{10}$ ou a $A\cup J_{11}\cup J_{01}$ ou a J_{00} ao mesmo tempo, pois caso contrário $f(b_1,\ldots,b_n)=0$. Então, existem $b_i,b_j,\ i\neq j$ tais que ocorre uma das três possibilidades:

$$b_i\in J_{10}\ \text{ e } b_j\in J_{01},\quad \text{ou } b_i\in J_{10}\ \text{ e } b_j\in J_{00},\ \text{ ou } b_i\in J_{01}\ e\ b_j\in J_{00}.$$

Como

$$J_{01}J_{10}=J_{10}J_{01}=J_{10}J_{00}=J_{00}J_{01}=(0)\,,\ J_{01}J_{00}=J_{00}J_{10}=J_{00}J_{11}=J_{11}J_{00}=(0)\quad \text{e } J_{pq}'s$$

são A-bimódulos, então para quaisquer uma das três possibilidades descritas acima e para qualquer $\sigma\in S_n$, temos

$$b_{\sigma(1)}\cdots b_{\sigma(n)}=0\Rightarrow f\in Id\,(R)\,,$$

mas isso contradiz $f\notin Id\,(R)$. Segue que $Id\left(A\dot{+}J_{11}\dot{+}J_{10}\right)\cap Id\left(A\dot{+}J_{11}\dot{+}J_{01}\right)\cap Id\,(J_{00})\subseteq Id\,(R)$.

Agora para provar a afirmação do lema, vamos mostrar que $Id\left(A\dot{+}J_{11}\dot{+}J_{10}\right)=Id\left(A\dot{+}J_{10}\right)$ e $Id\left(A\dot{+}J_{11}\dot{+}J_{01}\right)=Id\left(A\dot{+}J_{01}\right)$. Assim, concluiremos que

$$Id\,(A_1\oplus A_2\oplus J_{00})=Id\left(A\dot{+}J_{10}\right)\cap Id\left(A\dot{+}J_{01}\right)\cap Id\,(J_{00})\subseteq Id\,(R)\,.$$

Suponha que o polinômio multilinear $f=f(x_1,\ldots,x_n)$ é tal que $f\notin Id\left(A\dot{+}J_{11}\dot{+}J_{10}\right)$. Recordemos que $J_{11}=AN$, A comuta com N e N é comutativo pelo **Lema 5.3.3**. Então para quaisquer $b_1,\ldots,b_{n-2}\in A\cup J_{11}\cup J_{10},\ a\in A,\ d\in N$, temos que $b_1\cdots b_k a d b_{k+1}\cdots b_{n-2}=d(b_1\cdots b_k a 1 b_{k+1}\cdots b_{n-2})$, onde 1 é a identidade de $M_k(F)$. Como $f\notin Id\left(A\dot{+}J_{11}\dot{+}J_{10}\right)$, existem $b_1,\ldots,b_n\in A\cup J_{11}\cup J_{10}$ tais que $f(b_1,\ldots,b_n)\neq 0$. Então, podemos escrever

$$f(b_1,\ldots,b_n)=d'f\left(b_1',\ldots,b_n'\right),$$

em que $d'\in N$ e $b_1',\ldots,b_n'\in A\cup J_{10}$. Logo, $f\notin Id\left(A\dot{+}J_{10}\right)$. Portanto,

$$Id\left(A\dot{+}J_{10}\right)\subseteq Id\left(A\dot{+}J_{11}\dot{+}J_{10}\right).$$

Como $Id\left(A\dot{+}J_{11}\dot{+}J_{10}\right)\subseteq Id\left(A\dot{+}J_{10}\right)$, obtemos a igualdade. De forma similar, mostra-se que $Id\left(A\dot{+}J_{01}\right)=Id\left(A\dot{+}J_{01}\dot{+}J_{11}\right)$. Portanto, $Id\,(A_1)\cap Id\,(A_2)\cap Id\,(J_{00})\subseteq Id\,(R)$. Concluímos a afirmação. □

Teorema 5.3.6. *[[9], Teorema 3] Seja F um corpo de característica zero. Então, $var\,(Cap_{k^2+1})=var\,(M_k(F)\oplus B)$, para alguma álgebra B de dimensão finita tal que $exp\,(B)<k^2$.*

Demonstração. Como $k^2+1-1=k^2$ é um quadrado, então $exp\,(Cap_{k^2+1})=k^2$. Além disso, como Cap_{k^2+1} não é uma identidade para álgebra de Grassmann, então pelo **Teorema 4.3.1**, Cap_{k^2+1} é gerada por alguma álgebra de dimensão finita. Pelo **Corolário 4.6.7**, existem um número finito de álgebras reduzidas $B_1, \ldots, B_t$ e uma álgebra de dimensão finita D tais que

$$var\left(Cap_{k^2+1}\right) = var\left(B_1 \oplus \ldots \oplus B_t \oplus D\right),$$

$$exp\left(Cap_{k^2+1}\right) = exp\left(B_1\right) = \ldots = exp\left(B_t\right) = k^2 > exp\left(D\right).$$

Vamos analisar a estrutura de uma álgebra reduzida que satisfaz tais condições. Seja R uma álgebra reduzida tal que $Cap_{k^2+1} \in Id\left(R\right)$ e $exp\left(R\right) = k^2$. Escrevemos $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \dotplus J$, em que $A_1, \ldots, A_n$ são álgebras simples e J é o radical de Jacobson de R. Assim, $A_q \cong M_{d_q}\left(F\right)$, para quaisquer $q = 1, \ldots, n$, pois caso não fosse teríamos que $G\left(R\right)$ conteria uma subálgebra isomorfa a $M_{k_i,l_i}\left(G\right)$ ou $M_{d_i}\left(G\right)$, mas o polinômio de Capelli não é satisfeito por nenhuma dessas álgebras. Logo, $A_q = M_{d_q}\left(F\right)$, para quaisquer $q = 1, \ldots, n$. Além disso, R contém uma subálgebra minimal,

$$C = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \dotplus J\left(C\right), \text{ com } dimA_1 + \ldots + dimA_n = exp\left(C\right) = exp\left(R\right)$$

e, pelo **Lema 4.6.4**, C é isomorfa a $UT\left(d_1, \ldots, d_n\right)$, com $exp\left(C\right) = exp\left(R\right) = d_1^2 + \ldots + d_n^2 = k^2$.

Pelo **Lema 4.6.13**, a álgebra $UT\left(d_1, \ldots, d_n\right)$ satisfaz $Cap_{d_1^2+\ldots d_n^2+n} \equiv 0$, mas não satisfaz de grau $\leq d_1^2 + \ldots + d_n^2 + n - 1$. Assim, temos que $n = 1, d_1 = k$. Logo, podemos escrever $R = M_k\left(F\right) \dotplus J$.

Pelo **Lema 5.3.1**, $J = J_{00} \dotplus J_{10} \dotplus J_{01} \dotplus J_{11}$ *e* $J_{11} \cong M_k\left(F\right) \otimes N$, em que N é superálgebra de dimensão finita; pelo **Lema 5.3.2**, $J_{01} = J_{10} = (0)$ e, pelo **Lema 5.3.3**, N é comutativa. Assim, $M_k\left(F\right)$ e $M_k\left(F\right) \dotplus J \cong M_k\left(F\right) \otimes N^{\#}$ são PI-equivalentes, em que $N^{\#}$ é a álgebra obtida de N ao adicionar a identidade ($N^{\#}$ é comutativa e não nilpotente).

Logo, $R = M_k\left(F\right) \dotplus \left(J_{11} \dotplus J_{00}\right) \cong \left(M_k\left(F\right) \dotplus M_k\left(F\right) \otimes N\right) \oplus J_{00} \cong \left(M_k\left(F\right) \otimes N^{\#}\right) \oplus J_{00}$.

Como $Id\left(M_k\left(F\right) \dotplus J_{11}\right) = Id\left(M_k\left(F\right) \dotplus M_k\left(F\right) \otimes N\right) = Id\left(M_k\left(F\right) \otimes N^{\#}\right) = Id\left(M_k\left(F\right)\right)$, concluímos que $var\left(R\right) = var\left(M_k\left(F\right) \oplus J_{00}\right)$.

Mostramos que para qualquer álgebra reduzida $B_1, \ldots, B_t$ acima, temos $B_i = M_k\left(F\right) \dotplus J\left(B_i\right)$. Logo, $var\left(Cap_{k^2+1}\right) = var\left(M_k\left(F\right) \oplus B\right)$, em que $B = D \oplus J_{00}\left(B_1\right) \oplus \ldots \oplus J_{00}\left(B_t\right)$. Logo, concluímos a afirmação. □

Corolário 5.3.7. $c_n\left(Cap_{k^2+1}\right) = c_n\left(M_k\left(F\right)\right)$.

Demonstração. Consequência direta do **Corolário 4.6.9** e do teorema anterior. □

Teorema 5.3.8. *[[9], Teorema 2] Seja F um corpo de característica zero. Então:*

1. *$var\left(St_{2k}\right) = var\left(M_k(F) \oplus B\right)$, para alguma álgebra B de dimensão finita tal que $exp\left(B\right) < k^2$.*

2. *$var\left(St_{2k+1}\right) = var\left(M_{k\times 2k}(F) \oplus M_{2k\times k}\left(F\right) \oplus B\right)$, para alguma álgebra B de dimensão finita tal que $exp\left(B\right) < k^2$.*

Demonstração. Pelo **Lema 4.6.12**, $exp\left(St_{2k}\right) = exp\left(St_{2k+1}\right) = k^2$. Além disso, como St_q não é uma identidade para álgebra de Grassmann, para todo $q \in \mathbb{N}$, então, pelo **Teorema 4.3.1**, St_q é gerada por alguma álgebra de dimensão finita. Pelo **Corolário 4.6.7**, existem um número finito de álgebras reduzidas $B_1, \ldots, B_t$ e uma álgebra de dimensão finita D, tais que

$$var\left(St_q\right) = var\left(B_1 \oplus \ldots \oplus B_t \oplus D\right), exp\left(St_q\right) = exp\left(B_1\right) = \ldots = exp\left(B_t\right) = k^2, exp\left(D\right) < exp\left(St_q\right),$$

em que $q = 2k$ ou $q = 2k+1$.

Seja $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \dotplus J$ uma das álgebras reduzidas acima, em que $A_i \cong M_{d_i}(F)$, para quaisquer $i = 1, \ldots, m$, é uma álgebra simple de dimensão finita. Então, R satisfaz $St_q = 0$.

Como no teorema anterior, R contém uma subálgebra minimal isomorfa a $UT(d_1, \ldots, d_m)$. Além disso, $exp\left(UT(d_1, \ldots, d_m)\right) = d_1^2 + \ldots + d_m^2$. Mas sabemos que $UT(d_1, \ldots, d_m)$ satisfaz a identidade St_n se, e somente se, $n \geq 2(d_1 + \ldots. + d_m)$. Assim, $UT(d_1, \ldots, d_m)$ satisfaz

$$St_q \text{ para } q = 2k \text{ ou } q = 2k+1 \Longleftrightarrow 2k \geq 2(d_1 + \ldots + d_m) \Longleftrightarrow d = d_1 + \ldots + d_m \leq k \Rightarrow d_1^2 + \ldots + d_m^2 < k^2,$$

para qualquer $m > 1$. Pelo **Lema 2.3.4**, $UT(d_1, \ldots, d_m)$ não satisfaz St_{2d-1}. Assim, R é uma álgebra reduzida com $exp(R) = k^2$ e satisfaz $St_q = 0$ para $q = 2k$ ou $q = 2k+1$, então $m = 1$. Logo, $R = M_k(F) \dotplus J$. Agora vamos considerar os casos:

1. $q = 2k$ e $R = M_k(F) \dotplus J$. Podemos decompor J como $J = J_{00} \dotplus J_{10} \dotplus J_{01} \dotplus J_{11}$. Como $St_{2k} \in Id(R)$, temos pelo **Lema 5.3.2**, $J_{01} = J_{10} = (0)$. Além disso, $J_{11} \cong M_k(F) \otimes N$, e pelo **Lema 5.3.3**, N é comutativa. Como $M_k(F)J_{01} = J_{10}M_k(F) = J_{00}J_{11} = J_{11}J_{00} = (0)$ e $J_{10} = J_{01} = (0)$, obtemos que $R = \left(M_k(F) \dotplus J_{11}\right) \oplus J_{00}$, em que J_{00} é um ideal nilpotente de R. Além disso, $M_k(F) \dotplus J_{11} = M_k(F) \dotplus M_k(F)N \cong M_k(F) \otimes N^{\#}$, em que $N^{\#}$ é obtido de N ao adicionar o elemento unidade. Como $N^{\#}$ é comutativa e não nilpotente, segue que $M_k(F) \dotplus J_{11} \cong M_k(F) \otimes N^{\#}$ e $M_k(F)$, são PI-equivalentes, assim $var(R) = var\left(M_k(F) \oplus J_{00}\right)$.

2. Caso $q = 2k+1$. Pelo **Lema 5.3.4**, $J_{01}J_{10} = J_{10}J_{01} = J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = (0)$, pois St_{2k+1} é identidade de R. Pelo **Lema 5.3.5**, temos $var(R) = var\left(\left(M_k(F) \dotplus J_{10}\right) \oplus \left(\left(M_k(F) \dotplus J_{01}\right) \oplus J_{00}\right)\right)$, em que J_{00} é uma álgebra nilpotente. Agora, o $M_k(F)$-módulo à esquerda J_{10} é isomorfo a $t \geq 1$ cópias de um ideal esquerdo de $M_k(F)$, pois $M_k(F)$ é anel simples, em particular semissimples, daí segue que qualquer $M_k(F)$-módulo à esquerda ou à direita é isomorfo a t cópias de um módulo simples $V_i = (v_{uz})_{k \times k}$ à esquerda, respectivamente à direita, em que $v_{yq} = 0$, para quaisquer $q \neq i$ e $v_{ui} \in F$ (para um módulo simples à direita seria um vetor linha da matriz). Denotamos por $M_{k \times l}(F)$ a álgebra de matrizes sobre F que possui todas as linhas maiores ou iguais a $(k+1)$-ésima linhas e todas as colunas maiores ou iguais a $(l+1)$-ésima colunas nulas. Note que podemos ver $M_k(F)$ como $M_{k \times k}(F)$. Observe ainda que $J_{10} \cong V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_t \cong M_{k \times t}(F)$ é isomorfismo de $M_k(F)$-módulos à esquerda e $M_k(F) \dotplus J_{10} \cong M_{k \times (k+t)}(F)$ é isomorfismo de F-álgebras, já que $J_{10}M_k(F) = J_{10}J_{10} = (0)$.

   Mostraremos agora que $M_k(F) \dotplus J_{10}$ tem as mesmas identidades que $M_{k \times 2k}(F)$. É suficiente verificar para $t = 1$. Já que podemos ver as identidades da álgebra $M_{k \times (k+t)}(F)$ como as identidades da álgebra $\left(M_k(F) \dotplus V_1\right) \oplus \ldots \oplus \left(M_k(F) \dotplus V_t\right)$. Dessa forma, obteremos a afirmação.

Como $M_{k\times(k+1)}(F)$ é subálgebra de $M_{k\times 2k}(F)$, obtemos $Id\left(M_{k\times 2k}(F)\right) \subseteq Id\left(M_{k\times(k+1)}(F)\right)$. Seja $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in Id\left(M_{k\times(k+1)}(F)\right)$. Como F é de característica zero, podemos supor

$$f = f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n-1)}x_{\sigma(n)}$$

polinômio multilinear. É suficiente verificar que f é identidade de $M_{k\times 2k}(F)$ apenas na base. Note que os elementos matriciais da base de $M_{k\times 2k}(F)$ que não estão em $M_{k\times(k+1)}(F)$ são

$$\{e_{i,k+1},\ldots,e_{i,2k}\} = B,$$

para qualquer $i = 1,\ldots,k$, observe ainda que para quaisquer $e_{ij}, e_{kt} \in B$ tem-se $e_{ij}e_{kt} = 0$. Isso significa que se substituirmos em f pelo menos dois elementos de B, obtemos que $f = 0$ em $M_{k\times 2k}(F)$. Outra observação a ser feita é que se substituirmos pelo menos um elemento em f de B entre dois elementos da base de $M_{k\times(k+1)}(F)$, f será nulo em $M_{k\times 2k}(F)$, pois haverá mais de um termo da forma: $e_{i,j}e_{t,k}$ com $j \neq t$. Dessa forma, a única possibilidade é substituir em f apenas um elemento de B, este elemento deve estar na última posição dos monômios em f, e todos os outros elementos a serem substituídos em f devem ser da base de $M_{k\times(k+1)}(F)$. Assim, para quaisquer $a_1 = e_{i_1,j_1},\ldots,a_{n-1} = e_{i_{n-1},j_{n-1}} \in M_{k\times(k+1)}(F)$, $e_{s,k+1} \in M_{k\times(k+1)}(F)$, $s = 1,\ldots,k$, obtemos para

$$f(a_1,\ldots,a_{n-1},e_{s,k+1}) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(n-1)}e_{s,k+1} = 0,$$

pois $f \in Id\left(M_{k\times(k+1)}(F)\right)$. Então para $e_{s,j} \in M_{k\times 2k}(F)$ para qualquer $j \geq k+1$, temos

$$f(a_1,\ldots,a_{n-1},e_{s,j}) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(n-1)}e_{s,j} = f(a_1,\ldots,a_{n-1},e_{sk+1})e_{k+1,j} = 0.$$

Logo, $Id\left(M_{k\times(k+t)}(F)\right) = Id\left(M_{k\times 2k}(F)\right)$. De maneira análoga, mostra-se que $M_k(F) \dot{+} J_{01}$ possui as mesmas identidades que $M_{2k\times k}(F)$. Assim, obtemos

$var(R) = var\left(M_{k\times 2k}(F) \oplus M_{k\times 2k}(F) \oplus J_{00}\right)$, em que J_{00} é uma álgebra nilpotente de dimensão finita.

□

Corolário 5.3.9. *$c_n(St_{2k}) \simeq c_n(M_k(F))$ e $c_n(St_{2k+1}) \simeq c_n(M_{k\times 2k}(F) \oplus M_{2k\times k}(F))$.*

Corolário 5.3.10. *$c_n(St_{2k}) \simeq c_n(M_k(F)) \simeq c_n\left(E^*_{k^2,0}\right) \simeq c_n(Cap_{k^2+1})$.*

A. Regev [15] obteve o preciso comportamento assintótico da codimensão da álgebra verbalmente prima $M_k(F)$. Para as álgebras verbalmente primas $M_k(G)$ e $M_{k,l}(G)$, ainda não há registro de que o comportamento assintótico tenha sido obtido precisamente (computado). A. Berele e A. Regev [3] trazem resultados parciais para tais álgebras. Então, os resultados obtidos por F. Benanti e I. Sviridova [1] e por A. Giambruno e M. Zaicev [9], apresentados nesta dissertação, fornecem uma "aproximação"para a codimensão do T-ideal gerado pelo polinômio tipo Amitsur-Capelli e a codimensão das álgebras verbalmente primas.

Referências Bibliográficas

[1] F. BENANTI and I. SVIRIDOVA. Asymptotics for Amitsur's Capelli-type polynomials and verbally prime PI-algebras. *Israel Journal of Mathematics* **156** (2006), 73-91.

[2] A. BERELE. Cocharacters of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graded algebras. *Israel Journal of Mathematics* **61** (1988), 225-234.

[3] A. BERELE and A. REGEV. Codimensions of produts and of intersections of verbally prime T-ideals. *Israel Journal of Mathematics* **103** (1998), 17-28.

[4] A. BERELE and A. REGEV. Exponential growth for codimensions of some P.I.-algebras. *Journal of Algebras* **241** (2001), 118-145.

[5] A. BERELE and A. REGEV. Applications of hook Young diagrams to P.I-algebra. *Journal of Algebras* **82** (1983), 559-567.

[6] V. DRENSKY. *Free Algebras and PI-Algebras.* Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore, (1999).

[7] A. GIAMBRUNO and M. ZAICEV. *Polynomial identities and asymptotic methods.* AMS Mathematical Surveys and monographs, vol 122-Povidence R.I., (2005).

[8] A. GIAMBRUNO and M. ZAICEV. On codimension growth of finitely generated associative algebras. *Advances in Mathematics* **140** (1998), 145-155.

[9] A. GIAMBRUNO and M. ZAICEV. Asymptotics for the standard and the Capelli identities. *Israel Journal of Mathematics* **135** (2003), 125-145.

[10] A. GIAMBRUNO and M. ZAICEV. Codimension Growth and minimal superalgebras. *Transactions of the American Mathematical Society* **355** (2003), 5091-5117.

[11] I. M. ISAACS. *Character theory of finite groups.* Pure and Applied Mathematics. A series of Monographs and Textbooks, Academic Press, (1970).

[12] G. JAMES and A. KERBER. *The representation theory of the symmetric group.* In Encyclopedia of Mathematics and its Application, vol 16, Addison-Wesley, Londdon, (1981).

[13] A. R. KEMER. *Ideals of identities of associatives algebras.* American Mathematical Society Translations of Mathematical Monographs 87, Providence, RI, (1991), 1-79.

[14] J. J. ROTMAN. *Advanced modern algebra.* Prentice Hall, (2002).

[15] A. REGEV. Codimensions and trace codimensions of matrices are asymtotically equal. *Israel Journal of Mathematics* **47** (184), 246-250.

[16] K. HOFFMAN. *Linear Algebra.* Prentice Hall, (1971).