Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Álgebras e Identidades Graduadas

por

Ilana Zuila Monteiro Alves[1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

sob Orientação da

Prof^a. Dra. Irina Sviridova

[1]Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq

Agradecimentos

A Deus, por seu infinito amor e misericórdia. Foi Ele quem me deu mais essa conquista. Sem Ele, nada sou.

À minha família, pois mesmo com a distância sei que ela estava me apoiando e sem o seu apoio eu não teria chegado até aqui. À minha mãe em especial, por me amar tanto e me compreender. Aos meus irmãos Aline e Jorge Wilson, pelo amor e carinho. Ao meu cunhado Paulo Miguel e sua família, que me acolheram como membra da família. Luís Miguel e Vinícius, meus sobrinhos, por serem simplesmente quem são, meus orgulhos.

Aos professores da Universidade Federal do Amazonas - UFAM, instituição em que fiz minha graduação, em especial aos professores Flávia Morgana, Ivan Tribuzzy, Nilomar e Raul.

Aos meus colegas de graduação que estiveram comigo nos momentos bons e nos ruins também e que acreditaram em mim. Em especial à Diana, Eliane, Francisco Almino, Ivana Bandeira, Haida, Keyla e Ruth pela boa e velha amizade e um muito obrigada para o Cleiton (Guidorizzi), responsável por ter contribuído fortemente com a minha decisão em seguir estudando matemática.

Aos professores de pós-graduação em matemática da UnB, pois seus ensinamentos contribuiram na minha formação. Em especial aos professores Marco Pellegrini, Pavel Shumyatski e Sheila.

Aos meus colegas de pós-graduação Keidna Cristiane, Luiz Mateus, Maria, Renata, Saieny, Vinicius Martins, Bruno Nunes, Otto, José Carlos (o Zé), Lauro, Fábio, Alexandre, Mônica, Marina, Aristóteles, Mayra, Joaby, Thaynara, Kaliana, Linniker, Emerson, Mayer e Ismael pela amizade valiosa de cada um, que durante esses dois anos me apoiaram e compartilharam comigo experiências inesquecíveis. Também à Maria Oslei, Michele e Fernanda companheiras de apartamento.

Aos professores da banca examinadora José Antônio e Plamen Koshlukov por suas sugestões e por terem contribuído no enriquecimento deste trabalho.

À minha orientadora Irina Sviridova, pelos conselhos, por ter me dado as melhores lições em matemática e na vida também, por ter se dedicado a me ajudar e por ter contribuído substancialmente em minha formação.

Aos funcionários do departamento de matemática da UnB por sempre estarem dispostos a nos ajudar, em especial à Bruna, Cláudia, Evelini, Fabiana, Irene, Luiz, Thiago e William.

Aos funcionários da Colina, em especial ao Marcelo pela disposição de sempre.

O CNPq pelo apoio financeiro.

À minha mãe,
a melhor,
mulher batalhadora.

Resumo

Seja E a álgebra de Grassmann e $M_{a,b}(E)$ uma subálgebra da álgebra de matrizes $M_{a+b}(E)$ sobre E. Nosso trabalho trata da descrição das identidades graduadas satisfeitas pelas álgebras $M_{a,b}(E)$ e por seus produtos tensoriais. Como aplicação obteremos a PI-equivalência entre as álgebras $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ e $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ que é parte do Teorema do Produto Tensorial de Kemer e veremos que o teorema falha em característica positiva, vamos ter somente uma das inclusões, pelo menos no caso $(r,s) = (1,1)$. Trataremos também das identidades graduadas satisfeitas pelas álgebras do tipo $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ e $E^{\otimes n}$. Nossas provas são combinatoriais e contam com a relação entre as identidades graduadas e as ordinárias, também contam com a construção de modelos apropriados para as correspondentes álgebras relativamente livres graduadas.

Palavras-chave: Identidade graduadas, PI-equivalência, Matrizes sobre a álgebra de Grassmann, Álgebras relativamente livres.

Abstract

Let E be Grassmann algebra and $M_{a,b}(E)$ a subalgebra of matrix algebra $M_{a+b}(E)$ over E. Our work deals with the description of the graded identities satisfied by algebras $M_{a,b}(E)$ and by their tensor products. As application we obtain a PI-equivalence between the algebras $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ and $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ which is part of the Tensor Product Theorem of Kemer and we shall see that the theorem fails in positive characteristic, we have only one of the inclusions, at least in case $(r,s) = (1,1)$. We shall treat also of the graded identities satisfied by the algebras of the type $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ and $E^{\otimes n}$. Our proofs are combinatorial and rely on the relationship between ordinary and graded identities, also we rely on the construction of suitable models for the corresponding relatively free graded algebra.

Keywords: Graded identities, PI-equivalence, Matrices over Grassmann algebras, Relatively free algebras.

Sumário

Introdução

Seja K um corpo infinito de característica diferente de 2. Nesta dissertação todas as álgebras serão consideradas sobre o corpo K. Denotaremos por $K\langle X\rangle$ a álgebra livre gerada livremente pelo conjunto de variáveis enumeráveis $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial para uma K-álgebra A se f se anula quando avaliado em elementos quaisquer de A. Quando uma K-álgebra satisfaz um polinômio não nulo, ela é chamada PI-álgebra. As identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra A formam um ideal, $T(A)$, de $K\langle X\rangle$ que é fechado com respeito a todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$, chamado um T-ideal. Cada T-ideal de $K\langle X\rangle$ é desse tipo. Descrever um T-ideal de uma álgebra qualquer é um problema muito difícil. Descrever as identidades de uma álgebra A, significa encontrar um conjunto gerador de polinômios para $T(A)$, em que tal conjunto é chamado base das identidades de A. Em 1950, Specht fez a seguinte pergunta com respeito a álgebras associativas sobre um corpo de característica 0: *Toda álgebra associativa sobre um corpo K, char$K$=0, possui uma base finita para as suas identidades polinomiais?* Esta pergunta ficou conhecida como *Problema de Specht*. A celebrada teoria de Kemer, (veja **[9]**), conduz à uma classificação de T-ideais em característica 0 e à solução positiva do problema de Specht.

Em seus trabalhos, Kemer estudou as álgebras T-primas que são álgebras cujos T-ideais são ideais primos dentro da classe dos T-ideais na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. Tais T-ideais são chamados T-primos. De acordo com a teoria de Kemer, os únicos T-ideais T-primos não triviais em característica 0 são $T(M_n(K))$, $T(M_n(E))$ e $T(M_{a,b}(E))$, onde $M_n(K)$ e $M_n(E)$ são álgebras de matrizes de ordem $n \times n$ sobre K e sobre a álgebra de Grassmann E de dimensão infinita, respectivamente e $M_{a,b}(E)$ é subálgebra de $M_{a+b}(E)$, (essas álgebras são descritas no **Capítulo 2**). Além disso, foi mostrado por Kemer, que em característica 0 valem as seguintes igualdades:

(i) $T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{a+b}(E))$;

(ii) $T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{ac+bd,ad+bc}(E))$;

(iii) $T(M_{1,1}(E)) = T(E \otimes E)$.

Este resultado é conhecido por Teorema do Produto Tensorial de Kemer, do qual segue que o produto tensorial de duas álgebras A e B T-primas é PI-equivalente a uma álgebra T-prima, isto é, $T(A \otimes B) = T(C)$, onde C é uma álgebra T-prima.

Um conceito muito importante que possui uma forte relação com a teoria de Kemer é de álgebras graduadas e suas identidades polinomiais graduadas. Seja G um grupo finito abeliano, dizemos que uma K-álgebra A é G-graduada se ela é escrita como soma direta de subespaços vetoriais $\bigoplus_{g\in G} A_g$ tais que $A_gA_h \subseteq A_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. Um exemplo bem comum que podemos ter de álgebra graduada é dado pela álgebra de Grassmann E (sua construção pode ser encontrada no **Capítulo 1** e sua graduação no **Capítulo 2**), outro exemplo de álgebra graduada pode ser dado pela álgebra de matrizes $A = M_n(K)$ que possuem uma graduação natural, $G = \mathbb{Z}_n$ e $A_g = span\langle e_{ij} | j - i \equiv g(modn)\rangle$. Claramente os conjuntos A_g definem uma graduação para A. Aqui recordaremos brevemente as principais noções de identidades polinomiais graduadas (a definição formal pode ser encontrada no **Capítulo 2**). Seja $K\langle X\rangle$ uma álgebra associativa livre livremente gerada por $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ sobre K, e seja G um grupo abeliano finito. Assuma que $X = \bigcup_{g\in G} X_g$ onde X_g são conjuntos enumeráveis disjuntos. Então a álgebra $K\langle X\rangle$ é G-graduada naturalmente, pondo $K\langle X\rangle_g$ o conjunto gerado por todos os monômios $m = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ tal que $x_{i_t} \in X_{g_t}$ e $g_1 \cdots g_n = g$. O polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial G-graduada para a álgebra G-graduada A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para qualquer $a_i \in A$ de mesmo G-grau que x_i. O conjunto de todas identidades G-graduadas para A é o T_G-ideal $T_G(A)$, que é fechado com respeito a todos endomorfismos graduados de $K\langle X\rangle$.

Identidades graduadas se tornaram um objeto de interesse independente e muitos outros trabalhos foram realizados após os trabalhos de Kemer nos últimos anos. Por exemplo, Koshlukov e Azevedo em **[10]** descrevem bases de identidades satisfeitas pela álgebra de matrizes de ordem 2×2, $M_2(K)$, pela álgebra $M_{1,1}(E)$ e pela álgebra $E \otimes E$. Em **[2]** eles estudam, com Fidelis, T-ideais T-primos sobre corpos infinitos e por meio dos métodos de Regev, provam que o teorema do produto tensorial vale somente em polinômios multilineares e que o teorema falha para o T-ideal das álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$. Di Vincenzo, em **[3]**, descreve as identidades graduadas de $M_{1,1}(E)$ em um corpo de característica 0. Vasilovsky descreve, em **[19]**, as identidades graduadas para álgebras de matrizes com $\mathbb{Z}_n$-graduação. Em **[5]**, Di Vincenzo e Nardozza descrevem um sistema de geradores para as identidades polinomiais graduadas das álgebras $M_{a,b}(E)$ e $M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)$, mostram também que este produto tensorial satisfaz as mesmas identidades polinomiais graduadas que $M_{ac+bd,ad+bc}(E)$, (essas últimas álgebras são descritas no **Capítulo 2** juntamente com suas graduações).

Nosso trabalho vai tratar da descrição das identidades graduadas satisfeitas pelas álgebras do tipo $M_{a,b}(E)$ e seus produtos tensoriais. Essas identidades serão relacionadas por meio de construções de modelos de álgebras livres graduadas para as álgebras $M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)$ e para $M_{ac+bd,ad+bc}(E)$. Vamos estudar também as identidades satisfeitas pelas álgebras $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ e satisfeitas pelas potências tensoriais da álgebra de Grassmann, para isso introduziremos a definição de álgebra k-supercomutativa.

Esse trabalho está estruturado em três capítulos. No primeiro capítulo são apresentados conceitos básicos, mas que são fundamentais para o desenvolvimento dessa dissertação. Incluímos definições e noções de álgebras que são satisfeitas por identidades polinomiais, as PI-álgebras, bem como resultados que fazem relação entre T-ideais e variedades de álgebras e que dão compreensão para os demais capítulos. No **Capítulo 2**, relembramos as definições de álgebras graduadas, álgebras livres graduadas e identidades polinomiais graduadas e todos os resultados do **Capítulo 1** para álgebras ordinárias são aplicados para álgebras graduadas. Também nesse capítulo, vamos descrever a graduação das álgebras de matrizes e de Grassmann e seus produtos tensoriais. Ainda no **Capítulo 2**, vamos definir supervariedade e também introduzimos o envoltório de Grassmann, superálgebras supercomutativas e álgebra supercomutativa livre cujas noções vão auxiliar nos resultados do **Capítulo 3**.

Finalmente, no **Capítulo 3**, vamos estudar as identidades das álgebras $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$. Além disso, pondo $a = pr + qs, b = ps + qr, m = p + q$ e $n = r + s$, descreveremos um conjunto gerador de identidades graduadas para a subálgebra $M_{p,q,r,s}(E)$ de $M_{mn}(E)$ que é isomorfa à $M_{a,b}(E)$, no caso quando o corpo K é infinito e $charK = p \neq 2$. Provaremos que esses polinômios são identidades graduadas para a álgebra $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e como consequência obtemos a inclusão $T(M_{pr+qs,ps+qr}(E)) \subseteq T(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$ para correspondentes identidades polinomiais ordinárias. Ainda no **Capítulo 3**, vamos introduzir as álgebras do tipo $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ e $E^{\otimes n}$ e descreveremos bases das identidades polinomiais graduadas para estas álgebras. Mostraremos resultados que relacionam os T_G-ideias dessas álgebras sobre corpos em características 0 e positiva diferente de 2. E por último vamos ver alguns casos do Teorema do Produto Tensorial de Kemer.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar definições e resultados que serão importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho. Primeiro falaremos sobre a estrutura de uma álgebra e mencionaremos exemplos tais como álgebra de matrizes $M_n(K)$, depois definiremos álgebra associativa livre, identidades polinomiais, PI-álgebras e daremos mais exemplos de álgebras que satisfazem identidades polinomiais, de T-ideais e variedades. Apresentaremos também o processo de multilinearização. Por meio deste processo, em característica 0, o estudo das identidades polinomiais de uma dada álgebra pode ser reduzido ao estudo de identidades polinomiais multilineares. Falaremos brevemente sobre produto tensorial e sua propriedade universal para então darmos continuidade a novos resultados. E por último consideraremos alguns resultados básicos sobre produtos tensoriais de PI-álgebras. Todas as álgebras consideradas serão associativas e unitárias.

1.1 Álgebras

Seja A um espaço vetorial sobre um corpo K, então:

Definição 1.1.1. *Dizemos que A é uma álgebra (ou K-álgebra) se A é munido com uma operação binária $*$ (i.e. uma função $* : (A, A) \to A$), chamada multiplicação, tal que para quaisquer $a, b, c \in A$ e qualquer $\alpha \in K$*

$(a + b) * c = a * c + b * c$

$a * (b + c) = a * b + a * c$

$\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b).$

Usualmente denotaremos a multiplicação de A por $\cdot$ e escreveremos ab ao invés de $a \cdot b$.

Definição 1.1.2. *Dizemos que uma álgebra A é:*

*(i) **Associativa** se o produto de A é associativo, isto é, se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$.*

(ii) ***Comutativa*** *se o produto é comutativo, isto é, se* $ab = ba$ *para quaisquer* $a, b \in A$.

(iii) ***Unitária (ou com unidade)*** *se o produto de* A *possui elemento neutro, isto é, se existe* $1 \in A$ *tal que* $1a = a1 = a$ *para todo* $a \in A$.

Mencionaremos alguns exemplos de álgebras sobre um corpo K :

Exemplo 1.1.3. L *- qualquer extensão do corpo base* K *com a operação normal;*

Exemplo 1.1.4. $K[x], K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *- os polinômios em uma variável ou várias (comutando) variáveis;* $K[x_1, x_2, \ldots]$ *a álgebra polinomial em várias variáveis enumeráveis;*

Exemplo 1.1.5. *Para* $n \in \mathbb{N}$, *o espaço* $M_n(K)$ *de todas as matrizes* $n \times n$ *com entradas em* K *munido do produto usual de matrizes, é uma álgebra associativa com unidade de dimensão* n^2. *Nesta álgebra é importante destacar as* ***matrizes unitárias*** e_{ij}, *para* $1 \leq i, j \leq n$, *onde* e_{ij} *é a matriz cuja única entrada não nula é* 1 *na i-ésima linha e na j-ésima coluna. Essas matrizes formam uma base para* $M_n(K)$. *Mais geralmente, se* A *é uma álgebra, consideraremos o espaço vetorial* $M_n(A)$ *de todas as matrizes* $n \times n$ *com entradas em* A. *Tomando o produto em* $M_n(A)$ *análogo ao produto de matrizes com entradas em* K, *temos então uma estrutura de álgebra em* $M_n(A)$.

Definição 1.1.6. *(i) O subespaço* S *da álgebra* A *é chamado subálgebra se é fechado para a multiplicação, i.e.,* $s_1, s_2 \in S$ *implica* $s_1 \cdot s_2 \in S$.

(ii) Um subespaço vetorial I *de* A *é um ideal (bilateral) de* A *se* $xa, ax \in I$, *para quaisquer* $x \in I$ *e* $a \in A$.

Seja agora, A uma álgebra e I um ideal de A. Consideremos o espaço vetorial quociente $A/I = \{a + I | a \in A\}$, sendo $a + I = \{a + x | x \in I\}$. Para cada $a \in A$, vamos denotar o elemento $a + I$ por $\overline{a}$. Temos que as operações de soma e produto por escalar são definidas por

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} \text{ e } \lambda\overline{a} = \overline{\lambda a}$$

para $a, b \in A$ e $\lambda \in K$.

Consideremos agora o produto

$$\begin{array}{rcc} \cdot : A/I \times A/I & \longrightarrow & A/I \\ (\overline{a}, \overline{b}) & \longmapsto & \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab} \end{array}$$

Este produto está bem definido e é bilinear. Portanto A/I, munido dele é uma álgebra chamada de *álgebra quociente* de A por I.

Definição 1.1.7. *Seja* A *uma álgebra associativa com unidade e* S *um subconjunto de* A. *Definimos:*

(i) A subálgebra de A gerada por S, denotada por $K\langle S\rangle$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contém $S \cup \{1\}$.

(ii) O ideal de A gerado por S como sendo a interseção de todos os ideais de A que contém S.

Se $A = K\langle S\rangle$, então dizemos que S gera A como álgebra ou que S é um conjunto gerador de A como álgebra. Uma caracterização de subálgebra gerada e ideal gerado por um conjunto de uma álgebra associativa com unidade é dada a seguir.

Sejam A uma álgebra associativa com unidade e S um subconjunto não vazio de A. Então

(i) A subálgebra de A gerada por S coincide com o subespaço de A gerado pelo conjunto

$$\{1, s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k} \mid i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}.$$

(ii) O ideal de A gerado por S coincide com o subespaço de A gerado por

$$\{\ asb \mid s \in S, a, b \in A\}.$$

Definição 1.1.8. *Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras se*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

para todo $x, y \in A$. Quando A e B possuírem unidade, vamos exigir também que $\varphi(1_A) = 1_B$.

Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras, dizemos que φ é :

- Um **monomorfismo**, se φ é injetora.
- Um **epimorfismo**, se φ é sobrejetora.
- Um **isomorfismo**, se φ é biunívoca.

  Quando existe um isomorfismo $\varphi : A \to B$, dizemos que A e B são álgebras **isomorfas** e denotamos por $A \cong B$. Observe que $\varphi^{-1} : B \to A$ também é um isomorfismo.
- Um **endomorfismo** de A, se φ é um homomorfismo de A em A.
- Um **automorfismo** de A, se φ é um endomorfismo bijetivo de A.

  Denotamos por:

(i) $EndA$ o conjunto de todos os endomorfismos de A.

(ii) $Im\varphi$ a imagem de φ, isto é, $Im\varphi = \{\ \varphi(a) \mid a \in A\}$.

(iii) $\ker\varphi$ o núcleo de φ, isto é, $\ker\varphi = \{\ a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$.

Não é difícil ver que $\ker\varphi$ é um ideal de A e que $Im\varphi$ é uma subálgebra de B.

Uma importante relação entre homomorfismos e álgebras é dada pelo

Teorema 1.1.9. *[Teorema de homomorfismo de álgebras] Sejam A e B álgebras e $\varphi : A \to B$ homomorfismo de álgebras, então:*

$$A/\ker\varphi \cong Im\varphi.$$

1.2 Álgebra Livre

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis não comutativas. A álgebra livre $K\langle X\rangle$ livremente gerada por X sobre K é o K-espaço com o conjunto de monômios $\{x_{i_1}\cdots x_{i_n} | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ como base.

Dizemos que $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n} = x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$ quando $n = m$, $i_1 = j_1, \ldots, i_n = j_n$. Denotaremos por 1 a palavra vazia (de comprimento zero). Os elementos de $K\langle X\rangle$ que são chamados de polinômios.

Consideremos agora em $K\langle X\rangle$, a multiplicação definida por

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}.$$

Esta multiplicação é estendida em $K\langle X\rangle$ por linearidade. Munido deste produto, $K\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa, pois esse produto é associativo e com elemento neutro 1.

Sejam A uma álgebra e $h : X \to A$ uma aplicação arbitrária, de modo que $h(x_i) = a_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Considerando a aplicação linear $\varphi_h : K\langle X\rangle \to A$ tal que $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi_h(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$, temos que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único satisfazendo $\varphi_h\,|_X = h$.

Dizemos que $K\langle X\rangle$ é álgebra associativa livre com unidade, livremente gerada por X.

Definimos $\deg \alpha m$, o grau de um monômio αm, com $\alpha \in K$, como o comprimento da palavra m. Também $\deg_{x_i} m$, o grau de m na indeterminada x_i, é o número de vezes que x_i aparece em m.

Exemplo 1.2.1. *Consideremos o monômio $m(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3x_2^3x_3$, temos que $\deg_{x_1} m = 1$, $\deg_{x_2} m = 3$, $\deg_{x_3} m = 2$ e o comprimento de m é 6.*

Consequentemente, grau $\deg f$ de um polinômio $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o grau máximo de um monômio em f; $\deg_{x_i} f$, o grau de f em x_i, é o maior dos $\deg_{x_i} u$, para u um monômio de f.

Dado $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$, denotamos por $f(a_1, \ldots, a_n)$ a imagem de f por φ_h. Note que $f(a_1, \ldots, a_n)$ é um elemento de A obtido por substituição dos $x_i's$ pelos $a_i's$ em f.

Definição 1.2.2. *Seja A uma K-álgebra e $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$. Dizemos que $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A se $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, para todo $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.*

Denotemos Φ o conjunto de todos os homomorfismos $\varphi : K\langle X\rangle \to A$. Então é claro que $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial para A se, e somente se, $f \in \bigcap_{\varphi\in\Phi} \ker\varphi$. De fato, suponha que $f \in \bigcap_{\varphi\in\Phi} \ker\varphi$. Então dados $a_1, \ldots, a_n \in A$ e uma aplicação $h : X \to A$ tal que $h(x_i) = a_i$, para $i = 1, \ldots, n$, como $K\langle X\rangle$ ser livremente gerada por X, existe um único homomorfismo $\varphi : K\langle X\rangle \to A$ tal que $\varphi\mid_X = h$, daí temos

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = \varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = 0.$$

Logo $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade para A. Reciprocamente, se $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade para A, então dado um homomorfismo arbitário $\varphi : K\langle X\rangle \to A$, temos

$$\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = 0$$

pois $\varphi(x_i) \in A$, para $i = 1, \ldots, n$. Pela arbitrariedade de φ, temos $f \in \bigcap_{\varphi\in\Phi} \ker\varphi$.

Diremos usualmente que $f \equiv 0$ é uma identidade para A ou que A satisfaz $f \equiv 0$. Como o polinômio $f = 0$ é uma identidade para qualquer álgebra A, fazemos a seguinte

Definição 1.2.3. *Se A satisfaz uma identidade polinomial não trivial $f \equiv 0$, então dizemos que A é uma PI-álgebra.*

Para $a, b \in A$, seja $[a, b] = ab - ba$ denotado o comutador de Lie de a e b. Daremos alguns exemplos de PI-álgebras.

Exemplo 1.2.4. *Se A é uma álgebra comutativa, então A é uma PI-álgebra que satisfaz a identidade $[x, y] \equiv 0$.*

Exemplo 1.2.5. *Qualquer álgebra nilpotente é uma PI-álgebra. De fato se, $A^n = 0$, para algum $n > 1$, então $x_1 \cdots x_n \equiv 0$ é uma identidade polinomial para A.*

Exemplo 1.2.6. *Seja A uma álgebra nil de expoente limitado. Isto significa que existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $a^n = 0$, para todo $a \in A$. Então claramente $x^n \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A.*

Exemplo 1.2.7. *Seja E a álgebra (exterior) de Grassmann sobre um espaço vetorial de dimensão infinita, sobre um corpo K, com char$K \neq 2$. A álgebra E pode ser construída como: seja $K\langle X\rangle$ a álgebra livre de posto enumerável sobre $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Se I é o ideal bilateral de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto de polinômios $\{x_ix_j + x_jx_i \mid i, j \geq 1\}$, então $E \cong K\langle X\rangle/I$.*

Se escrevermos $e_i = x_i + I$ para $i = 1, 2, \ldots$, então E tem a seguinte apresentação:

$$E = \langle 1, e_1, e_2, \ldots \mid e_ie_j = -e_je_i, \text{ para todo } i, j \geq 1\rangle.$$

Observamos que se char$K \neq 2$, das relações, segue que $e_i^2 = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots$.

Denote por S_n o grupo simétrico sobre $\{1, \ldots, n\}$. Note que de $e_ie_j = -e_je_i$ segue facilmente que para qualquer $1 \leq k < l \leq n$,

$$e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}e_{i_k}e_{i_{k+1}}\cdots e_{i_{l-1}}e_{i_l}e_{i_{l+1}}\cdots e_{i_n} = -e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}e_{i_l}e_{i_{k+1}}\cdots e_{i_{l-1}}e_{i_k}e_{i_{l+1}}\cdots e_{i_n}.$$

Portanto, escrevendo qualquer permutação $\sigma \in S_n$, como produto de transposições, obtemos

$$e_{i_{\sigma(1)}}\cdots e_{i_{\sigma(n)}} = (sgn\sigma)e_{i_1}\cdots e_{i_n},$$

onde $sgn\sigma$ é o sinal da permutação σ (i.e., $sgn\sigma = +1$ ou -1 se σ for uma permutação par ou uma permutação ímpar). Segue-se que

$$B = \{1, e_{i_1}\cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k\}$$

gera E sobre K como espaço vetorial. De fato, suponha que $h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = 0$ é uma relação com o número minimal de coeficientes não nulos α_i, onde $w_i \in B$, $n \geq 2$. Se o elemento e_m aparece em w_1 mas não em w_2, então $e_m w_1 = 0$, $e_m w_2 \neq 0$ e $e_m h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_m w_i = 0$ é uma relação com um número menor de coeficientes não nulos, o que é uma contradição. Portanto, B é uma base de E.

É conveniente escrever E na forma $E = E_0 \oplus E_1$ onde

$$E_0 = span\{e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k}, k \geq 0\},$$

$$E_1 = span\{e_{i_1}\cdots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k+1}, k \geq 0\}.$$

Temos que $E_0E_0 + E_1E_1 \subseteq E_0$ e $E_0E_1 + E_1E_0 \subseteq E_1$. Temos também que E_0 coincide com o centro de E. Afirmamos que E satisfaz a identidade $[[x,y],z] \equiv 0$. De fato, como E_0 é o centro, qualquer comutador de dois elementos de E torna-se uma combinação linear dos monômios $e_i's$ de comprimento par. Assim $[E,E] \subseteq E_0$ e a conclusão segue.

1.3 T-ideais e Variedades de Álgebras

Dada uma álgebra A, definimos

$$T(A) = \{f \in K\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\},$$

o conjunto de identidades polinomiais de A. Claramente, $T(A)$ é um ideal bilateral de $K\langle X\rangle$. Além disso, se $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ é qualquer polinômio em $T(A)$ e $g_1,\ldots,g_n$ são polinômios arbitrários em $K\langle X\rangle$, então $f(g_1,\ldots,g_n) \in T(A)$. Dessa forma, como qualquer endomorfismo de $K\langle X\rangle$ é determinado pela função $x \mapsto g, x \in X, g \in K\langle X\rangle$, segue que $T(A)$ é um ideal fechado com respeito a todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$. Com efeito, consideremos $\varphi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$ um homomorfismo definido por $\varphi(x_i) = g_i$, $x_i \in X, g_i \in K\langle X\rangle$, então dado $f \in T(A)$, temos

$$\varphi(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)) = f(g_1(x_{i_1},\ldots,x_{i_{m_1}}),\ldots,g_n(x_{j_1},\ldots,x_{j_{m_n}})).$$

Logo, $f(g_1(x_{i_1},\dots,x_{i_{m_1}}),\dots,g_n(x_{j_1},\dots,x_{j_{m_n}})) \in K\langle X\rangle$ assim, para um dado homomorfismo $\psi : K\langle X\rangle \to A$,

$$\psi \circ \varphi(f(x_1,\dots,x_n)) = f(\psi(g_1(x_{i_1},\dots,x_{i_{m_1}})),\dots,\psi(g_n(x_{j_1},\dots,x_{j_{m_n}}))) = 0$$

uma vez que $\psi(g_1(x_{i_1},\dots,x_{i_{m_1}})),\dots,\psi(g_n(x_{j_1},\dots,x_{j_{m_n}})) \in A$. Assim $\varphi(f) \in \ker\psi$ e daí segue que $\varphi(f) \in T(A)$.

Os ideais com essa propriedade são chamados T-ideais.

Definição 1.3.1. *Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é um T-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo φ de $K\langle X\rangle$.*

Portanto $T(A)$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Na verdade, todos os T-ideais de $K\langle X\rangle$ são desse tipo. De fato, se I é um T-ideal, então $T(K\langle X\rangle/I) = I$, pois dados $f(x_1,\dots,x_n) \in I$ e $g_1,\dots,g_n \in K\langle X\rangle$, como $f(g_1,\dots,g_n) \in I$, temos que

$$f(\overline{g}_1,\dots,\overline{g}_n) = \overline{f(g_1,\dots,g_n)} = \overline{0}.$$

Disso segue que $I \subseteq T(K\langle X\rangle/I)$, e por outro lado, se $f(x_1,\dots,x_n) \in T(K\langle X\rangle/I)$, então para $\overline{x}_i = x_i + I$, temos

$$\overline{0} = f(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n) = \overline{f(x_1,\dots,x_n)},$$

isso implica que $f(x_1,\dots,x_n) \in I$.

Classes de T-ideais e ideais de identidades coincidem.

Definição 1.3.2. *Um ideal verbal de uma álgebra A é o ideal gerado por todas substituições em A nos elementos de um T-ideal I de $K\langle X\rangle$. Em outras palavras, o ideal verbal de A correspondente à I é o ideal gerado por*

$$\{f(a_1,\dots,a_n) \mid f(x_1,\dots,x_m) \in I, a_i \in A\}.$$

Definição 1.3.3. *Dado um subconjunto não vazio*

$$S = \{f_i(x_1,\dots,x_{n_i}) \in K\langle X\rangle | i \in I\} \subseteq K\langle X\rangle,$$

a classe de todas as álgebras A tais que $f \equiv 0$ em A para todo $f \in S$ é chamada a variedade $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ determinada por S.

Uma variedade $\mathcal{V}$ é não trivial se $S \neq 0$ e $\mathcal{V}$ é própria se também $\mathcal{V} \neq 0$. Por exemplo, a classe de todas as álgebras comutativas formam uma variedade própria com $S = \{[x,y]\}$. Também, se $S = \{x^n\}$, então $\mathcal{V}(S)$ é a classe de todas as álgebras que são nil de expoente limitado por n. Note que se $\mathcal{V}$ é a variedade determinada pelo conjunto S e $\langle S\rangle_T$ é o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por S, então $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S\rangle_T)$ e $\langle S\rangle_T = \bigcap_{A\in\mathcal{V}(\mathcal{S})} T(A)$. Assim cada variedade corresponde um T-ideal de $K\langle X\rangle$; a recíproca também é verdadeira.

Teorema 1.3.4. *[Birkhoff] Uma classe não vazia $\mathcal{V}$ de álgebras é uma variedade se, e somente se, ela é fechada em respeito de subálgebras, produtos diretos e imagens homomórficas (quocientes)*

1) Subálgebras: para toda $A \in \mathcal{V}$ e para todo $B \subseteq A$ subálgebra temos que $B \in \mathcal{V}$;

2) Produtos diretos: se $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família de álgebras e $A_\gamma \in \mathcal{V}$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{V}$;

3) Imagens homomórficas (quociente): Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras e $A \in \mathcal{V}$, então $\varphi(A) \in \mathcal{V}$. (Se $A \in \mathcal{V}$ e $I \lhd A$ é ideal de A, então $A/I \in \mathcal{V}$).

A prova pode ser encontrada, por exemplo, em **[6]**.

Agora seja $\mathcal{V}$ uma variedade, $A \in \mathcal{V}$ uma álgebra e $Y \subseteq A$ um subconjunto de A. Dizemos que A é relativamente livre sobre Y (com respeito à $\mathcal{V}$), se para qualquer álgebra $B \in \mathcal{V}$ e para qualquer função $\alpha : Y \to B$, existe um homomorfismo $\beta : A \to B$ estendendo α. Quando $\mathcal{V}$ é a variedade de todas as álgebras, isto é a definição de uma álgebra livre sobre Y. A cardinalidade de Y é chamado o posto de A.

Álgebras relativamente livres são facilmente descritas em termos de álgebras livres.

Teorema 1.3.5. *Sejam X um conjunto não vazio, $K\langle X\rangle$ uma álgebra livre sobre X e $\mathcal{V}$ uma variedade com o correspondente ideal $T(\mathcal{V}) \subseteq K\langle X\rangle$. Então $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é relativamente livre sobre o conjunto $\overline{X} = \{x + T(\mathcal{V}) \mid x \in X\}$. Além disso, qualquer duas álgebras relativamente livres com respeito a $\mathcal{V}$ de mesmo posto são isomorfas.*

Demonstração. Seja $B \in \mathcal{V}$ e seja $\alpha : \overline{X} \to B$ uma aplicação. Defina uma função $\beta : X \to B$ por $\beta(x) = \alpha(x + T(\mathcal{V}))$. Como $K\langle X\rangle$ é álgebra livre sobre X, β pode ser estendida à um homomorfismo $\overline{\beta} : K\langle X\rangle \to B$. Agora, se $f \in T(\mathcal{V})$, então f é uma identidade de B, portanto $\overline{\beta}(f) = 0$. Isto mostra que $T(\mathcal{V}) \subseteq \ker(\overline{\beta})$ e α estende-se à um homomorfismo $\overline{\alpha} : K\langle X\rangle/T(\mathcal{V}) \to B$, $\overline{\alpha}(g + T(\mathcal{V})) = \overline{\beta}(g)$. Assim $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é uma álgebra relativamente livre sobre $\overline{X}$.

Sejam agora, $K_1, K_2 \in \mathcal{V}$ álgebras relativamente livres de mesmo posto sobre $X = \{x_i \mid i \in I\}$ e $Y = \{y_i \mid i \in I\}$, respectivamente. Como K_1 e K_2 são álgebras relativamente livres com respeito à $\mathcal{V}$, existem homomorfismos $\alpha_1 : K_1 \to K_2$ e $\alpha_2 : K_2 \to K_1$ tais que $\alpha_1(x_i) = y_i$ e $\alpha_2(y_i) = x_i$, para todo $i \in I$. É claro que $\alpha_1\alpha_2$ e $\alpha_2\alpha_1$ são as funções identidades sobre Y e X, respectivamente. Portanto α_1, α_2 são isomorfismos e $K_1 \cong K_2$. □

A correspondência entre T-ideais e variedades é bem entendida.

Teorema 1.3.6. *Existe uma correspondência 1-1 entre T-ideais de $K\langle X\rangle$ e variedades de álgebras. Nesta correspondência uma variedade $\mathcal{V}$ corresponde à um T-ideal de suas identidades $T(\mathcal{V})$ e um T-ideal I à uma variedade de álgebras satisfazendo todas as identidades de I. Ou seja $I_1 \subseteq I_2$ se, e somente se, $Var(I_2) \subseteq Var(I_1)$, para quaisquer T-ideais I_1 e I_2 de $K\langle X\rangle$.*

Demonstração. Se I_1 e I_2 são dois T-ideais, com $I_1 \neq I_2$, então existe, digamos, $f \in I_1 \backslash I_2$. Mas então, $\mathcal{V}(I_1) \neq \mathcal{V}(I_2)$ uma vez que $K\langle X\rangle/I_2$ não satisfaz f e daí $K\langle X\rangle/I_2 \in \mathcal{V}(I_2)$ mas $K\langle X\rangle/I_2 \notin \mathcal{V}(I_1)$.

Agora se $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ são duas variedades, $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{V}_2$, existe, digamos, $A \in \mathcal{V}_1 \backslash \mathcal{V}_2$. Portanto existe $f \in T(\mathcal{V}_2)$ tal que $f \notin T(A)$. Como $T(A) \supseteq T(\mathcal{V}_1)$, segue que $T(\mathcal{V}_1) \neq T(\mathcal{V}_2)$. □

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade e A é uma K-álgebra tal que $T(A) = T(\mathcal{V})$ (por exemplo, $A = K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$), então dizemos que $\mathcal{V}$ é uma variedade gerada por A e escrevemos $\mathcal{V} = var(A)$. Também, referiremos à $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ como a álgebra relativamente livre da variedade $\mathcal{V}$ de posto $|X|$.

1.4 Polinômios Homogêneos e Multilineares

Quando um corpo K é infinito, o estudo das identidades de uma dada álgebra pode ser reduzido ao estudo de polinômios homogêneos.

Seja $K_n = K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ a álgebra livre de posto $n \geq 1$ sobre K. Esta álgebra pode ser naturalmente decomposta como

$$K_n = K_n^{(0)} \oplus K_n^{(1)} \oplus K_n^{(2)} \oplus \ldots$$

onde, para cada $k \geq 0$, $K_n^{(k)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios de grau total k. Se K_n é não unitária, $k \geq 1$. Como $K_n^{(i)} K_n^{(j)} \subseteq K_n^{(i+j)}$, para todo $i, j \geq 1$, dizemos que K_n é graduado por grau ou que ele tem uma estrutura de álgebra graduada. Os $K_n^{(i)}$'s são chamados de componentes homogêneas de K_n. Esta decomposição pode ser ainda mais refinada como segue: para cada $k \geq 1$ escrevemos

$$K_n^{(k)} = \bigoplus_{i_1+\cdots+i_n=k} K_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$$

onde $K_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios de grau i_1 em $x_1, \ldots, i_n$ em x_n. Claramente $K_n^{(i_1,\ldots,i_n)} K_n^{(j_1,\ldots,j_n)} \subseteq K_n^{(i_1+j_1,\ldots,i_n+j_n)}$ e neste caso dizemos que K_n é multigraduado.

Definição 1.4.1. *Um polinômio f pertencente a $K_n^{(k)}$, para algum $k \geq 1$, será chamado homogêneo de grau k. Se f pertence a algum $K_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$, ele será chamado multihomogêneo de multigrau $(i_1, \ldots, i_n)$. Diremos que um polinômio f é homogêneo na variável x_i se x_i aparece com o mesmo grau em cada monômio de f.*

Exemplo 1.4.2. *Consideremos os polinômios $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2^2x_3 - x_2x_3x_2x_1 + 3x_2x_1x_3x_2$ e $g(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2 - 4x_1x_2^3x_1 - x_1x_2x_1x_3$. Temos que f é multihomogêneo, enquanto que g é homogêneo somente em x_1.*

Se $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ podemos sempre escrever

$$f = \sum_{i_1 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0} f^{(i_1,\ldots,i_n)}$$

onde $f^{(i_1,\ldots,i_n)} \in K_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é a soma de todos os monômios em f onde $x_1, \ldots, x_n$ aparece em grau $i_1, \ldots, i_n$, respectivamente. Os polinômios $f^{(i_1,\ldots,i_n)}$ que são não nulos são chamados de componentes multihomogêneos de f.

Exemplo 1.4.3. *Seja $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + 2x_2x_3x_2 - x_2^2x_3$. Temos que x_1x_3 e $2x_2x_3x_2 - x_2^2x_3$ são as duas componentes multihomogêneas de f, sendo que a primeira tem multigrau $(1, 0, 1)$ enquanto que a segunda tem multigrau $(0, 2, 1)$.*

Um resultado muito importante para o nosso trabalho é o:

Teorema 1.4.4. *Seja K um corpo infinito. Se $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial para a álgebra A, então cada componente multihomogênea de f é ainda uma identidade polinomial para A.*

Demonstração. Para cada variável x_t, $1 \leq t \leq n$, podemos decompor $f = \sum_{i=0}^{m} f_i$, onde f_i é a soma de todos os monômios de f em que x_t aparece em grau i e $m = \deg_{x_t} f$ é o grau de f em x_t. Por indução, é suficiente provar que, para cada variável x_t, $f_i \equiv 0$ para todo $i \geq 0$. Sejam $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ elementos distintos de K. Claramente, para cada $j = 0, \ldots, m$,

$$f(x_1, \ldots, \alpha_j x_t, \ldots, x_n) \equiv 0$$

é ainda uma identidade para A. Como cada f_i é homogêneo em x_t de grau i,

$$f_i(x_1, \ldots, \alpha_j x_t, \ldots, x_n) = \alpha_j^i f_i(x_1, \ldots, x_t, \ldots, x_n).$$

Portanto

$$f(x_1, \ldots, \alpha_j x_t, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_j^i f_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0, \tag{1.1}$$

em A, para todo $j = 0, \ldots, m$. Escreva a matriz de Vandermonde

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_0^m & \alpha_1^m & \cdots & \alpha_m^m \end{pmatrix}$$

Então (1.1) diz que para cada $a_1, \ldots, a_n \in A$, se escrevermos $f_i(a_1, \ldots, a_n) = \overline{f}_i$, então

$$(\overline{f}_0, \ldots, \overline{f}_m)\Delta = 0.$$

Como o determinante de Vandermonde $\det(\Delta) = \prod_{0 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i)$ é não nulo, segue que $f_0 \equiv 0, \ldots, f_m \equiv 0$ são identidades de A. A prova portanto está completa. □

Note que o resultado anterior é ainda válido se K é um corpo finito tal que $|K| > degf$. Por outro lado, se K é um corpo com q elementos, K satisfaz a identidade $x^q - x \equiv 0$, mas as componentes homogêneas desta identidade não se anulam em K.

Uma das consequências mais importantes do Teorema 1.4.4 é que sobre um corpo infinito cada T-ideal é gerado por seus polinômios multihomogêneos. Entre os polinômios multihomogêneos um papel especial é desempenhado pelos multilineares.

Definição 1.4.5. *Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$ é multilinear de grau n se f é multihomogêneo de grau $(1, \ldots, 1)$ em $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \subset K\langle X\rangle$. Denotamos por P_n o espaço vetorial de todos os polinômios em $K\langle X\rangle$ que são multilineares de grau n. Claramente, P_n é de dimensão $n!$ e possui uma base*

$$\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Como em um polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_n)$ cada variável aparece em cada monômio em grau 1, é claro que este polinômio é sempre da forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

onde $\alpha_\sigma \in K$ e S_n é o grupo simétrico sobre $\{1, \ldots, n\}$.

Observação 1.4.6. *Se f é um polinômio multilinear e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$ são tais que $g_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{m_i} w_{ij}$ em que w_{ij} são monômios, então $f(g_1, \ldots, g_n)$ é uma soma de termos $f(w_{1j_1}, \ldots, w_{nj_n})$.*

Observação 1.4.7. *Seja A uma K-álgebra gerada como espaço vetorial por um conjunto B sobre K. Se f é um polinômio multilinear que se anula em B, então f é uma identidade polinomial de A.*

Demonstração. Sejam $a_1 = \sum \alpha_{1i} u_i, \ldots, a_n = \sum \alpha_{ni} u_i$ elementos de A onde u_i's são elementos de B, $\alpha_{ji} \in K$. Então, uma vez que $f(x_1, \ldots, x_n)$ é linear em cada variável, $f(a_1, \ldots, a_n) = \displaystyle\sum_{i_1, \ldots, i_n} \alpha_{1i_1} \cdots \alpha_{ni_n} f(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = 0$. □

Definição 1.4.8. *Seja S um conjunto de polinômios em $K\langle X\rangle$ e $f \in K\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma consequência dos polinômios de S (ou f segue dos polinômios de S) se $f \in \langle S\rangle_T$, o T-ideal gerado pelo conjunto S.*

Definição 1.4.9. *Dois conjuntos de polinômios são equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal. Dizemos que duas álgebras A e B são PI-equivalentes se elas satisfazem as mesmas identidades polinomiais, isto é, $T(A) = T(B)$. Neste caso escrevemos $A \sim B$.*

Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ um polinômio multihomogêneo de grau k em x_1. Considere também as variáveis y_1, y_2 de X, distintas de $x_2, \ldots, x_n$. Substituindo a variável x_1 de f por $y_1 + y_2$, obtemos o polinômio

$$h(y_1, y_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, \ldots, x_n).$$

Desenvolvendo o polinômio da direita, encontramos uma componente homogênea de grau 1 em y_1. Chamando essa componente homogênea de h_1, tem-se que $\deg_{y_2} h_1 = k - 1$ e que

$$h_1(x_1, x_1, \ldots, x_n) = kf(x_1, \ldots, x_n).$$

Em particular, temos

Exemplo 1.4.10. *Consideremos o polinômio $f(x_1, x_2) = x_2x_1^2 + x_1x_2x_1$. Notamos que f é multihomogêneo de grau 2 em x_1. Sendo $y_1, y_2 \in X$, obtemos*

$$f(y_1 + y_2, x_2) = x_2(y_1 + y_2)^2 + (y_1 + y_2)x_2(y_1 + y_2) =$$
$$x_2y_1^2 + x_2y_1y_2 + x_2y_2y_1 + x_2y_2^2 + y_1x_2y_1 + y_1x_2y_2 + y_2x_2y_1 + y_2x_2y_2.$$

Logo, $h_1(y_1, y_2, x_2) = x_2y_1y_2 + x_2y_2y_1 + y_1x_2y_2 + y_2x_2y_1$ e daí $h_1(x_1, x_1, x_2) = 2f(x_1, x_2)$.

Com essa informação em mãos, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.4.11. *Se $charK = 0$, cada polinômio não nulo $f \in K\langle X\rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração. Examinaremos mais de perto o processo de multilinearização. Pelo Teorema 1.4.4, f é equivalente ao conjunto de suas componentes homogêneas. Portanto, podemos assumir que $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é multihomogêneo. Aplicaremos o processo de multilinearização à f : se $\deg_{x_1} f = d > 1$, então escrevemos

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$$

onde $\deg_{y_1} g_i = i$, $\deg_{y_2} g_i = d - i$ e $\deg_{x_t} g_i = \deg_{x_t} f$, para todo $t = 2, \ldots, n$.

Então todos os polinômios $g_i = g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, d - 1$, são consequências de f.

Note que para cada i,

$$g_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Como $charK = 0$, $\binom{d}{i} \neq 0$, portanto f é uma consequência de qualquer g_i, $i = 1, \ldots, d - 1$.

Aplicamos um argumento de indução para completar a prova. □

Observamos que a hipótese de característica zero pode ser mudado para $charK > degf$ e o resultado acima é ainda válido.

Corolário 1.4.12. *Se $charK = 0$ e I é um T-ideal, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Demonstração. Como $charK = 0$, K é um corpo infintito e portanto I é um ideal gerado por seus polinômios multihomogêneos. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ um polinômio multihomogêneo. Como I é um T-ideal, temos que $h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) \in I$. Então, por K ser um corpo infinito, $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) \in I$, onde h_1 é a componente homogênea de h em que y_1 tem grau 1. Da igualdade $h_1(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = kf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, e pela hipótese de $charK = 0$, segue que f é consequência de $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$. Assim, continuando o processo de linearização para h_1, encontraremos h_2 e então h_1 será consequência de h_2. Dessa forma, concluiremos que f é consequência de algum polinômio multilinear e é equivalente a ele. □

Definição 1.4.13. *Seja A uma PI-álgebra com T-ideal $T(A)$. A dimensão dos polinômios multilineares em $K\langle X\rangle$ módulo as identidades polinomiais de A é chamada a n-ésima codimensão do T-ideal $T(A)$ ou das identidades polinomiais de A e é denotado por $c_n(A)$ (ou por $c_n(\mathcal{V})$ se considerarmos o T-ideal das identidades polinomiais da variedade $\mathcal{V}$), i.e.,*

$$c_n(A) = dimP_n/(P_n \cap T(A)), n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Esta sequência é chamada a sequência das codimensões do T-ideal $T(A)$.

1.5 Produto Tensorial e Elementos Genéricos

Definição 1.5.1. *Sejam V e W espaços vetoriais, sobre o corpo K, com bases $\{v_i \mid i \in I\}$ e $\{w_j \mid j \in J\}$, respectivamente. O produto tensorial $V \otimes W = V \otimes_K W$ de V e W é o espaço vetorial com base $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$. Definiremos em $V \otimes W$*

$$(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i) \otimes (\sum_{j\in J} \beta_j w_j) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \alpha_i\beta_j(v_i \otimes w_j), \alpha_i, \beta_j \in K.$$

Os elementos $v \otimes w$ satisfazem

$(v_1 + v_2) \otimes w = (v_1 \otimes w) + (v_2 \otimes w)$

$v \otimes (w_1 + w_2) = (v \otimes w_1) + (v \otimes w_2)$

$(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w)$

$v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w)$

para quaisquer $v_1, v_2, v \in V, w_1, w_2, w \in W$ e $\lambda \in K$.

Sejam A e B K-álgebras e consideremos em $A \otimes B$ o produto bilinear definido por

$$\begin{array}{rcl} \cdot : (A \otimes B) \times (A \otimes B) & \longrightarrow & (A \otimes B) \\ ((a_1 \otimes b_1), (a_2 \otimes b_2)) & \longmapsto & (a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = a_1a_2 \otimes b_1b_2. \end{array}$$

O espaço vetorial, munido com este produto, é uma K-álgebra chamada de produto tensorial das álgebras A e B.

Exemplo 1.5.2. *Sendo A uma K-álgebra, a transformação linear*

$$\begin{array}{rcl}\Phi : M_n(K) \otimes A & \longrightarrow & M_n(A) \\ e_{ij} \otimes a & \longmapsto & ae_{ij}\end{array}$$

onde ae_{ij} é a matriz de $M_n(A)$ que tem a na entrada (i,j) e 0 nas demais, é um isomorfismo de álgebras. De fato, primeiramente, note que $\{ae_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n, a \in \beta\}$ é uma base para $M_n(A)$ como espaço vetorial, onde β é uma base de A. Considere a tranformação linear

$$\begin{array}{rcl}\Psi : M_n(A) & \longrightarrow & M_n(K) \otimes A \\ ae_{ij} & \longmapsto & e_{ij} \otimes a\end{array}$$

Note que

$$\Psi(\Phi(\sum_{i,j}(e_{ij} \otimes a_{ij}))) = \Psi(\sum_{i,j} a_{ij}e_{ij}) = \sum_{i,j}(e_{ij} \otimes a_{ij})$$

e

$$\Phi(\Psi(\sum_{i,j}(a_{ij}e_{ij}))) = \Phi(\sum_{i,j}(e_{ij} \otimes a_{ij})) = \sum_{i,j}(a_{ij}e_{ij}).$$

Dessa forma, $\Psi = \Phi^{-1}$ e assim Φ é bijetiva. Mostraremos agora que Φ é um homomorfismo de álgebras. Como Φ é linear, é suficiente verificar o homomorfismo só para elementos da base de $M_n(K) \otimes A$.

Observe, antes que,

$$ae_{ij}be_{vw} = \begin{cases} 0, & se\ j \neq v \\ abe_{iw}, & se\ j = v \end{cases}.$$

Se $j \neq v$, temos que

$$\Phi((e_{ij} \otimes a)(e_{vw} \otimes b)) = \Phi(e_{ij}e_{vw} \otimes ab) = \Phi(0 \otimes ab) = 0 = ae_{ij}be_{vw} = \Phi(e_{ij} \otimes a)\Phi(e_{vw} \otimes b).$$

Se $j = v$, segue-se que

$$\Phi((e_{ij} \otimes a)(e_{vw} \otimes b)) = \Phi(e_{ij}e_{vw} \otimes ab) = \Phi(e_{iw} \otimes ab) = abe_{iw} = ae_{ij}be_{vw} = \Phi(e_{ij} \otimes a)\Phi(e_{vw} \otimes b).$$

Assim, Φ é um homomorfismo das álgebras $M_n(K) \otimes A$ e $M_n(A)$.

Portanto, $M_n(K) \otimes A \cong M_n(A)$ como álgebras.

Exemplo 1.5.3. *Se $A = M_m(K)$, pelo Exemplo 1.5.2 $M_m(K) \otimes M_n(K) \cong M_m(M_n(K))$, então se*

$$x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \in M_m(K) \text{ e } y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

teremos

$$x \otimes y \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} \otimes y & a_{12} \otimes y & \cdots & a_{1m} \otimes y \\ a_{21} \otimes y & a_{22} \otimes y & \cdots & a_{2m} \otimes y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \otimes y & a_{m2} \otimes y & \cdots & a_{mm} \otimes y \end{pmatrix},$$

onde

$$a_{ij} \otimes y = \begin{pmatrix} a_{ij} \cdot b_{11} & a_{ij} \cdot b_{12} & \cdots & a_{ij} \cdot b_{1n} \\ a_{ij} \cdot b_{21} & a_{ij} \cdot b_{22} & \cdots & a_{ij} \cdot b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij} \cdot b_{n1} & a_{ij} \cdot b_{n2} & \cdots & a_{ij} \cdot b_{nn} \end{pmatrix}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, n$, *e obtemos*

$$x \otimes y = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} & \cdots & \cdots & a_{1m}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & \cdots & a_{11}b_{2n} & \cdots & \cdots & a_{1m}b_{21} & \cdots & a_{1m}b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{nn} & \cdots & \cdots & a_{1m}b_{n1} & \cdots & a_{1m}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1n} & \cdots & \cdots & a_{mm}b_{11} & \cdots & a_{mm}b_{1n} \\ a_{m1}b_{21} & \cdots & a_{m1}b_{2n} & \cdots & \cdots & a_{mm}b_{21} & \cdots & a_{mm}b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{nn} & \cdots & \cdots & a_{mm}b_{n1} & \cdots & a_{mm}b_{nn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(K).$$

Portanto $M_{mn}(K) \cong M_m(M_n(K))$ *e daí,* $M_m(K) \otimes M_n(K) \cong M_{mn}(K)$ *e o isomorfismo é dado por*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & M_m(K) \otimes M_n(K) & \longrightarrow & M_{mn}(K) \\ & e_{ij} \otimes e_{vw} & \longmapsto & e_{n(i-1)+v,n(j-1)+w} \end{array}.$$

Este produto é conhecido como produto de Kronecker.

Caracterização por uma propriedade universal

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo K e seja $\varphi : V \times W \to L$ uma aplicação bilinear onde L é um espaço vetorial. Então, associado a φ está a transformação linear $h : V \otimes W \to L$. Essa propriedade é formalizada da seguinte maneira: considere um espaço vetorial $V \otimes W$ e $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ uma aplicação linear. O par $(V \otimes W, \otimes)$ satisfaz a propriedade universal do produto tensorial, ou seja, faz o diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \otimes W \arrow[dl, "h"] \\ L & \end{tikzcd}$$

Assim, para todo espaço vetorial L e para toda aplicação bilinear $\varphi : V \times W \to L$ existe uma única aplicação linear $h : V \otimes W \to L$ tal que $\varphi = h \circ \otimes$. Além disso, se (T, g) é um outro par satisfazendo a mesma propriedade universal, então $T \cong V \otimes W$.

O produto tensorial também opera em funções lineares entre espaços vetoriais. Especificamente, dadas duas funções lineares $S : V \to X$ e $T : W \to Y$ entre espaços vetoriais, o produto tensorial das duas funções lineares S e T é uma função linear

$$S \otimes T : V \otimes W \to X \otimes Y$$

dada por

$$(S \otimes T)(v \otimes w) = S(v) \otimes T(w),\ v \in V,\ w \in W.$$

Mais que dois espaços vetoriais

A construção e a propriedade universal do produto tensorial pode ser estendida para mais que dois espaços vetoriais. Por exemplo, suponha que V_1, V_2 e V_3 são três espaços vetoriais. O produto tensorial $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ é definido justamente com uma função trilinear a partir do produto direto

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times V_3 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

de modo que, qualquer função trilinear F a partir de um produto direto a um espaço vetorial W

$$F : V_1 \times V_2 \times V_3 \to W$$

fatora-se unicamente como

$$F = L \circ \varphi$$

onde L é uma função linear. O produto tensorial é caracterizado unicamente com essa propriedade, até um isomorfismo único. Esta construção está relacionada com repetidos produtos tensoriais de dois espaços vetoriais. Por exemplo, se V_1, V_2 e V_3 são três espaços vetoriais, então são isomorfos (naturalmente)

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3.$$

Mais geralmente, o produto tensorial de uma família indexada arbitrariamente $V_i, i \in I$, é definido para ser universal em relação a aplicações multilineares do produto direto $\prod_{i \in I} V_i$.

Observação 1.5.4. *Sendo V, W e U espaços vetoriais sobre K, valem:*

(i) $K \otimes V \cong V$;

(ii) $K^n \otimes V \cong V^n$;

(iii) $W \otimes V \cong V \otimes W$;

(iv) Se $v \in V$ *e* $w \in W$*, então* $v \otimes w \neq 0 \Leftrightarrow v \neq 0$ *e* $w \neq 0$*;*

(v) $(V \otimes W) \otimes U \simeq V \otimes (W \otimes U)$*;*

(vi) Se $S_1 = \{v_i \mid i \in I\}$ *e* $S_2 = \{w_j \mid j \in J\}$ *subconjuntos linearmente independentes de* V *e* W*, respectivamente, então o conjunto* $S = \{v_i \otimes w_j \mid i \in I \text{ e } j \in J\}$ *é um subconjunto linearmente independente de* $V \otimes W$*;*

(vii) Sejam $X_1 = \{v_i \mid i \in I\}$ *e* $X_2 = \{w_i \mid i \in I\}$ *subconjuntos de vetores não nulos de* V *e* W*. Se* X_1 *ou* X_2 *é linearmente independente, então* $X = \{v_i \otimes w_i \mid i \in I\}$ *é um subconjunto linearmente independente de* $V \otimes W$*;*

(viii) Se $\dim(V) = m$ *e* $\dim(W) = n$ *então* $\dim(V \otimes W) = mn$*.*

Estas propriedades podem ser verificadas com o uso da propriedade universal.

Tendo em mãos a Definição1.4.13 de sequência das codimensão e de produto tensorial podemos introduzir os seguintes teoremas. A prova do próximo teorema pode ser encontrada em **[7]**.

Teorema 1.5.5. *[Regev] Se a álgebra* A *satisfaz uma identidade de grau* $d \geq 1$*, então*

$$c_n(A) \leq (d-1)^{2n}.$$

Teorema 1.5.6. *Sejam* A *e* B *duas* PI*-álgebras sobre um corpo arbitrário* K*. Então*

$$c_n(A \otimes B) \leq c_n(A)c_n(B),$$

para todo $n \geq 1$*.*

Demonstração. Sejam $\overline{A}$ e $\overline{B}$ álgebras relativamente livres de postos enumeráveis nas variedades $var(A)$ e $var(B)$, respectivamente. Denotamos por $\{u_1, u_2, \ldots\}$ um conjunto de geradores livres de $\overline{A}$ e $\{v_1, v_2, \ldots\}$ um conjunto de geradores livres de $\overline{B}$. Vamos escrever $p = c_n(A)$, $q = c_n(B)$.

Sejam $m_1, \ldots, m_p \in \overline{A}$ monômios multilineares linearmente independentes nos elementos $u_1, \ldots, u_n$ e sejam $r_1, \ldots, r_q \in \overline{B}$ monômios multilineares linearmente independentes em $v_1, \ldots, v_n$. Então, para todo polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_n)$, um elemento $f(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n)$ em $\overline{A} \otimes \overline{B}$, pode ser escrito como uma combinação linear de $m_i \otimes r_j, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$.

Portanto, para quaisquer polinômios multilineares $f_1, \ldots, f_{pq+1}$ pode-se encontrar escalares não triviais $\alpha_1, \ldots, \alpha_{pq+1} \in K$ tais que

$$(\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{pq+1} f_{pq+1})(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) =$$
$$\alpha_1 f_1(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) + \cdots + \alpha_{pq+1} f_{pq+1}(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) = 0$$

em $\overline{A} \otimes \overline{B}$.

Vamos escrever $g = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{pq+1} f_{pq+1}$. Pela definição de álgebra relativamente livre e pelas propriedades de produto tensorial, qualquer função $u_i \to a_i \in A$, $v_i \to b_i \in B, i = 1, \ldots, n$, pode ser estendida a um homomorfismo $\varphi : \overline{A} \otimes \overline{B} \to A \otimes B$. Segue que

$$g(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n) = 0$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b_1, \ldots, b_n \in B$. Uma vez que g é multilinear, g é uma identidade de $A \otimes B$. Portanto a dimensão de P_n módulo $P_n \cap T(A \otimes B)$ não excede $pq = c_n(A)c_n(B)$ e a prova do teorema está completa. □

Teorema 1.5.7. *Se A e B são duas PI-álgebras, então $A \otimes B$ é também uma PI-álgebra.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.5.5 existe inteiros d e l tais que $c_n(A) \leq d^n$ e $c_n(B) \leq l^n$ para qualquer $n \geq 1$. Então

$$c_n(A \otimes B) \leq (dl)^n,$$

para todo n. Uma vez que para qualquer $k, n! > k^n$ para n suficientemente grande, existe m tal que $c_m(A \otimes B) < m!$, i.e., $A \otimes B$ satisfaz uma identidade multilinear não trivial de grau m. □

Seja K um corpo infinito, A uma K-álgebra e C uma K-álgebra comutativa não nil e considere a K-álgebra $A \otimes_K C$.

Lema 1.5.8. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X \rangle$. Então f é uma identidade polinomial de $A \otimes_K C$ se, e somente se, f é identidade polinomial para A.*

Demonstração. Por K ser corpo infinito, pelo Teorema 1.4.4 podemos considerar $f(x_1, \ldots, x_n)$ multihomogêneo de multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$. Suponhamos que f é uma identidade polinomial para $A \otimes_K C$, então dados $a_1, \ldots, a_n \in A$, $c_1, \ldots, c_n \in C$, temos

$$f(a_1 \otimes c_1, \ldots, a_n \otimes c_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes c_1^{m_1} \ldots c_n^{m_n} = 0,$$

como C é uma álgebra não nil e $c_1^{m_1} \ldots c_n^{m_n} \neq 0$, para alguns $c_1, \ldots, c_n \in C$, segue que $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ e f é identidade para A.

Vamos supor agora que f é identidade polinomial para A. Para $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \in \overline{A} = A \otimes_K C$ precisamos mostrar que $f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) = 0$. Suponha primeiro que $\overline{a}_1 = a_1 \otimes c_1, \ldots, \overline{a}_n = a_n \otimes c_n$. Então

$$f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes c_1^{m_1} \cdots c_n^{m_n} = 0$$

e concluímos este caso.

Agora, sejam $\overline{a}_1 = b_1 \otimes d_1 + b_2 \otimes d_2, \overline{a}_2 = a_2 \otimes c_2, \ldots, \overline{a}_n = a_n \otimes c_n$. Então

$$f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) = f(b_1 \otimes d_1, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n) + f(b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n) + \sum_{i=1}^{m_1-1} f_i(b_1 \otimes d_1, b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n)$$

onde

$$f(x_1 + y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m_1-1} f_i(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Os f_i's são as linearizações parciais e $\deg_{x_1} f_i = i$. Como todos os polinômios f_i da igualdade acima são consequências multihomogêneas de f, pelo Teorema 1.4.4, os f_i's são identidades polinomiais para A. Pela primeira parte da prova, segue que $f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) = 0$ também neste caso. Pela generalização deste argumento para $\overline{a}_1 = \sum_i a_{1i} \otimes c_{1i}, \ldots, \overline{a}_n = \sum_i a_{ni} \otimes c_{ni} \in \overline{A}$, $a_{ij} \in A$, $c_{ij} \in C$, escrevemos $f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ como uma soma de expressões da forma

$$\overline{g} = g(a_{i_1 j_1} \otimes c_{i_1 j_1}, \ldots, a_{i_k j_k} \otimes c_{i_k j_k})$$

onde $g = g(x_1, \ldots, x_k)$ é uma consequência multihomogêneos de f. Novamente pela primeira parte da prova obtemos $\overline{g} = 0$. □

Como uma aplicação do lema anterior, encontraremos uma forma explícita para uma álgebra relativamente livre de uma variedade gerada por uma álgebra de dimensão finita. Esta álgebra será gerada por "elementos genéricos".

Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K. Coloquemos $\dim_K A = m$ e consideremos $\{u_1, \ldots, u_m\}$ uma base de A sobre K. Seja $\xi_j^{(i)}$, $i \geq 1$, $1 \leq j \leq m$, variáveis e seja $K[\xi_j^{(i)} \mid i \geq 1, 1 \leq j \leq m]$ o anel de polinômios comutativos sobre K nessas variáveis. Construimos $B = A \otimes_K K[\xi_j^{(i)}]$, o produto tensorial das álgebras A e $K[\xi_j^{(i)}]$.

Definição 1.5.9. *Os elementos* $\xi^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} u_j \otimes \xi_j^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$ *são chamados elementos genéricos. A subálgebra* $\widetilde{A}$ *de* B *gerada por* $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$ *sobre* K *é chamada a álgebra de elementos genéricos de* A.

Teorema 1.5.10. *Se* K *é infinito, a álgebra* $\widetilde{A}$ *é uma álgebra relativamente livre de posto enumerável da variedade* $var(A)$, *i.e.,* $\widetilde{A} \cong K\langle X \rangle / T(A)$, *onde* X *é enumerável.*

Demonstração. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ enumerável e seja $\psi : K\langle X \rangle \to \widetilde{A}$ o epimorfismo induzido pela aplicação $x_i \mapsto \xi^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$. Pelo Teorema 1.1.9,

$$K\langle X \rangle / \ker \psi \cong \widetilde{A}.$$

Para provar o teorema, basta verificarmos que $\ker \psi = T(A)$.

Provaremos primeiro que $T(A) \subseteq \ker \psi$. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$, então $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Para provarmos essa inclusão, devemos ter que $\psi(f) = 0$, para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$.

$$\psi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_1)) = f(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}),$$

Pelo Lema 1.5.8, $T(A \otimes K[\xi_j^{(i)}]) = T(A)$, portanto $f(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}) = 0$ e $T(A) \subseteq \ker \psi$.

Suponha agora que $g = g(x_1, \ldots, x_n) \in \ker \psi$, ou seja, $g(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}) = 0$ em $\widetilde{A}$ e sejam $a_1, \ldots, a_n$ elementos arbitrários de A, os a_i's são combinações lineares da base $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de A,

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(i)} u_j$$

com $\lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_m^{(i)} \in K$. Como $K[\xi_j^{(i)}]$ é álgebra comutativa livre de posto enumerável, qualquer função $\xi_j^{(i)} \to \lambda_j^{(i)}$ estende-se à um homomorfismo $K[\xi_j^{(i)}] \to K$. Portanto, devido à propriedade universal do produto tensorial, as funções

$$id : A \to A, a \mapsto a,$$

$$g : K[\xi_j^{(i)}] \to K, \xi_j^{(i)} \mapsto \lambda_j^{(i)},$$

onde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, estendem-se a um homomorfismo $\varphi : A \otimes K[\xi_j^{(i)}] \to A$ tal que $\varphi(\xi^{(i)}) = a_i$, $1 \leq i \leq n$. Portanto,

$$0 = \varphi(0) = \varphi(g(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)})) = g(\varphi(\xi^{(1)}), \ldots, \varphi(\xi^{(n)})) = g(a_1, \ldots, a_n).$$

Como $a_1, \ldots, a_n$ são elementos arbitrários de A, $g(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ é uma identidade de A e então segue que $\ker \psi = T(A)$. $\square$

Observação 1.5.11. *Segue do Teorema 1.5.10 que, $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$ se, e somente se, $f(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}) = 0$.*

Um caso especial de nosso interesse é quando $A = M_n(K)$ é a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre K. Neste caso, escolhendo as unidades matriciais e_{ij}'s como uma base para $M_n(K)$, temos a álgebra polinomial $K[\xi_{ij}^{(t)}]$ nas variáveis $\xi_{ij}^{(t)}$, $t \geq 1$, $1 \leq i, j \leq n$. Então $M_n(K) \otimes_K K[\xi_{ij}^{(t)}] \cong M_n(K[\xi_{ij}^{(t)}])$ e

$$\xi(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij}^{(t)} e_{ij}$$

é a matriz com entradas $\xi_{ij}^{(t)}$. Os elementos $\xi^{(t)}$ são chamados matrizes genéricas $n \times n$ e a álgebra $K\{\xi\} = \widetilde{M_n(K)} = K\langle \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \rangle$ é chamada a álgebra de matrizes genéricas $n \times n$ sobre K. Assim do teorema anterior temos o seguinte

Corolário 1.5.12. *A álgebra $K\{\xi\}$ de matrizes genéricas $n \times n$ sobre o corpo infinito K é uma álgebra relativamente livre de posto enumerável na variedade gerada por $M_n(K)$.*

Capítulo 2

Álgebras Graduadas

Aqui estudaremos a estrutura de álgebra graduada por um grupo abeliano finito, daremos alguns exemplos, definiremos os tipos de graduação para a álgebra de matrizes $M_n(K)$, para os quais vamos exemplificar. Depois, descreveremos a graduação do produto tensorial de duas álgebras graduadas quaisquer e então aplicaremos esta descrição no produto tensorial da álgebra de matrizes e a álgebra de Grassmann e nas subálgebras deste produto tensorial. Vamos tratar das definições de álgebra livre graduada, T_G-ideais de álgebras graduadas e por fim introduziremos a noção de superálgebra e variedade de superálgebras. Também falaremos sobre o envoltório de Grassmann e o envoltório supercomutativo de uma superálgebra e mencionaremos a relação entre superálgebras simples e o envoltório de Grassmann.

2.1 Álgebras Graduadas

Seja A uma álgebra sobre um corpo K e seja G um grupo finito abeliano qualquer.

Definição 2.1.1. *A álgebra A é dita G-graduada se A pode ser escrita como a soma direta de subespaços $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ tais que para todo $g, h \in G$, $A_g A_h \subseteq A_{gh}$.*

Da definição é claro que qualquer $a \in A$ pode ser unicamente escrito como uma soma $a = \sum_{g \in G} a_g$ com $a_g \in A_g$. O subespaço A_g é chamado componente homogênea de $A, g \in G$. Portanto, um elemento $a \in A$ é homogêneo (ou homogêneo de grau g) se $a \in A_g$, neste caso, denotaremos o seu G-grau por $\partial_G(a) = g$.

Um subespaço $B \subseteq A$ é graduado ou homogêneo se $B = \bigoplus_{g \in G}(B \cap A_g)$. Em outras palavras, B é graduado se, para qualquer $b \in B$, $b = \sum_{g \in G} b_g$ implica que $b_g \in B$, para todo $g \in G$. Similarmente, podemos definir subálgebras graduadas, ideais graduados, etc.

Exemplo 2.1.2. *Qualquer álgebra pode ser graduada por qualquer grupo G pondo $A_e = A$ e $A_g = 0$ para qualquer $g \neq e$. Esta graduação é chamada trivial.*

Exemplo 2.1.3. *A álgebra de Grassmann E possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural: $E = E_0 \oplus E_1$ onde E_0 é o subespaço dos monômios de comprimento par e E_1 dos monômios de comprimento ímpar sobre geradores de E.*

Mais geralmente, as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas são chamadas superálgebras.

Definição 2.1.4. *Se $A = A_0 \oplus A_1$, então é dita uma superálgebra. Os subespaços A_0 e A_1 são chamados as componentes par e ímpar de A, respectivamente.*

Considere n um inteiro positivo e

$$A = M_n(K) = \bigoplus_{g \in G} A_g.$$

Definição 2.1.5. *A graduação acima é dita elementar, se existe uma n-upla $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que $e_{ij} \in A_{g_i^{-1} g_j}$.*

Definição 2.1.6. *A graduação acima é chamada fina se para qualquer $g \in G$ temos $dim A_g \leq 1$.*

Aqui daremos dois exemplos de graduação sobre $A = M_n(K)$, o primeiro sendo graduação elementar enquanto o segundo é fina.

Exemplo 2.1.7. *Seja $G = \mathbb{Z}_n$ e para cada $\lambda \in \mathbb{Z}_n$ tomemos o subespaço $A_\lambda = \langle e_{ij} \mid \overline{j - i} = \lambda \rangle$. Observe que $A_{\overline{0}}$ é o conjunto das matrizes diagonais. Do fato do conjunto $\{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ ser uma base para A segue que*

$$A = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_n} A_\lambda.$$

Agora, para ver que esta decomposição define uma $\mathbb{Z}_n$-graduação em A, basta observar que

$$e_{ij} e_{vw} = \begin{cases} 0, & se\ j \neq v \\ e_{iw}, & se\ j = v \end{cases}$$

donde $A_{\lambda_1} A_{\lambda_2} \subseteq A_{\lambda_1 + \lambda_2}$, para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_n$. Observe que os $\mathbb{Z}_n$-graus das matrizes em $A = M_n(K)$ estão posicionados como

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \cdots & \overline{n-2} & \overline{n-1} \\ \overline{n-1} & \overline{0} & \cdots & \overline{n-3} & \overline{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{2} & \overline{3} & \cdots & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{2} & \cdots & \overline{n-1} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

Em particular, temos o seguinte exemplo: seja $A = M_2(K)$ e seja $G = \mathbb{Z}_2$. Então definimos

$$A_{\overline{0}} = span\langle e_{11}, e_{22} \rangle,\ A_{\overline{1}} = span\langle e_{12}, e_{21} \rangle.$$

Exemplo 2.1.8. *Agora suponha $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, e seja $\omega \in K$ uma n-ésima raiz primitiva de 1. Consideremos as duas seguintes matrizes $n \times n$*

$$a = \omega^{n-1}e_{11} + \omega^{n-2}e_{22} + \cdots \omega e_{n-1,n-1} + e_{n,n} \text{ e } b = e_{12} + e_{23} + \cdots + e_{n-1,n} + e_{n1}.$$

Então a e b satisfazem as relações

$$ab = \omega ba,\ a^n = b^n = I,$$

onde I é matriz identidade $n \times n$. Os elementos $a^i b^j$, $1 \leq i, j \leq n$, determinam uma G-graduação fina em $M_n(K)$, onde $M_n(K)_{(i,j)} = span\langle a^i b^j \rangle$.

Observação 2.1.9. *Podemos definir sobre a álgebra $M_{mn}(K)$ do Exemplo 1.5.3 a seguinte $\mathbb{Z}_{mn}$-graduação:*

$$M_{mn}(K)_\lambda = \langle e_{tu} \mid \overline{u-t} = \lambda \rangle$$

em que $u = n(i-1) + v$, $t = n(j-1) + w$ e

$$\lambda = \overline{u-t} = \overline{n(j-1) + w - (n(i-1) + v)} = \overline{n(j-i) + w - v}.$$

Observação 2.1.10. *Dadas duas álgebras graduadas $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ e $B = \bigoplus_{h \in H} B_h$ então $A \otimes B$ é $G \times H$-graduada e sua componente homogênea de grau $(g, h) \in G \times H$ é o subespaço*

$$(A \otimes B)_{(g,h)} = A_g \otimes B_h.$$

Demonstração. Primeiramente, $A \otimes B = \bigoplus_{(g,h) \in G \times H} (A_g \otimes B_h)$, pois dado $a \otimes b = \sum_{i \in I, j \in J} a_i \otimes b_j \in A \otimes B$, temos

$$a_i \in A = \bigoplus_{g \in G} A_g \text{ e } b_j \in B = \bigoplus_{h \in H} B_h,$$

para todos $i \in I$ e $j \in J$. Assim,

$$a_i \otimes b_j = (\sum_{g \in G} a_{ig}) \otimes (\sum_{h \in H} b_{jh}) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} a_{ig} \otimes b_{jh} = \sum_{(g,h) \in G \times H} a_{ig} \otimes b_{jh}$$

e

$$a \otimes b = \sum_{i \in I, j \in J} a_i \otimes b_j = \sum_{(g,h) \in G \times H} (\sum_{i,j} a_{ig} \otimes b_{jh}).$$

Pela propriedade (iv) da Observação 1.5.4 de produto tensorial, podemos mostrar que a soma dos subespaços $A_g \otimes B_h$ é direta.

Agora, vamos mostrar que esses subespaços definem uma graduação para $A \otimes B$. É suficiente considerarmos a prova somente para os elementos $x = a_{g_1} \otimes b_{g_1} \in A_{g_1} \otimes B_{h_1}$, com $a_{g_1} \in A_{g_1}$, $b_{h_1} \in B_{h_1}$ e $y = a_{g_2} \otimes b_{h_2} \in A_{g_2} \otimes B_{h_2}$, com $a_{g_2} \in A_{g_2}$, $b_{h_2} \in B_{h_2}$. Temos

$$xy = (a_{g_1} \otimes b_{g_1})(a_{g_2} \otimes b_{g_2}) = a_{g_1}a_{g_2} \otimes b_{g_1}b_{h_2}.$$

Assim, por $a_{g_1}a_{g_2} \in A_{g_1}A_{g_2} \subseteq A_{g_1g_2}$ e $b_{g_1}b_{h_2} \in B_{h_1}B_{h_2} \subseteq B_{h_1h_2}$, segue que $xy \in (A \otimes B)_{(g_1g_2,h_1h_2)}$. Portanto $\{(A \otimes B)_{(g,h)} | g \in G, h \in H\}$ é uma $G \times H$-graduação para $A \otimes B$. $\square$

Definição 2.1.11. *Sejam A e B álgebras G-graduadas. Um homomorfismo $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo G-graduado se $\varphi(A_g) \subseteq B_g$, para todo $g \in G$. Do mesmo modo são definidos isomorfismos, endomorfismos e automorfismos G-graduados.*

2.2 Álgebra de Matrizes sobre Álgebra de Grassmann

Seja $M_n(K)$ a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre um corpo K, podemos considerar a $\mathbb{Z}_n$-graduação elementar como no Exemplo 2.1.7:

$$M_n(K) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_n} M_n(K)_\lambda, \text{ onde } M_n(K)_\lambda = \langle e_{ij} \mid \overline{j-i} = \lambda \rangle.$$

Seja E a álgebra de Grassmann, e consideremos a $\mathbb{Z}_2$-graduação definida no Exemplo 2.1.3: $E = E_0 \oplus E_1$.

Pelo Exemplo 1.5.2, $M_n(K) \otimes E \cong M_n(E)$ e pela Observação 2.1.10 $M_n(K) \otimes E$ é $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduada.

Vamos determinar agora a $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduação para $M_n(E)$ usando o isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \Phi : M_n(K) \otimes E & \longrightarrow & M_n(E) \\ e_{ij} \otimes a & \longmapsto & a e_{ij}. \end{array}$$

Assim temos

$$M_n(E)_{(\lambda,0)} = \Phi(M_n(K)_\lambda \otimes E_0) \text{ e } M_n(E)_{(\lambda,1)} = \Phi(M_n(K)_\lambda \otimes E_1)$$

Logo, para $\lambda \in \mathbb{Z}_n$ temos que

$$M_n(E)_{(\lambda,0)} = \langle a e_{ij} \mid \overline{j-i} = \lambda, a \in E_0 \rangle \quad M_n(E)_{(\lambda,1)} = \langle a e_{ij} \mid \overline{j-i} = \lambda, a \in E_1 \rangle$$

é uma $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduação para $M_n(E)$.

Em particular, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2.1. *Considere o isomorfismo* $\Phi : M_2(K) \otimes E \longrightarrow M_2(E)$ *tal que*

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \otimes a \right) = \begin{pmatrix} k_1 a & k_2 a \\ k_3 a & k_4 a \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$M_2(K)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_4 \end{pmatrix} \mid k_1, k_4 \in K \right\} \text{ e } M_2(K)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & k_2 \\ k_3 & 0 \end{pmatrix} \mid k_2, k_3 \in K \right\}$$

é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para $M_2(K)$. Utilizando o isomorfismo Φ, obtemos

$$\Phi(M_2(K)_0 \otimes E_0) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix} = M_2(E)_{(0,0)},$$

$$\Phi(M_2(K)_1 \otimes E_0) = \begin{pmatrix} 0 & E_0 \\ E_0 & 0 \end{pmatrix} = M_2(E)_{(1,0)},$$

$$\Phi(M_2(K)_0 \otimes E_1) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} = M_2(E)_{(0,1)},$$

$$\Phi(M_2(K)_1 \otimes E_1) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix} = M_2(E)_{(1,1)}.$$

E assim temos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$*-graduação* $\{M_2(E)_{(0,0)}, M_2(E)_{(1,0)}, M_2(E)_{(0,1)}, M_2(E)_{(1,1)}\}$ *da álgebra* $M_2(E)$.

Sejam p e q inteiros positivos, $p \geq q$, com $m = p + q$. Consideremos a álgebra $M_{p,q}(E)$ que consiste de matrizes $\begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$ tais que $u \in M_p(E_0)$, $t \in M_q(E_0)$, $v \in M_{p\times q}(E_1)$ e $w \in M_{q\times p}(E_1)$, onde $M_p(E_0)$ é o espaço vetorial de todas as matrizes $p \times p$ com entradas de E_0, similarmente para os outros conjuntos de matrizes. Por exemplo,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad 2 & & \quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} e_1e_3 & e_2e_4 & e_1 \\ 1 & e_1e_2e_3e_4 & e_1e_2e_4 \\ e_2 & e_2 & e_1e_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

pertence a $M_{2,1}(E)$ com $\begin{pmatrix} e_1e_3 & e_2e_4 \\ 1 & e_1e_2e_3e_4 \end{pmatrix} \in M_2(E_0)$, $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_1e_2e_4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(E_1)$, $\begin{pmatrix} e_2 & e_2 \end{pmatrix}$ $\in M_{1\times 2}(E_1)$ e $\begin{pmatrix} e_1e_2 \end{pmatrix} \in M_1(E_0)$.

Afirmamos que $M_{p,q}(E)$ é subálgebra de $M_m(E)$. De fato, como os conjuntos $M_p(E_0)$, $M_q(E_0)$, $M_{p\times q}(E_1)$ e $M_{q\times p}(E_1)$ são espaços vetoriais, logo $M_{p,q}(E)$ é subespaço de $M_{p+q}(E)$. Vamos mostrar então que $M_{p,q}(E)$ é fechado com respeito a multiplicação. Sejam $A, B \in M_{p,q}(E)$,

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ w_1 & t_1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ w_2 & t_2 \end{pmatrix}$$

onde $u_1, u_2 \in M_p(E_0)$, $t_1, t_2 \in M_q(E_0)$, $v_1, v_2 \in M_{p\times q}(E_1)$, $w_1, w_2 \in M_{q\times p}(E_1)$, então

$$AB = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ w_1 & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ w_2 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1u_2 + v_1w_2 & u_1v_2 + v_1t_2 \\ w_1u_2 + t_1w_2 & w_1v_2 + t_1t_2 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $u_1, u_2 \in M_p(E_0)$ então $u_1u_2 \in M_p(E_0)$ pois as entradas das matrizes u_1 e u_2 estão em E_0. Observamos também que, como $v_1 \in M_{p\times q}(E_1)$ e $w_2 \in M_{q\times p}(E_1)$ o produto v_1w_2 é uma matriz de ordem $p \times p$ e por suas entradas estarem em E_1, o produto deles está em E_0. Assim $u_1u_2 + v_1w_2 \in M_p(E_0)$. A mesma observação pode ser feita para concluirmos que $u_1v_2 + v_1t_2 \in M_{p\times q}(E_1)$, $w_1u_2 + t_1w_2 \in M_{q\times p}(E_1)$ e $w_1v_2 + t_1t_2 \in M_q(E_0)$. Portanto $AB \in M_{p,q}(E)$ e a afirmação é válida.

Afirmamos que a álgebra $M_{p,q}(E)$ é subálgebra graduada de $M_m(E)$. De fato, podemos construir uma $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduação para $M_{p,q}(E)$ da seguinte forma.

Seja $\eta : \{1, \ldots, p+q\} \to \mathbb{Z}_2$ dada por

$$\eta(i) = \begin{cases} 0, \text{ se} & 1 \leq i \leq p \\ 1, \text{ se} & p+1 \leq i \leq p+q \end{cases}.$$

Então $M_{p,q}(E)$ pode ser escrita como soma direta dos subespaços

$$M_{p,q}(E) = \bigoplus_{(\lambda,\eta(i)+\eta(j))\in\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_2} M_{p,q}(E)_{(\lambda,\eta(i)+\eta(j))},$$

onde $M_{p,q}(E)_{(\lambda,\eta(i)+\eta(j))} = \langle a_{ij}e_{ij} \mid \overline{j-i} = \lambda, a_{ij} \in E_{\eta(i)+\eta(j)}\rangle$.

Agora, vamos mostrar que esses subespaços determinam uma graduação para $M_{p,q}(E)$, isto é,

$$M_{p,q}(E)_{(\lambda_1,\eta(i)+\eta(j))}M_{p,q}(E)_{(\lambda_2,\eta(v)+\eta(w))} \subseteq M_{p,q}(E)_{(\lambda_1+\lambda_2,\eta(i)+\eta(j)+\eta(v)+\eta(w))},$$

para todos os pares $(\lambda_1, \eta(i)+\eta(j)), (\lambda_2, \eta(v)+\eta(w)) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$.

Sejam $x = a_{ij}e_{ij} \in M_{p,q}(E)_{(\lambda_1,\eta(i)+\eta(j))}$ e $y = a_{vw}e_{vw} \in M_{p,q}(E)_{(\lambda_2,\eta(v)+\eta(w))}$, então

$$xy = (a_{ij}e_{ij})(a_{vw}e_{vw}) = a_{ij}a_{vw}e_{ij}e_{vw} = \begin{cases} 0, \text{ se} & j \neq v \\ a_{ij}a_{vw}e_{iw}, \text{ se} & j = v \end{cases}.$$

Se $j \neq v$, então $e_{ij}e_{vw} = 0$ e $xy \in M_{p,q}(E)_{(\lambda_1+\lambda_2,\eta(i)+\eta(j)+\eta(v)+\eta(w))}$. Se $j = v$, então $e_{ij}e_{vw} = e_{iw}$ e além disso, $\eta(i)+\eta(j)+\eta(v)+\eta(w) = \eta(i)+\eta(w)$, logo $xy \in M_{p,q}(E)_{(\lambda_1+\lambda_2,\eta(i)+\eta(w))}$, pois $\overline{j-i} = \lambda_1, \overline{w-v} = \lambda_2$, e fazendo os cálculos $\lambda_1+\lambda_2 = \overline{j-i}+\overline{w-v} = \overline{w-i}$, daí $e_{iw} \in M_{p+q}(K)_{\lambda_1+\lambda_2}$ e $a_{ij}a_{vw} \in E_{\eta(i)+\eta(j)}E_{\eta(v)+\eta(w)} \subseteq E_{\eta(i)+\eta(w)}$.

Dessa forma $M_{p,q}(E)_{(\lambda,\eta(i)+\eta(j))}$ define uma $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduação para $M_{p,q}(E)$ e a afirmação é válida.

Seja agora, o inteiro positivo $n = r+s$, com $r \geq s$ e consideremos a subálgebra graduada $M_{r,s}(E)$ de $M_n(E)$ com graduação

$$M_{r,s}(E)_{(\gamma,\mu(v)+\mu(w))} = \langle b_{vw}e_{vw} \mid \overline{w-v} = \gamma, b_{vw} \in E_{\mu(v)+\mu(w)}\rangle,$$

onde

$$\mu(i) = \begin{cases} 0, \text{ se} & 1 \leq i \leq r \\ 1, \text{ se} & r+1 \leq i \leq r+s \end{cases}.$$

Observação 2.2.2. *Podemos definir uma graduação sobre o produto tensorial das álgebras $M_{p,q}(E)$ e $M_{r,s}(E)$.*

Definimos uma $\mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$-graduação em $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ por $(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))_{(t,a)}$, onde, dados $a_{ij}e_{ij} \in M_{p,q}(E)$ e $b_{vw}e_{vw} \in M_{r,s}(E)$, $a_{ij}e_{ij} \otimes b_{vw}e_{vw} \in (M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))_{(t,a)}$ se $a_{ij} \in E_{\eta(i)+\eta(j)}$, $b_{vw} \in E_{\mu(v)+\mu(w)}$.

Pela Observação 2.1.9,

$$\partial_G(e_{ij} \otimes e_{vw}) = \partial_G(e_{n(i-1)+v,n(j-1)+w}) = \overline{n(j-i)+w-v} = t,$$

e

$$(t,a) = (\overline{n(j-i)+w-v}, \eta(i)+\eta(j)+\mu(v)+\mu(w)) \in \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2.$$

Para entender melhor temos o seguinte exemplo: sejam $A \in M_{1,1}(E)$, $B \in M_{1,1}(E)$ então $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, onde $a_{11}, a_{22}, b_{11}, b_{22} \in E_0$, $a_{12}, a_{21}, b_{12}, b_{21} \in E_1$. Assim

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} \otimes b_{11} & a_{11} \otimes b_{12} & a_{12} \otimes b_{11} & a_{12} \otimes b_{12} \\ a_{11} \otimes b_{21} & a_{11} \otimes b_{22} & a_{12} \otimes b_{21} & a_{12} \otimes b_{22} \\ a_{21} \otimes b_{11} & a_{21} \otimes b_{12} & a_{22} \otimes b_{11} & a_{22} \otimes b_{12} \\ a_{21} \otimes b_{21} & a_{21} \otimes b_{22} & a_{22} \otimes b_{21} & a_{22} \otimes b_{22} \end{pmatrix}.$$

Notamos que,

$$(A \otimes B)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a_{11} \otimes b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} \otimes b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \otimes b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} \otimes b_{22} \end{pmatrix},$$

$$(A \otimes B)_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} \otimes b_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} \otimes b_{22} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A \otimes B)_{(3,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{12} \otimes b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} \otimes b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A \otimes B)_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \otimes b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} \otimes b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A \otimes B)_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12} \otimes b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} \otimes b_{22} \\ a_{21} \otimes b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} \otimes b_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A \otimes B)_{(3,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} \otimes b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \otimes b_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A \otimes B)_{(0,1)} = (A \otimes B)_{(2,0)} = 0.$$

2.3 Álgebra Livre Graduada e T-ideais Graduados

Seja $K\langle X\rangle$ álgebra associativa livre livremente gerada sobre K pelo conjunto enumerável de variáveis X, e seja G um grupo abeliano finito. Escreva X na forma $X = \bigcup_{g\in G} X_g$ onde $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots\}$ são conjuntos disjuntos e enumeráveis. As variáveis de X_g são ditas homogêneas de grau g. O grau homogêneo de um monômio $x_{i_1}^{(g_i)} \cdots x_{i_t}^{(g_t)} \in K\langle X\rangle$ é definido por $g_1 g_2 \cdots g_t$. Denotaremos por $K\langle X\rangle_g$ o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por todos os monômios tendo grau homogêneo g. Observamos que $K\langle X\rangle_g K\langle X\rangle_h \subseteq K\langle X\rangle_{gh}$ para todo $g, h \in G$. Segue que

$$K\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} K\langle X\rangle_g$$

é uma G-graduação.

Denotaremos por $K\langle X\rangle^{gr}$ a álgebra $K\langle X\rangle$ com esta graduação. $K\langle X\rangle^{gr}$ é chamada a álgebra livre G-graduada de posto enumerável sobre K.

A álgebra $K\langle X\rangle^{gr}$ tem a seguinte propriedade universal: dada qualquer álgebra G-graduada A, qualquer função $\psi : X \to A$ tal que $\psi(X_g) \subseteq A_g$, para todo $g \in G$, estende-se unicamente à um homomorfismo, $\overline{\psi} : K\langle X\rangle^{gr} \to A$ de álgebras G-graduadas.

Se considerarmos Ψ como o conjunto de todos tais homomorfismos, $T_G(A) = \bigcap_{\overline{\psi}\in\Psi} \ker \overline{\psi}$ é chamado o ideal G-graduado de identidades polinomiais graduadas de A. Isto significa que um polinômio graduado $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) \in K\langle X\rangle^{gr}$ é uma identidade graduada para a álgebra A, e escrevemos $f \equiv 0$ sobre A, se $f(a_1^{(g_1)}, \ldots, a_n^{(g_n)}) = 0$ para todos $a_1^{(g_1)} \in A^{(g_1)}, \ldots, a_n^{(g_n)} \in A^{(g_n)}$.

Definição 2.3.1. *Um ideal I de $K\langle X\rangle^{gr}$ é um T_G-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $K\langle X\rangle^{gr}$.*

Portanto $T_G(A)$ é um T_G-ideal de $K\langle X\rangle^{gr}$.

Lema 2.3.2. *Se A e B são álgebras G-graduadas que satisfazem $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$.*

Demonstração. Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$ e $b_1 = \sum_{g\in G} b_{1g}, \ldots, b_n = \sum_{g\in G} b_{ng} \in B$. Como $f \in T(A)$, temos que

$$f(\sum_{g\in G} x_{1g}, \ldots, \sum_{g\in G} x_{ng}) \in T_G(A) \subseteq T_G(B),$$

então

$$f(b_1, \ldots, b_n) = f(\sum_{g\in G} b_{1g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{ng}) = 0.$$

E portanto $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(B)$, e temos a inclusão $T(A) \subseteq T(B)$. □

Corolário 2.3.3. *Se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T(A) = T(B)$.*

2.4 Superálgebras e Envoltório de Grassmann

Seja $K\langle Y, Z\rangle$ uma superálgebra livre sobre K de posto enumerável, onde as variáveis de Y tem grau homogêneo zero e as variáveis de Z tem grau homogêneo um. Relembrando que, dada uma superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$, um polinômio $f(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_m) \in K\langle Y, Z\rangle$ é uma identidade graduada ou superidentidade de A se

$$f(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m) = 0$$

para todo $a_1, \ldots, a_k \in A_0, b_1, \ldots, b_m \in A_1$.

Denotaremos por $T_2(A)$ o ideal de identidades graduadas de A.

Definição 2.4.1. *Um ideal graduado $I = I_0 \oplus I_1$ de $K\langle Y, Z\rangle$ é chamado um T_2-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado φ de $K\langle Y, Z\rangle$.*

Note que $T_2(A)$ é um T_2-ideal de $K\langle Y, Z\rangle$. É claro, também que, qualquer T_2-ideal de $K\langle Y, Z\rangle$ é da forma $T_2(A)$ para alguma superálgebra A.

Como no caso de álgebras ordinárias, qualquer conjunto não vazio $S \subseteq K\langle Y, Z\rangle$ define uma variedade.

Definição 2.4.2. *Dado um conjunto não vazio $S = S_0 \cup S_1$, $S_0 \subseteq K\langle Y, Z\rangle_0$, $S_1 \subseteq K\langle Y, Z\rangle_1$, a classe de todas as superálgebras $A = A_0 \oplus A_1$ tais que $f \equiv 0$ em A para todo $f \in S$ é chamada supervariedade determinada por S.*

Para qualquer supervariedade $\mathcal{V}$, o conjunto $T_2(\mathcal{V})$ de suas identidades graduadas é claramente um T_2-ideal. Também, $K\langle Y, Z\rangle/T_2(\mathcal{V})$ é superálgebra relativamente livre graduada de posto enumerável de $\mathcal{V}$ com geradores pares livres Y e geradores ímpares livres Z.

O Teorema 1.3.4 [Birkhoff] também vale para supervariedades se nós trocarmos os homomorfismos usuais por homomorfismos graduados.

Relembrando que E é a álgebra, com 1, gerada pelo conjunto enumerável $\{e_1, e_2, \ldots\}$ satisfazendo as relações

$$e_i e_j = -e_j e_i, \; i, j \geq 1.$$

Uma base de E é dada por 1 e por todos os monômios da forma

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_m}; \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_m; \quad m \geq 1.$$

Portanto E tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação $E = E_0 \oplus E_1$ onde E_0 é o subespaço de E gerado pelos monômios $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_m}$ de comprimento par m e E_1 é o subespaço gerado por todos os monômios de comprimento ímpar.

Dada qualquer superálgebra A, podemos formar uma nova superálgebra com a ajuda de E chamada o envoltório de Grassmann de A.

Definição 2.4.3. *Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra. A álgebra*

$$E(A) = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$$

é chamada o envoltório de Grassmann de A.

Claramente o envoltório de Grassmann $E(A)$ tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, $E(A) = E(A)_0 \oplus E(A)_1$, onde $E(A)_0 = A_0 \otimes E_0$, $E(A)_1 = A_1 \otimes E_1$.

Denotaremos por $P_{k,m}$ o espaço de polinômios multilineares de $K\langle Y, Z\rangle$ nas variáveis $y_1, \ldots, y_k$, $z_1, \ldots, z_m$. A interseção $P_{k,m} \cap T_2(A)$ consiste de todas as identidades graduadas multilineares da superálgebra A tendo grau k sobre as variáveis pares e grau m sobre as variáveis ímpares.

Definiremos uma transformação linear $\sim : P_{k,m} \to P_{k,m}$ pela seguinte regra: seja $f \in P_{k,m}$ e escrevemos f como

$$f = \sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ W=(w_0,\ldots,w_m)}} \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \cdots w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m$$

onde $w_0, w_1, \ldots, w_m$ são monômios em $y_1, \ldots, y_k$, possivelmente vazios e $\alpha_{\sigma,W} \in K$. Então

$$\widetilde{f} = \sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ W=(w_0,\ldots,w_m)}} (sgn\sigma)\alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \cdots w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m.$$

A função $\sim$ possui as seguintes propriedades básicas.

Lema 2.4.4. *Seja $f \in P_{k,m}$. Então:*

1) f é uma identidade graduada de $E(A)$ se, e somente se, $\widetilde{f}$ é uma identidade graduada de A;

2) $\widetilde{\widetilde{f}} = f$.

Demonstração. A segunda afirmação é óbvia. Provaremos a primeira afirmação. Seja $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k \in A_0$, $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m \in A_1$ elementos homogêneos arbitrários de A e $g_1, \ldots, g_k \in E_0$, $h_1, \ldots, h_m \in E_1$ elementos homogêneos arbitrários de E.

Fixemos um monômio

$$m = a_0(y_1, \ldots, y_k) z_{\sigma(1)} \cdots z_{\sigma(m)} a_m(y_1, \ldots, y_k),$$

por m ser um monômio multilinear, pela Observação 1.4.7, calculemos seus valores $\overline{m}$ em $\overline{y}_1 \otimes g_1, \ldots, \overline{y}_k \otimes g_k$, $\overline{z}_1 \otimes h_1, \ldots, \overline{z}_m \otimes h_m$ apenas. Uma vez que $g_1, \ldots, g_k$ estão no centro de E e $h_1, \ldots, h_m$ anticomutam, obtemos

$$\overline{m} = a_0(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k)\overline{z}_{\sigma(1)} \cdots \overline{z}_{\sigma(m)} a_m(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k) \otimes g_1 \cdots g_k h_{\sigma(1)} \cdots h_{\sigma(m)} =$$
$$(sgn\sigma) a_0(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k)\overline{z}_{\sigma(1)} \cdots \overline{z}_{\sigma(m)} a_m(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k) \otimes g_1 \cdots g_k h_1 \cdots h_m.$$

Desta igualdade, pela definição de $\sim$, segue que

$$f(\overline{y}_1 \otimes g_1, \ldots, \overline{y}_k \otimes g_k, \overline{z}_1 \otimes h_1, \ldots, \overline{z}_m \otimes h_m) = \widetilde{f}(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m) \otimes g_1 \cdots g_k h_1 \cdots h_m.$$

Como os elementos $\overline{y}_1, \ldots, \overline{z}_m, g_1, \ldots, h_m$ são elementos homogêneos arbitrários , $f \equiv 0$ em $E(A)$ se, e somente se, $\widetilde{f} \equiv 0$ em A. Isto completa a prova do lema. $\square$

Seja agora $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Denotemos por $\mathcal{V}^*$ a classe de todas as superálgebras $A = A_0 \oplus A_1$ tal que $E(A) \in \mathcal{V}$. Recordando que $charK = 0$, temos:

Teorema 2.4.5. *Para qualquer variedade de álgebras $\mathcal{V}$ a classe $\mathcal{V}^*$ é uma supervariedade.*

Demonstração. Denotemos por S o conjunto de todas identidades multilineares de $\mathcal{V}$. Como $charK = 0$, alguma álgebra B está em $\mathcal{V}$ se, e somente se, $g \equiv 0$ em B para todo $g \in S$.

Agora, seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra e $B = E(A) = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$. Como observamos acima, B é também $\mathbb{Z}_2$-graduada com $B_0 = A_0 \otimes E_0$, $B_1 = A_1 \otimes E_1$. Portanto B satisfaz uma identidade multilinear $g \equiv 0$ de grau n se, e somente se, B satisfaz a família de 2^n identidades graduadas $f \equiv 0$ onde qualquer f é obtido de g apenas trocando algumas k variáveis $(0 \leq k \leq n)$ com indeterminadas pares e todas as outras $n - k$ variáveis com indeterminadas ímpares.

Pelo lema anterior, $B = E(A)$ satisfaz uma identidade multilinear graduada $f \equiv 0$ se, e somente se, A satisfaz uma identidade graduada $\widetilde{f} \equiv 0$. Isto significa que podemos começar com identidades multilineares da variedade $\mathcal{V}$ e construímos o conjunto de identidades graduadas W tais que $E(A) \in \mathcal{V}$ se, e somente se, $h \equiv 0$ em A para todo $h \in W$. E a prova do teorema está completa. $\square$

Observação 2.4.6. *Se as superálgebras $A = A_0 \oplus A_1$ e $B = B_0 \oplus B_1$ têm as mesmas identidades graduadas, então $E(A)$ e $E(B)$ têm as mesmas identidades ordinárias.*

Uma superálgebra A é chamada *simples* se A não contém ideais graduados não triviais e $A^2 \neq 0$.

Exemplo 2.4.7. *Temos como exemplos de superálgebras simples graduadas $M_n(K)$ com graduação $(M_n(K), \{0\})$; $M_n(B)$, onde $B = K \cdot 1 + K \cdot c, c^2 = 1$, com graduação $(M_n(K), cM_n(K))$; e $M_n(K)$ com graduação $(M_0^{(k,l)}(K), M_1^{(k,l)}(K))$, onde $0 < l \leq k \leq [n/2]$ e*

$$M_0^{(k,l)}(K) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \qquad k \qquad & \qquad l \qquad \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ \\ \\ \\ l \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} K & K & \cdots & K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K & K & \cdots & K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K & K & \cdots & K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & K & K & \cdots & K \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & K & K & \cdots & K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & K & K & \cdots & K \end{array}\right) \end{array}$$

$$M_1^{(k,l)}(K) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc|cccc} & & k & & & & l & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ k \\ \\ \\ \\ l \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & K & K & \cdots & K \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & K & K & \cdots & K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & K & K & \cdots & K \\ \hline K & K & \cdots & K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K & K & \cdots & K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K & K & \cdots & K & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

É uma consequência de **[20]** o seguinte teorema de classificação de superálgebras simples sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0.

Teorema 2.4.8. *Qualquer superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0 é isomorfa, como superálgebra, a $M_n(K)$, $M_n(B)$ onde $B = K \cdot 1 + K \cdot c, c^2 = 1$, ou a $M_{k,l}(K)$.*

Uma conexão entre a classificação das superálgebras simples de dimensão finita e o envoltório de Grassmann é devido à classificação dos T-ideais verbalmente primos de Kemer.

Definição 2.4.9. *Um T-ideal Γ é verbalmente primo se para quaisquer T-ideais Γ_1, Γ_2 tais que $\Gamma_1\Gamma_2 \subseteq \Gamma$ devemos ter que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ ou $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$.*

Uma variedade será chamada prima se o T-ideal correspondente é verbalmente primo. Também uma álgebra A será chamada verbalmente prima se ela gera uma variedade prima.

Teorema 2.4.10. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade própria de álgebras sobre um corpo K de característica zero. Então $\mathcal{V} = Var(A)$, onde $A = M_n(K)$, $M_n(E)$, ou $M_{k,l}(E) = M_0^{(k,l)}(K) \otimes E_0 \oplus M_1^{(k,l)}(K) \otimes E_1$ se, e somente se, $\mathcal{V}$ é prima.*

Demonstração. Consideremos $T(A)$ o T-ideal de identidades de A. Suponhamos primeiro que $A = M_n(K)$. Suponhamos, que existam um par de T-ideais Γ_1 e Γ_2 tais que $\Gamma_1\Gamma_2 \subseteq T(A)$ mas $\Gamma_1 \nsubseteq T(A)$ e $\Gamma_2 \nsubseteq T(A)$.

Pela escolha de Γ_1 e Γ_2, segue que os ideais verbais de A, $\Gamma_1(A) \neq (0)$ e $\Gamma_2(A) \neq (0)$. Mas nesse caso $\Gamma_1(A) = A$ e $\Gamma_2(A) = A$ pois a álgebra das matrizes não possui ideais próprios. Daí

$$(0) = \Gamma_1\Gamma_2(A) = \Gamma_1(A)\Gamma_2(A) = A^2 \neq (0)$$

e chegamos numa contradição.

Suponhamos agora que $A = M_n(E)$.

Suponhamos que o T-ideal $\Gamma \nsubseteq T(A)$. Então pela escolha de Γ, segue que $\Gamma(A) \neq 0$.

Observemos que o ideal verbal de uma álgebra A qualquer é fechado com respeito a todos endomorfismo dessa álgebra. De fato, seja $\varphi : A \to A$ um homomorfismo e $\Gamma(A) =$

$\{f(a_1,\ldots,a_n) \mid f(x_1,\ldots,x_n) \in \Gamma, a_1,\ldots,a_n \in A\}$ o ideal verbal de A. Então dado $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in \Gamma$ e $a_1,\ldots,a_n \in A$, temos $\varphi(f(a_1,\ldots,a_n)) = f(\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n)) = f(a'_1,\ldots,a'_n)$, onde $\varphi(a_i) = a'_i \in A$, para todo $i = 1,\ldots,n$, e assim segue que $\varphi(f(a_1,\ldots,a_n)) \in \Gamma(A)$. Portanto, $\varphi(\Gamma(A)) \subseteq \Gamma(A)$.

Como $\Gamma(A) \neq (0)$, existe $0 \neq x = \sum_{s,t=1}^{n} b_{st}e_{st} \in \Gamma(A)$. Então para algum par (s_0,t_0), $s_0,t_0 \in \{1,\ldots,n\}$, $b_{s_0t_0} = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i w_i \neq 0$, onde w_i são elementos da base de E, $\alpha_i \in K$, para todo $i = 1,\ldots,l$.

Considere B o conjunto de todos os geradores da álgebra E tal que $b_{s_0t_0}$ é combinação linear do produto deles e considere $e_{i_1}\cdots e_{i_k}$ o monômio de comprimento minimal em $b_{s_0t_0}$. Então seje $B' = B - \{e_{i_1},\ldots,e_{i_k}\}$.

Podemos escrever $B' = B_1 \cup B_2$ como uma união disjunta e vamos considerar os elementos $g_1 = e_{j_1}\cdots e_{j_m}$, com $e_{j_1},\cdots,e_{j_m} \in B_1$, $g_2 = e_{j_{m+1}}\cdots e_{j_{m+l}}$, com $e_{j_{m+1}},\cdots,e_{j_{m+l}} \in B_2$. Então $y = g_1e_{is_0}$ e $z = g_2e_{t_0j}$ e $g_1g_2 \neq 0$, para todo i,j.

Temos

$$\Gamma(A) \ni yxz = (g_1e_{is_0})(\sum_{s,t=1}^{n} b_{st}e_{st})(g_2e_{t_0j}) =$$
$$(g_1b_{s_0t_0}g_2)e_{ij} = (e_{j_1}\cdots e_{j_m}e_{i_1}\cdots e_{i_k}e_{j_{m+1}}\cdots e_{j_{m+l}})e_{ij},$$

então para algum N e para todos i,j, temos $(e_{r_1}\cdots e_{r_N})e_{ij} \in \Gamma(A)$.

Considere $\phi : E \to E$ uma aplicação tal que $e_{r_1} \mapsto e_{s_1}$, $e_{r_2} \mapsto e_{s_2},\ldots,e_{r_N} \mapsto e_{s_N}$, para quaisquer $s_1,\ldots,s_N \in \{1,2,\ldots\}$ e os demais para outros valores. Note que pela relação $e_ie_j = -e_je_i$, para todos i,j, ϕ pode ser estendida endomorfismo da álgebra E, isto é

$$\overline{\phi}(e_{r_1}\cdots e_{r_N}) = e_{s_1}\cdots e_{s_N} = \overline{\phi}(e_{r_1})\cdots\overline{\phi}(e_{r_N})$$

e podemos definir então a aplicação $\psi : A \to A$, por

$$\psi((e_{r_1}\cdots e_{r_N})e_{ij}) = \overline{\phi}(e_{r_1}\cdots e_{r_N})e_{ij} = (e_{s_1}\cdots e_{s_N})e_{ij}.$$

Por $\Gamma(A)$ ser fechado com respeito a todos os endomorfismos de A, segue de $((e_{r_1}\cdots e_{r_N})e_{ij}) \in \Gamma(A)$ que $((e_{s_1}\cdots e_{s_N})e_{ij}) \in \Gamma(A)$, para todo $s_1,\ldots,s_N$. Para todo $a \in A$ e para todos $r_1,\ldots,r_N \in \{1,\ldots,N\}$ temos

$$((e_{r_1}\cdots e_{r_N})e_{ij})a \in \Gamma(A) \text{ e daí } ((e_{r_1}\cdots e_{r_N})e_{ij})A \subseteq \Gamma(A) \text{ e } E^NA \subseteq \Gamma(A).$$

Agora, se Γ' é um outro ideal tal que $\Gamma' \nsubseteq T(A)$, então como foi provado acima $E^{N'}A \subseteq \Gamma'(A)$ para algum $N' \in \mathbb{N}$. E como na primeira parte da prova, suponha que $\Gamma\Gamma' \subseteq T(A)$. Portanto

$$(0) = \Gamma\Gamma'(A) = \Gamma(A)\Gamma'(A) \supseteq E^NE^{N'}A^2 \neq (0).$$

o que é um absurdo.

E finalmente, suponhamos $A = M_{k,l}(E)$. Nos elementos $y = g_1 e_{is_0}$ e $z = g_2 e_{t_0 j}$, em que $g_1, g_2 \in E_0 \cup E_1$ são monômios homogêneos. Podemos escolher g_1 e g_2, observando a graduação de A, tais que $g_1 b_{s_0 t_0} g_2$ seja um monômio de comprimento $2N$, isto é, $g_1 b_{s_0 t_0} g_2 = e_{i_1} \cdots e_{i_{2N}}$. O restante da prova segue análogo, observando que teremos $E_0^N A \subseteq \Gamma(A)$. E concluimos uma parte do teorema.

A recíproca pode ser encontrada em **[9]**. $\square$

Em um corpo de característica positiva diferente de 2, as variedades de álgebras determinadas pelas álgebras $M_n(K)$, $M_n(E)$ e $M_{k,l}(E)$ também são variedades primas, mas não são as únicas (ver **[16]**).

Como já dissemos anteriormente, duas álgebras A e B são PI-equivalente, $A \sim B$, se elas satisfazem as mesmas identidades polinomiais, isto é, $T(A) = T(B)$. O seguinte teorema resulta que, sobre um corpo de característica 0, o produto tensorial de quaisquer duas álgebras T-primas é PI-equivalente à uma álgebra T-prima.

O Teorema do Produto Tensorial de Kemer é o seguinte.

Teorema 2.4.11. *Seja K um corpo, char$K$=0. Então*

(i) $M_{p,q}(E) \otimes E \sim M_{p+q}(E)$;

(ii) $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E) \sim M_{pr+qs,ps+qr}(E)$;

(iii) $M_{1,1}(E) \sim E \otimes E$.

Uma prova para este teorema, que não depende da teoria da estrutura desenvolvida por Kemer, pode ser encontrada em **[14]**.

Note que os outros produtos tensoriais de álgebras T-primas da lista do Teorema 2.4.10 são obtidos de isomorfismos junto das propriedades de produto tensorial. Antes de provarmos tal afirmação, vamos mostrar o

Lema 2.4.12. *Seja K um corpo, char$K = 0$. Se duas álgebras A e B são tais que $A \sim B$ e C é uma álgebra comutativa não nil ou é uma das álgebras $M_m(K), M_n(E)$ ou $M_{p,q}(E)$, então $A \otimes C \sim B \otimes C$.*

Demonstração. Como char$K = 0$, podemos considerar somente identidades polinomiais multilineares, isto é, $f = f(x_1, \ldots, x_k) \in K\langle X \rangle$ tal que

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)}.$$

Suponhamos que C é uma álgebra comutativa não nil. Pelo Lema 1.5.8,

$$T(A \otimes C) = T(A) = T(B) = T(B \otimes C).$$

Suponhamos agora que $C = M_m(K)$. Como f é multilinear é suficiente considerar somente substituições dos elementos $a_1 \otimes e_{i_1 j_1}, \dots, a_k \otimes e_{i_k j_k}$, onde $a_1, \dots, a_k \in A$ e $e_{i_1 j_1}, \dots, e_{i_k j_k}$ são as unidades matriciais de $M_n(K)$.

Assim, obtemos

$$f(a_1 \otimes e_{i_1 j_1}, \dots, a_k \otimes e_{i_k j_k}) = \sum_{\sigma \in S_k} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(k)} \otimes e_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \cdots e_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}}.$$

Observamos que para algumas permutações $\sigma \in S_k$, $e_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \cdots e_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}} = 0$, então definimos o conjunto $S'_k = \{\sigma \in S_k | e_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \cdots e_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}} = e_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(k)}}\}$, daí

$$f(a_1 \otimes e_{i_1 j_1}, \dots, a_k \otimes e_{i_k j_k}) = \sum_{\tau \in S'_k} \alpha_\tau a_{\tau(1)} \cdots a_{\tau(k)} \otimes e_{i_{\tau(1)} j_{\tau(k)}} =$$

$$\sum_{\substack{\tau \in S'_k \\ i_{\tau(1)} = p_1 \\ j_{\tau(k)} = q_1}} \alpha_\tau a_{\tau(1)} \cdots a_{\tau(k)} \otimes e_{p_1 q_1} + \cdots + \sum_{\substack{\tau \in S'_k \\ i_{\tau(1)} = p_r \\ j_{\tau(k)} = q_r}} \alpha_\tau a_{\tau(1)} \cdots a_{\tau(k)} \otimes e_{p_r q_r} =$$

$$\sum_{t=1}^{r} \sum_{\substack{\tau \in S'_k \\ i_{\tau(1)} = p_t \\ j_{\tau(k)} = q_t}} \alpha_\tau a_{\tau(1)} \cdots a_{\tau(k)} \otimes e_{p_t q_t} = \sum_{t=1}^{r} f_{p_t, q_t}(a_1, \dots, a_k) \otimes e_{p_t q_t}.$$

Logo, f é identidade para $A \otimes C$ se, e somente se, o polinômio

$$f_{p_t, q_t}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\substack{\tau \in S'_k \\ i_{\tau(1)} = p_t \\ j_{\tau(k)} = q_t}} \alpha_\tau x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(k)}$$

para todo $t = 1, \dots, r$ é identidade para A.

Claro que $f_{p_t, q_t} \equiv 0$ em A (em B) para todo $t = 1, \dots, r$ se, e somente se, $f \equiv 0$ em $A \otimes C$ (em $B \otimes C$).

Mas por hipótese $T(A) = T(B)$, o que implica que $f_{p_t, q_t} \equiv 0$ em A se, e somente se, $f_{p_t, q_t} \equiv 0$ em B.

Portanto, quando $C = M_n(K)$, $A \otimes C \sim B \otimes C$.

Consideremos $C = M_n(E)$. Sejam $c_1 = w_1 e_{i_1 j_1}, \dots, c_k = w_k e_{i_k j_k} \in M_n(E)$, onde $w_s \in E_0 \cup E_1$ são elementos da base de E, então

$$f(a_1 \otimes c_1, \dots, a_k \otimes c_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(k)} \otimes c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_k} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(k)} \otimes w_{\sigma(1)} e_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \cdots w_{\sigma(k)} e_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}} =$$

$$\sum_{\sigma' \in S'_k} \alpha_{\sigma'} a_{\sigma'(1)} \cdots a_{\sigma'(k)} \otimes w_{\sigma'(1)} \cdots w_{\sigma'(k)} e_{i_{\sigma'(1)} j_{\sigma'(k)}} =$$

$$\sum_{\sigma' \in S'_k} \alpha_{\sigma'} a_{\sigma'(1)} \cdots a_{\sigma'(k)} \otimes (-1)^{\delta_{\sigma'}} w_1 \cdots w_k e_{i_{\sigma'(1)} j_{\sigma'(k)}} =$$

$$\sum_{\sigma' \in S'_k} (-1)^{\sigma'} \alpha_{\sigma'} a_{\sigma'(1)} \cdots a_{\sigma'(k)} \otimes w_1 \cdots w_k e_{i_{\sigma'(1)} j_{\sigma'(k)}}$$

onde $(-1)^{\delta_{\sigma'}} = 1$ ou -1, dependendo da posição dos monômios homogêneos ímpares. Como E possui dimensão infinita, sempre podemos tomar os w_s's de forma que $w_1 \cdots w_k \neq 0$.

Por argumentos similares ao caso anterior, segue que

$$f \equiv 0 \text{ em } A \otimes M_n(E) \Leftrightarrow f \equiv 0 \text{ em } B \otimes M_n(E).$$

Para $C = M_{p,q}(E)$, a prova é similar a anterior. $\square$

Usando isomorfismos, as propriedades de produto tensorial e as PI-equivalências do Teorema 2.4.11 provaremos que o produto tensorial de álgebras T-primas da lista do Teorema 2.4.10 é PI-equivalente a uma álgebra T-prima. Primeiro, observamos que a álgebra de matrizes $M_n(K)$ é PI-equivalente a álgebra $M_{n,0}(E) = M_n(E_0)$.

(1) Sejam $M_m(K)$ e $M_n(E)$ álgebras de matrizes de ordem $m \times m$, $n \times n$ sobre K e E, respectivamente. Então

$$M_m(K) \otimes M_n(E) \cong M_m(K) \otimes (M_n(K) \otimes E) \cong$$

$$(M_m(K) \otimes M_n(K)) \otimes E \cong M_{mn}(K) \otimes E \cong M_{mn}(E).$$

Portanto $M_m(K) \otimes M_n(E) \sim M_{mn}(E)$.

(2) Sejam $M_m(K)$ e $M_{p,q}(E)$ a álgebra de matrizes $m \times m$ sobre K e a subálgebra de $M_{p+q}(E)$. Então

$$M_m(K) \otimes M_{p,q}(E) \sim M_{m,0}(E) \otimes M_{p,q}(E),$$

este último produto tensorial é PI-equivalente a $M_{mp,mq}(E)$ pelo item (ii) do Teorema 2.4.11.

Logo $M_m(K) \otimes M_{p,q}(E) \sim M_{mp,mq}(E)$.

(3) Sejam $M_m(E)$ e $M_n(E)$ álgebras de matrizes de ordem $m \times m$ e $n \times n$, respectivamente, sobre E. Então

$$M_m(E) \otimes M_n(E) \cong (M_m(K) \otimes E) \otimes (M_n(K) \otimes E) \cong M_m(K) \otimes (E \otimes M_n(K)) \otimes E \cong$$
$$M_m(K) \otimes (M_n(K) \otimes E) \otimes E \cong (M_m(K) \otimes M_n(K)) \otimes (E \otimes E) \cong M_{mn}(K) \otimes (E \otimes E)$$

pela observação feita acima e pelo item (iii) do Teorema 2.4.11, segue que $M_{mn}(K) \otimes (E \otimes E) \sim M_{mn,0}(E) \otimes M_{1,1}(E)$ e este pelo item (ii) do Teorema 2.4.11 é PI-equivalente a $M_{mn,mn}(E)$.

Portanto $M_m(E) \otimes M_n(E) \sim M_{mn,mn}(E)$.

(4) Sejam $M_m(K)$ e $M_n(K)$ álgebras de matrizes de ordem $m \times m$ e $n \times n$, respectivamente, sobre K. Pelo Exemplo 1.5.3, $M_m(K) \otimes M_n(K) \cong M_{mn}(K)$.

Logo $M_m(K) \otimes M_n(K) \sim M_{mn}(K)$.

(5) Sejam $M_n(E)$ e $M_{p,q}(E)$ a álgebra de matrizes de ordem $n \times n$ sobre E e a subálgebra de $M_{p+q}(E)$, respectivamente. Então

$$M_{p,q}(E) \otimes M_n(E) \cong M_{p,q}(E) \otimes (M_n(K) \otimes E) \cong (M_{p,q}(E) \otimes M_n(K)) \otimes E,$$

como $M_n(K) \sim M_{n,0}(E)$, seguem do Lema 2.4.12 e dos itens (ii) e (i) do Teorema 2.4.11 as relações de PI-equivalência

$$(M_{p,q}(E) \otimes M_n(K)) \otimes E \sim (M_{p,q}(E) \otimes M_{n,0}(E)) \otimes E \sim M_{pn,qn}(E) \otimes E \sim M_{pn+qn}(E).$$

Portanto $M_{p,q}(E) \otimes M_n(E) \sim M_{an+bn}(E)$.

Assim, o produto tensorial de quaisquer álgebras T-primas é PI-equivalente a uma álgebra T-prima.

2.5 Envoltórios Supercomutativos

Definição 2.5.1. *Uma superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$ é dita supercomutativa se para todos elementos homogêneos $a, b \in A$,*

$$ab - (-1)^{(\deg a)(\deg b)} ba = 0.$$

A álgebra de Grassmann com sua graduação $E = E_0 \oplus E_1$ é um exemplo de superálgebra supercomutativa.

Definiremos de forma natural um objeto livre S de posto enumerável na classe de superálgebras supercomutativas como segue. Tome $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ e $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$, dois conjuntos de variáveis eumeráveis e definimos $S = K[U, V]$ uma álgebra com 1, gerada por $U \cup V$ sobre K, sujeito às condições que os elementos de U são elementos centrais e os elementos de V anticomutam entre si.

Em símbolos S é definido em termos de geradores e relações assim:

$$S = \langle 1, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots | u_i u_j = u_j u_i, v_i v_j = -v_j v_i, u_i v_j = v_j u_i, i, j = 1, 2, \ldots \rangle.$$

A álgebra $S = K[U, V]$ tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $S = S_0 \oplus S_1$ se exigirmos que as variáveis de U sejam elementos pares e os elementos de V são ímpares.

Também S tem a seguinte propriedade universal: dada qualquer álgebra supercomutativa A, qualquer $\varphi : \{U, V\} \to A$ tal que $\varphi(U) \subseteq A_0$ e $\varphi(V) \subseteq A_1$ pode ser unicamente estendida a um homomorfismo de superálgebras $\overline{\varphi} : S \to A$.

Definição 2.5.2. *$S = K[U, V]$ é chamada álgebra livre supercomutativa sobre K sobre os conjuntos enumeráveis de variáveis comutativas de U e anticomutativas de V.*

Se identificarmos os elementos geradores $e_1, e_2, \ldots,$ da álgebra de Grassmann E com os elementos $v_1, v_2, \ldots,$ de S respectivamente, então E está contido em S com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida. Assim E_0 é gerada por todos monômios em $v_i's$ de comprimento par e E_1 é gerado por todos os monômios em $v_i's$ de comprimento ímpar. Observamos que $S \cong K[U] \otimes_K E$, onde $K[U]$ é álgebra comutativa livre.

Como no caso do envoltório de Grassmann, podemos definir o assim chamado superenvoltório ou S-envoltório de qualquer superálgebra.

Definição 2.5.3. *Se $A = A_0 \oplus A_1$ é uma superálgebra, o superenvoltório de A é a superálgebra*

$$S(A) = (A_0 \otimes S_0) \oplus (A_1 \otimes S_1).$$

Proposição 2.5.4. *Para qualquer superálgebra A sobre um corpo de característica zero, $S(A)$ e $E(A)$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais.*

Demonstração. Como observamos acima, $E \subseteq S$ é a subálgebra gerada por V. Portanto $E(A) \subseteq S(A)$ e $E(A)$ satisfaz todas as identidades de $S(A)$.

Agora, seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear que não é uma identidade para $S(A)$. Então, pela Observação 1.4.7, existem $a_1, \ldots, a_n \in A_0 \cup A_1$ e $p_1, \ldots, p_n \in S_0 \cup S_1$ tais que

$$f(a_1 \otimes p_1, \ldots, a_n \otimes p_n) \neq 0.$$

Podemos claramente assumir que $a_1, \ldots, a_r \in A_0$, $p_1, \ldots, p_r \in S_0$, $a_{r+1}, \ldots, a_n \in A_1$, $p_{r+1}, \ldots, p_n \in S_1$. Portanto, recordando que os $p_i's$ comutam ou anticomutam entre eles, escrevemos

$$f(a_1 \otimes p_1, \ldots, a_n \otimes p_n) = b \otimes p_1 \cdots p_n$$

com $0 \neq b \in A$ e $0 \neq p_1 \cdots p_n \in S$. É claro que os mesmos cálculos mostram que

$$f(a_1 \otimes u_1, \ldots, a_r \otimes u_r, a_{r+1} \otimes v_1, \ldots, a_n \otimes v_{n-r}) = b \otimes u_1 \cdots u_r v_1 \cdots v_{n-r} \neq 0.$$

Uma vez que S é uma álgebra livre supercomutativa, a função $\varphi : A \otimes (U \cup V) \to A \otimes E$ tal que

$$\varphi(a \otimes v_i) = a \otimes e_i,\ \varphi(a \otimes u_i) = a \otimes e_{n+2i-1} e_{n+2i},\ i = 1, 2, \ldots$$

para todo $a \in A$, pode ser estendido a um homomorfismo $\overline{\varphi} : A \otimes S \to A \otimes E$ tal que $\overline{\varphi}(S(A)) \subseteq E(A)$. Obtemos

$$\overline{\varphi}(f(a_1 \otimes u_1, \ldots, a_r \otimes u_r, a_{r+1} \otimes v_1, \ldots, a_n \otimes v_{n-r})) =$$

$$f(\overline{\varphi}(a_1 \otimes u_1), \ldots, \overline{\varphi}(a_r \otimes u_r), \overline{\varphi}(a_{r+1} \otimes v_1), \ldots, \overline{\varphi}(a_n \otimes v_{n-r})) =$$

$$f(a_1 \otimes e_{n+1} e_{n+2}, \ldots, a_r \otimes e_{n+2r-1} e_{n+2r}, a_{r+1} \otimes e_1, \ldots, a_n \otimes e_{n-r}) =$$

$$b \otimes e_{n+1}e_{n+2}\cdots e_{n+2r-1}e_{n+2r}e_1\cdots e_{n-r} \neq 0.$$

Portanto f não é uma identidade de $E(A)$ e a prova está completa. □

Proposição 2.5.5. *Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra de dimensão finita sobre o corpo K. Se $\{a_1, \ldots, a_k\}$ e $\{b_1, \ldots, b_t\}$ são bases de A_0 e A_1 respectivamente, então a subálgebra de $S(A)$ gerada pelos elementos*

$$\xi_i = a_1 \otimes u_{i1} + \cdots + a_k \otimes u_{ik} + b_1 \otimes v_{i1} + \cdots + b_t \otimes v_{it},\ i = 1, 2, \ldots$$

é uma álgebra relativamente livre da variedade $var(E(A))$ com geradores livres $\xi_1, \xi_2, \ldots$.

Demonstração. Para provarmos a proposição, pela Observação 1.5.11, é suficiente provar que $f \in T(E(A))$.

Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio não nulo tal que $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$. Se $c_1, \ldots, c_n \in S(A)$, então, para todo $1 \leq i \leq n$, podemos escrever

$$c_i = a_1 \otimes p_{i1} + \cdots + a_k \otimes p_{ik} + b_1 \otimes q_{i1} + \cdots + b_t \otimes q_{it}$$

para convenientes $p_{ij} \in S_0$, $q_{ij} \in S_1$. Como na prova anterior, existe um homomorfismo sobrejetor $\overline{\varphi} : A \otimes S \to A \otimes S$ tal que

$$\overline{\varphi}(a_i \otimes u_{ij}) = a_i \otimes p_{ij}, \overline{\varphi}(b_j \otimes v_{ij}) = b_j \otimes q_{ij},\ 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq t.$$

Segue que $f(c_1, \ldots, c_n) = \overline{\varphi}(f(\xi_1, \ldots, \xi_n)) = 0$ e f é uma identidade para a álgebra $S(A)$. Claro que qualquer subálgebra de $S(A)$ satisfaz todas identidades de $S(A)$ e de $E(A)$, pois elas são as mesmas.

Isto significa que a álgebra gerada pelos elementos $\xi_1, \xi_2, \ldots$ é uma álgebra relativamente livre da variedade $var(S(A))$. Uma vez que $var(S(A)) = var(E(A))$, a prova está completa.

□

Capítulo 3

Parte do Teorema do Produto Tensorial

Neste capítulo construiremos modelos apropriados para as álgebras graduadas relativamente livres, para $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e para $M_{pr+qs,ps+qr}$. Exibiremos conjuntos geradores para os ideais de identidades graduadas satisfeitas por estas álgebras e mostraremos vários corolários de interesse independente. Estendemos os resultados de Regev **[13]** a álgebras sobre corpos infinitos de característica diferente de 2. Obteremos uma nova prova de uma das igualdades do Teorema do Produto Tensorial de Kemer (Teorema 2.4.11) sobre um corpo em característica 0, mas em característica maior que 2 vamos ter somente uma das inclusões. Estudaremos também as identidades graduadas de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ e as identidades graduadas de $E^{\otimes n}$ em características 0 e positiva. Por último, vamos apresentar mais casos do Teorema do Produto Tensorial comparando os T-ideais graduados das álgebras $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ e $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$. Em todo este capítulo, nossas álgebras e espaços vetoriais serão sobre o corpo K infinito e de característica diferente de 2.

3.1 Modelos para Álgebras Relativamente Livres

Fixemos a notação $m = p + q$, $n = r + s$ e o conjunto $G = \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$. Na álgebra de matrizes vamos considerar a $\mathbb{Z}_{mn}$-graduação elementar como no Exemplo 2.1.7, além disso se R é qualquer álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada então, como já sabemos pelo Exemplo 1.5.2, $M_{mn}(R) \cong M_{mn}(K) \otimes R$ tem a G-graduação definida para produto tensorial de álgebras graduadas (Observação 2.1.10).

Para $h \in \mathbb{N}$, denotamos $I_h = \{1, 2, \ldots, h\} \subset \mathbb{N}$, assumiremos que $p \geq q$ e $r \geq s$ e definiremos a função $\gamma_{p,q} : I_{p+q} \to \mathbb{Z}_2$ por

$$\gamma_{p,q}(i) = \begin{cases} 0, \text{ se} & 1 \leq i \leq p \\ 1, \text{ se} & p+1 \leq i \leq p+q \end{cases}$$

Similarmente, consideramos a função $\gamma_{r,s} : I_{r+s} \to \mathbb{Z}_2$.

Vamos considerar os seguintes conjuntos de variáveis

$$Y = \{y_{ij}^k \mid 1 \leq i, j \leq m\}, \; Z = \{z_{ij}^k \mid 1 \leq i, j \leq n\},$$

onde $k = 1, 2, \ldots$.

Destes conjuntos formaremos a álgebra livre $K\langle Y \cup Z\rangle$ e definiremos uma $\mathbb{Z}_2$-graduação sobre ela pondo

$$\partial_{\mathbb{Z}_2}(y_{ij}^k) = \gamma_{p,q}(i) + \gamma_{p,q}(j) \text{ e } \partial_{\mathbb{Z}_2}(z_{ij}^k) = \gamma_{r,s}(i) + \gamma_{r,s}(j).$$

Seja P_1 o ideal de $K\langle Y \cup Z\rangle$ determinado pelas relações:

$$[y_{i_1j_1}^{k_1}, z_{i_2j_2}^{k_2}] = 0,$$

$$[y_{i_1j_1}^{k_1}, y_{i_2j_2}^{k_2}] = 0, \text{ se } \partial_{\mathbb{Z}_2}(y_{i_1j_1}^{k_1}) = 0,$$

$$y_{i_1j_1}^{k_1} \circ y_{i_2j_2}^{k_2} = 0, \text{ se } \partial_{\mathbb{Z}_2}(y_{i_1j_1}^{k_1}) = \partial_{\mathbb{Z}_2}(y_{i_2j_2}^{k_2}) = 1,$$

$$[z_{i_1j_1}^{k_1}, z_{i_2j_2}^{k_2}] = 0, \text{ se } \partial_{\mathbb{Z}_2}(z_{i_1j_1}^{k_1}) = 0,$$

$$z_{i_1j_1}^{k_1} \circ z_{i_2j_2}^{k_2} = 0, \text{ se } \partial_{\mathbb{Z}_2}(z_{i_1j_1}^{k_1}) = \partial_{\mathbb{Z}_2}(z_{i_2j_2}^{k_2}) = 1,$$

para todo $k_1, k_2, i_1, i_2, j_1, j_2$. Aqui $[a, b] = ab - ba$ é o comutador de a e b, e $a \circ b = ab + ba$ é o produto de Jordan de a e b. Definiremos a álgebra $R_1 = K\langle Y \cup Z\rangle/P_1$. Usaremos as mesmas letras y_{ij}^k e z_{ij}^k para as imagens de y_{ij}^k e z_{ij}^k com respeito a projeção $K\langle Y \cup Z\rangle \to R_1$.

R_1 é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Além disso o conjunto Y gera uma álgebra livre super-comutativa, bem como Z também gera, e os elementos de Y comutam com os elementos de Z.

Seja $(t, a) \in G$ e definamos as seguintes matrizes em $M_{mn}(R_1)$:

$$A_k^{(t,a)} = \sum_{\overline{n(j-i)+w-v}=t} \delta_{a,\partial_{\mathbb{Z}_2}(y_{ij}^k)+\partial_{\mathbb{Z}_2}(z_{vw}^k)}\, y_{ij}^k z_{vw}^k\, e_{n(i-1)+v,n(j-1)+w}$$

Aqui $\delta_{a,b}$ é o símbolo de Kronecker. Notamos que

$$\partial_G(y_{ij}^k z_{vw}^k\, e_{n(i-1)+v,n(j-1)+w}) = (\overline{n(j-i)+w-v}, \partial_{\mathbb{Z}_2}(y_{ij}^k) + \partial_{\mathbb{Z}_2}(z_{vw}^k)) = (t, a) \in G.$$

A matriz $A_k^{(t,a)}$ é um elemento homogêneo na álgebra G-graduada $M_{mn}(R_1)$ de grau (t, a).

Ponha $\mathcal{G}_{(t,a)}$ como o conjunto de todas as matrizes $A_k^{(t,a)}$, $k \geq 1$, e $\mathcal{G} = \bigcup_{(t,a)\in G} \mathcal{G}_{(t,a)}$. Denotaremos por $F_{p,q,r,s}$ a álgebra gerada por $\mathcal{G}$. Então a álgebra $F_{p,q,r,s}$ é uma subálgebra graduada de $M_{mn}(R_1)$.

Por exemplo, a álgebra $F_{1,1,1,1}$ é gerada pelas matrizes

$$A_k^{(0,0)} = \begin{pmatrix} y_{11}^k z_{11}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{11}^k z_{22}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{22}^k z_{11}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{22}^k z_{22}^k \end{pmatrix}, \quad A_k^{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{12}^k z_{21}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{21}^k z_{21}^k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_k^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & y_{11}^k z_{12}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{22}^k z_{12}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_k^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{12}^k z_{11}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{12}^k z_{22}^k \\ y_{21}^k z_{11}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{21}^k z_{22}^k & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_k^{(3,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & y_{12}^k z_{12}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{21}^k z_{12}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_k^{(3,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{11}^k z_{21}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{22}^k z_{21}^k & 0 \end{pmatrix},$$

$k \geq 1$, e as componentes de grau $(0,1)$ e $(2,0)$ são zero. Note que a posição das entradas não nulas da matriz $A_k^{(t,a)}$ é a mesma posição das matrizes da Observação 2.2.2.

Vamos considerar o conjunto de variáveis

$$U = \{u_{ij}^k \mid 1 \leq i,j \leq mn\},$$

onde $k = 1, 2, \ldots$. Construiremos a álgebra livre $K\langle U \rangle$ sobre U, $\mathbb{Z}_2$-graduada da seguinte forma. Seja $w \in I_{mn}$ escreveremos $w = n(w_1 - 1) + w_2$, $w_1 \in I_m$, $w_2 \in I_n$ e denotaremos $\varepsilon(w) = \gamma_{p,q}(w_1) + \gamma_{r,s}(w_2)$. Notamos que $\varepsilon(w)$ está bem definido, uma vez que w_1 e w_2 são determinados unicamente por w. Assim, dada uma variável $u_{ij}^k \in U$, definimos o seu G-grau por

$$\partial_G(u_{ij}^k) = \varepsilon(i) + \varepsilon(j).$$

Neste caso, as variáveis u_{ij}^k são todas pares se $\varepsilon(i) + \varepsilon(j) = 0$ e ímpares se $\varepsilon(i) + \varepsilon(j) = 1$.

Seja P_2 o ideal de $K\langle U \rangle$ determinado pelas relações

$$[u_{i_1 j_1}^{k_1}, u_{i_2 j_2}^{k_2}] = 0, \text{ se } \varepsilon(i_1) + \varepsilon(j_1) = 0,$$

$$u_{i_1 j_1}^{k_1} \circ u_{i_2 j_2}^{k_2} = 0, \text{ se } \varepsilon(i_1) + \varepsilon(j_1) = \varepsilon(i_2) + \varepsilon(j_2) = 1,$$

para todo $k_1, k_2, i_1, i_2, j_1, j_2$.

Seja $R_2 = K\langle U \rangle / P_2$. Então pelas relações acima, R_2 é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Aqui também, usaremos as mesmas letras u_{ij}^k para os geradores de $K\langle U \rangle$ e suas imagens em R_2.

Definiremos $\mathcal{H}_{(t,c)}$ o conjunto de todas as matrizes $B_k^{(t,c)} \in M_{mn}(R_2)$ onde

$$B_k^{(t,c)} = \sum_{\overline{j-i}=t} \delta_{c,\varepsilon(i)+\varepsilon(j)} \, u_{ij}^k \, e_{ij},$$

e $k \geq 1$. Agora ponha $\mathcal{H} = \bigcup_{(t,c) \in G} \mathcal{H}_{(t,c)}$ e seja $L_{p,q,r,s}$ a álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{H}$. Como a matriz $B_k^{(t,c)}$ possui G-grau (t,c), ela é homogênea em $M_{mn}(R_2)$. Segue que $L_{p,q,r,s}$ é uma subálgebra G-graduada de $M_{mn}(R_2)$.

Como exemplo daremos a seguir os geradores da álgebra $L_{1,1,1,1}$.

$$B_k^{(0,0)} = \begin{pmatrix} u_{11}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44}^k \end{pmatrix}, \ B_k^{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{23}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{41}^k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_k^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & u_{12}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{34}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_k^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_{13}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{24}^k \\ u_{31}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{42}^k & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_k^{(3,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & u_{14}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{32}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_k^{(3,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{43}^k & 0 \end{pmatrix}$$

e as componentes de grau $(0,1)$ e $(2,0)$ são zero.

Observação 3.1.1. *Seja $(t,c) \in G$, e fixemos p,q,r,s. Devido as graduações de $F_{p,q,r,s}$ e $L_{p,q,r,s}$ as posições das entradas não nulas da matriz $B_k^{(t,c)}$ são as mesmas posições não nulas de $A_k^{(t,c)}$, por exemplo, isso ocorre nas matrizes $A_k^{(0,0)}$ e $B_k^{(0,0)}$.*

Proposição 3.1.2. *A álgebra $F_{p,q,r,s}$ é relativamente livre na variedade de álgebras G-graduadas determinada por $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$.*

Demonstração. Seja $K\langle X\rangle = K\langle X_{\theta_1}, X_{\theta_2}, \ldots, X_{\theta_{2mn}}\rangle$ a álgebra livre G-graduada onde X_{θ_i} consiste das variáveis $\{x_t^{(\theta_i)} | t \geq 1\}$ de G-grau θ_i, e $X = \bigcup X_{\theta_i}$.

O homomorfismo de álgebras G-graduadas $\varphi : K\langle X\rangle \to F_{p,q,r,s}$ definido por $x_l^{(\theta_i)} \mapsto A_l^{(\theta_i)}$ é sobrejetor, logo, pelo Teorema 1.1.9,

$$K\langle X\rangle / \ker\varphi \cong F_{p,q,r,s}.$$

Para provar a Proposição 3.1.2, é suficiente provar que $\ker\varphi = T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$.

Vamos mostrar que $T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)) \subseteq \ker\varphi$. Suponhamos que $f = f(x_1, \ldots, x_k) \in T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$, isto é,

$$f(c_1, \ldots, c_k) = 0 \text{ para todo } c_1, \ldots, c_k \in M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E).$$

Como K é um corpo infinito, pelo Teorema 1.4.4, podemos considerar $f = f(x_1, \ldots, x_k) \in K\langle X\rangle$ um polinômio multihomogêneo de multigrau $(m_1, \ldots, m_k)$.

Queremos provar que $\varphi(f(x_1, \ldots, x_k)) = f(A_1, \ldots, A_k) = 0$, onde $\partial_G(x_i) = \partial_G(A_i) = \theta_i$.

Suponhamos primeiro, que f seja um polinômio multilinear, então basta verificar somente nos somandos das matrizes A_d, $d = 1, \ldots, k$. Por conveniência, denotaremos os somandos $y_{i_d j_d}^d z_{v_d w_d}^d e_{n(i_d-1)+v_d, n(j_d-1)+w_d}$ de $A_d^{(t,a)}$, por w_d apenas.

$$f(w_1,\ldots,w_k)=\sum_{\sigma\in S_k}\alpha_\sigma w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(k)}=$$
$$\widetilde{f}(e_{n(i_1-1)+v_1,n(j_1-1)+w_1},\ldots,e_{n(i_k-1)+v_k,n(j_k-1)+w_k})y^1_{i_{h_1}j_{h_1}}\cdots y^k_{i_{h_k}j_{h_k}}z^1_{v_{h_1}w_{h_1}}\cdots z^k_{v_{h_k}w_{h_k}},$$

onde

$$\widetilde{f}=\widetilde{f}(e_{n(i_1-1)+v_1,n(j_1-1)+w_1},\ldots,e_{n(i_k-1)+v_k,n(j_k-1)+w_k})=$$
$$\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\sigma(p_y)+\sigma(p_z)}\alpha_\sigma e_{n(i_{\sigma(1)}-1)+v_{\sigma(1)},n(j_{\sigma(1)}-1)+w_{\sigma(1)}}\cdots e_{n(i_{\sigma(k)}-1)+v_{\sigma(k)},n(j_{\sigma(k)}-1)+w_{\sigma(k)}}$$

e $(-1)^{\sigma(p_y)}=-1$ ou 1 dependendo da posição das variáveis $y^d_{i_hj_h}$ ímpares com respeito as permutações $\sigma\in S_k$, da mesma forma para $(-1)^{\sigma(p_z)}$.

Como $f\equiv 0$ em $M_{p,q}(E)\otimes M_{r,s}(E)$ vamos ter que, via isomorfismo, $\widetilde{f}=0$ em $M_{(p+q)(r+s)}(K)$. Realmente, para $a_{i_1j_1}e_{i_1j_1}\otimes b_{v_1w_1}e_{v_1w_1},\ldots,a_{i_1j_1}e_{i_1j_1}\otimes b_{v_1w_1}e_{v_1w_1}\in M_{p,q}(E)\otimes M_{r,s}(E)$,

$$f(a_{i_1j_1}e_{i_1j_1}\otimes b_{v_1w_1}e_{v_1w_1},\ldots,a_{i_1j_1}e_{i_1j_1}\otimes b_{v_1w_1}e_{v_1w_1})=0.$$

Agora, $M_m(E)\cong M_m(K)\otimes E$ (ver Exemplo 1.5.2) e daí

$$a_{ij}e_{ij}\otimes b_{vw}e_{vw}\mapsto(e_{ij}\otimes a_{ij})\otimes(e_{vw}\otimes b_{vw}).$$

Usando as propriedades de produto tensorial, segue que

$$0=f(a_{i_1j_1}e_{i_1j_1}\otimes b_{v_1w_1}e_{v_1w_1},\ldots,a_{i_1j_1}e_{i_1j_1}\otimes b_{v_1w_1}e_{v_1w_1})\mapsto$$

$$f((e_{i_1j_1}\otimes a_{i_1j_1})\otimes(e_{v_1w_1}\otimes b_{v_1w_1}),\ldots,(e_{i_kj_k}\otimes a_{i_kj_k})\otimes(e_{v_kw_k}\otimes b_{v_kw_k}))\tag{3.1}$$

Mas $M_m(K)\otimes M_n(K)\cong M_{mn}(K)$, $e_{ij}\otimes e_{vw}\mapsto e_{n(i-1)+v,n(j-1)+w}$, então (3.1) é levado isomorficamente a

$$f(e_{n(i_1-1)+v_1,n(j_1-1)+w_1}\otimes(a_{i_1j_1}\otimes b_{v_1w_1}),\ldots,e_{n(i_k-1)+v_k,n(j_k-1)+w_k}\otimes(a_{i_kj_k}\otimes b_{v_kw_k}))=$$
$$\widehat{f}(e_{n(i_1-1)+v_1,n(j_1-1)+w_1},\ldots,e_{n(i_k-1)+v_k,n(j_k-1)+w_k})\otimes(a_{i_1j_1}\cdots a_{i_kj_k})\otimes(b_{v_1w_1}\cdots b_{v_kw_k}),$$

onde

$$\widehat{f}=\widehat{f}(e_{n(i_1-1)+v_1,n(j_1-1)+w_1},\ldots,e_{n(i_k-1)+v_k,n(j_k-1)+w_k})=$$
$$\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\sigma(p_a)+\sigma(p_b)}\alpha_\sigma e_{n(i_{\sigma(1)}-1)+v_{\sigma(1)},n(j_{\sigma(1)}-1)+w_{\sigma(1)}}\cdots e_{n(i_{\sigma(k)}-1)+v_{\sigma(k)},n(j_{\sigma(k)}-1)+w_{\sigma(k)}}$$

e $(-1)^{\sigma(p_a)}=1$ ou -1, dependendo da posição dos elementos a_{ij}, da mesma forma para $(-1)^{\sigma(p_b)}$. Observe que $\widetilde{f}=\widehat{f}$, pois f é uma identidade graduada, então $(-1)^{\sigma(p_a)+\sigma(p_b)}=(-1)^{\sigma(p_y)+\sigma(p_z)}$. Portanto $\widetilde{f}=0$ em $M_{(p+q)(r+s)}(K)\cong M_{p,q}(K)\otimes M_{r,s}(K)$.

Dessa forma, $f\in\ker\varphi$.

Suponhamos, agora que, $m_d>1$, para algum $d=1,\ldots,k$. Podemos escrever $f(A_1,\ldots,A_k)$ como uma soma de expressões da forma

$$\overline{g}_t=g_t(w_{h_11},\ldots,w_{h_tt}),$$

onde $g_t = g_t(x_1, \ldots, x_t)$ são linearizações parciais de f. Por $f \equiv 0$ em $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$, segue que $g_t \equiv 0$ também em $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$, pela primeira parte da prova, todos $\overline{g}_s = 0$ e disto implica que $\varphi(f) = 0$. Assim $f \in \ker \varphi$ e a inclusão $T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)) \subseteq \ker \varphi$ está provada.

Agora vamos mostrar que $\ker \varphi \subseteq T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$.

Seja $f(x_1^{(\theta_1)}, \ldots, x_k^{(\theta_k)}) \in \ker \varphi$ e sejam $c_1, \ldots, c_k \in M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ elementos homogêneos, onde $c_d = \sum (a_{di_dj_d} e_{i_dj_d}) \otimes (b_{dv_dw_d} e_{v_dw_d})$, tais que $\partial_G(c_d) = \theta_d$, para todo $d = 1, \ldots, k$ e $a_d \in M_{p,q}(E)$, $b_d \in M_{r,s}(E)$. Observe que o G-grau dos elementos homogêneos em $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ corresponde ao G-grau dos somandos das matrizes A_d.

Os conjuntos Y e Z geram a álgebra livre supercomutativa R_1 com $\mathbb{Z}_2$-graduação, logo podemos estender qualquer função graduada (que preserva graus de elementos) $Y \cup Z \to E$ a um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado $\psi : R_1 \to E$, onde $\psi(y_{ij}^d) = a_{dij}$ e $\psi(z_{vw}^d) = b_{dvw}$. Consequentemente, pela propriedade universal, a um homomorfismo G-graduado $\overline{\psi} : L_{p,q,r,s} \to M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ tal que $\overline{\psi}(y_{ij}^d z_{vw}^d e_{n(i-j)+v,n(j-1)+w}) = a_{dij} e_{ij} \otimes b_{dvw} e_{vw}$. Dessa forma, $\overline{\psi}(A_d^{(\theta_d)}) = c_d$, onde $\partial_G(c_d) = \theta_d$ para todo d.

Temos que $\varphi(f) = 0$, isto é, $f(A_1^{(g_1)}, \ldots, A_k^{(g_k)}) = 0$, então

$$0 = \overline{\psi}(0) = \overline{\psi}(f(A_1^{(\theta_1)}, \ldots, A_k^{(\theta_k)})) = f(\overline{\psi}(A_1^{(\theta_1)}), \ldots, \overline{\psi}(A_k^{(\theta_k)})) = f(c_1, \ldots, c_k).$$

Daí $f \equiv 0$ é identidade graduada para $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e $\ker \varphi \subseteq T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$.

Portanto $\ker \varphi = T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$. □

Renomeando $a = pr + qs$ e $b = ps + qr$, podemos construir uma subálgebra $M_{p,q,r,s}(E)$ de $M_{mn}(E)$ que é isomorfa à $M_{a,b}(E)$ (Veja **[5]**).

A álgebra $M_{p,q,r,s}(E)$ é definida da seguinte maneira: o elemento $A = \sum_{i,j=1}^{mn} a_{ij} e_{ij}$ pertence a $M_{p,q,r,s}(E)$ se, e somente se, $a_{ij} \in E_{\varepsilon(i)+\varepsilon(j)}$.

Proposição 3.1.3. *A álgebra $L_{p,q,r,s}$ é relativamente livre na variedade de álgebras G-graduadas gerada por $M_{p,q,r,s}(E)$.*

Demonstração. Considere $K\langle X \rangle$ a álgebra livre G-graduada igual na Proposição 3.1.2. O homomorfismo $\varphi : K\langle X \rangle \to L_{p,q,r,s}$ definido por $\varphi(x_l^{(\theta_i)}) = B_l^{(\theta_i)}$ é sobrejetor, logo pelo Teorema 1.1.9

$$K\langle X \rangle / \ker \varphi \cong L_{p,q,r,s}.$$

Para provar a Proposição 3.1.3, é suficiente verificar que $\ker \varphi = T_G(M_{p,q,r,s}(E))$.

De fato, vamos mostrar que $\ker \varphi \subseteq T_G(M_{p,q,r,s}(E))$. Como K é um corpo infinito, podemos considerar $f = f(x_1, \ldots, x_k) \in K\langle X \rangle$ um polinômio multihomogêneo de multigrau $(m_1, \ldots, m_k)$. Suponhamos que $f = f(x_1, \ldots, x_k) \in T_G(M_{p,q,r,s}(E))$, isto é,

$$f(b_1, \ldots, b_k) = 0 \text{ para todo } b_1, \ldots, b_k \in M_{p,q,r,s}(E), \text{ com } \partial_G(x_i) = \partial_G(b_i) = \theta_i.$$

Queremos provar que $\varphi(f(x_1,\ldots,x_k)) = f(B_1,\ldots,B_k) = 0$.

Vamos supor primeiro que f é multilinear, então substituiremos x_d somente pelos somantes das matrizes B_d, $d = 1,\ldots,k$ isto é, somente por $u^d_{i_dj_d}e_{i_dj_d}$

$$f(u^1_{i_1j_1}e_{i_1j_1},\ldots,u^k_{i_kj_k}e_{i_kj_k}) = \widehat{f}(e_{i_1j_1},\ldots,e_{i_kj_k})u^1_{i_1j_1}\cdots u^k_{i_kj_k},$$

onde

$$\widehat{f}(e_{i_1j_1},\ldots,e_{i_kj_k}) = \sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\sigma(p_u)}\alpha_\sigma e_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(1)}}\cdots e_{i_{\sigma(k)}j_{\sigma(k)}}$$

e $(-1)^{\sigma(p_u)} = -1$ ou 1, dependendo da posição das variáveis $u^d_{i_dj_d}$ ímpares com respeito à permutação $\sigma \in S_n$.

Agora, como $f \equiv 0$ em $M_{p,q,r,s}(E)$ segue que (como na prova da Proposição 3.1.2) $\widehat{f} = 0$ em $M_{a,b}(K) \cong M_{p,q,r,s}(K)$.

Portanto $f \in \ker\varphi$.

Suponhamos agora que $m_d > 1$, para algum $d = 1,\ldots,k$.

Podemos escrever $f(B_1,\ldots,B_k)$ como uma soma de expressões da forma

$$\overline{g}_t = g_t(u^1_{i_1j_1}e_{i_1j_1},\ldots,u^t_{i_tj_t}e_{i_tj_t}),$$

onde $g_t = g_t(x_1,\ldots,x_t)$ são linearizações parciais de f. Por $f \equiv 0$ em $M_{p,q,r,s}(E)$, segue que $g_t \equiv 0$ em $M_{p,q,r,s}(E)$ também. E pela primeira parte da prova, $\overline{g}_t = 0$. Portanto $\varphi(f) = 0$. A inclusão $T_G(M_{p,q,r,s}(E)) \subseteq \ker\varphi$ está provada.

Vamos mostrar agora que $\ker\varphi \subseteq T_G(M_{p,q,r,s}(E))$.

Seja $f(x_1^{(\theta_1)},\ldots,x_k^{(\theta_k)}) \in \ker\varphi$ e sejam $b_1,\ldots,b_k \in M_{p,q,r,s}(E)$ elementos homogêneos, onde $b_d = \sum a_{dij}e_{ij}$ tais que $\partial_G(b_d) = \theta_d$, para todo $d = 1,\ldots,k$. Observe que o G-grau dos elementos homogêneos b_d em $M_{p,q,r,s}(E)$ corresponde ao G-grau dos somandos das matrizes B_d.

Como U gera a álgebra livre supercomutativa R_2 $\mathbb{Z}_2$-graduada, podemos estender qualquer função graduada $U \to E$ a um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado $\psi : R_2 \to E$, $u^d_{ij} \mapsto a_{dij}$. Consequentemente, a um homomorfismo G-graduado $\overline{\psi} : L_{p,q,r,s} \to M_{p,q,r,s}(E)$ definido por $\overline{\psi}(B_d^{(\theta_d)}) = b_d$ para todo i.

Assim, dado $f \in \ker\varphi$ temos que $\varphi(f) = 0$ isto é $f(B_1,\ldots,B_k) = 0$, então

$$0 = \overline{\psi}(0) = \overline{\psi}(f(B_1^{(\theta_1)},\ldots,B_k^{(\theta_k)})) = f(\overline{\psi}(B_1^{(\theta_1)}),\ldots,\overline{\psi}(B_k^{(\theta_k)})) = f(b_1,\ldots,b_k).$$

Daí $f \equiv 0$ é uma identidade graduada para $M_{p,q,r,s}(E)$ e $\ker\varphi \subseteq T_G(M_{p,q,r,s}(E))$.

Portanto $\ker\varphi = T_G(M_{p,q,r,s}(E))$. □

Assim construimos modelos convenientes de álgebras relativamente livres G-graduadas para $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e para $M_{p,q,r,s}(E)$. De fato, estes modelos são os análogos G-graduados das álgebras de matrizes genéricas.

3.2 Identidades Graduadas de $M_{p,q,r,s}(E)$ e $L_{p,q,r,s}$

Por conveniência simplificaremos a notação: dadas as variáveis G-graduadas $x_1, \ldots, x_d \in K\langle X\rangle$ de graus $(t_i, a_i) \in G$, para todo $i = 1, \ldots, d$, escreveremos os geradores $B_i^{(t_i,a_i)}$ de $L_{p,q,r,s}$ simplesmente como B_i. Além disso, para qualquer elemento G-homogêneo v de qualquer álgebra G-graduada A, escreveremos $\partial_G(v) = \partial(v) = (\alpha(v), \beta(v))$ onde $\alpha(v)$ é o $\mathbb{Z}_{mn}$-grau de v e $\beta(v)$ é o $\mathbb{Z}_2$-grau de v. Em outras palavras, representaremos $g \in G$ como $g = (\alpha, \beta)$ para $\alpha \in \mathbb{Z}_{mn}$, $\beta \in \mathbb{Z}_2$. Finalmente, se B é uma matriz, denotaremos por B_{ij} sua (i,j)-ésima entrada.

Se $B \in L_{p,q,r,s}$ é um elemento G-homogêneo, denotaremos por $\mid supp(B) \mid$ o número de entradas não nulas de B e chamaremos de suporte de B.

Lema 3.2.1. *A seguinte desigualdade é válida:*

$$\mid supp(B_{k_1}^{(t_1,c_1)} B_{k_2}^{(t_2,c_2)}) \mid \leq min\{\mid supp(B_{k_1}^{(t_1,c_1)}) \mid, \mid supp(B_{k_2}^{(t_2,c_2)}) \mid\}.$$

Demonstração. Notamos que em cada linha e em cada coluna da matriz $B_{k_h}^{(t_h,c_h)}$ temos no máximo um elemento não nulo. Assim, sejam

$$B_{k_1}^{(t_1,c_1)} = \sum_{i_1} u_{i_1 j_1(i_1)}^{k_1} e_{i_1 j_1(i_1)}, \quad B_{k_2}^{(t_2,c_2)} = \sum_{i_2} u_{i_2 j_2(i_2)}^{k_2} e_{i_2 j_2(i_2)} \in L_{p,q,r,s}$$

matrizes homogêneas. Aqui $j_h = i_h + t_h$ módulo mn, então $j_h = j_h(i_h)$ é unicamente definido por i_h, $h = 1, 2$.

Se $B_{k_1}^{(t_1,c_1)} B_{k_2}^{(t_2,c_2)} = 0$, concluimos.

Se $B_{k_1}^{(t_1,c_1)} B_{k_2}^{(t_2,c_2)} \neq 0$, então

$$B_{k_1}^{(t_1,c_1)} B_{k_2}^{(t_2,c_2)} = (\sum_{i_1} u_{i_1 j_1}^{k_1} e_{i_1 j_1})(\sum_{i_2} u_{i_2 j_2}^{k_2} e_{i_2 j_2}) = \sum_{i_1} u_{i_1 j_1}^{k_1} u_{j_1 j_2}^{k_2} e_{i_1 j_2}.$$

Temos que o produto $u_{i_1 j_1}^{k_1} u_{j_1 j_2}^{k_2}$ é não nulo se ambos $u_{i_1 j_1}^{k_1}$ e $u_{j_1 j_2}^{k_2}$ são não nulos e distintos. Por j_1 ser determinado unicamente por i_1, segue que o $\mid supp(B_{k_1}^{(t_1,c_1)} B_{k_2}^{(t_2,c_2)}) \mid$ é no máximo $\mid supp(B_{k_1}^{(t_1,c_1)}) \mid$. Da mesma forma vamos ter que $\mid supp(B_{k_1}^{(t_1,c_1)} B_{k_2}^{(t_2,c_2)}) \mid$ é no máximo $\mid supp(B_{k_2}^{(t_2,c_2)}) \mid$. Assim,

$$\mid supp(B_{k_1}^{(t_1,c_1)} B_{k_2}^{(t_2,c_2)}) \mid \leq min\{\mid supp(B_{k_1}^{(t_1,c_1)}) \mid, \mid supp(B_{k_2}^{(t_2,c_2)}) \mid\}$$

e concluimos a prova do lema. □

Se $M = M(x_1, \ldots, x_d)$ é um monômio graduado, definimos a densidade de M em $L_{p,q,r,s}$ como o número de entradas não nulas da matriz $M(\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_d)$. Aqui $\widetilde{B}$ é representada pela matriz do mesmo tipo como B obtida pela substituição de todas as entradas não nulas de B por $1 \in K$ e preservando as entradas nulas.

Definição 3.2.2. *O monômio graduado M é dito esparso em $L_{p,q,r,s}$ se sua densidade em $L_{p,q,r,s}$ é 0.*

Observação 3.2.3. *É imediato ver que se um monômio tem um submonômio de G-grau $(0,1)$, então ele é esparso em $L_{p,q,r,s}$. Além disso, quando $p=q$ então a existência de um submonômio de G-grau $(mn/2,0)$ também implica que o dado monômio é esparso.*

Analogamente para o caso da álgebra $F_{p,q,r,s}$ definimos $\mid supp(A) \mid$ para um elemento homogêneo $A \in F_{p,q,r,s}$. Assim temos a noção de monômios esparsos em $F_{p,q,r,s}$.Segue imediatamente da Observação 3.1.1 que

Lema 3.2.4. *Um monômio é esparso em $F_{p,q,r,s}$ se e somente ele é esparso em $L_{p,q,r,s}$.*

Observe que as matrizes $B_k^{(t,c)}$ contêm no máximo uma entrada não nula em cada linha e em cada coluna. Então temos os seguintes lemas:

Lema 3.2.5. *Sejam $M(x_1,\ldots,x_d)$ e $N(x_1,\ldots,x_d) \in K\langle X\rangle$ dois monômios graduados tais que $M(B_1,\ldots,B_d)_{ij} = \pm N(B_1,\ldots,B_d)_{ij} \neq 0$, para alguns i e j e $M(\widetilde{B_1},\ldots,\widetilde{B_d})_{ij} \neq 0$. Então os monômios M e N possuem o mesmo $\mathbb{N}^d$-multigrau como monômios comuns. Além disso, para todo $h=1,\ldots,d$, se $M(x_1,\ldots,x_d) = m'x_hm''$ então $N(x_1,\ldots,x_d) = n'x_hn''$ para adequados monômios n' e n'' tais que $\partial(m') = \partial(n')$ e $\partial(m'') = \partial(n'')$. Aqui alguns dos monômios m', m'', n' e n'' podem ser vazios.*

Demonstração. Seja $M(x_1,\ldots,x_d) \in K\langle X\rangle$ e escrevemos $M(x_1,\ldots,x_d) = x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_l}$, onde $\{k_1,k_2,\ldots,k_l\} = \{1,\ldots,d\}$ e $\partial(x_h) = (t_h,a_h) = \partial(B_h)$ para todo $h=1,\ldots,d$. Então escrevemos a (i,j)-ésima entrada M_{ij} de $M(B_1,\ldots,B_d)$ como

$$M(B_1,\ldots,B_d)_{ij} = u_{ij_1}^{k_1}u_{j_1j_2}^{k_2}\cdots u_{j_{l-1}j}^{k_l}.$$

Da mesma forma escrevemos $N(x_1,\ldots,x_d) = x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_s}$, onde $\{r_1,\ldots,r_s\} = \{1,\ldots,d\}$.

Então escrevemos a (i,j)-ésima entrada N_{ij} de $N(B_1,\ldots,B_d)$ como

$$N(B_1,\ldots,B_d)_{ij} = u_{ii_1}^{r_1}u_{i_1i_2}^{r_2}\cdots u_{i_{s-1}j}^{r_s}.$$

Como as variáveis da matriz B_h aparecem somente em B_h e por

$$u_{ij_1}^{k_1}u_{j_1j_2}^{k_2}\cdots u_{j_{l-1}j}^{k_l} = \pm u_{ii_1}^{r_1}u_{i_1i_2}^{r_2}\cdots u_{i_{s-1}j}^{r_s}$$

implica que M e N tem a mesma coleção de variáveis, a menos da ordem, isto é, as variáveis da direita e da esquerda aparecem o mesmo número de vezes, então segue que M e N tem o mesmo multigrau como monômios no sentido comum.

Para provarmos a segunda parte do lema, vamos renomear x_h por x_{k_v},

$$M(x_1,\ldots,x_h,\ldots,x_d) = x_{k_1}\cdots x_{k_v}\cdots x_{k_l}$$

e x_h aparece na v-ésima posição. Como $M(B_1,\ldots,B_d)_{ij} \neq 0$, a variável $u_{j_{v-1}j_v}^{k_v}$ aparece em M_{ij}, isto é,

$$M(B_1,\ldots,B_d)_{ij} = u_{ij_1}^{k_1}\cdots u_{j_{v-2}j_{v-1}}^{k_{v-1}}u_{j_{v-1}j_v}^{k_v}u_{j_vj_{v+1}}^{k_{v+1}}\cdots u_{j_{l-1}j}^{k_l},$$

então $m' = x_{k_1}\cdots x_{k_{v-1}}$ e $\partial(m') = (\overline{j_{v-1}-i}, \varepsilon(i)+\varepsilon(j_{v-1}))$.

Pela primeira parte da prova, M e N possuem a mesma coleção de variáveis. Segue que $u^{k_v}_{j_{v-1}j_v}$ também aparece em N_{ij} na w-ésima posição, isto é,

$$N(B_1,\ldots,B_d)_{ij} = u^{r_1}_{ii_1}\cdots u^{r_{w-1}}_{i_{w-2}i_{w-1}} u^{r_w}_{i_{w-1}i_w} u^{r_{w+11}}_{i_w i_{w+1}}\cdots u^{r_s}_{i_{s-1}i}.$$

Como $N_{ij}\neq 0$, existe um submonômio de N, digamos n', tal que

$$\partial(n') = \partial(m') = (\overline{j_{v-1}-i}, \varepsilon(i)+\varepsilon(j_{v-1}))$$

e concluimos o lema. □

Aqui, precisamos observar a condição $M(B_1,\ldots,B_d)_{ij}\neq 0$ imposta no Lema 3.2.5. Sem essa imposição poderia acontecer que $M(B_1,\ldots,B_d)_{ij}=0$ como resultado de alguns cancelamentos entre as entradas das $B_i's$. Por sua vez, as matrizes $\widetilde{B}_i$ têm entradas 0 e 1, assim para elas tais cancelamentos não podem acontecer. Por esta razão definimos densidade e esparsidade.

Lema 3.2.6. *Seja $M = M(x_1,\ldots,x_d)\in K\langle X\rangle$ um monômio graduado. Se $M(B_1,\ldots,B_d)=0$, então $M(x_1,\ldots,x_d)\equiv 0(modJ)$.*

Demonstração. Como $M(B_1,\ldots,B_d)=0$ então ou M é esparso ou alguma variável ímpar u^k_{ij} aparece pelo menos duas vezes entre as entradas do monômio M. No primeiro caso, concluimos o lema. No segundo caso, temos

$$M(x_1,\ldots,x_d) = m_1 x_k^{(t,1)} m_2 x_k^{(t,1)} m_3$$

e podemos ver M como $M = m'x_k m''$ com $m' = m_1$ e $N = n'x_k n''$ com $n' = m_1 x_k m_2$. Pelo Lema 3.2.5, $\partial(m_1) = \partial(m_1 x_k m_2)$, então $\alpha(x_k m_2)=0$ e $\alpha(m_2) = -t$, assim ou $\partial(x_k m_2) = (0,1)$ ou $(0,0)$. Se $\partial(x_k m_2) = (0,1)$ então pela Observação 3.2.3, M é esparso e daí, $M\in J$. Se $\partial(x_k m_2) = (0,0)$ segue que $\partial(m_2) = (-t,1)$ e portanto

$$M = m_1 x_k^{(t,1)} m_2 x_k^{(t,1)} m_3 \equiv -m_1 x_k^{(t,1)} m_2 x_k^{(t,1)} m_3 = -M(modJ).$$

Dessa forma, $2M\in J$ e como $char K\neq 2$ segue que $M\in J$. □

Seja $J\subseteq K\langle X\rangle$ o T_G-ideal de identidade G-graduadas gerado pelos polinômios

$$\begin{gathered}[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}],\\ x_1^{(t,0)}x_2^{(-t,0)}x_3^{(t,0)} - x_3^{(t,0)}x_2^{(-t,0)}x_1^{(t,0)},\\ x_1^{(t,1)}x_2^{(-t,1)}x_3^{(t,1)} + x_3^{(t,1)}x_2^{(-t,1)}x_1^{(t,1)},\end{gathered}\tag{3.2}$$

onde $t\in\mathbb{Z}_{mn}$, e por todos os monômios que são esparsos em $L_{p,q,r,s}$.

Aqui recordaremos que a G-graduação sobre $M_{p,q}(E)\otimes M_{r,s}(E)$ foi definida anteriormente na Seção 2 (ver Observação 2.2.2). E suas relações com a G-graduação sobre $M_{p,q,r,s}(E)$ foram esboçados na prova da Proposição 3.1.2.

Lema 3.2.7. *O ideal de identidades G-graduadas de $L_{p,q,r,s}$ satisfaz as identidades graduadas de J, ou seja, $J \subseteq T_G(L_{p,q,r,s})$.*

Demonstração. Para provar o lema, é suficiente provar que os geradores de J são identidades graduadas para $L_{p,q,r,s}$.

Claramente todos os monômios esparsos são identidades para $L_{p,q,r,s}$. Observamos que todos os outros geradores restantes de J são polinômios multilineares, pela Observação 1.4.7, assim podemos substituir as variáveis pelas matrizes $B_k^{(t,c)}$ somente.

Mais uma vez devido a multilinearidade, podemos restringir as substituições somente para os elementos $\delta_{c,\varepsilon(i)+\varepsilon(j)}u_{ij}^k e_{ij}$.

1. Seja $(t,c) = (0,0)$ um G-grau dos elementos. Então $j = i$, $\varepsilon(i) + \varepsilon(j) = 0$. Neste caso temos $u_{ii}^1 e_{ii} u_{vv}^2 e_{vv} = u_{vv}^2 e_{vv} u_{ii}^1 e_{ii}$ uma vez que $u_{ii}^1 u_{vv}^2 = u_{vv}^2 u_{ii}^1$. Claro que se $i \neq v$ ambos os produtos acima são nulos. Portanto $[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}]$ é uma identidade graduada para $L_{p,q,r,s}$.

Podemos tomar como exemplo em $L_{1,1,1,1}$ os elementos da matriz $B_k^{(0,0)}$, em que claramente $u_{ii}^1 e_{ii} u_{vv}^2 e_{vv} \neq 0$ se $i = v$ e dessa forma $u_{ii}^1 u_{ii}^2 = u_{ii}^2 u_{ii}^1$.

2. Mostraremos que $x_1^{(t,0)} x_2^{(-t,0)} x_3^{(t,0)} - x_3^{(t,0)} x_2^{(-t,0)} x_1^{(t,0)}$ se anula em $L_{p,q,r,s}$. Note que se $t = 0$, então o resultado segue de (1). Portanto, substituiremos $x_1^{(t,0)}$, $x_2^{(-t,0)}$, $x_3^{(t,0)}$ por $\delta_{0,\varepsilon(i)+\varepsilon(i+t)}u_{i,i+t}^1 e_{i,i+t}$, $\delta_{0,\varepsilon(i+t)+\varepsilon(i)}u_{i+t,i}^2 e_{i+t,i}$ e $\delta_{0,\varepsilon(i)+\varepsilon(i+t)}u_{i,i+t}^3 e_{i,i+t}$, onde $\varepsilon(i)+\varepsilon(i+t) = 0$ e a soma dos indíces de u e e são módulo mn. É suficiente mostrar somente para essas substituições, uma vez que pela regra de multiplicação de matrizes todas as outras possibilidades de substituição para $x_2^{(-t,0)}$ e $x_3^{(t,0)}$ resulta em 0. Mas neste caso obtemos $u_{i,i+t}^1 u_{i+t,i}^2 u_{i,i+t}^3 = u_{i,i+t}^3 u_{i+t,i}^2 u_{i,i+t}^1$ e concluimos.

Exemplificando novamente em $L_{1,1,1,1}$, para $t = 1$ vamos ter que $u_{23}^1 u_{32}^2 u_{23}^3 = u_{23}^3 u_{32}^2 u_{23}^1$ e para u_{32}^2 e u_{41}^3 o produto e_{32} e e_{41} é 0.

3. Finalmente, provaremos que $x_1^{(t,1)} x_2^{(-t,1)} x_3^{(t,1)} + x_3^{(t,1)} x_2^{(-t,1)} x_1^{(t,1)}$ se anula em $L_{p,q,r,s}$. Claro que se $t = 0$, este polinômio é uma identidade. Como acima, basta substituir $x_1^{(t,1)}, x_2^{(-t,1)}, x_3^{(t,1)}$ por $\delta_{1,\varepsilon(i)+\varepsilon(i+t)}u_{i,i+t}^1 e_{i,i+t}, \delta_{1,\varepsilon(i+t)+\varepsilon(i)}u_{i+t,i}^2 e_{i+t,i}$ e $\delta_{1,\varepsilon(i)+\varepsilon(i+t)}u_{i,i+t}^3 e_{i,i+t}$, e obteremos a igualdade $u_{i,i+t}^1 e_{i,i+t} u_{i+t,i}^2 e_{i+t,i} u_{i,i+t}^3 e_{i,i+t} = -u_{i,i+t}^3 e_{i,i+t} u_{i+t,i}^2 e_{i+t,i} u_{i,i+t}^1 e_{i,i+t}$.

Desta forma obtemos a inclusão $J \subseteq T_G(L_{p,q,r,s})$.

□

Lema 3.2.8. *Sejam $M(x_1, \ldots, x_d)$ e $N(x_1, \ldots, x_d)$ dois monômios graduados em $K\langle X\rangle$. Suponha que para alguma (i,j)-ésima entrada, $M(B_1, \ldots, B_d)_{ij} = \pm N(B_1, \ldots, B_d)_{ij} \neq 0$. Então $M \equiv \pm N (mod J)$.*

Demonstração. De acordo com o Lema 3.2.5 os monômios M e N tem o mesmo multigrau. Suponha que x_1 é a variável que aparece no extremo esquerdo em M, isto é, $M(x_1, \ldots, x_d) =$

x_1m'. Novamente, pelo Lema 3.2.5, podemos escrever $N(x_1,\ldots,x_d) = n_1x_1n_2$, onde $\partial(n_1) = (0,0)$. Seja l o comprimento (grau total) de M e de N. Faremos a prova por um argumento de indução sobre l.

A base da indução é $l = 1$, o que é óbvio. Suponhamos então $l > 1$. Se n_1 é monômio vazio, então aplicaremos a indução para m' e n_2. Portanto, assumiremos que n_1 não é o monômio vazio. Consideraremos os três casos seguites:

Caso 1. Seja $M(x_1,\ldots,x_d) = x_1m_1x_1m_2$ com $\partial(x_1m_1) = (0,0)$ então $N(x_1,\ldots,x_d) = n_1x_1n_2x_1n_3$ e pelo Lema 3.2.5, $\partial(n_1x_1n_2) = (0,0)$ o que implica que $\partial(x_1n_2) = (0,0)$. Dessa forma aplicando os geradores de J vamos ter que

$$N(x_1,\ldots,x_d) = n_1x_1n_2x_1n_3 \equiv x_1n_2n_1x_1n_3(modJ).$$

Pondo $n' = n_2n_1x_1n_3$ temos que $N(x_1,\ldots,x_d) \equiv x_1n'(modJ)$ e daí, aplicamos o argumento de indução para o comprimento de m' e n'.

Caso 2. Seja $M(x_1,\ldots,x_d) = x_1m_1x_ax_bm_2$, então $N(x_1,\ldots,x_d) = n_1x_an_2x_1n_3x_bn_4$ com $\partial(n_1x_an_2) = (0,0)$ e pelo Lema 3.2.5, olhando para $x_1m_1x_a$ e $n_1x_an_2x_1n_3$ e ainda para seus submonômios x_1m_1 e n_1, segue que $\partial(n_1x_a) = \partial(x_1m_1x_a) = \partial(n_1x_an_2x_1n_3)$.

Se n_2 é monômio vazio, então $\partial(n_1x_a) = \partial(x_1n_3) = (0,0)$. Se por outro lado n_2 não é monômio vazio então como $\partial(n_1x_an_2) = (0,0)$ segue que $\partial(n_1x_a) = \partial(x_1n_3) = (t,c)$ e $\partial(n_2) = (-t,c)$. Em ambos os casos, temos que $N = n_1x_an_2x_1n_3x_bn_4 \equiv \pm x_1n_3n_2n_1x_ax_bn_4(modJ)$ e terminamos este caso da mesma maneira como no Caso 1.

Caso 3. Suponhamos que nenhum dos casos anteriores sejam válidos. Suponha que N comece com a letra x_j e escreva $M(x_1,\ldots,x_d) = x_1m_1m_2x_jm_3$ com $\partial(x_1m_1m_2) = (0,0)$. Assumiremos que $N(x_1,\ldots,x_d) = x_jn_1x_1n_2$, assim temos $\partial(x_jn_1) = (0,0)$, pelo Lema 3.2.5.

Mas $\partial(M) = \partial(x_jm_3) = \partial(x_1n_2) = \partial(N)$. Dessa forma, segue de $\partial(M) = \partial(x_1n_2)$ que M possui um submonômio inicial de mesmo G-grau que M e x_j não deve aparecer em tal submonômio. Portanto, podemos escolher m_1 e m_2 de tal forma que $\partial(x_1m_1) = \partial(x_1n_2) = \partial(M)$ e temos $\partial(m_2x_jm_3) = \partial(x_jn_1) = (0,0)$.

Como no Caso 2, dividiremos este caso em dois subcasos. Se m_2 é o monômio vazio então $\partial(x_1m_1) = \partial(x_jm_3) = (0,0)$. Se por outro lado, m_2 não é monômio vazio, obtemos $\partial(x_1m_1) = \partial(x_jm_3) = (t,c)$ e $\partial(m_2) = (-t,c)$. E mais uma vez, em qualquer um dos casos concluimos que $M = x_1m_1m_2x_jm_3 \equiv \pm x_jm_3x_1m_1m_2(modJ)$ e concluimos o lema pelo argumento de indução, desta vez começando por n. □

Proposição 3.2.9. *O ideal de identidades G-graduadas de $L_{p,q,r,s}$ coincide com o ideal J, ou seja, $T_G(L_{p,q,r,s}) = J$.*

Demonstração. A inclusão $T_G(L_{p,q,r,s}) \supseteq J$ é resultado do Lema 3.2.7.

Vamos mostrar agora que $T_G(L_{p,q,r,s}) \subseteq J$. Suponhamos, por contradição, que o polinômio multihomogêneo $f \in T_G(L_{p,q,r,s})$ mas $f \notin J$. Consideremos k o menor inteiro positivo tal que f é escrito como combinação linear de k monômios módulo J, isto é,

$$f(x_1, \ldots, x_d) \equiv \sum_{i=1}^{k} a_i m_i (modJ),\ a_i \in K;\ a_i \neq 0.$$

Como $f \notin J$, temos que $k \geq 1$. Pelo Lema 3.2.6, podemos supor, a menos da ordenação dos monômios $m_1, \ldots, m_k$, que $m_1(B_1, \ldots, B_d) \neq 0$. Dessa forma, segue que

$$a_1 m_1(B_1, \ldots, B_d) = -\sum_{i=2}^{k} a_i m_i(B_1, \ldots, B_d).$$

Como todos monômios são de mesmo multigrau, para algum h, com $2 \leq h \leq k$, temos para alguns i e j

$$m_1(B_1, \ldots, B_d)_{ij} = \pm m_h(B_1, \ldots, B_d)_{ij} \neq 0.$$

Pelo Lema 3.2.8, $m_1(x_1, \ldots, x_d) \equiv \pm m_h(x_1, \ldots, x_d)(modJ)$. Portanto, f pode ser representado como

$$f \equiv \sum_{i=1}^{k} a_i m_i (modJ) \equiv (a_1 \pm a_h) m_1 + \sum_{i=2}^{h-1} a_i m_i + \sum_{i=h+1}^{k} a_i m_i (modJ).$$

Mas isso é uma contradição com a minimalidade de k. Portanto, $f \in J$ e $T_G(L_{p,q,r,s}) \subseteq J$. □

Segue desta proposição e da Proposição 3.1.3 o seguinte teorema.

Teorema 3.2.10. *Seja K um corpo infinito, $charK \neq 2$. Então o ideal de identidades G-graduadas de $M_{p,q,r,s}(E)$ coincide com J.*

Demonstração. Pela proposição anterior, $J = T_G(L_{p,q,r,s})$ e pela Proposição 3.1.3, $L_{p,q,r,s} \cong K\langle X\rangle / T_G(M_{p,q,r,s}(E))$. Dessa forma,

$$J = T_G(L_{p,q,r,s}) = T_G(K\langle X\rangle / T_G(M_{p,q,r,s}(E)) = T_G(M_{p,q,r,s}(E))).$$

□

Corolário 3.2.11. $T_G(M_{p,q,r,s}(E)) \subseteq T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$

Demonstração. Pelo teorema anterior, é suficiente mostrar que os geradores de J, (3.2), estão em $T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$.

Pelo Lema 3.2.4, os monômios esparsos são identidades para $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$.

Agora mostraremos que $[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}]$ é identidade para $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$. Como este polinômio é multilinear, iremos substituir somente por elementos da forma $ae_{ij} \otimes be_{vw}$, onde ae_{ij} é um elemento homogêneo de $M_{p,q}(E)$ e $be_{vw} \in M_{r,s}(E)$ também é um elemento homogêneo. Sejam $c_1 = a_1 e_{i_1 j_1} \otimes b_1 e_{v_1 w_1}$, $c_2 = a_2 e_{i_2 j_2} \otimes b_2 e_{v_2 w_2}$, ambos de G-grau $(0,0)$.

Segue que $\alpha(c_h) = 0$ se, e somente se, $i_h = j_h$ e $v_h = w_h$, $h = 1, 2$. Então fazendo $i_1 = i, i_2 = j, v_1 = v$ e $v_2 = w$, teremos

$$c_1 c_2 - c_2 c_1 =$$

$$(a_1 e_{ii} \otimes b_1 e_{vv})(a_2 e_{jj} \otimes b_2 e_{ww}) - (a_2 e_{jj} \otimes b_2 e_{ww})(a_1 e_{ii} \otimes b_1 e_{vv}) =$$

$$(a_1 a_2 e_{ii} e_{jj} \otimes b_1 b_2 e_{vv} e_{ww}) - (a_2 a_1 e_{jj} e_{ii} \otimes b_2 b_1 e_{ww} e_{vv}).$$

Como o G-grau de c_1 e c_2 é $(0,0)$ isso implica que $a_1a_2 = a_2a_1$ e $b_1b_2 = b_2b_1$. Se $i \neq j$ ou $v \neq w$ ambos os produtos são nulos. Daí $[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}]$ se anula em $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$.

Agora, sejam $c_h = a_h e_{i_h j_h} \otimes b_h e_{v_h w_h}$, com $h = 1,2,3$ e $\alpha(c_1) = \alpha(c_3) = -\alpha(c_2) = t$.

Note que se, ou $c_1c_2 = 0$ ou $\partial_G(c_1c_2) = (0,1)$, então $c_1c_2c_3 = 0$. Se $c_1c_2c_3 = c_3c_2c_1 = 0$, concluimos. Se, $c_1c_2c_3 \neq 0$, então $c_1c_2 \neq 0$ e $\partial_G(c_1c_2) = (0,0)$ e

$$c_1c_2c_3 = (a_1e_{i_1j_1} \otimes b_1e_{v_1w_1})(a_2e_{i_2j_2} \otimes b_2e_{v_2w_2})(a_3e_{i_3j_3} \otimes b_3e_{v_3w_3}) =$$
$$a_1a_2a_3e_{i_1j_1}e_{i_2j_2}e_{i_3j_3} \otimes b_1b_2b_3e_{v_1w_1}e_{v_2w_2}e_{v_3w_3},$$

então $j_1 = i_2$, $j_2 = i_3$ e $w_1 = v_2$, $w_2 = v_3$ e $n(i_h - 1) + v_h = n(j_1 - 1) + w_h + t, h = 1,2,3$.

Dessa forma, também $c_3c_2c_1 \neq 0$ e

$$c_3c_2c_1 = (a_3e_{i_3j_3} \otimes b_3e_{v_3w_3})(a_2e_{i_2j_2} \otimes b_2e_{v_2w_2})(a_1e_{i_1j_1} \otimes b_1e_{v_1w_1}) =$$
$$a_3a_2a_1e_{i_3j_3}e_{i_2j_2}e_{i_1j_1} \otimes b_1b_2b_3e_{v_3w_3}e_{v_2w_2}e_{v_1w_1},$$

então $j_3 = i_2$, $j_2 = i_1$ e $w_3 = v_2$, $w_2 = v_1$.

Notamos que, neste caso, $j_3 = i_2 = j_1$, $i_1 = j_2 = i_3$, $w_1 = w_3 = v_2$, $v_1 = w_2 = v_3$. Vamos fazer $i_1 = i$, $j_1 = j$, $v_1 = v$, $w_1 = w$ e obtemos $c_1c_2c_3 = a_1a_2a_3e_{ij} \otimes b_1b_2b_3e_{vw}$ e $c_3c_2c_1 = a_3a_2a_1e_{ij} \otimes b_3b_2b_1e_{vw}$.

Como $a_1, a_2, a_3 \in E_{\gamma_{p,q}(i)+\gamma_{p,q}(j)}$, segue que $a_1a_2a_3, a_3a_2a_1 \in E_{\gamma_{p,q}(i)+\gamma_{p,q}(j)}$. Da mesma forma como $b_1, b_2, b_3 \in E_{\gamma_{r,s}(v)+\gamma_{r,s}(w)}$, temos $b_1b_2b_3, b_3b_2b_1 \in E_{\gamma_{r,s}(v)+\gamma_{r,s}(w)}$.

Se $E_{\gamma_{p,q}(i)+\gamma_{p,q}(j)} = E_{\gamma_{r,s}(v)+\gamma_{r,s}(w)}$, então $c_1c_2c_3 = c_3c_2c_1$. Isso implica que $x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1$ é identidade graduada para $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$.

Se $E_{\gamma_{p,q}(i)+\gamma_{p,q}(j)} \neq E_{\gamma_{r,s}(v)+\gamma_{r,s}(w)}$, podemos supor que $E_{\gamma_{p,q}(i)+\gamma_{p,q}(j)} = E_0$, $E_{\gamma_{r,s}(v)+\gamma_{r,s}(w)} = E_1$, então $a_1a_2a_3 = a_3a_2a_1$ e $b_1b_2b_3 = -b_3b_2b_1$, logo $c_1c_2c_3 = -c_3c_2c_1$. Disso, segue que implica que $x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1$ é identidade graduada para $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$.

E portanto, concluimos a prova do corolário. □

Corolário 3.2.12. $T(M_{pr+qs,ps+qr}(E)) \subseteq T(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$.

Demonstração. Pelo Corolário 3.2.11,

$$T_G(M_{p,q,r,s}(E)) \subseteq T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$$

Como $M_{p,q,r,s}(E)$, com a G-graduado, é isomorfa à $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ (veja **[5]**), temos

$$T_G(M_{p,q,r,s}(E)) = T_G(M_{pr+qs,ps+qr}(E)),$$

e obtemos $T_G(M_{pr+qs,ps+qr}(E)) \subseteq T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$. Pelo Lema 2.3.2 segue que

$$T(M_{pr+qs,ps+qr}(E)) \subseteq T(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)).$$

□

Em **[1]** foi provado que em $charK > 2$ a igualdade dos dois T-ideais acima falha. Quando $(r,s) = (1,1)$, foi construída uma identidade polinomial ordinária para $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ mas que não é satisfeita por $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$.

3.3 Matrizes sobre Álgebras Supercomutativas e suas Graduações

Aqui consideraremos graduações com grupos do tipo $G = \mathbb{Z}_2^n$ para um inteiro positivo n adequado. Em tal caso, seja A uma álgebra G-graduada. Se $a \in A$ é um elemento homogêneo, denotaremos seu G-grau homogêneo por $|a|$. Além disso, se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, denotaremos por

$$\langle \alpha, \beta \rangle_n = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n,\ s_\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,\ s_{\alpha,i} = s_\alpha - \alpha_i,$$

onde as operações são em $\mathbb{Z}_2$. Quando o número n for evidente no contexto, denotaremos somente $\langle \alpha, \beta \rangle$ ao invés de $\langle \alpha, \beta \rangle_n$.

Definição 3.3.1. *A álgebra A $\mathbb{Z}_2^n$-graduada é n-supercomutativa se para todos elementos homogêneos $a, b \in A$ temos $ab = (-1)^{\langle |a|,|b| \rangle} ba$.*

Se A é $\mathbb{Z}_2^k$-graduada e B é $\mathbb{Z}_2^l$-graduada, então $A \otimes B$ é $\mathbb{Z}_2^{k+l}$-graduada de uma maneira natural. Sua componente homogênea de grau $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+l})$ é gerada por todos os elementos $a \otimes b$, onde $a \in A$, $b \in B$ são elementos homogêneos, $|a| = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ e $|b| = (\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{k+l})$.

Proposição 3.3.2. *Sejam A álgebra k-supercomutativa e B álgebra l-supercomutativa. Então $A \otimes B$ é uma álgebra $(k + l)$-supercomutativa com respeito à graduação induzida.*

Demonstração. Vamos mostrar que a álgebra $A \otimes B$ satisfaz a identidade $xy - (-1)^{\langle |x|,|y| \rangle} yx$.

Sejam x e y tais que $|x| = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+l})$ e $|y| = (\beta_1, \ldots, \beta_{k+l})$. Tomemos $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$ tais que $|a_1| = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $|a_2| = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$, $|b_1| = (\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{k+l})$ e $|b_2| = (\beta_{k+1}, \ldots, \beta_{k+l})$. Como $|a_i \otimes b_i| = (|a_i|, |b_i|)$ e por

$$\begin{gathered}\langle (|a_1|, |b_1|) \rangle + \langle (|a_2|, |b_2|) \rangle = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_k\beta_k + \alpha_{k+1}\beta_{k+1} + \cdots + \alpha_{k+1}\beta_{k+l} = \\ \langle (|a_1|, |b_1|), (|a_2|, |b_2|) \rangle = \langle |a_1 \otimes b_1|, |a_2 \otimes b_2| \rangle\end{gathered}$$

segue que

$$\begin{gathered}(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1a_2 \otimes b_1b_2) = ((-1)^{\langle |a_1|,|a_2| \rangle} a_2a_1) \otimes ((-1)^{\langle |b_1|,|b_2| \rangle} b_2b_1) = \\ (-1)^{\langle |a_1|,|a_2| \rangle + \langle |b_1|,|b_2| \rangle} = (-1)^{\langle |a_1 \otimes b_1|,|a_2 \otimes b_2| \rangle} (a_2 \otimes b_2)(a_1 \otimes b_1).\end{gathered}$$

Portanto $A \otimes B$ é uma álgebra $(k + l)$-supercomutativa. $\square$

Seja $n \in \mathbb{N}$, denotaremos

$$c_n(x, y) = xy - (-1)^{\langle |x|,|y| \rangle} yx, \tag{3.3}$$

onde x e y são variáveis na álgebra livre $\mathbb{Z}_2^n$-graduada $K\langle X \rangle$, e $|x|$ e $|y|$ são seus graus homogêneos, respectivamente. Claro que, uma álgebra A $\mathbb{Z}_2^n$-graduada é n-supercomutativa se, e somente se, os polinômios $c_n(x, y)$ são identidades polinomiais graduadas para A para todo $x, y \in X$ e para todos os graus de x, y. Denotaremos por J_n o T-ideal $\mathbb{Z}_2^n$-graduado de $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios $c_n(x,y)$, quando $|x|$ e $|y|$ percorrem independentemente sobre $\mathbb{Z}_2^n$.

Recorde que os T-ideais (graduados) de $K\langle X\rangle$ são gerados pelos seus elementos multihomogêneos, uma vez que K é um corpo infinito. Então, a partir de agora, trabalharemos com polinômios multihomôgeneos (graduados).

Lema 3.3.3. *Seja $f = f(x_1,\dots,x_k)$ um polinômio $\mathbb{Z}_2^n$-graduado multihomogêneo de multigrau $(t_1,\dots,t_k)$. Então, para algum $\lambda \in K$,*

$$f(x_1,\dots,x_k) \equiv \lambda x_1^{t_1}\cdots x_k^{t_k}(mod J_n).$$

Além disso, se $s_{|x_i|} = 1$ e $t_i \geq 2$, para algum $i, i = 1,\dots,k$, então $f \in J_n$.

Demonstração. Como $f(x_1,\dots,x_k)$ é multihomogêneo de multigrau $(t_1,\dots,t_k)$ podemos escrever f como combinação linear de monômios de multigrau $(t_1,\dots,t_k)$, isto é $f(x_1,\dots,x_k) = \sum_{j=1}^{l}\lambda_j m_j(x_1,\dots,x_k)$. Fazendo $mod J_n$, temos que as variáveis de m_j comutam e anticomutam, para todo $j = 1,\dots,l$, logo $f(x_1,\dots,x_k) \equiv \lambda x_1^{t_1}\cdots x_k^{t_k}(mod J_n)$.

Agora, suponha sem perda de generalidade que, $|x_1| = \alpha$ com pois $\langle |x_1|,|x_1|\rangle = s_{|x_1|} = 1$ e $t_1 \geq 2$. Então, módulo J_n

$$x_1^2x_1^{t_1-2}x_2^{t_2}\cdots x_k^{t_k} = (-1)^{\langle |x_1|,|x_1|\rangle}x_1^2x_1^{t_1-2}x_2^{t_2}\cdots x_k^{t_k} = -x_1^2x_1^{t_1-2}x_2^{t_2}\cdots x_k^{t_k}.$$

Isso implica que

$$x_1^{t_1}\cdots x_k^{t_k} \equiv -x_1^{t_1}\cdots x_k^{t_k}(mod J_n)$$

e por $char K \neq 2$, $x_1^{t_1}\cdots x_k^{t_k} \equiv 0(mod J_n)$. Mas pela primeira parte da prova, segue que $f \equiv 0(mod J_n)$. Logo $f \in J_n$. □

A álgebra de Grassmann E é 1-supercomutativa. Pela Proposição 3.3.2 a álgebra $E^{\otimes n}$ é n-supercomutativa. Neste caso a graduação é dada definindo $E^{\otimes n}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = span_K\langle a_1\otimes\cdots\otimes a_n | \partial_{\mathbb{Z}_2}(a_j) = \alpha_j\rangle$.

As graduações de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ e $M_{2^n}(E)$

Definiremos os grupos de matrizes $G_n \leq M_{2^n}(K)$ (ver [13]).

Dado $n \geq 1$, construiremos, por indução, os grupos

$$G_n = \langle A_{1n},\dots,A_{nn},B_{1n},\dots,B_{nn}\rangle \subseteq M_{2^n}(K)$$

(gerado por $2n$ elementos) como segue:

$$(G_0 = \{\pm 1\} \subseteq K)$$

$$G_1 = \langle A_{11}, B_{11} \rangle, \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $A_{11}B_{11} = -B_{11}A_{11}$. Também se $C_1 = A_{11}B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, então $A_{11}C_1 = -C_1A_{11}$ e $B_{11}C_1 = -C_1B_{11}$.

Assuma agora que $G_n = \langle A_{1n}, \ldots, A_{nn}, B_{1n}, \ldots, B_{nn} \rangle \subseteq M_{2^n}(K)$ é dado e construiremos

$$G_{n+1} = \langle A_{1,n+1}, \ldots, A_{n+1,n+1}, B_{1,n+1}, \ldots, B_{n+1,n+1} \rangle \text{ como segue}$$

$$A_{i,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{i,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & B_{in} \\ B_{in} & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Denote por $C_n = A_{1n} \cdots A_{nn} B_{1n} \cdots B_{nn}$. Assim

$$A_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix},$$

onde $I_{2^n} \in M_{2^n}(K)$ é a matriz identidade.

Então o grupo G_{n+1} é gerado pelas matrizes $A_{1,n+1}, \ldots, A_{n+1,n+1}$ e $B_{1,n+1}, \ldots, B_{n+1,n+1} \in M_{2^{n+1}}(K)$.

Lema 3.3.4. *As seguintes relações são válidas em G_n:*

(i) $A_{in}^2 = I_{2^n}$, $B_{in}^2 = -I_{2^n}$, $C_n^2 = I_{2^n}$ para todo $1 \leq i \leq n$;

(ii) $A_{in}C_n = -C_nA_{in}$, $B_{in}C_n = -C_nB_{in}$, para todo $1 \leq i \leq n$;

(iii) $A_{in}A_{jn} = -A_{jn}A_{in}$, $B_{in}B_{jn} = -B_{jn}B_{in}$, para todo $1 \leq i \neq j \leq n$;

(iv) $A_{in}B_{jn} = -B_{jn}A_{in}$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.

(v) $C_n = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} I_{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & -I_{2^{n-1}} \end{pmatrix}$.

Demonstração. (i) Quando $n = 1$, então

$$A_{11}^2 = A_{11}A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Suponha válido para $n > 1$, isto é $A_{in}^2 = I_{2^n}{}^{(1)}$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e veremos que para $n + 1$ também é válido:

$$A_{i,n+1}^2 = A_{i,n+1}A_{i,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{in}^2 & 0 \\ 0 & A_{in} \end{pmatrix} =^{(1)} \begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & I_{2^n} \end{pmatrix} = I_{2^{n+1}},$$

logo $A_{i,n+1}^2 = I_{2^{n+1}}$ e a afirmação vale para $n+1$.

Agora mostraremos que $B_{in}^2 = -I_{2^n}$, para todo $1 \leq i \leq n$. Para $n = 1$, temos

$$B_{11}^2 = B_{11}B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

Suponhamos válido para $n > 1$, isto é, $B_{in}^2 = -I_{2^n}{}^{(2)}$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e veremos que para $n+1$ também vale:

$$B_{i,n+1}^2 = B_{i,n+1}B_{i,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & B_{in} \\ B_{in} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_{in} \\ B_{in} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} B_{in}^2 & 0 \\ 0 & B_{in}^2 \end{pmatrix} =^{(2)} \begin{pmatrix} -I_{2^n} & 0 \\ 0 & -I_{2^n} \end{pmatrix} = -I_{2^{n+1}}.$$

Portanto, $B_{i,n+1}^2 = -I_{2^{n+1}}$ e a afirmação vale para $n+1$.

$$\text{Como } C_n = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} I_{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & -I_{2^{n-1}} \end{pmatrix}, \text{ segue que } C_n^2 = \begin{pmatrix} I_{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & I_{2^{n-1}} \end{pmatrix} = I_{2^n}.$$

(ii)

$$A_{i,n+1}C_{n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & -I_{2^n} \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -A_{in}I_{2^n} \\ A_{in}I_{2^n} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$-(-1)^n \begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & -I_{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix} = -C_{n+1}A_{i,n+1},\ i = 1, \ldots, n.$$

$$B_{i,n+1}C_{n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & B_{in} \\ B_{in} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & -I_{2^n} \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -B_{in}I_{2^n} \\ B_{in}I_{2^n} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$-(-1)^n \begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & -I_{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_{in} \\ B_{in} & 0 \end{pmatrix} = -C_{n+1}B_{i,n+1},\ i = 1, \ldots, n.$$

(iii) Para $n = 1$ não há o que fazer. Para $n = 2$, temos

$$A_{12}A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & A_{11} \\ A_{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A_{11} \\ A_{11} & 0 \end{pmatrix} = -A_{22}A_{12}.$$

Suponhamos válido para $n > 2$, isto é, para todo $1 \leq i \neq j \leq n$, $A_{in}A_{jn} = -A_{jn}A_{in}{}^{(3)}$ e veremos que para $n+1$ também vale:

$$A_{i,n+1}A_{j,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A_{jn} \\ A_{jn} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{in}A_{jn} & 0 \\ 0 & A_{in}A_{jn} \end{pmatrix} =^{(3)}$$

$$-\begin{pmatrix} A_{jn}A_{in} & 0 \\ 0 & A_{jn}A_{in} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & A_{jn} \\ A_{jn} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix} = -A_{j,n+1}A_{i,n+1}.$$

Portanto, para $n+1$, $A_{i,n+1}A_{j,n+1} = -A_{j,n+1}A_{i,n+1}$, para todo $1 \leq i \neq j \leq n$, $i \neq j$.

Provaremos agora que $B_{in}B_{jn} = -B_{jn}B_{in}$, para todo $1 \leq i \neq j \leq n$.

Para $n = 1$, não há o que fazer. Para $n = 2$, temos que

$$B_{12}B_{22} = \begin{pmatrix} 0 & B_{11} \\ B_{11} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B_{11} \\ B_{11} & 0 \end{pmatrix} = -B_{22}B_{12}.$$

Suponhamos que para $n > 2$ vale, isto é, $B_{in}B_{jn} = -B_{jn}B_{in}{}^{(4)}$, para todos $1 \leq i \neq j \leq n$, e veremos que para $n+1$ também vale:

$$B_{i,n+1}B_{j,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & B_{in} \\ B_{in} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B_{jn} \\ B_{jn} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{in}B_{jn} & 0 \\ 0 & B_{in}B_{jn} \end{pmatrix} =^{(4)}$$

$$-\begin{pmatrix} B_{jn}B_{in} & 0 \\ 0 & B_{jn}B_{in} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & B_{jn} \\ B_{jn} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B_{in} \\ B_{in} & 0 \end{pmatrix} = -B_{j,n+1}B_{i,n+1}.$$

Portanto, para $n+1$, $B_{i,n+1}B_{j,n+1} = -B_{j,n+1}B_{i,n+1}$, para todo $1 \leq i \neq j \leq n$.

(iv) Para $n = 1$, temos

$$A_{11}B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -B_{11}A_{11}.$$

Suponhamos que para $n > 1$ seja válido, isto é, $A_{in}B_{jn} = -B_{jn}A_{in}{}^{(5)}$, para todo $1 \leq i, j \leq n-1$, e mostraremos que para $n+1$ também vale:

$$A_{i,n+1}B_{j,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B_{jn} \\ B_{jn} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{in}B_{jn} & 0 \\ 0 & A_{in}B_{jn} \end{pmatrix} =^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} -B_{jn}A_{in} & 0 \\ 0 & -B_{jn}A_{in} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} B_{jn}A_{in} & 0 \\ 0 & B_{jn}A_{in} \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & B_{jn} \\ B_{jn} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix} = -B_{j,n+1}A_{i,n+1}.$$

Portanto, para $n+1$, $A_{i,n+1}B_{j,n+1} = -B_{j,n+1}A_{i,n+1}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Como as matrizes $A_{n+1,n+1}$ e $B_{n+1,n+1}$ possuem uma estrutura diferente, mostraremos que para $i = n+1$, as relações do lema também são válidas:

(i)

$$A^2_{n+1,n+1} = A_{n+1,n+1}A_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C_n^2 & 0 \\ 0 & C_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & I_{2^n} \end{pmatrix} = I_{2^{n+1}}.$$

$$B^2_{n+1,n+1} = B_{n+1,n+1}B_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -I_{2^n}^2 & 0 \\ 0 & -I_{2^n}^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & I_{2^n} \end{pmatrix} = -I_{2^{n+1}}.$$

(ii)

$$A_{n+1,n+1}C_{n+1} = (-1)^n\begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & -I_{2^n} \end{pmatrix} = (-1)^n\begin{pmatrix} 0 & -C_nI_{2^n} \\ C_nI_{2^n} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$-(-1)^n\begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & -I_{2^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix} = -C_{n+1}A_{n+1,n+1}.$$

$$B_{n+1,n+1}C_{n+1} = (-1)^n\begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & -I_{2^n} \end{pmatrix} = (-1)^n\begin{pmatrix} 0 & I_{2^n}^2 \\ I_{2^n}^2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$-(-1)^n\begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & -I_{2^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix} = -C_{n+1}B_{n+1,n+1}.$$

(iii) Mostraremos que, quando $i \neq n+1$, $A_{i,n+1}A_{n+1,n+1} = -A_{n+1,n+1}A_{i,n+1}$.

$$A_{i,n+1}A_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{in}C_n & 0 \\ 0 & A_{in}C_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -C_nA_{in} & 0 \\ 0 & -C_nA_{in} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix} = -A_{n+1,n+1}A_{i,n+1}.$$

Agora mostraremos que, quando $i \neq n+1$, $B_{i,n+1}B_{n+1,n+1} = -B_{n+1,n+1}B_{i,n+1}$.

$$B_{i,n+1}B_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & B_{in} \\ B_{in} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{in}I_{2^n} & 0 \\ 0 & -B_{in}I_{2^n} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I_{2^n}B_{in} & 0 \\ 0 & -I_{2^n}B_{in} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_{in} \\ B_{in} & 0 \end{pmatrix} = -B_{n+1,n+1}B_{i,n+1}.$$

(iv) Agora mostraremos que

$A_{i,n+1}B_{n+1,n+1} = -B_{n+1,n+1}A_{i,n+1}$, para todo $i = 1, \ldots, n$,

$A_{n+1,n+1}B_{i,n+1} = -B_{i,n+1}A_{n+1,n+1}$, para todo $i = 1, \ldots, n$,

$A_{n+1,n+1}B_{n+1,n+1} = -B_{n+1,n+1}A_{n+1,n+1}$:

$$A_{i,n+1}B_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{in}I_{2^n} & 0 \\ 0 & -A_{in}I_{2^n} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I_{2^n}A_{in} & 0 \\ 0 & -I_{2^n}A_{in} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_{in} \\ A_{in} & 0 \end{pmatrix} = -B_{n+1,n+1}A_{i,n+1}.$$

$$A_{n+1,n+1}B_{i,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_{in} \\ B_{in} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_nB_{in} & 0 \\ 0 & C_nB_{in} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -C_nB_{in} & 0 \\ 0 & -C_nB_{in} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_{in} \\ B_{in} & 0 \end{pmatrix} = -A_{n+1,n+1}B_{i,n+1}.$$

$$A_{n+1,n+1}B_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_nI_{2^n} & 0 \\ 0 & -C_nI_{2^n} \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix} = -B_{n+1,n+1}A_{n+1,n+1}.$$

Vamos mostrar (v). Para todo $n \geq 1$,

$$C_n = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} I_{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & -I_{2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Para $n = 1$,

$$C_1 = (-1)^{1-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que para $n > 1$, vale o resultado, isto é,

$$C_n = (-1)^{n-1}\begin{pmatrix} I_{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & -I_{2^{n-1}} \end{pmatrix}$$

e vamos mostrar que para $n + 1$ também vale:

$$C_{n+1} = A_{1,n+1}\cdots A_{n+1,n+1}B_{1,n+1}\cdots B_{n+1,n+1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{1n} \\ A_{1n} & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & A_{nn} \\ A_{nn} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B_{1n} \\ B_{1n} & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & B_{nn} \\ B_{nn} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{1n}\cdots A_{nn}C_nB_{1n}\cdots B_{nn}I_{2^n} & 0 \\ 0 & -A_{1n}\cdots A_{nn}C_nB_{1n}\cdots B_{nn}I_{2^n} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1)^n C_nA_{1n}\cdots A_{nn}B_{1n}\cdots B_{nn}I_{2^n} & 0 \\ 0 & -(-1)^n C_nA_{1n}\cdots A_{nn}B_{1n}\cdots B_{nn}I_{2^n} \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^n\begin{pmatrix} C_n^2I_{2^n} & 0 \\ 0 & -C_n^2I_{2^n} \end{pmatrix} = (-1)^n\begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & -I_{2^n} \end{pmatrix}.$$

Portanto, para $n+1$, $C_{n+1} = (-1)^n\begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & -I_{2^n} \end{pmatrix}$.

□

Do Lema 3.3.4 segue que $G_n = \{\pm A_{1n}^{\alpha_1}\cdots A_{nn}^{\alpha_n}B_{1n}^{\alpha_{n+1}}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} \mid (\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n}) \in \mathbb{Z}_2^{2n}\}$ e $|G_n| = 2\cdot 4^n$.

Seja $H_n = \{A_{1n}^{\alpha_1}A_{2n}^{\alpha_2}\cdots A_{nn}^{\alpha_n}B_{1n}^{\alpha_{n+1}}B_{2n}^{\alpha_{n+2}}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} \mid (\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n}) \in \mathbb{Z}_2^{2n}\}$. Denotaremos por $H_{i,n}$ o subconjunto de H_n consistindo de todos os elementos tais que $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j = i \in \mathbb{Z}_2$.

A prova do próximo lema pode ser encontrado em **[13]**.

Lema 3.3.5. *O conjunto H_n é uma base do espaço vetorial $M_{2^n}(K)$, consistindo de matrizes invertíveis. Seus subconjuntos $H_{0,n}$ e $H_{1,n}$ são bases dos subepaços*

$$M_{2^n}(K)_0 = \begin{pmatrix} M_{2^{n-1}}(K) & 0 \\ 0 & M_{2^{n-1}}(K) \end{pmatrix},\ M_{2^n}(K)_1 = \begin{pmatrix} 0 & M_{2^{n-1}}(K) \\ M_{2^{n-1}}(K) & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

Agora definiremos uma $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduação sobre $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$. Assim a componente homogênea $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n})}$ de grau $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n})$ é o subespaço

$$H_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n})} = \{rA_{1n}^{\alpha_1}\cdots A_{nn}^{\alpha_n}B_{1n}^{\alpha_{n+1}}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} \mid r \in E_{(\alpha_1+\cdots+\alpha_{2n})}\}.$$

De acordo com o Lema 3.3.5

$$M_{2^{n-1},2^{n-1}} = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}_2^{2n}} H_\alpha.$$

Exemplo 3.3.6. *Em* $n = 1$, $M_{1,1}(E) = \begin{pmatrix} E_0 & E_1 \\ E_1 & E_0 \end{pmatrix}$

$$H_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \{rA_{11}^{\alpha_1}B_{11}^{\alpha_2} \mid r \in E_{\alpha_1+\alpha_2}\}$$

$$H_{(0,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} \mid r_0 \in E_0 \right\}, H_{(1,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_1 \end{pmatrix} \mid r_1 \in E_0 \right\},$$

$$H_{(0,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -r_2 \\ r_2 & 0 \end{pmatrix} \mid r_2 \in E_1 \right\}, H_{(1,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & r_3 \\ r_3 & 0 \end{pmatrix} \mid r_3 \in E_1 \right\}.$$

Enquanto que pelo Lema 3.3.4, obtemos $H_\alpha H_{\alpha'} \subseteq H_{\alpha+\alpha'}$ para todos $\alpha,\alpha' \in \mathbb{Z}_2^{2n}$. De fato, pelas propriedades do Lema 3.3.4 temos que dados $rA_{1n}^{\alpha_1}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} \in H_\alpha$, $r'A_{1n}^{\alpha'_1}\cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}} \in H_{\alpha'}$, com $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n}), \alpha' = (\alpha'_1,\ldots,\alpha'_{2n}) \in \mathbb{Z}_2^{2n}$, $r \in E_{s_\alpha}$ e $r' \in E_{s_{\alpha'}}$

$$(rA_{1n}^{\alpha_1}\cdots A_{nn}^{\alpha_n}B_{11}^{\alpha_{n+1}}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}})(r'A_{1n}^{\alpha'_1}\cdots A_{nn}^{\alpha'_n}B_{11}^{\alpha'_{n+1}}\cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}}) =$$

$$\pm rr'A_{1n}^{\alpha_1+\alpha'_1}\cdots A_{nn}^{\alpha_n+\alpha'_n}B_{1n}^{\alpha_{n+1}+\alpha'_{n+1}}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}+\alpha'_{2n}} \in H_{(\alpha_1+\alpha'_1,\ldots,\alpha_{2n}+\alpha'_{2n})}.$$

Lema 3.3.7. *A álgebra graduada* $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ *é* $2n$*-supercomutativa.*

Demonstração. Sejam M, N elementos homogêneos de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ de $\mathbb{Z}_2^{2n}$-grau α e α', respectivamente. Então $M = rA_{1n}^{\alpha_1}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}}$, $N = r'A_{1n}^{\alpha'_1}\cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}}$ onde $r \in E_{s_\alpha}$ e $r' \in E_{s_{\alpha'}}$, com $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n})$, $\alpha' = (\alpha'_1,\ldots,\alpha'_{2n})$. Fazendo os cálculos, segue que

$$\begin{aligned}
MN &= rr'A_{1n}^{\alpha_1}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}}A_{1n}^{\alpha'_1}\cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}} \\
&= (-1)^{s_{\alpha,1}\alpha'_1}rr'A_{1n}^{\alpha'_1}A_{1n}^{\alpha_1}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}}A_{2n}^{\alpha'_2}\cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}} \\
&= (-1)^{s_{\alpha,1}\alpha'_1+\cdots+s_{\alpha,2n}\alpha'_{2n}}rr'A_{1n}^{\alpha'_1}\cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}}A_{1n}^{\alpha_1}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} \\
&= (-1)^{s_{\alpha,1}\alpha'_1+\cdots+s_{\alpha,2n}\alpha'_{2n}+s_\alpha s_{\alpha'}}r'rA_{1n}^{\alpha'_1}\cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}}A_{1n}^{\alpha_1}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}}
\end{aligned}$$

que é igual à $(-1)^{\langle\alpha,\alpha'\rangle}NM$. □

Para denifir uma $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-graduação sobre $M_{2^n}(E)$ precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.3.8. *Seja $r \in E$ um elemento $\mathbb{Z}_2$-homogêneo, e seja $M \in H_n$. Então o elemento $rM \in M_{2^n}(E)$ pode ser escrito unicamente como $r'A_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_2 n} C_n^{\alpha_{2n+1}}$ onde r' é um elemento $\mathbb{Z}_2$-homogêneo de E e $\partial_{\mathbb{Z}_2}(r) = \partial_{\mathbb{Z}_2}(r') = s_\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{2n+1}$.*

Demonstração. Por hipótese, $r \in E$ e $M \in H_n$, então $rM = rA_{1n}^{\alpha'_1} \cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}}$, $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{2n}) \in \mathbb{Z}_2^{2n}$ e esta expressão para rM é única.

Se $\partial_{\mathbb{Z}_2}(r) = s_{\alpha'}$, fazemos $\alpha_k = \alpha'_k$ se $k \leq 2n$, $\alpha_{2n+1} = 0$ e $r' = r$. Se $\partial_{\mathbb{Z}_2}(r) \neq s_{\alpha'}$ pomos $\alpha_{2n+1} = 1$ e $\alpha_k = \alpha'_k + 1$ se $k \leq 2n$. Dessa forma, por $C_n = A_{1n} \cdots B_{nn}$, segue que $A_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} C_n^{\alpha_{2n+1}} = A_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} C_n = A_{1n}^{\alpha'_1+1} \cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}+1} A_{1n} \cdots B_{nn} = \pm A_{1n}^{\alpha'_1} \cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}} = \pm M$, uma vez que A_{in}, B_{jn} e C_n anticomutam. Assim, $\pm rA_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} C_n^{\alpha_{2n+1}} = rM$, então pomos $r' = \pm r$, e concluimos.

Agora assuma $r_1 A_{1n}^{\beta_1} \cdots B_{nn}^{\beta_{2n}} C_n^{\beta_{2n+1}} = rM = r_2 A_{1n}^{\gamma_1} \cdots B_{nn}^{\gamma_{2n}} C_n^{\gamma_{2n+1}}$, onde $s_\beta = \partial_{\mathbb{Z}_2}(r_1) = \partial_{\mathbb{Z}_2}(r) = \partial_{\mathbb{Z}_2}(r_2) = s_\gamma$. Então, como acima, temos $\beta_k + \beta_{2n+1} = \alpha'_k = \gamma_k + \gamma_{2n+1}$ para todo $k = 1, \ldots, 2n$, então $s_\beta + (2n-1)\beta_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} \beta_i + (2n-1)\beta_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} \gamma_i + (2n-1)\gamma_{2n+1} = s_\gamma + (2n-1)\gamma_{2n+1}$ e como $s_\beta = s_\gamma$, segue que $(2n-1)\beta_{2n+1} = -\beta_{2n+1} = \beta_{2n+1} = \gamma_{2n+1} = -\gamma_{2n+1} = (2n-1)\gamma_{2n+1}$, e portanto $\beta_k = \gamma_k$, para todo k. Logo $r_1 = r_2$ e assim provamos a unicidade. $\square$

Corolário 3.3.9. *A álgebra $M_{2^n}(E)$ é $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-graduada. Sua componente homogênea de grau $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+1})$ é o subespaço*

$$W_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n+1})} = \{rA_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{2n} C_n^{2n+1} \mid r \in E_{(\alpha_1+\cdots+\alpha_{2n+1})}\}.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.3.8, segue que qualquer elemento homogêneo de $M_{2^n}(E)$ escreve-se unicamente como $rA_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} C_n^{\alpha_{2n+1}}$. Assim,

$$M_{2^n}(E) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_2^{2n+1}} W_\alpha,$$

e pelo Lema 3.3.5, temos $W_\alpha W_{\alpha'} \subseteq W_{\alpha+\alpha'}$. $\square$

Lema 3.3.10. *A álgebra $M_{2^n}(E)$ é $(2n+1)$-supercomutativa.*

Demonstração. Sejam $M, N \in M_{2^n}(E)$ elementos homogêneos de $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-grau α e α', respectivamente. Então $M = rA_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} C_n^{\alpha_{2n+1}}$, $N = r'A_{1n}^{\alpha'_1} \cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}} C_n^{\alpha'_{2n+1}}$ onde $r \in E_{s_\alpha}$, $r' \in E_{s_{\alpha'}}$, com $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+1})$ e $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{2n+1})$. Então fazendo os cálculos

$$\begin{aligned}
MN &= (rA_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} C_n^{\alpha_{2n+1}})(r'A_{1n}^{\alpha'_1} \cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}} C_n^{\alpha'_{2n+1}}) \\
&= (-1)^{s_{\alpha,1}\alpha'_1} rr' A_{1n}^{\alpha'_1} A_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} C_n^{\alpha_{2n+1}} A_{2n}^{\alpha'_2} \cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}} C_n^{\alpha'_{2n+1}} \\
&= (-1)^{s_{\alpha,1}\alpha'_1+\cdots+s_{\alpha,2n+1}\alpha'_{2n+1}} rr' A_{1n}^{\alpha'_1} \cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}} C_n^{\alpha'_{2n+1}} A_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} C_n^{\alpha_{2n+1}} \\
&= (-1)^{s_{\alpha,1}\alpha'_1+\cdots+s_{\alpha,2n+1}\alpha'_{2n+1}+s_\alpha s_{\alpha'}} r'r A_{1n}^{\alpha'_1} \cdots B_{nn}^{\alpha'_{2n}} C_n^{\alpha'_{2n+1}} A_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}} C_n^{\alpha_{2n+1}}
\end{aligned}$$

que é igual a $(-1)^{\langle\alpha,\alpha'\rangle} NM$. $\square$

3.4 As Identidades Graduadas em Características 0

Nesta seção, consideraremos K um corpo de característica 0.

Proposição 3.4.1. *1. As identidades $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduadas de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ seguem dos polinômios $c_{2n}(x,y)$ quando $|x|$ e $|y|$ percorrem independentemente sobre $\mathbb{Z}_2^{2n}$.*

2. As identidades $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-graduadas para $M_{2^n}(E)$ seguem dos polinômios $c_{2n+1}(x,y)$.

Demonstração. 1. Do Lema 3.3.7 todos os c_{2n} são identidades graduadas para $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$. Denotaremos por $J = J_{2n}$ o ideal de $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios c_{2n}. Seja $f(x_1,\ldots,x_k)$ uma identidade multilinear graduada para $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$. Pelo Lema 3.3.3, $f(x_1,\ldots,x_k) \equiv \lambda x_1\cdots x_k (mod J)$, onde $\lambda \in K$.

Se $\lambda = 0$, $f \in J$. Suponhamos que $\lambda \neq 0$ e vamos mostrar que o monômio $x_1\cdots x_k$ não pode ser uma identidade graduada para $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$.

Vamos considerar qualquer variável x_i, para qualquer $i = 1,\ldots,k$.

Seja $|x_i| = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n})$,

se $s_{|x_i|} = 0$, pomos $x_i = A_{1n}^{\alpha_1}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}}$;

se $s_{|x_i|} = 1$, então pomos $x_i = e_i A_{1n}^{\alpha_1}\cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}}$, onde $e_i \in E$;

então $x_1\cdots x_k = e_{i_1}\cdots e_{i_r} D$, onde $i_1 < \cdots < i_r$ e D é uma matriz inversível. Dessa forma $x_1\cdots x_n$ não pode ser uma identidade para $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ e isso implica que f não é uma identidade para $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$, o que é uma contradição.

2. A segunda afirmação da proposição é provada da mesma forma como acima. □

Agora descreveremos os geradores do T-ideal graduado de $E^{\otimes n}$.

Proposição 3.4.2. *Os polinômios $c_n(x,y)$, para quaisquer variáveis x, y, quando $|x|$ e $|y|$ percorrem independentemente sobre $\mathbb{Z}_2^n$, geram o T-ideal de identidades graduadas de $E^{\otimes n}$.*

Demonstração. Como foi observado acima, $E^{\otimes n}$ é n-supercomutativa. Isto significa que os polinômios $c_n(x,y)$ são identidades graduadas para $E^{\otimes n}$. Seja $J = J_n$ o ideal graduado gerado pelos polinômios c_n. Suponhamos que $f(x_1,\ldots,x_k)$ é uma identidade polinomial graduada para $E^{\otimes n}$ e $f \notin J$. Então pelo Lema 3.3.3, $f \equiv \lambda x_1\cdots x_k(mod J)$ para algum $0 \neq \lambda \in K$. Mas, se $|x_i| = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ substituimos x_i por $a_i = b_{i1}\otimes\cdots\otimes b_{in}$ onde $b_{ij} = 1$ se $\alpha_j = 0$ e $b_{ij} = e_{(i-1)n+j}$ quando $\alpha_j = 1$. Assim

$$a_1\cdots a_k = (b_{11}\otimes\cdots\otimes b_{1n})(b_{21}\otimes\cdots\otimes b_{2n})\cdots(b_{k1}\otimes\cdots\otimes b_{kn}) =$$
$$(b_{11}b_{21}\cdots b_{k1})\otimes(b_{12}b_{22}\cdots b_{k2})\otimes\cdots\otimes(b_{1n}b_{2n}\cdots b_{kn}) \neq 0,$$

pois cada monômio $b_{1j}b_{2j}\cdots b_{kj}$ é produto dos geradores diferentes de E. Logo $x_1\cdots x_k$ não pode ser uma identidade graduada para $E^{\otimes n}$, uma contradição. □

Teorema 3.4.3. *Seja K um corpo, char$K = 0$. A álgebra $E^{\otimes m}$ é PI-equivalente (graduada) à $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ quando $m = 2n$ é par, e à $M_{2^n}(E)$ quando $m = 2n+1$ é ímpar.*

Demonstração. Pelos Lema 3.4.1 e Lema 3.4.2, segue que $T_G(M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)) = T_G(E^{\otimes 2n})$. Além disso pelo Lema 2.3.2, $T(M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)) = T(E^{\otimes 2n})$. Também $T_G(M_{2^n}(E)) = T_G(E^{\otimes 2n+1})$ e $T(M_{2^n}(E)) = T(E^{\otimes 2n+1})$. □

Para $n = 1$, temos como consequência uma prova diferente de uma das afirmações do Teorema de Kemer.

Corolário 3.4.4. *Se char$K = 0$ as álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ são PI-equivalentes.*

3.5 As Identidades Graduadas em Característica p>2

Seja K um corpo infinito de característica $p > 2$.

Corolário 3.5.1. *Se char$K = p > 2$ então as identidades graduadas de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ seguem dos polinômios $c_{2n}(x, y)$.*

Demonstração. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ uma identidade polinomial multihomogênea graduada para $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$. Se f não segue de $c_{2n}(x, y)$, então pelo Lema 3.3.3, $f \equiv \lambda x_1^{t_1} \cdots x_k^{t_k} (mod J)$, $0 \neq \lambda \in K$. Seja x_i um elemento homogêneo de grau $|x_i| = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ na $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduação. Pela segunda parte do Lema 3.3.3, se $t_i > 1$, deveremos ter que $s_{x_i} = 0$ e definimos $x_i = A_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}}$, se $s_{|x_i|} = 1$ então $t_i = 1$ e definimos $x_i = e_i A_{1n}^{\alpha_1} \cdots B_{nn}^{\alpha_{2n}}$, $e_i \in E$. Assim $x_1^{t_1} \cdots x_k^{t_k} = e_{i_1} \cdots e_{i_r} D$, onde $i_1 < \cdots < i_r$ correspondem às variáveis x_i com $s_{|x_i|} = 1$ e D é uma matriz invertível. Assim f não pode ser uma identidade para $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$, o que é uma contradição. □

Da mesma forma segue a prova para o seguinte corolário.

Corolário 3.5.2. *Seja char$K = p > 2$. O ideal de identidades graduadas para $M_{2^n}(E)$ é gerado pelos polinômios $c_{2n+1}(x, y)$.*

Lema 3.5.3. *Seja char$K = p > 2$ e seja x uma variável na álgebra livre $\mathbb{Z}_2^n$-graduada $K\langle X\rangle$ de grau homogêneo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Suponha além disso que $s_\alpha = 0$ e $\alpha_i = 1$ para algum $i, 1 \leq i \leq n$. Então x^p é uma identidade graduada para $E^{\otimes n}$.*

Demonstração. Seja $a = \sum_{j=1}^{k} a_{j1} \otimes \cdots \otimes a_{jn} \in E^{\otimes n}$ um elemento $\mathbb{Z}_2^n$-homogêneo de mesmo grau de x. Uma vez que os somandos de a tem o mesmo grau α e por $s_\alpha = 0$, eles comutam. Portanto

$$a^p = (\sum_{j=1}^{k} a_{j1} \otimes \cdots \otimes a_{jn})^p = \sum_{j=1}^{k} (a_{j1})^p \otimes \cdots \otimes (a_{jk})^p.$$

Mas para algum $1 \leq i \leq n$, $a_{ji} \in E_1$, assim $a_{ji}^p = 0$ e temos $a^p = 0$. □

Denotaremos por P o T-ideal gerado por todos os polinômios $c_n(x,y)$ e por todos os polinômios x^p onde x é uma variável que tem o $\mathbb{Z}_2^n$-grau $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ que satisfaz $s_\alpha = 0$ e $\alpha_i = 1$, para algum $i, 1 \leq i \leq n$.

Proposição 3.5.4. *O ideal de identidades $\mathbb{Z}_2^n$-graduadas de $E^{\otimes n}$ é igual a P.*

Demonstração. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ um polinômio multihomogêneo $\mathbb{Z}_2^n$-graduado e suponhamos que $f \notin P$. Pelo Lema 3.3.3, podemos escrever f módulo $c_n(x,y)$ como $f = \lambda x_1^{t_1} \cdots x_k^{t_k}$, $0 \neq \lambda \in K$ e para $s_{|x_i|} = 1$, temos $t_i = 1$. Além disso, por nossa suposição, sempre que $s_{|x_i|} = 0$, e $|x_i| \neq (0, \ldots, 0)$, devemos ter que $t_i < p$. Agora, mostraremos que $x_1^{t_1} \cdots x_k^{t_k}$ não é identidade.

Em característica p, a variável x^t é equivalente à sua linearização completa $g_t(y_1, \ldots, y_t) = \sum_{\sigma \in S_t} y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(t)}$ para qualquer $t < p$. Se $s_{|x|} = 0$, este polinômio, módulo P, é igual a $t! y_1 \cdots y_t$, porque as variáveis y_i comutam.

Em outras palavras, podemos assumir que em $x_1^{t_1} \cdots x_k^{t_k}$ temos $t_i = 1$ para todo i tal que $|x_i| \neq (0, \ldots, 0)$. Agora, como na prova da Proposição 3.4.2, se $|x_i| = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ substituimos x_i por $a_i = b_{i1} \otimes \cdots \otimes b_{in}$ onde $b_{ij} = 1$ se $\alpha_j = 0$, e $b_{ij} = e_{(i-1)n+j}$ quando $\alpha_j = 1$. Assim $x_1^{t_1} \cdots x_k^{t_k}$ não pode ser identidade graduada para $E^{\otimes n}$ e concluímos a prova. $\square$

Teorema 3.5.5. *1. O T-ideal de identidades $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduadas de $E^{\otimes 2n}$ contém propriamente o T-ideal de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$.*

2. O T-ideal de identidades $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-graduadas de $E^{\otimes 2n+1}$ contém propriamente o T-ideal de $M_{2^n}(E)$.

Demonstração. 1. É suficiente mostrar que x^p, com $|x| = (1, 1, 0, \ldots, 0)$, não é uma identidade para $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$.

Seja $a \in M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ tal que $|a| = |x| = (1, 1, 0, \ldots, 0)$, então $a = A_{1n}A_{2n}$, como $char K = p > 2$, $p = 2k+1$, para algum inteiro k, daí

$$a^p = (A_{1n}A_{2n})^p = (A_{1n}A_{2n})^{2k} A_{1n}A_{2n} = (-1)^k A_{1n}A_{2n} \neq 0.$$

A prova para 2 é análoga. $\square$

3.6 Uma Estrutura de T-ideais Graduados

Denotaremos por $L_{m-1,n}$ a álgebra $M_{2^{m-1},2^{m-1}}(E) \otimes E^{\otimes n}$. Esta álgebra possui uma $\mathbb{Z}_2^{2m+n}$-graduação que é induzida da $\mathbb{Z}_2^{2m}$-graduação de $M_{2^{m-1},2^{m-1}}(E)$ e da $\mathbb{Z}_2^n$-graduação de $E^{\otimes n}$.

Proposição 3.6.1. *O T-ideal $\mathbb{Z}_2^{2m+n}$-graduado de $L_{m-1,n}$ é gerado pelas identidades $c_{2m+n}(x,y)$ e pelos elementos x^p onde $|x| = \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m+n}) \in \mathbb{Z}_2^{2m+n}$ são tais que $s_\alpha = 0$ e $\alpha_j = 1$, para algum $j, 2m+1 \leq j \leq 2m+n$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.3.2, Lema 3.3.7 e Proposição 3.4.2, segue que $L_{m-1,n}$ satisfaz as identidades graduadas $c_{2m+n}(x,y)$. Além disso, pelo Lema 3.5.3 as identidades do tipo x^p são satisfeitas.

Agora, seja f um polinômio multihomogêneo, então pelo Lema 3.3.3 podemos escrever f, módulo as identidades da afirmação, como um único monômio multiplicado por um escalar não nulo $\lambda \in K$, isto é, $f \equiv \lambda x_1^{t_1} \cdots x_k^{t_k}$. Seja x_i uma variável qualquer tal que $|x_i| = \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m+n})$, para qualquer $i = 1, \ldots, k$.

Se $s_{|x_i|} = 1$, então podemos assumir que $t_i = 1$. Além disso, se $s_{|x_i|} = 0, |x_i| = \alpha$, como na afirmação, e $\alpha_j = 1$ para algum $j, 2m+1 \leq j \leq 2m+n$, então $t_j < p$. Provaremos que esse monômio não pode ser uma identidade graduada para $L_{m-1,n}$. Assumiremos que $t_i = 1$, para cada x_i que satisfaz as condições da afirmação. Portanto, sempre que $t_i > 1$, devemos ter que $|x_i| = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m+n})$ onde $s_{|x_i|} = 0$ e $\alpha_j = 0$ para todo $j, 2m+1 \leq j \leq 2m+n$.

Agora, para qualquer $i = 1, \ldots, k$, sejam y_i, z_i variáveis graduadas homogêneas de $\mathbb{Z}_2^{2m}$-grau $|y_i|$ e $\mathbb{Z}_2^n$-grau $|z_i|$, respectivamente, tais que $|x_i| = (|y_i|, |z_i|) \in \mathbb{Z}_2^{2m+n}$. Consideremos os monômios $g = y_1^{t_1} \cdots y_k^{t_k}$ e $h = z_1^{t_1} \cdots z_k^{t_k}$. Recordando, pela nossa suposição, que se $t_i > 1$ então $|z_i| = (\alpha_{2m+1}, \ldots, \alpha_{2m+n}) = 0 \in \mathbb{Z}_2^n$ e assim $s_{|x_i|} = s_{|y_i|} + s_{|z_i|} = s_{|y_i|} = 0$. Como na prova da Proposição 3.5.4, o monômio h não se anula em $E^{\otimes n}$. Da mesma forma temos que, como na prova da Proposição 3.4.1, g não é identidade polinomial graduada para $M_{2^{m-1},2^{m-1}}(E)$. Então, existem elementos $b_1, \ldots, b_k \in E^{\otimes n}$, tais que $|b_i| = |z_i|$ e $b_1^{t_1} \cdots b_k^{t_k} \neq 0$. De modo análogo, existem elementos $a_1, \ldots, a_k \in M_{2^{m-1},2^{m-1}}(E)$, tais que $|a_i| = |y_i|$ e $a_1^{t_1} \cdots a_k^{t_k} \neq 0$. Portanto $f(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_k \otimes b_k) = \lambda a_1^{t_1} \cdots a_k^{t_k} \otimes b_1^{t_1} \cdots b_k^{t_k} \neq 0$. □

Como consequência temos o seguinte teorema.

Teorema 3.6.2. *Seja $G = \mathbb{Z}_2^{2n}$, então $T_G(L_{n-1,0}) \subsetneq T_G(L_{n-2,2}) \subsetneq T_G(L_{n-3,4}) \subsetneq \cdots \subsetneq T_G(L_{0,2n-2}) \subsetneq T_G(E^{\otimes 2n})$.*

Demonstração. Notamos que todas estas álgebras são $2n$-supercomutativas e portanto satisfazemx $c_{2n}(x,y)$. Pela Proposição 3.6.1 temos que, para todo $i = 1, \ldots, n-1$, a álgebra $L_{(n-1)-i,2i}$ satisfaz x^p onde $|x| = \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{Z}_2^{2n}$ são tais que $s_\alpha = 0$ e $\alpha_j = 1$ para algum $j, 2(n-i)+1 \leq j \leq 2(n-i)+2i$. Assim, para um dado $i_0 \in \{1, \ldots, n-1\}$, $L_{(n-1)-i_0,2i_0}$ satisfaz a x^p onde x satisfaz as condições da Proposição 3.6.1. E $L_{(n-1)-i_0,2i_0}$ satisfaz a todos x^p satisfeitos pelas álgebras $L_{(n-1)-i,2i}$ em que $i \leq i_0$. Logo,

$$T_G(L_{(n-1)-i,2i}) \subsetneq T_G(L_{(n-1)-i_0,2i_0}).$$

Por $L_{n-1,0} = M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ satisfazer apenas aos polinômios gerados por $c_{2n}(x,y)$ e por $E^{\otimes 2n}$ satisfazer x^p, em que a variável x cumpre as condições do Lema 3.5.3, segue que $T_G(L_{n-1,0}) \subsetneq T_G(L_{(n-1)-i,2i}) \subsetneq T_G(E^{\otimes 2n})$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Portanto,

$$T_G(L_{n-1,0}) \subsetneq T_G(L_{n-2,2}) \subsetneq \cdots \subsetneq T_G(E^{\otimes 2n}).$$

□

Denotaremos por $\mathcal{L}_{m,n}$ a álgebra $M_{2^m}(E)\otimes E^{\otimes n}$. A álgebra $\mathcal{L}_{m,n}$ possui $\mathbb{Z}_2^{2m+n+1}$-graduação induzida da $\mathbb{Z}_2^{2m+1}$-graduação de $M_{2^m}(E)$ e da $\mathbb{Z}_2^n$-graduação de $E^{\otimes n}$. Como na Proposição 3.6.1, temos

Lema 3.6.3. *O T-ideal de identidades $\mathbb{Z}_2^{2m+n+1}$-graduadas de $\mathcal{L}_{m,n}$ é gerado pelas identidades $c_{2m+n+1}(x,y)$ e pelos elementos x^p onde $|x|=\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{2m+n+1})\in\mathbb{Z}_2^{2m+n+1}$ são tais que $s_{|x|}=0$ e $\alpha_j=1$, para algum $j, 2m+2\le j\le 2m+n+1$.*

Agora, temos todas as ferramentas para o seguinte teorema.

Teorema 3.6.4. *Seja K um corpo infinito, char$K\neq 2$ e seja $G=\mathbb{Z}_2^{2n}$. Então*

$$T_G(L_{n-1,0})\subseteq T_G(\mathcal{L}_{n-1,1})\subseteq T_G(L_{n-2,2})\subseteq T_G(\mathcal{L}_{n-2,3})\subseteq\cdots\subseteq T_G(L_{0,2n-2})\subseteq T_G(\mathcal{L}_{0,2n-1}).$$

Denotemos por $\mathcal{G}=\mathbb{Z}_2^{2n+1}$. Então

$$T_{\mathcal{G}}(\mathcal{L}_{n,0})\subseteq T_{\mathcal{G}}(L_{n-1,1})\subseteq T_{\mathcal{G}}(\mathcal{L}_{n-1,2})\subseteq T_{\mathcal{G}}(L_{n-2,3})\subseteq\cdots\subseteq T_{\mathcal{G}}(L_{0,2n-1})\subseteq T_{\mathcal{G}}(\mathcal{L}_{0,2n+1}).$$

Se char$K=0$, todas as inclusões se tornam igualdades; quando char$K=p>2$, todas são inclusões próprias.

Demonstração. Quando char$K=0$, o teorema segue do Teorema 3.4.3. Suponha char$K=p>2$. Então, Proposição 3.6.1 junto com o Lema 3.6.3 nos dão as inclusões próprias. □

Corolário 3.6.5. *Seja char$K\neq 2$. Então $T_{\mathcal{G}}(M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)\otimes E)\supseteq T_{\mathcal{G}}(M_{2^n}(E))$. A igualdade vale somente quando char$K=0$.*

Demonstração. Segue do teorema acima uma vez que $L_{n-1,1}=M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)\otimes E$ e $\mathcal{L}_{n,0}=M_{2^n}(E)$. □

3.7 Mais Casos do Teorema do Produto Tensorial

Nesta seção compararemos os T-ideais graduados das álgebras $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ e $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)\otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$, onde $k+l=n$, sobre um corpo infinito K de característica positiva $p\neq 2$.

Primeiro consideraremos uma $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduação sobre $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)\otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$ induzida da $\mathbb{Z}_2^{2k}$-graduação de $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)$ e a $\mathbb{Z}_2^{2l}$-graduação de $M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$. Assim temos uma $\mathbb{Z}_2^{2n}=\mathbb{Z}_2^{2k}\times\mathbb{Z}_2^{2l}$-graduação sobre esta álgebra. Além disso, pelas Proposições 3.3.2 e 3.3.7 temos que a álgebra $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)\otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$ é $2n$-supercomutativa.

Lema 3.7.1. *Seja x uma variável e assuma que $|x|=\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{2n})\in\mathbb{Z}_2^{2n}, s_\alpha=0$ e $\alpha_1+\cdots+\alpha_{2k}=\alpha_{2k+1}+\cdots+\alpha_{2n}=1$. Então x^p é uma identidade polinomial graduada para $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)\otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$.*

Demonstração. Seja $a \in M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$ um elemento homogêneo de $\mathbb{Z}_2^{2n}$-grau α, como nas condições do Lema 3.7.1. Então $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$, onde $a_i = r_i A_{1k}^{\alpha_1} \cdots B_{kk}^{\alpha_{2k}} \otimes r_i' A_{1l}^{\alpha_{2k+1}} \cdots B_{ll}^{\alpha_{2n}}$, e $r_i, r_i' \in E_1$ são elementos ímpares da álgebra de Grassmann para todo i. Como $s_\alpha = 0$, os elementos homogêneos a_i comutam, portanto

$$a^p = (a_1 + \cdots + a_t)^p = a_1^p + \cdots + a_t^p.$$

Por $r_i, r_i' \in E_1$, temos $a_i^p = 0$, para todo i. E concluimos a prova do lema. $\square$

Agora, seja $\mathcal{J}$ o T-ideal gerado pelos polinômios $c_{2n}(x, y)$ e por todos x^p onde as variáveis x satisfazem a condição do Lema 3.7.1.

Teorema 3.7.2. *O T-ideal de identidades $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduadas de $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$ é igual a $\mathcal{J}$.*

Demonstração. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_q) \notin \mathcal{J}$ um polinômio $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduado multihomogêneo de multigrau $(t_1, \ldots, t_q)$. Pelo Lema 3.3.3, $f \equiv \lambda x_1^{t_1} \cdots x_q^{t_q} (mod \mathcal{J})$, onde $0 \neq \lambda \in K$ e $t_i = 1$ se $s_{|x_i|} = 1$, $i = 1, \ldots, q$. Além disso, se o $\mathbb{Z}_2^{2n}$-grau de algum x_i satisfaz as condições do Lema 3.7.1 então $t_i < p$.

Portanto, como na prova da Proposição 3.5.4, assumiremos que $t_i = 1$ para cada x_i que satisfaz as condições do Lema 3.7.1. Assim, se $t_i > 1$, segue que $|x_i| = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ onde $\displaystyle\sum_{i=1}^{2k} \alpha_i = 0 = \sum_{i=1}^{2l} \alpha_{2k+i}$. Vamos construir uma substituição para qual $x_1^{t_1} \cdots x_q^{t_q}$ não se anula em $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$.

Tomemos uma variável x_i de f e coloquemos $\alpha = |x_i|$.

Então definimos

$$x_i \mapsto a_i = r_i A_{1k}^{\alpha_1} \cdots B_{kk}^{\alpha_{2k}} \otimes r_i' A_{1l}^{\alpha_{2k+1}} \cdots B_{ll}^{\alpha_{2n}}.$$

Aqui

$$r_i = \begin{cases} e_{ip}, \text{ se } & \sum_{j=1}^{2k} \alpha_j = 1 \\ 1, \text{ se } & \sum_{j=1}^{2k} \alpha_j = 0 \end{cases},$$

analogamente para r_i'.

Se $s_\alpha = 1$, então ou $\sum_{j=1}^{2k} \alpha_j = 1$ e $\sum_{j=1}^{2l} \alpha_{2k+j} = 0$ e pomos $r_i = e_i$ e $r_i' = 1$ ou $\sum_{j=1}^{2k} \alpha_j = 0$ e $\sum_{j=1}^{2l} \alpha_{2k+j} = 1$ e pomos $r_i = 1$ e $r_i' = e_i$.

Se $s_\alpha = 0$, então $\sum_{j=1}^{2k} \alpha_j = 1 = \sum_{j=1}^{2l} \alpha_{2k+j}$ e tomamos $r_i = e_i = r_i'$ ou $\sum_{j=1}^{2k} \alpha_j = 0 = \sum_{j=1}^{2l} \alpha_{2k+j}$ e pomos $r_i = 1 = r_i'$.

Logo, $x_1^{t_1} \cdots x_q^{t_q}$ não se anula em $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$ e consequentemente f também não. $\square$

Como exemplo, podemos considerar o monômio $x_1 x_2 x_3 x_4^2$, em que $s_{|x_1|} = s_{|x_2|} = 1$ estão nos dois primeiros casos enquanto que $s_{|x_3|} = s_{|x_4|} = 0$, estão nos dois últimos. Então

$$
\begin{aligned}
x_1 \mapsto a_1 &= e_1 A_{1k}^{\alpha_{1,1}} \cdots B_{kk}^{\alpha_{1,2k}} \otimes A_{1l}^{\alpha_{1,2k+1}} \cdots B_{ll}^{\alpha_{1,2n}} \\
x_2 \mapsto a_2 &= A_{1k}^{\alpha_{2,1}} \cdots B_{kk}^{\alpha_{2,2k}} \otimes e_2 A_{1l}^{\alpha_{2,2k+1}} \cdots B_{ll}^{\alpha_{2,2n}} \\
x_3 \mapsto a_3 &= e_3 A_{1k}^{\alpha_{3,1}} \cdots B_{kk}^{\alpha_{3,2k}} \otimes e_3 A_{1l}^{\alpha_{3,2k+1}} \cdots B_{ll}^{\alpha_{3,2n}} \\
x_4 \mapsto a_4 &= A_{1k}^{\alpha_{4,1}} \cdots B_{kk}^{\alpha_{4,2k}} \otimes A_{1l}^{\alpha_{4,2k+1}} \cdots B_{ll}^{\alpha_{4,2n}},
\end{aligned}
$$

e daí $a_1a_2a_3a_4^2 \neq 0$.

Corolário 3.7.3. *Seja K um corpo infinito, $charK \neq 2$. Assuma que $k + l = n$, então $T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)) \subseteq T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E))$. Eles coincidem somente em característica 0.*

Demonstração. É claro que quando $charK = 0$, $T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)) = T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E))$, pois ambas as álgebras satisfazem aos polinômios gerados por $c_{2n}(x,y)$. Enquanto que em $charK > 2$, pelo Teorema 3.7.2, $T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)) = \mathcal{J}$. Portanto, $T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)) \subsetneq T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E))$.

□

Corolário 3.7.4. *Seja $k_1 + l_1 = k_2 + l_2, k_1 \geq l_1, k_2 \geq l_2$, e assuma que $k_1 \neq k_2$. Assuma também que K é um corpo infinito e $charK \neq 2$. Então $T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{k_1-1},2^{k_1-1}} \otimes M_{2^{l_1-1},2^{l_1-1}})$ é igual à $T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{k_2-1},2^{k_2-1}} \otimes M_{2^{l_2-1},2^{l_2-1}})$ somente quando $charK = 0$. Se $charK = p > 2$ nenhum dos dois está contido no outro.*

Demonstração. Se K é tal que $charK = 0$, então pelo Corolário 3.7.3, ambos os conjunto são iguais a $T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E))$, e portanto, são iguais. Para provarmos a segunda parte do corolário, devemos mostrar que existe uma variálvel x tal aque $x^p \equiv 0$ em $M_{2^{k_1-1},2^{k_1-1}} \otimes M_{2^{l_1-1},2^{l_1-1}}$, mas que não se anula em $M_{2^{k_2-1},2^{k_2-1}} \otimes M_{2^{l_2-1},2^{l_2-1}}$, e uma variável y, tal que $y^p \equiv 0$ em $M_{2^{k_2-1},2^{k_2-1}} \otimes M_{2^{l_2-1},2^{l_2-1}}$, mas que não é identidade para $M_{2^{k_1-1},2^{k_1-1}} \otimes M_{2^{l_1-1},2^{l_1-1}}$. Consideremos $k_1 = 2n-1$ e $k_2 = 2n-2$, então $l_1 = 1$ e $l_2 = 2$. Seja x uma variável tal que $|x| = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}) = (1, \ldots, 1)$, então $\sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i = 1$ e $\alpha_{2n} = 1$, portanto x satisfaz as condições do Lema 3.7.1. Daí $x^p \equiv 0$ em $M_{2^{k_1-1},2^{k_1-1}} \otimes M_{2^{l_1-1},2^{l_1-1}}$. Por outro lado x^p não é identidade para $M_{2^{k_1-1},2^{k_1-1}} \otimes M_{2^{l_1-1},2^{l_1-1}}$, pois $\sum_{i=1}^{2n-2} = 0 = \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n}$ e podemos substituir x por $A_{1k_1} \cdots B_{k_1k_1} \otimes A_{1l_1} \cdots B_{l_1l_1}$. Agora, consideremos a variável y tal que $|y| = (\beta_1, \ldots, \beta_{2n}) = (0, 1, \ldots, 1, 0)$, então $\sum_{i=1}^{2n-2} \beta_i = 1 = \beta_{2n-1} + \beta_{2n}$ e assim $y^p \equiv 0$ em $M_{2^{k_2-1},2^{k_2-1}} \otimes M_{2^{l_2-1},2^{l_2-1}}$ por satifazer as condições do Lema 3.7.1. Mas y^p não se anula em $M_{2^{k_1-1},2^{k_1-1}} \otimes M_{2^{l_1-1},2^{l_1-1}}$, pois $\sum_{i}^{2n-1} \beta_{2n-1} = 0 = \beta_{2n}$ e basta substituir y por $A_{2k_1} \cdots B_{k_1k_1} \otimes A_{1l_1} \cdots B_{l_1-1l_1}$.

□

Referências Bibliográficas

[1] S. M. Alves, P. Koshlukov, *Polynomial identities of algebras in positive characteristic*, J. Algebra, 305, (2), (2006), 1149-1165.

[2] S. S. Azevedo, M. Fidelis, P. Koshlukov, *Tensor product theorems in positive characteristic*, J. Algebra, 276, (2004), 836-845.

[3] O.M. Di Vincenzo, *On the graded identities of* $M_{1,1}(E)$, Israel J. Math., 80, (3), (1992), 323-335.

[4] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov, E. A. Santulo Jr., *Graded identities for tensor products of matrix (super)algebras over the Grassmann algebra*, J. Algebra Appl., 432, (2010), 780-795.

[5] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza, *Graded polynomial identities of verbally prime algebra*, J. Algebras Appl., 6, (3), (2007), 385-401.

[6] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.

[7] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math. Surveys Monographs 122, Amer. Math. Soc., 2005.

[8] A. R. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, AMS Trans. of math. monographs, 87, 1991.

[9] A. R. Kemer, *Varieties and* $\mathbb{Z}_2$*-graded algebras*, Izv. Aad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 48, (1984), 1042-1059.

[10] P. Koshlukov, S. S. de Azevedo, *Graded identities for* T*-prime algebras over field of positive characteristic*, Israel J. Math., 128, (2002), 157-176.

[11] R. do Nascimento Jr., *Base para identidades polinomiais das matrizes triangulares em blocos com* $\mathbb{Z}_2$*-graduação*, UFCG, 2009.

[12] Yu. P. Razmyslov, *Identities of algebras and their representations*, Translations of Mathematical Monographs, 138 Proc. Amer. Math. Soc., 1994.

[13] A. Regev, *Homomorphisms for tensor products of Grassmann algebras*, Israel Math. Conf. Proc., 1, (1989), 111-117. A. Ya Belov, L. H. Rowen, *Polinomial identities: A combinatorial approach*, Israel Academy of Science Center.

[14] A. Regev, *Tensor products of matrix algebras over the Grassmann algebra*, J. Algebra, 133, (2), (1999), 512-526.

[15] E. P. de Rezende, *Identidades polinomiais graduadas de algumas álgebras matriciais*, UnB, 2010.

[16] L. M. Samoilov, *On γ-classical varieties*, (Russian) Fundam. Prikl. Math., 8, (3), (2002), 887-910.

[17] J. U. da Silva, *Identidades e polinômios centrais graduados para o produto tensorial pela álgebra de Grassmann*, UFCG, 2009.

[18] A. Ya Belov, L. H. Rowen, *Polinomial identities: A combinatorial approach*, Israel Academy of Science Center.

[19] S. Yu. Vasilovsky, $\mathbb{Z}_n$*-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order* n, Proc. Amer. Math. Soc., 127, (12), (1999), 3517-3524.

[20] C. T. C. Wall, *Graded Brauer Groups*, J. Reine Angew. Math., 213, (1963-1964), 187-199.