

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**MODELAGEM DE INCERTEZAS EM
SISTEMAS DE ATERRAMENTO ELÉTRICOS**

JOÃO BATISTA JOSÉ PEREIRA

ORIENTADOR: LEONARDO R. A. X. DE MENEZES

TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

PUBLICAÇÃO:

BRASÍLIA/DF: ABRIL – 2008

FICHA CATALOGRÁFICA

PEREIRA, JOÃO BATISTA JOSÉ

Modelagem de Incertezas em Sistemas de Aterramento Elétricos.
[Distrito Federal] 2008.

xiii, 118p., 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Doutor, Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Elétrica

1. Introdução

2. Objetivos

3. Revisão Bibliográfica

4. Teoria da Transformada da Incerteza

5. Resultados e Discussão

6. Conclusões

I. ENE/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

PEREIRA, J. B. J. (2008). Modelagem de Incertezas em Sistemas de Aterramento Elétricos. Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Publicação PPGENE.TD-023/2008, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 118 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: João Batista José Pereira.

TÍTULO: Modelagem de Incertezas em Sistemas de Aterramento Elétricos.

GRAU: Doutor

ANO: 2008

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

João Batista José Pereira
Av Graça Aranha Qd. 35 Lt. 02 Jd. Nova Era
74.916-070 – Aparecida de Goiânia - GO – Brasil.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS, fonte de vida, fé, esperança, perseverança e sabedoria. Porto seguro e conforto para os momentos mais incertos. Aos familiares e esposa pelo carinho, incentivo e confiança. Ao meu orientador Leonardo R.A.X. de Menezes e professores da UnB que acreditaram no meu potencial e capacidade.

Dedicado este trabalho a minha mãe Valdecy, irmãos e irmãs, a minha esposa Priscilla, minhas filhas Paula e Lara, meu filho Thiago e a todos aqueles que direto ou indiretamente contribuíram para a realização deste sonho que ora se torna realidade.

“Um pouco de ciência nos afasta de Deus. Muito, nos aproxima.”

Louis Pasteur

RESUMO
MODELAGEM DE INCERTEZAS EM SISTEMAS DE ATERRAMENTO ELÉTRICO

Autor: João Batista José Pereira

Orientadora: Leonardo R.A.X. de Menezes

Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Brasília, mês de Abril (2008)

Este trabalho apresenta o efeito de tensões induzidas devido a pulsos eletromagnéticos e é estudado com a combinação do *software* de simulação eletromagnético comercial (MEFISTo) e modelamento de incerteza. A incerteza é introduzida usando a técnica UT (*Unscented Transform* – Transformada de Incerteza) para duas variáveis aleatórias: a permissividade relativa e a condutividade do solo. Estas foram modeladas como variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme. Os resultados foram os momentos estatísticos da tensão induzida (valor esperado e desvio padrão) como também uma estimativa da função de distribuição cumulativa. Este trabalho usa uma especificação discreta da função distribuição de probabilidade para modelar incerteza em simulações TLM. A idéia principal está baseada na UT. A principal extensão do trabalho é o modelamento preciso de diferentes funções densidade de probabilidade usando a aproximação UT+TLM. Este trabalho ainda avalia os problemas decorrentes das descargas atmosféricas, principalmente aqueles relacionados com a tensão de passo, os quais são causas de litígio devido à morte ou danos. Isto porque a base para projetos de engenharia precisa ser robusta e transparente para administrar este risco.

ABSTRACT
MODELAGEM DE INCERTEZAS EM SISTEMAS DE ATERRAMENTO
ELÉTRICO

Author: João Batista José Pereira

Supervisor: Leonardo R.A.X. de Menezes

Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Brasília, month of April (2008)

This work presents the effect of induced voltage due to electromagnetic pulses and it is studied with the combination of the commercial electromagnetic simulation software (MEFISTo) and uncertainty modeling. The uncertainty is introduced using the UT (Unscented Transform) technique for two random variables: the relative permittivity and conductivity of the soil. These were modeled as independent random variables with uniform distribution. The results were the statistical moments of the induced voltage (the expected value and deviation standard) as well as an estimate of the function of cumulative distribution. This work uses a discreet specification of the function distribution of probability to model uncertainty in simulations TLM. The main idea is based on UT. The main extension of the work is the accurate modeling of different functions density of probability using the approach UT+TLM. This work still evaluates the problems decurrent of the atmospheric discharges, mainly those related with the step voltage, which are causes of lawsuit due to the death or damages. This because the base for engineering projects needs to be robust and transparent to administer this risk.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - OBJETIVO	4
3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
3.1 - COMPATIBILIDADE ELETROMAGNÉTICA.....	5
3.2 - DESCARGAS ATMOSFÉRICAS.....	7
3.3 - SISTEMAS DE PROTEÇÃO CONTRA DESCARGAS ATMOSFÉRICAS	10
3.4 - SISTEMAS DE ATERRAMENTO ELÉTRICO.....	15
3.4.1 - Determinação dos Valores da Resistividade do Solo.....	16
3.4.2 - Características Elétricas e Mecânicas do Solo.....	19
3.4.3 - Tratamento de um Solo de Alta Resistividade e Corrosão dos Eletrodos de Aterramento.....	22
3.4.4 - Mecanismo de Condução do Solo.....	24
3.4.5 - Cálculo de Aterramentos pelo Processo de Distribuição Uniforme de Corrente.....	25
3.4.6 - Comportamento de um Aterramento Elétrico sob Descarga Atmosférica.....	29
3.4.7 - Modelamento de um Sistema de Aterramento.....	32
3.5 - SIMULAÇÃO ELETROMAGNÉTICA.....	38
3.5.1 - Modelagem por Linhas de Transmissão.....	38
3.5.2 - Método TLM Tridimensional.....	40
3.6 - TENSÃO DE PASSO.....	54
4 - TEORIA DA TRANSFORMADA DE INCERTEZA	61
4.1 - FUNDAMENTOS DE ESTATÍSTICA.....	61
4.1.1 - Monte Carlo.....	64
4.2 - INTRODUÇÃO A PROBABILIDADE.....	65
4.2.1 - Variáveis Aleatórias.....	68
4.2.2 - Função de Distribuição.....	69
4.2.3 - Variáveis Aleatórias Discretas.....	69
4.2.4 - Variáveis Aleatórias Contínuas.....	70

4.2.5 - Valor Esperado.....	71
4.2.6 - Variáveis Aleatórias Bidimensionais.....	73
4.2.7 - Variáveis Contínuas Bidimensionais.....	73
4.2.8 - Distribuição Teórica Normal Contínua.....	74
4.2.9 - Considerações sobre o Desvio Padrão e Intervalo de Confiança.....	76
4.3 - INTRODUÇÃO A PROCESSO ESTOCÁSTICO.....	79
4.4 - TRANSFORMADA DE INCERTEZA COM SIMULAÇÕES TLM.....	81
5 - RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	93
6 - CONCLUSÕES	109
6.1 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	110
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	111
BIBLIOGRAFIA.....	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1- Relação entre Nível de Proteção, Eficiência do SPDA e o Raio da Esfera.....	13
Tabela 3.2 - Resistividade dos Tipos mais Comuns de Solo.	21
Tabela 3.3 - Impedância de Corpo Total Z_T	57
Tabela 3.4 - Fator de Corrente de Coração F para Diferentes Caminhos da Corrente.....	58
Tabela 3.5 - Limites para Tensão de Passo (EG-1).	60
Tabela 4.1 - Distribuição de Frequências Relativas para um "Dado".....	61
Tabela 4.2 - Função de Probabilidade para um "Dado".....	62
Tabela 4.3 - Exemplo de Cálculo da Média e do Desvio Padrão para Alturas	63
Tabela 4.4 - Equações para Momentos Amostrais e Momentos Populacionais.....	63
Tabela 4.5 - Exemplo de Cálculo da Média e da Variância para Número de Meninas.....	64
Tabela 4.6 - Médias Relativas para o Exemplo Monte Carlo	64
Tabela 4.7 - Cálculo do Valor Esperado de \bar{X}	65
Tabela 4.8 - Tabela para Determinação do Valor de Z	78
Tabela 4.9 - Classificação do Processo de <i>Marcov</i>	80
Tabela 4.10 - Funções Densidade Probabilidade e Polinômios Correspondentes.....	85
Tabela 4.11 - Pesos, Pontos Sigma e Funções Densidade Probabilidade Correspondentes	86
Tabela 4.12 - Número Mínimo de Pontos Sigma na Segunda e Quarta Ordem de Aproximação	88
Tabela 4.13 - Ábaco UT para 3 Pontos Sigma.....	88
Tabela 4.14 - Ábaco UT para 5 Pontos Sigma	89
Tabela 5.1 - Valor Esperado e Desvio Padrão da Tensão Induzida para o Primeiro Caso. .	98
Tabela 5.2 - Valor Esperado e Desvio Padrão da Tensão Induzida para o Segundo Caso	100
Tabela 5.3 - Resultados para outras Configurações de Sistema de Aterramento	102
Tabela 5.4 - Valor Esperado e Desvio Padrão da Tensão de Passo para MC e UT	103
Tabela 5.5 - Valor Esperado e Desvio Padrão da Tensão de Passo para uma Estrutura de Aterramento com uma Camada	103
Tabela 5.6 - Valor Esperado e Desvio Padrão da Tensão de Passo para uma Estrutura de Aterramento com duas Camadas Simulado com MEFISTo-3D	104
Tabela 5.7 - Valor Esperado e Desvio Padrão da Tensão de Passo para uma Estrutura de Aterramento com duas Camadas Calculado com as Equações 5.4 e 5.5	104

Tabela 5.8 - Valor Esperado e Desvio Padrão da Tensão de Passo para uma Estrutura de Aterramento com Haste em duas Camadas.....	105
Tabela 5.9 - Simulação de Tensão de Passo em Solo de duas Camadas, descarga sobre Esfera e $\sigma_1 \neq \sigma_2$	107
Tabela 5.10 - Simulação de Tensão de Passo em Solo de duas Camadas, descarga sobre Haste e $\sigma_1 \neq \sigma_2$	108
Tabela 5.11 - Simulação de Tensão de Passo em Solo de duas Camadas, descarga sobre Esfera e $\epsilon r_1 \neq \epsilon r_2$	108
Tabela 5.12 - Simulação de Tensão de Passo em Solo de duas Camadas, descarga sobre Haste e $\epsilon r_1 \neq \epsilon r_2$	108

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - Mapa do Índice Cerâmico do Brasil	8
Figura 3.2 - Etapas de Formação de uma Descarga Atmosférica.....	10
Figura 3.3 - Estrutura Total de um SPDA com um Captor	11
Figura 3.4 - Região de Proteção de um Captor Franklin de Torre Vertical	12
Figura 3.5 - Zona de Proteção da Esfera Rolante.	13
Figura 3.6 - Exemplos de Proteção de Várias Estruturas pelo Método Eletrogeométrico... 13	
Figura 3.7 - Método da Goiala de <i>Faraday</i>	14
Figura 3.8 - Solo Estratificado em 4 Camadas	17
Figura 3.9 - Exemplo de Haste Cravada em Solo de Três Camadas.	18
Figura 3.10 - Configuração de Ligação do Terrômetro para Medição de Resistência de Terra	19
Figura 3.11 - Resistividade do Solo Comparada ao Teor de Umidade ou Salinidade.....	20
Figura 3.12 - Diagrama de Condução do Solo	24
Figura 3.13 - Forma de Onda de uma Descarga Atmosférica	31
Figura 3.14 - As Três Zonas que Caracterizam o Solo	34
Figura 3.15 - Modelo TLM Unidimensional.....	39
Figura 3.16 - Célula Básica do Nó Bidimensional TLM Paralelo.....	39
Figura 3.17 - Célula Básica do Nó Bidimensional TLM Série	40
Figura 3.18 - Nó Simétrico Condensado TLM Tridimensional	41
Figura 3.19 - Detalhes do Nó Simétrico Condensado TLM Tridimensional	41
Figura 3.20 - Aplicação de um Pulso Unitário a Porta 1.	42
Figura 3.21 - Procedimento para Determinação da Corrente.	52
Figura 3.22 - Limiar de Fibrilação Ventricular para <i>Biegelmeier e Lee</i>	56
Figura 3.23 - Impedâncias Internas do Corpo Humano (AS/NZS 60479.1:2001).	57
Figura 4.1 - Gráficos da Distribuição de Frequências Relativas para um "Dado".	62
Figura 4.2 - Função Distribuição de uma Variável Aleatória Discreta.....	70
Figura 4.3 - Função Distribuição de uma Variável Aleatória Contínua $P(a < X < b)$	71
Figura 4.4 - Funções de Distribuição e de Densidade para Combinações de μ e σ^2	75
Figura 4.5 - Função de Densidade para a Distribuição Normal Padrão.....	75
Figura 4.6 - Função de Densidade de Distribuição Normal ($\mu=1$ e $\sigma=0$)	76
Figura 4.7 - Probabilidade Incluída Além do Ponto $Z_0=1,4$	76

Figura 4.8 - Função Densidade de Probabilidade Normal Contínua e a Aproximação Discreta	82
Figura 5.1 - Resistividade do Solo em Função da Frequência (Equação 5.2 com $\rho_{(100)}=1\Omega.m$).....	94
Figura 5.2 - Visão Tridimensional da Área de Simulação no MEFISTo-3D para o Primeiro Caso.....	95
Figura 5.3 - Forma de Onda do Sinal de Entrada	96
Figura 5.4 - Campo Elétrico em Função da Permissividade Elétrica Relativa e da Distância	96
Figura 5.5 - Campo Elétrico em Função da Condutividade Elétrica e da Distância	97
Figura 5.6 - Tensão de Passo em Função da Distância, ϵ_r e σ	97
Figura 5.7 - FDC da Tensão de Passo Calculada com o UT(3 e 5) para o Primeiro Caso ..	98
Figura 5.8 - Tensão de Passo para $Ipk=1kA$ em Função da Distância, ϵ_r e σ (Equação 5.4)	99
Figura 5.9 - Visão Tridimensional da Área de Simulação no MEFISTo-3D para o Segundo Caso.....	100
Figura 5.10 - FDC da Tensão de Passo Calculada com o UT(5) para o Segundo Caso. ...	101
Figura 5.11 - Visão Tridimensional da Área de Simulação no MEFISTo-3D para o Caso de Solo de duas Camadas.....	101
Figura 5.12 - Estrutura de Aterramento de uma Camada Utilizada na Simulação MC e UT	103
Figura 5.13 - Estrutura de Aterramento de duas Camadas Utilizada na Simulação MC e UT	104
Figura 5.14 - Estrutura de Aterramento com Haste em duas Camadas Utilizada na Simulação MC e UT	105
Figura 5.15 - Características Dinâmicas do Solo em Função do Tempo Simulado pelo MEFISTo-3D ($\epsilon_r=11$, $\sigma=0,015S.m$, $L=18m$ e Fonte NEMP).....	106
Figura 5.16 - Características Dinâmicas do Solo em Função da Frequência Simulado pelo MEFISTo-3D ($\epsilon_r=11$, $\sigma=0,015S.m$ e Fonte Impulso $t=1,668\mu s$)	106
Figura 5.17 - Características Dinâmicas do Solo em Função da Frequência e ϵ_r Simulado pelo MEFISTo-3D ($\sigma=0,015S.m$ e Fonte Impulso $t=1,668\mu s$)	107

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
EMC	<i>ElectroMagnetic Compatibility</i> – Compatibilidade Eletromagnética
EMI	<i>ElectroMagnetic Interference</i> - Interferência Eletromagnética
FD	<i>Finite Difference</i> - Diferença Finita
FDC	Função Distribuição Cumulativa
FDP	Função Densidade Probabilidade
FDTD	<i>Finite Difference Time Domain</i> - Domínio de Tempo de Diferença Finito
FEM	<i>Finite Element Method</i> – Métodos dos Elementos Finitos
IEC	<i>International Electrotechnical Commission</i> – Comissão Internacional de Eletrotécnica
LT	Linha de Transmissão
MC	Monte Carlo
MEFISTo-3D	<i>Commercial Software from Faustus Scientific Corporation</i>
MoM	<i>Moments Method</i> - Método dos Momentos
SCN	<i>Symmetrical Condensed Node</i> - Nó Simétrico Condensado
SPDA	Sistemas de Proteção Contra Descargas Atmosféricas
TLM	<i>Transmission Line Modeling Method</i> - Método de Modelamento de Linha de Transmissão
TLM-TD	<i>TLM Time Domain</i> – TLM no Domínio do Tempo
TRG	<i>Transient Resistance Ground</i> - Resistência Transiente de Terra
UT	<i>Unscented Transform</i> – Transformada de Incerteza

1 – INTRODUÇÃO

Quando se tem um problema, é preciso modelá-lo de uma maneira apropriada, para tornar possível o seu estudo e também para encontrar e formular a solução correta. Os *softwares* de simulação de onda eletromagnética completa estão normalmente baseados em uma aproximação determinística dos problemas. Isto significa que tem-se que saber com absoluta precisão todos os parâmetros geométricos e elétricos do domínio de simulação. Este é o caso para técnicas de modelamento tais como as FDTD (*Finite Difference Time Domain* - Diferença Finita no Domínio do Tempo) e TLM (*Transmission Line Modeling Method* - Método de Modelamento de Linha de Transmissão) [1]. Porém, este conhecimento pode não estar sempre disponível. Em certos problemas, alguns parâmetros podem ser conhecidos só até certa precisão. Entretanto, mesmo selecionando ferramentas adequadas e confiáveis, podem-se cometer erros, pois o processo está exposto a ruídos e erros, inclusive de máquinas. Além disso, como pode haver erro intrínseco tanto no modelo quanto em medições realizadas, é preciso levar em conta o conceito de incerteza. Tem-se como objetivos principais associar uma noção de incerteza a cada simulação e/ou cálculo. Assim, é preciso modelar o problema de tal forma que se atinjam tais objetivos [2].

Quando se estima o estado de um sistema, raramente obtém-se um resultado exato, pois a precisão dos instrumentos e do processo é limitada. Sendo assim, é extremamente importante que se consiga representar a incerteza associada à estimativa. Uma forma de representação é através de uma distribuição de probabilidade. Como uma parametrização completa da distribuição de probabilidade pode não ser viável computacionalmente, uma aproximação do estado pode ser gerada, mantendo-se um número menor de momentos da distribuição, de forma a limitar a demanda computacional. Precisa-se manter apenas os dois primeiros momentos, ou seja, a média e a covariância. Embora a utilização dos dois primeiros momentos seja uma representação relativamente simples do estado do sistema, possui diversos benefícios. Entre eles, a necessidade de manutenção de uma quantidade pequena e constante de informação. Como a informação é suficiente para os objetivos, é um *trade off* entre a flexibilidade de representação e a complexidade computacional. E ainda, os dois primeiros momentos são linearmente transformáveis e suas estimativas preservadas e, o conjunto de estimativas destes momentos pode ser utilizado para representar características adicionais da distribuição [2].

Este trabalho usa uma especificação discreta da função distribuição de probabilidade para modelar incerteza em simulações TLM. A idéia principal está descrita

em [3] e está baseada na UT [4]. A principal extensão desse trabalho é o modelamento preciso de diferentes funções densidade de probabilidade usando a aproximação UT+TLM.

Os trabalhos de modelagem numérica parecem se adequar com naturalidade aos problemas de EMC (*EletroMagnetic Compatibility* – Compatibilidade Eletromagnética), justamente por sua capacidade de analisar problemas complexos, o que não é possível na forma analítica. Entre os principais métodos de modelagem numérica encontra-se o das FD (*Finite Difference* - Diferença Finita), o FEM (*Finite Element Method* – Método dos Elementos Finitos), o MoM (*Moments Method* - Método dos Momentos), e o TLM, além de muitos outros com aplicações mais específicas [5]. A modelagem computacional tem se mostrado uma das ferramentas mais importante na busca de soluções de EMC, pois ela simplifica etapas. Através deste tipo de análise pode-se prever pontos de emissões e suscetibilidade. Cada técnica computacional apresenta suas vantagens e desvantagens. Porém, a maioria das aplicações exige uma modelagem tridimensional, o que dificulta em alguns casos a solução. As técnicas numéricas mais utilizadas apresentam limitações de tamanho, condições de contorno e de análise temporal ou freqüencial. O TLM é um método que pode ser utilizado em problemas não lineares, não homogêneos e de propagação de ondas no domínio do tempo ou da freqüência. Este método é similar ao método FD em termos de formulação e capacidade de simulação, e consiste em sugerir um valor de impedância para cada segmento discretizado de uma determinada aplicação, ou seja, o problema é dividido em segmentos conectados entre si através de impedâncias.

Geralmente se empregam métodos probabilísticos na avaliação de EMC, e devem ser considerados parâmetros que compreendam as características de equipamentos, do corpo humano, do solo, das descargas atmosféricas e dos surtos eletromagnéticos. O cálculo de transitórios em sistemas de aterramento pode ser obtido no domínio da freqüência ou do tempo e devem ser considerados os diferentes parâmetros do meio (resistividade, permissividade elétrica e permeabilidade magnética) para se computar as impedâncias dos elementos no ar e no solo [6].

O estudo da tensão de passo visa à segurança das pessoas próximas a sistemas elétricos de baixa tensão em atendimento às Normas NBR-5410 da ABNT [7], que é a primeira medida de proteção coletiva que se deve usar em uma instalação elétrica de baixa tensão, e NR-10 do MTE (Portaria 598) [8] que estabelece os requisitos e as condições mínimas para implementação de medidas de controle e sistemas preventivos ao risco elétrico.

Um roteiro de leitura está sendo proposto para este texto. Sendo que, no Capítulo 1, além de fazer uma introdução geral, apresenta este roteiro de leitura. No Capítulo 2 são apresentados os objetivos.

No Capítulo 3 é feita uma abordagem bibliográfica que incluem temas como Compatibilidade Eletromagnética, Descargas Atmosféricas, Sistemas de Proteção contra Descargas Atmosféricas, Sistemas de Aterramento Elétrico; Simulação Eletromagnética, TLM Aplicado a Sistemas de Aterramento e Tensão de Passo.

No Capítulo 4 é apresentada a Teoria da Transformada de Incerteza. Seguido dos Capítulos 5 e 6 que trazem Resultados e Sugestões de Trabalhos Futuros, respectivamente.

2 – OBJETIVOS

A meta inicial deste trabalho é combinar simulação eletromagnética com incerteza causada por variação de parâmetro. Estes parâmetros são a permissividade relativa e a condutividade do solo em sistemas de aterramento. A função densidade de probabilidade é modelada como sendo uniforme. A escolha foi baseada na vasta variação de parâmetros elétricos em sistemas de aterramento.

Este trabalho está voltado ao estudo de fenômenos eletromagnéticos através de modelos numéricos de discretização. No caso de problemas eletromagnéticos com fenômenos transitórios a aplicação do método da Modelagem por Linha de Transmissão possui a eficiência necessária. Neste caso o objetivo é obter as tensões e correntes em cada nó que se propaga por uma malha tridimensional de acordo com o princípio de *Huygens* (Segundo o qual, cada ponto na frente de onda age como uma fonte produzindo ondas secundárias que espalham em todas as direções. A função envelope das frentes de onda das ondas secundárias forma a nova frente de onda total) correspondentes aos campos elétricos e magnéticos respectivamente. Neste caso a malha tridimensional representa uma porção do solo sob estudo.

A utilização do TLM se deve a fato de ser um método matemático utilizado na resolução numérica das equações de *Maxwell* para os casos mais gerais de propagação eletromagnética, permitindo a modelagem de problemas tridimensionais com estruturas geométricas complexas, materiais com propriedades não lineares, não homogêneos, com perdas, dispersivos (dependentes da frequência) e anisotrópicos como é o caso solo que atua como dielétrico em sistemas de aterramentos elétricos.

Já a utilização da UT se deve ao fato de ser um método rápido (necessita de pouquíssimas simulações) e confiável para se chegar ao valor esperado de uma grandeza e seu desvio padrão.

Este trabalho objetiva avaliar os problemas decorrentes das descargas atmosféricas, principalmente aqueles relacionados com a tensão de passo, os quais são causas de litígio devido à morte ou danos. Isto porque a base para projetos de engenharia precisa ser robusta e transparente para administrar este risco.

3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 - COMPATIBILIDADE ELETROMAGNÉTICA

Denomina-se EMC a habilidade de um dispositivo ou sistema elétrico/eletrônico de funcionar satisfatoriamente dentro de um ambiente eletromagnético sem introduzir níveis intoleráveis de EMI (*ElectroMagnetic Interference* - Interferência Eletromagnética) e sem ser suscetível aos níveis considerados aceitáveis de EMI. É a perfeita ambientação de um dispositivo, elétrico, magnético, biológico, etc. Ela significa que um dispositivo é compatível elétrica e magneticamente com o meio externo e interno, veja mais em [9]. A compatibilidade eletromagnética pode ser dividida em diversos tópicos, tais como, blindagem, emissividade e susceptibilidade, filtros e supressores, protetores elétricos, aterramento, descarga atmosférica, descarga eletrostática, componentes harmônicos, medições eletromagnéticas, etc. Geralmente se empregam métodos probabilísticos na avaliação de aterramentos de proteção e descargas atmosféricas.

A saúde de um determinado ambiente eletromagnético pode ser avaliada pelo grau de emissões de ruído que podem ser irradiadas através do ar (interferências irradiadas) ou conduzidas pelos cabos de alimentação e comunicação (interferências conduzidas) [10]. Todos os sistemas alimentados com CA (Corrente Alternada) ou CC (Corrente Contínua) devem ser aterrados para segurança e minimização de ruídos. Este aterramento é considerado como aterramento de referência de sinal. É essencial, entretanto, que o aterramento de segurança e de sinal sejam integrados para atender os requisitos de segurança e de EMC. As intensidades das perturbações eletromagnéticas são dadas pelos parâmetros volts (V), amperes (A) para o modo de condução e volts por metro (V/m) e amperes por metro (A/m) para o modo de radiação. A frequência é um dos principais fatores que caracterizam uma onda eletromagnética e na EMC as soluções adotadas são diferentes conforme se trate de baixa ou de alta frequência.

As características de um campo eletromagnético são determinadas pela sua fonte, pelo meio de propagação e pela distância da fonte. Quando próxima (até $\lambda/2$), estas são determinadas principalmente pela fonte. Quando afastada (ondas planas) são determinadas principalmente pelo meio de propagação. No caso das descargas atmosféricas devem-se considerar as descargas diretas e as descargas no solo distantes ou próximas. Na avaliação da EMC devem-se considerar parâmetros que compreendam as características do solo, das

descargas atmosféricas e dos surtos eletromagnéticos [11]. Deve-se também considerar os efeitos corona, skin e ionização do solo [6].

Apesar do crescente desenvolvimento de novas técnicas de proteção contra descargas atmosféricas, tais como as recomendações de projeto SPDA (Sistemas de Proteção Contra Descargas Atmosféricas) atuais e as novas tecnologias de dispositivos de proteção, os problemas decorrentes deste fenômeno têm assumido proporções bastante elevadas.

A norma NBR-5419 [13] da ABNT apresenta recomendações necessárias à proteção externa e interna de estruturas tais como a interceptação das descargas atmosféricas pelos captadores, a condução das correntes do raio pelos condutores de descida, a dispersão desta corrente no sistema de aterramento, a equipotencialização das estruturas e dutos metálicos, entre outras.

A descarga atmosférica (raio) sobre qualquer ponto de impacto provoca transitórios que se caracterizam por sua curta duração, crescimento rápido e valores de crista muito elevados. É um fenômeno absolutamente imprevisível e aleatório, tanto em relação às suas características elétricas (corrente, tempo, etc) como na sua ocorrência.

Não existe proteção total (100%), mas seguindo as determinações das Normas Brasileiras, pode-se atingir graus de proteção da ordem de 98% [14] se houver um projeto SPDA bem elaborado, com um sistema de aterramento elétrico adequado e confiável. Um projeto bem elaborado leva em consideração a área da edificação, sua altura, a densidade de descargas atmosféricas previstas na região e o sistema de aterramento elétrico. As normas que determinam os projetos e suas execuções no Brasil são NBR-5410, NBR-5419 e NBR-7117.

Para assegurar a dispersão da corrente de descarga atmosférica no solo sem causar sobretensões perigosas, o arranjo e as dimensões do aterramento são mais importantes que o próprio valor da resistência de aterramento [15]. As diferentes geometrias das malhas estão relacionadas com o espaço para instalação da malha, com o tipo de terreno e com as necessidades de aterramento elétrico. Estas malhas são constituídas por eletrodos de terra que devem suportar diferentes correntes que escoam para o solo. São vários os parâmetros de uma malha de aterramento, ou seja, parâmetros do solo, parâmetros geométricos e sinal de entrada. Os parâmetros do solo são a resistividade elétrica (obtida a partir da estratificação do solo) e a permissividade elétrica (medida em laboratório a partir de uma amostra do solo). Os parâmetros da topologia do aterramento elétrico são a bitola, o

comprimento e a profundidade dos cabos e/ou hastes, a forma das retículas e a geometria da malha.

A principal função do aterramento é proteger as pessoas contra os perigos de choques elétricos. A severidade de um choque elétrico é função da intensidade da corrente e do caminho desta pelo corpo.

Nem sempre é possível obter uma resistência de terra de baixo valor. Além disso, esse valor raramente é constante, pois depende da umidade do solo e por isso apresenta variações sazonais. Um fator essencial na manutenção da segurança das pessoas no caso de uma alta resistência de terra é o conceito de equipotencialidade. Se todas as massas estiverem num mesmo potencial uma pessoa pode tocar em uma ou várias massas ao mesmo tempo sem risco [15].

Este trabalho se dedica aos problemas de EMC causados por descargas atmosféricas na superfície da Terra, conduzidas ou não para o solo, e suas conseqüências para os seres vivos. Apresenta-se, a seguir, uma revisão bibliográfica sobre descargas atmosféricas.

3.2 - DESCARGAS ATMOSFÉRICAS

O Brasil, devido a sua grande extensão territorial e ao fato de estar próximo do equador geográfico, é um dos países de maior incidência de descarga atmosférica no mundo. Em média quase 10 raios atingem o solo brasileiro raios por quilômetro quadrado por ano [16] (a densidade de raios por ano por área é conhecida como índice ceráunico). Os raios são descargas elétricas que ocorrem devido ao acúmulo de cargas elétricas em regiões localizadas da atmosfera, em geral dentro de tempestades. A descarga inicia-se quando o campo elétrico (cerca de 3 milhões de V/m) produzido por estas cargas elétricas excede a capacidade isolante do ar em um dado local na atmosfera.

Os raios duram em média em torno de 0,25s e percorrem na atmosfera uma trajetória típica de 5km a 10km. Dentro deste intervalo de tempo, a corrente elétrica sofre grandes variações. Em menos de 0,01% dos casos a corrente excede 200kA. A corrente flui em um canal com um diâmetro de uns poucos centímetros, onde a temperatura atinge valores máximos tão elevados quanto 30.000°C e a pressão chega a valores de dezenas de atm. Com esta pressão e temperatura, o ar ao seu redor expande-se em alta velocidade. Estas compressões se propagam em todas as direções dando origem a uma onda sonora (trovão – 50Hz a 100Hz). A maior parte da energia do raio (mais de 90%) é gasta na

expansão do ar nos primeiros metros ao redor do canal, sendo o restante convertido em energia térmica, energia acústica, energia eletromagnética (parte desta na forma luminosa) e energia elétrica no solo. Os raios são responsáveis por 200 mortes por ano no Brasil e prejuízos materiais estimados em torno de 500 milhões de dólares [16]. A Figura 3.1 mostra o mapa do índice cerâmico do Brasil. Veja mais detalhes em [16].

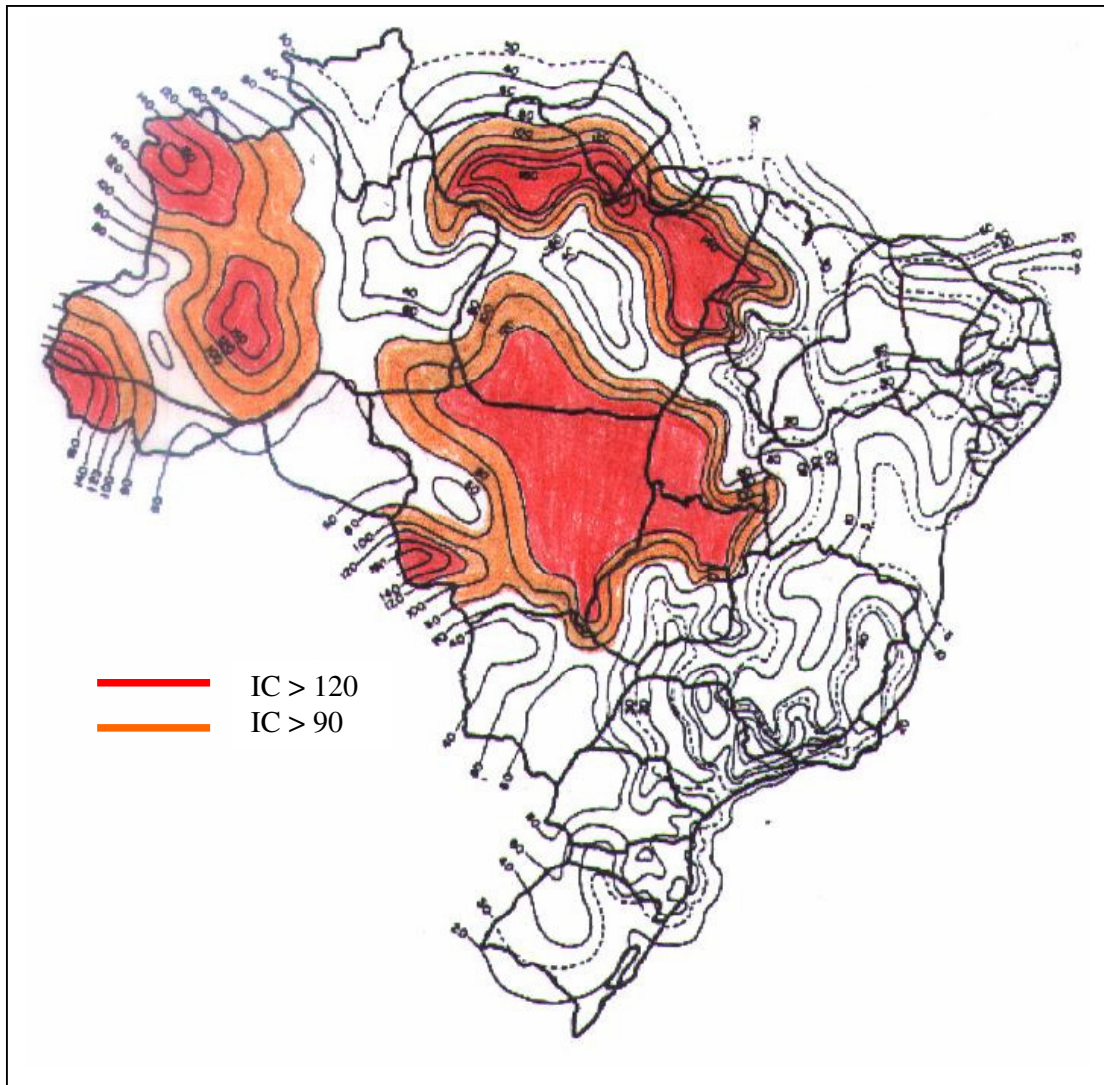


Figura 3.1. Mapa do índice cerâmico do Brasil [16].

As leis físicas básicas para explicar a eletricidade atmosférica são descritas por um conjunto de equações conhecidas por equações de *Maxwell*.

Um fato interessante que se observa na natureza é que o raio prefere terrenos maus condutores, como os graníticos ou xistosos, ao invés de terrenos bons condutores como os calcários. Isto se dá, porque o terreno mal condutor entre a nuvem e o solo forma um grande capacitor. A enorme diferença de potencial entre a nuvem e o solo provoca a

ionização do ar. A ionização do ar diminui a distância de isolamento entre nuvem e solo fazendo com que o raio caia [17].

O primeiro modelo de estrutura elétrica de uma nuvem de tempestade isolada foi proposta no começo do século 20 com base em medidas de campo elétrico e da carga contida nas partículas de chuva. Ele pode ser descrito como um dipolo elétrico composto por dois centros de carga. O centro positivo ocupa a metade superior do volume da nuvem e o centro negativo está localizado na metade inferior da nuvem. A carga nestes centros pode variar de um local para outro e de nuvem para nuvem de +/-10C a mais de algumas centenas de *coulombs*. Após várias propostas de outros modelos de estrutura elétrica de uma nuvem, medidas de campo elétrico efetuadas por balões que penetram as nuvens de tempestades foram realizadas na década passada mostrando que a estrutura elétrica de uma nuvem de tempestade é mais complexa, caracterizado como uma estrutura multipolar e variando de uma região para outra dentro da nuvem e ao longo do desenvolvimento da nuvem.

Embora o raio possa parecer para o olho humano uma descarga contínua, na verdade ele é formado de múltiplas descargas, que se sucedem em intervalos de tempo muito curtos. Os raios podem ser positivos ou negativos. Costumam percorrer um grande caminho dentro da nuvem antes de sair da nuvem e apresentam ramificações de cima para baixo. A maior parte destes são negativos (+/-90%), os +/-10% restantes são relâmpagos positivos.

Um raio negativo é formado por diversas etapas. Ele inicia-se com fracas descargas dentro da nuvem, em alturas em torno de 3km a 5km, durante um período de 10ms a 100ms (período de quebra de rigidez preliminar). A maioria dos pulsos são bipolares com duração de +/-50 μ s, separados por intervalos de +/-100 μ s [16].

Partindo de uma nuvem enorme com cargas separadas, a presença de cargas negativas na base da nuvem induz uma carga positiva no solo, resultando em diferenças de potencial de milhões de volts entre a nuvem e a terra. Uma tensão tão alta pode romper a capacidade de isolamento do ar (chamada de rigidez dielétrica) fazendo com que elétrons comecem a se mover da nuvem para o solo. A Figura 3.2 mostra as etapas de formação de uma descarga atmosférica.

Os elétrons se movem na direção do solo em uma sucessão de passos, cada um com cerca de 50m. Esse percurso em zig-zag é chamado de líder escalonado. Líder porque abre caminho para outros elétrons e escalonado porque é uma seqüência de degraus. Quando a ponta do líder chega a uns 20m do solo, uma descarga, chamada descarga de conexão,

inicia-se de algum local pontudo no solo e fecha o circuito, formando um condutor que liga o solo à nuvem [17], veja modelamento de raio em [18].

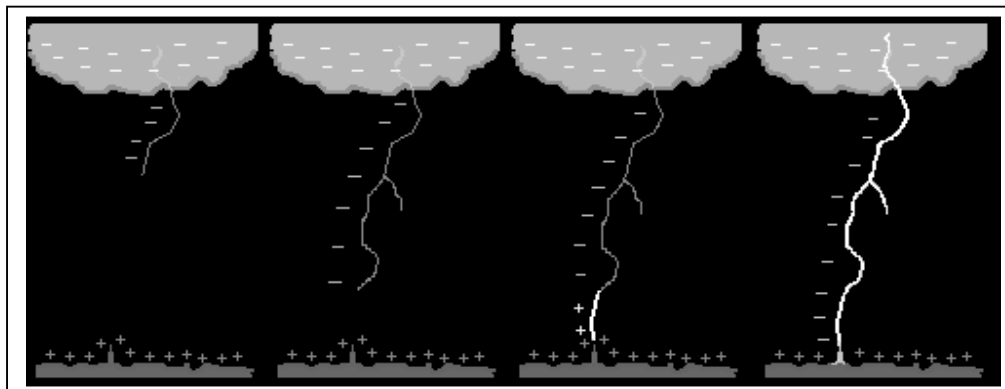


Figura 3.2. Etapas de formação de uma descarga atmosférica [17].

Tendo apresentado a revisão bibliográfica sobre descargas atmosféricas, apresentaremos a seguir uma revisão bibliográfica sobre sistemas de condução das descargas atmosféricas para o solo, ou seja, sistemas de proteção contra descargas atmosféricas.

3.3 - SISTEMAS DE PROTEÇÃO CONTRA DESCARGAS ATMOSFÉRICAS

A instalação de um SPDA tem por função neutralizar, pelo poder de atração das pontas, o crescimento do gradiente de potencial elétrico entre o solo e as nuvens, através do permanente escoamento de cargas elétricas do meio ambiente; e, oferecer a descarga atmosférica que for cair em suas proximidades um caminho preferencial, reduzindo os riscos de sua incidência sobre as estruturas.

Nas áreas urbanas as pessoas se encontram mais seguras devido à presença dos pára-raios. Eles são compostos por um suporte condutor colocado na parte mais alta do local onde se deseja proteger, tendo na sua extremidade um material metálico de altíssima resistência ao calor (captor) [16]. A outra ponta do suporte se liga por cabos condutores metálicos a barras metálicas (condutores de cobre ou revestidos de cobre – haste tipo *cooperweld*) enterrados no solo, formando um sistema de aterramento (Figura 3.3).

A finalidade do aterramento nas instalações de sistemas de proteção contra descargas atmosféricas é dissipar no solo as correntes dos raios recebidas pelos captores e conduzidas pelas descidas, minimizando ao mesmo tempo os potenciais gerados no sistema de proteção e no solo. Para realizar tal função, o sistema de aterramento deve possuir reduzido valor de impedância e uma topologia (configuração geométrica) adequada [16]. A

norma NBR-5410 não obriga nenhum valor de resistência de aterramento, mas recomenda 10Ω . Porém são aceitos valores acima desde que justificados tecnicamente [17].

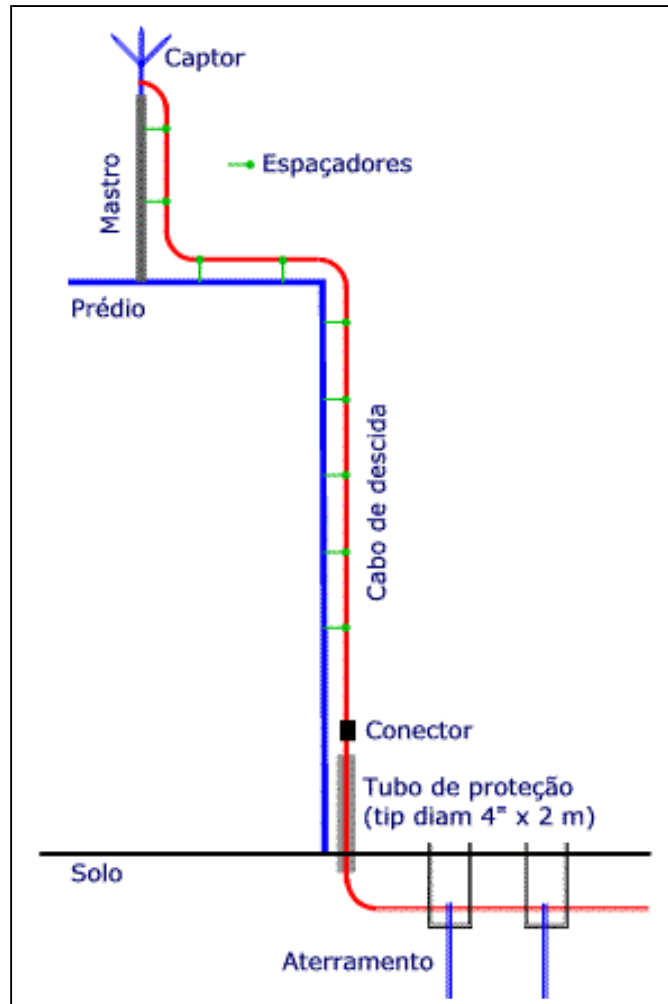


Figura 3.3. Estrutura total de um SPDA com um captor [16].

Quando da dissipação não devem surgir no solo diferenças de potencial que causem tensões de passo perigosas às pessoas e não devem surgir entre as partes metálicas e o solo diferenças de potencial que causem tensões de toque ou descargas laterais às pessoas; e para serem satisfeitas essas condições procura-se equalizar os referenciais de potencial das diferentes entradas de modo que não surjam diferenças de potencial perigosas aos equipamentos [19].

O número de raios incidentes (N_i) é a quantidade de raios que incide anualmente numa dada área de captação e, de acordo com a norma NBR-5419 se $N_i > 10^{-3}$ o SPDA é indispensável e se $N_i < 10^{-5}$ o SPDA é dispensável.

Desde sua descoberta por *Benjamin Franklin*, o pára-raios é a melhor forma de proteção. De modo geral, seu alcance de proteção abrange uma área circular de raio igual à altura da torre de sustentação do pára-raios [17] [20] (veja Figura 3.4).

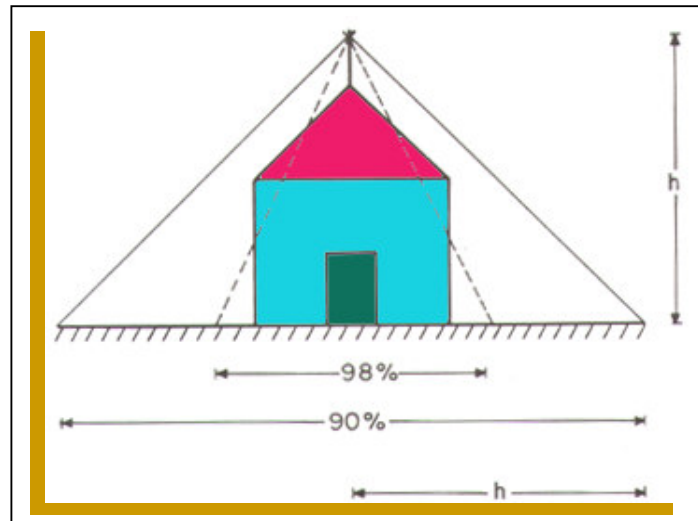


Figura 3.4. Região de proteção de um captor *Franklin* de torre vertical [20].

Em particular, se tem mostrado que quanto maior a altura da estrutura menos aplicável é esta teoria e que outros métodos de proteção devem ser utilizados.

Temos também outro método conhecido como teoria da esfera rolante (método eletrogeométrico). Esta teoria é baseada no conceito de distância de atração, que é a distância entre a ponta do líder escalonado e o ponto de queda do raio no solo, no instante da quebra de rigidez dielétrica do ar próximo ao solo. Na teoria da esfera rolante a zona de proteção é dependente do pico de corrente da descarga de retorno, visto que a distância de atração é aproximadamente proporcional ao pico de corrente [16].

O método da esfera rolante (esfera fictícia) é uma evolução do *Franklin* e mais recente (década de 80). É um método mais apurado para a obtenção da zona de proteção do sistema de proteção adotado. Se analisarmos apenas um captor, a proteção oferecida pelos dois métodos é muito parecida, a diferença começa a aparecer quando se compara a proteção combinada (interação) com diversos captores, onde o eletrogeométrico é melhor [17].

A distância de atração (hs) é definida como a maior distância em que o raio será atraído pelo captor ou pela terra e pode ser calculada de muitas maneiras [20]. Entre elas, para este modelo:

$$hs = 10.I^{\frac{2}{3}} \quad (3.1)$$

Onde:

h_s é o raio da esfera rolante em metros;

I é a corrente de crista do raio em kA.

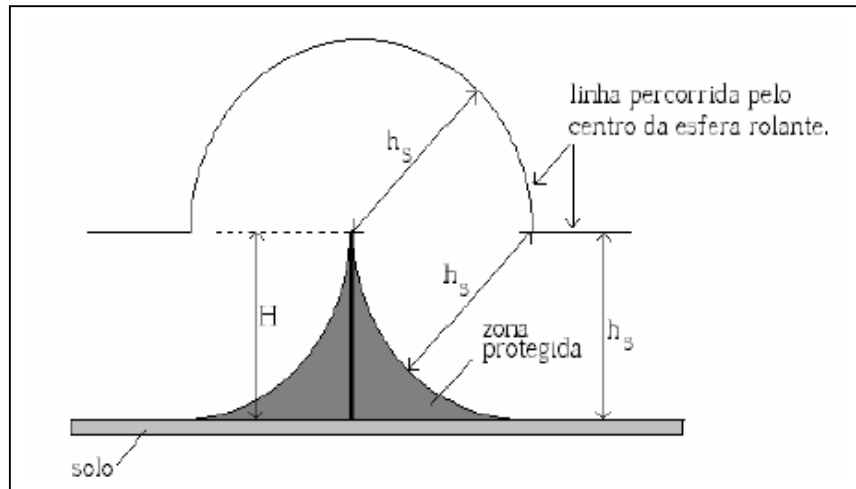


Figura 3.5. Zona de proteção da esfera rolante [17].

Esfera rolante é a esfera obtida com o raio igual à distância de atração (veja Figura 3.5). Como a intensidade média dos raios é de +/-15kA, cujo $h_s=60,8m$, pode-se adotar a Tabela 3.1 para o raio da esfera rolante.

Tabela 3.1. Relação entre nível de proteção, eficiência do SPDA e o raio da esfera [17].

Nível de Proteção	Eficiência do SPDA	Raio da Esfera Rolante (m)
I	95% a 98%	20
II	90% a 95%	30
III	80% a 90%	45
IV	Até 80%	60

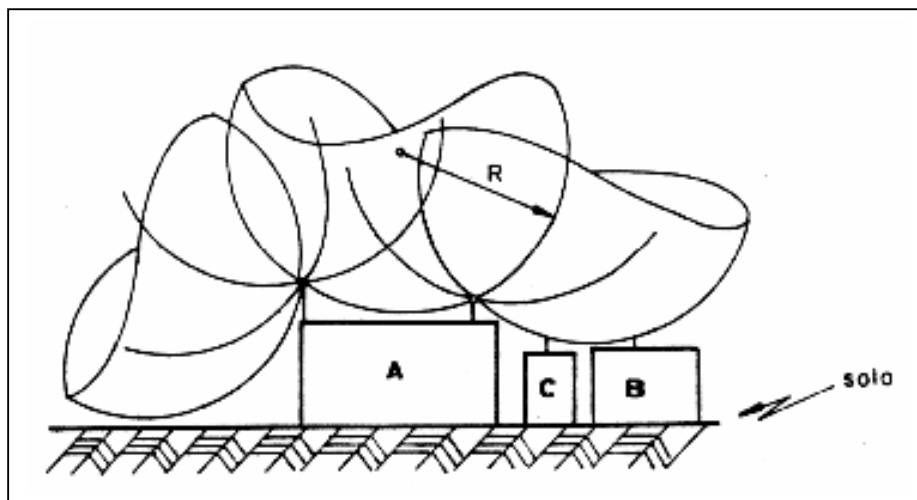


Figura 3.6. Exemplos de proteção de várias estruturas pelo método eletrogeométrico [17].

A zona protegida é a região em que a esfera rolante não consegue tocar (veja Figura 3.6). O sistema de proteção contra descarga atmosférica de uma cidade deve ser constituído de modo que a esfera rolante não toque em nenhuma estrutura [17].

Para estruturas altas, prédios industriais ou construções particularmente sensíveis a danos produzidos por raios, outro tipo de sistema de proteção que utiliza condutores horizontais conectando os terminais aéreos de modo a formar uma gaiola (método da gaiola de *Faraday*) tem sido utilizado. Ele consiste em criar uma estrutura de metal similar a uma gaiola, que atua como uma blindagem contra raios, protegendo o que estiver em seu interior [16]. A proteção por gaiola de *Faraday* é muito eficiente e largamente utilizada (veja Figura 3.7) [20].

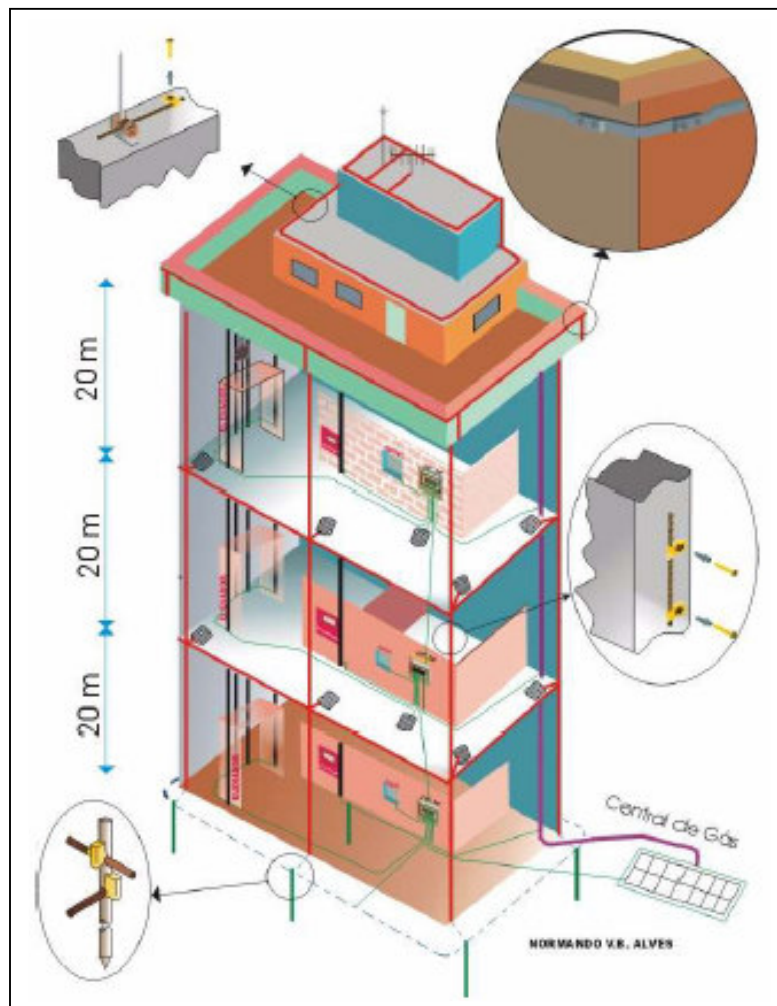


Figura 3.7. Método da gaiola de *Faraday* [20].

Ao projetar a captação, o primeiro passo consiste em distribuir condutores metálicos pela periferia da edificação e distribuir as descidas [21]. O uso de mastros com

captadores *Franklin* em prédios altos, visa à proteção localizada de antenas e outras estruturas existentes no topo da edificação, devendo o restante do prédio ser protegido pelos cabos que compõem a malha da Gaiola de *Faraday*.

Os níveis de proteção indicam o tipo de utilização da edificação, o grau de risco e a partir deles é que se determinam os dados técnicos da instalação, tais como: dimensões da gaiola, ângulos de captadores, espaçamentos das descidas, etc. Veja mais em [13].

Não é função do SPDA proteger equipamentos eletro-eletrônicos, pois mesmo uma descarga captada e conduzida ao solo com segurança, produz forte interferência eletromagnética, capaz de danificar estes equipamentos. Não se deve esquecer que a proteção pelo método da gaiola de *Faraday* não assegura que o campo eletromagnético será nulo em todo o interior da estrutura. Quando a gaiola é atingida diretamente por um raio, o campo eletromagnético só será nulo se a corrente se distribuir uniformemente por todos os condutores da gaiola e assim mesmo só no centro da gaiola, veja detalhes em [22]. Deve-se preocupar com as vizinhanças dos condutores da gaiola porque em torno deles haverá um campo magnético que poderá induzir tensões em condutores paralelos a eles. Assim estes condutores devem ser instalados no interior de eletrodutos ou eletrocalhas metálicas (principalmente alumínio) aterradas.

É de fundamental importância que após a instalação haja uma manutenção periódica a fim de se garantir a confiabilidade do sistema. É também recomendada vistoria toda vez que a edificação for atingida por descarga direta [21]. A implantação e manutenção de SPDA são normalizadas internacionalmente pela IEC (*International Electrotechnical Commission* – Comissão Internacional de Eletrotécnica) e em cada país por entidades próprias, como a ABNT no Brasil, a NFPA nos E.U.A. e a BSI na Inglaterra. Somente os projetos elaborados com base em disposições destas normas podem assegurar uma instalação dita eficiente e confiável. Entretanto, esta eficiência nunca atingirá os 100% estando, mesmo estas instalações, sujeitas à falhas de proteção.

Após esta revisão bibliográfica sobre SPDA, apresentaremos a seguir uma revisão bibliográfica sobre a parte essencial destes, ou seja, sistemas de aterramento elétrico.

3.4 - SISTEMAS DE ATERRAMENTO ELÉTRICO

Em qualquer edificação moderna, encontra-se instalações elétricas, eletrônicas e mecânicas que necessitam de alguma forma de aterramento elétrico, sejam para uma proteção em caso de eventual falha de algum sistema, para dissipação de eletricidade

estática ou ainda proteções contra descargas atmosféricas [23]. A resistência de aterramento é a combinação da forma como a corrente elétrica flui no solo com a resistividade do mesmo e depende das dimensões e características construtivas do sistema (malha de terra) e das características do solo, que depende da sua natureza geológica [24] e de outros fatores como temperatura, umidade, sais dissolvidos, entre outros.

Os aterramentos elétricos mais simples são formados por uma ou mais hastes cilíndricas verticais cravadas no solo e eletricamente interligadas por cabos de cobre nu. Estas hastes são geralmente feitas de aço e revestidas com cobre. Os cabos são de cobre e geralmente utilizados como eletrodos horizontais. As fitas de cobre são pouco utilizadas na prática, muito embora forneçam uma baixa impedância de terra e resistência semelhante a um cabo de mesma seção e preço. A NBR-5419 especifica cabos de 50mm^2 , enquanto a NBR-5410, 25mm^2 . Entretanto pode-se encontrar em procedimentos industriais até 95mm^2 ou mais. As normas proíbem o uso de conectores enterrados, exigindo, nesses casos, a utilização de solda exotérmica [23].

A resistência de terra dos eletrodos consiste basicamente da resistência das conexões metálicas entre os eletrodos e o sistema de distribuição de cabos ao longo do prédio, da resistência de contato entre os eletrodos e a camada do solo, e da resistência do volume do solo nas vizinhanças da malha de terra. O sistema de aterramento funciona como um ponto de referência de terra e um sistema de neutralização de cargas. A neutralização de carga deverá ser processada em tempo menor ou igual a $20\mu\text{s}$. Desta forma, os sistemas elétricos, eletrônicos, ou qualquer outra parte do local sob influência da nuvem, deverão ter um caminho de baixa resistência e baixa impedância em direção ao ponto de contato de uma descarga atmosférica. A interface elétrica entre o sistema de aterramento e o solo é um dos elementos mais críticos para o estabelecimento de um bom aterramento.

Um sistema de aterramento está intimamente relacionado à resistência de aterramento, que por sua vez depende das características do solo. O solo é heterogêneo e pode ser estratificado em camadas horizontais, onde cada camada possui um valor próprio e relativamente constante de resistividade [25].

3.4.1 - Determinação dos Valores da Resistividade do Solo

Para fazer uma estratificação do solo é necessário fazer medições de campo dos valores da resistividade aparente. Mede-se valores em ohms e calcula-se o valor da

resistividade em $\Omega.m$. Há dois métodos principais para medição de resistividade aparente para fins de aterramento, o método de *Wenner* e o método de *Schlumberger*. A equação citada pela NBR-7117 da ABNT que normaliza o procedimento de medição para o método de *Wenner* é a seguinte:

$$\rho_w(d) = \frac{4\pi.d.R}{1 + \frac{2d}{\sqrt{d^2 + 4p^2}} - \frac{d}{\sqrt{d^2 + p^2}}} \quad (3.2)$$

Onde:

$\rho_w(d)$ é a resistividade do solo ($\Omega.m$);

d é a distância entre os eletrodos (m);

p é a profundidade do ponto no solo (m);

R é a resistência medida (Ω).

Como $d \gg p$, pode-se simplificar a Equação (3.2) para $\rho_w(d) = 2\pi.d.R$.

A estratificação do solo é exatamente a divisão do solo em camadas, determinando-se suas resistividades e respectivas espessuras (profundidades). Com os valores obtidos traça-se a curva de resistividade em função das distâncias utilizadas entre os eletrodos durante a medição. Existem vários métodos para se efetuar uma estratificação do solo [23] [25]. Mas já existem vários *softwares* para a determinação da estratificação do solo, utilizando os valores das medições realizadas pelo método de *Wenner*.

Quando se projeta um aterramento há necessidade de se empregar um valor de resistividade que represente a situação do solo que o eletrodo abrangerá. Essas camadas são normalmente horizontais e paralelas à superfície do solo. De posse dos valores das resistividades das camadas do solo e as respectivas profundidades, constrói-se o perfil de resistividade (veja Figura 3.8).

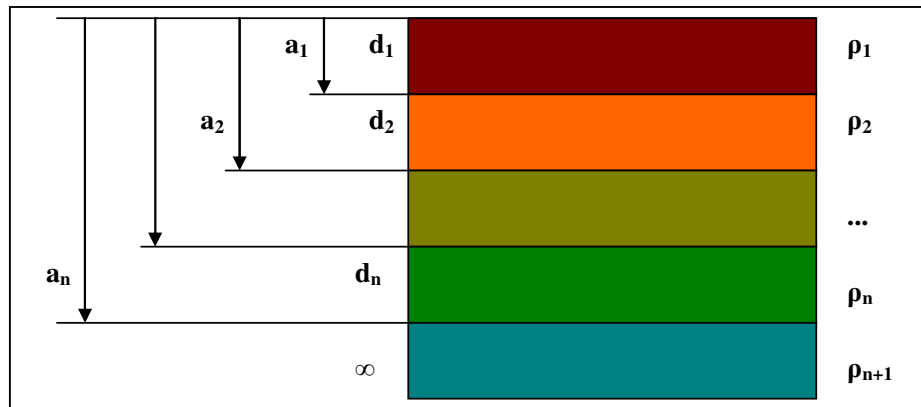


Figura 3.8. Solo estratificado em 4 camadas.

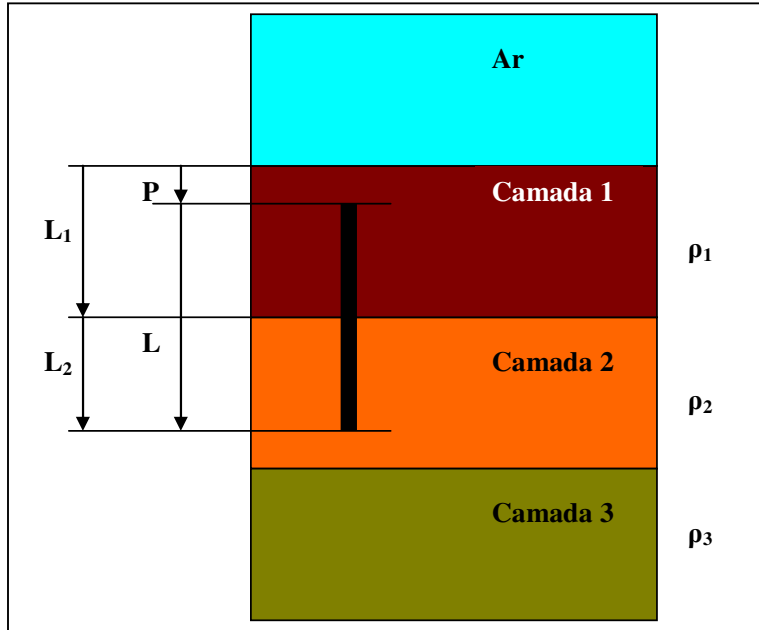


Figura 3.9. Exemplo de haste cravada em solo de três camadas.

Para se calcular a resistência de aterramento de uma única haste cravada num solo não homogêneo deve-se considerar apenas as resistividades das camadas atingidas por essa haste (veja Figura 3.9). A dispersão das correntes se dará proporcionalmente ao valor da resistividade de cada camada e ao comprimento de haste nela situado. A resistividade calculada pela Equação (3.2) é a que deverá ser utilizada no cálculo da resistência de aterramento [24].

$$\rho = \frac{L_1 + L_2}{\frac{L_1}{\rho_1} + \frac{L_2}{\rho_2}} \quad (3.3)$$

Onde:

ρ é a resistividade do solo resultante das duas camadas ($\Omega.m$);

L_1 é a espessura da primeira camada (m);

ρ_1 é a resistividade do solo da primeira camada ($\Omega.m$);

L_2 é o comprimento da haste presente na segunda camada (m);

ρ_2 é a resistividade do solo da segunda camada ($\Omega.m$).

Para se medir a resistência de terra se utiliza o método que consiste em medir a resistência do aterramento em função da queda de potencial usando uma terra auxiliar, criando uma estrutura composta por uma haste de injeção de corrente, uma haste de medição de potencial e a resistência de aterramento que está sendo medida (método *Wenner*) (Figura 3.10).

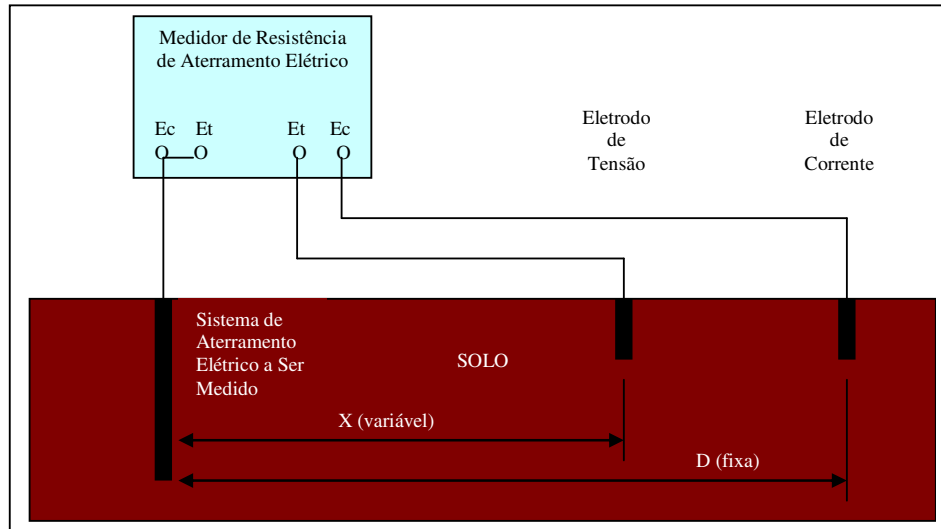


Figura 3.10. Configuração de ligação do terrômetro para medição de resistência de terra.

Como o solo normalmente não apresenta condições ideais, como homogeneidade, umidade constante, etc. Assim convém realizar medições de verificação. Posteriormente, é recomendado realizar medições periódicas para acompanhar o desempenho da malha ao longo do tempo. A norma NBR-5419 especifica intervalos de 3 anos no caso geral e de 1 ano nas instalações mais críticas, entre cada medição, o que não impede que se façam medições em espaços de tempo menores para um melhor controle.

É interessante realizar medições nas estações de chuva e de seca, alternadamente, o que torna possível avaliar o comportamento do terreno local a variação de umidade, não apenas para a manutenção do aterramento efetuado, mas também para projetar melhor futuros aterramentos na mesma área [23].

3.4.2 - Características Elétricas e Mecânicas do Solo

Em um sistema de aterramento, sem dúvida, o maior problema refere-se ao solo, com suas inconsistências, heterogeneidades e anisotropias, bem como a variação sazonal de suas propriedades. O solo é o meio no qual ficarão imersos os eletrodos de aterramento, de forma que suas propriedades elétricas são determinantes para o dimensionamento destes eletrodos. O solo é um condutor de baixa qualidade, com valores típicos de resistividade na faixa de $100\Omega.m$ a $1k\Omega.m$. O valor da resistividade depende da composição do solo que é complexa. A resistividade do solo é bastante sensível ao teor de umidade do solo até um valor de 20% (veja Figura 3.11); aumentar a umidade acima deste valor provocará variações menores na resistividade (NBR-7117). Outro fator que influencia muito a

resistividade do solo é a quantidade de sais presentes no solo. A água seria um material de baixa condutividade (baixa perda) se não contivesse sais que, através da ionização, permitem a condução de correntes elétricas [23].

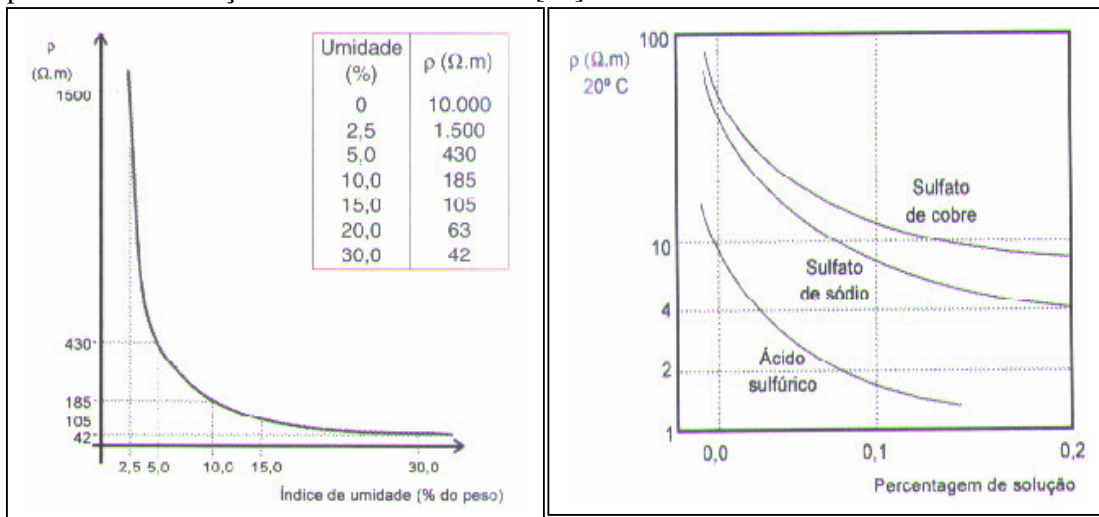


Figura 3.11. Resistividade do solo comparada ao teor de umidade ou salinidade [12].

O valor da resistividade do solo é imprescindível para o cálculo dos valores máximos de resistência da malha de terra, tensão de passo e de toque. A variação é grande para um mesmo tipo de solo. Assim, o ideal é efetuar medições em diversas épocas do ano para definir o melhor valor a considerar [24]. A Tabela 3.2 mostra os valores médios para os tipos mais comuns de solo.

Em condições normais, os solos do Cerrado apresentam alta acidez, baixo pH (5,2) e presença de elementos químicos como o alumínio, ou seja, o solo do Cerrado é ácido. Os principais constituintes do solo são a textura, a estrutura e a porosidade.

No solo com alta resistividade, a condutância de terra dos cabos de aterramento é muito menor que no solo com baixa resistividade, assim, para a mesma corrente de dissipação, o potencial em elevação do mesmo cabo de aterramento é muito mais alto em solo com alta resistividade. Assim, no início do impulso de corrente, a parte da corrente do sistema de aterramento dissipada no solo com alta resistividade terá potencial maior que no solo com baixa resistividade. Por outro lado, as outras partes do sistema de aterramento onde o impulso de corrente não alcançou, o potencial nestas partes será quase zero. Conseqüentemente, haverá grande diferença de potencial entre partes diferentes do sistema de aterramento no começo do impulso de corrente. O problema de desigual distribuição de tensão é muito importante em sistema de aterramento multiponto. Se um sistema elétrico complexo é conectado à grade de aterramento com método de aterramento multiponto, pontos diferentes terão potenciais diferentes sob descarga atmosférica. Então uma corrente

inesperada do sistema de aterramento poderia fluir no sistema elétrico e poderia causar sérios problemas de EMC.

Tabela 3.2. Resistividade dos tipos mais comuns de solo [24].

Tipo de Solo	Resistividade ($\Omega.m$)
Lama	5 a 100
Húmus	10 a 150
Argila com 40% de umidade	80
Argila com 20% de umidade	330
Solos aráveis	50 a 500
Argila seca	1.500 a 5.000
Limo	20 a 100
Argila com areia	80 a 200
Turfa	150 a 300
Areia comum	3.000 a 8.000
Areia com 90% de umidade	1.300
Terra de jardim com 50% de umidade	140
Terra de jardim com 20% de umidade	480
Calcário fissurado	500 a 1.000
Calcário compactado	1.000 a 5.000
Granito	1.500 a 10.000
Basalto	10.000 a 20.000

A influência da permissividade relativa do solo é mais relacionada ao acoplamento capacitivo entre os condutores de aterramento porque o solo é um meio dielétrico. Assim, é óbvio que a influência da permissividade do solo no comportamento transiente do sistema de aterramento é efetivo através da influência da capacitância própria e mútua dos condutores de aterramento. No solo com resistividade mais baixa, a corrente de condução é dominante, assim, a influência da permissividade do solo no comportamento transiente do sistema de aterramento comparado com a resistividade do solo é muito pequena e poderia ser negligenciada. Em solo com alta resistividade, o acoplamento capacitivo é mais efetivo porque a corrente de deslocamento é comparável com corrente de condução, especialmente, durante o tempo de elevação da corrente de injeção onde as altas frequências são dominantes. Conseqüentemente, no solo com resistividade muito alta, a influência da permissividade do solo no comportamento transiente do sistema de aterramento deve ser considerada para melhor precisão [26].

3.4.3 - Tratamento de um Solo de Alta Resistividade e Corrosão dos Eletrodos de Aterramento

Quando temos um solo cravável, porém de elevada resistividade, a melhor saída é o tratamento do solo com gel ou concreto [27].

Algumas aplicações exigem baixos valores de resistência de aterramento mesmo com uma pequena área disponível para colocação dos eletrodos e o solo apresenta alta resistividade. Nestas condições, uma solução econômica é o tratamento do solo. O princípio de funcionamento consiste na redução da resistividade do solo na região ao redor do eletrodo de terra através da adição adequada de, por exemplo, bentonita (gel natural de $\rho=20\Omega.m$), e o resultado final corresponde a um aumento virtual do diâmetro do eletrodo original, reduzindo conseqüentemente o valor da resistência de aterramento. O tratamento do solo só produz resultados satisfatórios quando a resistividade do solo é alta. As principais propriedades do gel químico são a estabilidade química, a insolubilidade em presença d'água, a higroscopia, a não corrosividade e a longevidade.

O concreto, sendo alcalino e higroscópico, quando enterrado, tende a absorver umidade e apresentar uma resistividade bem baixa (de $30\Omega.m$ a $100\Omega.m$), melhores que a maioria dos terrenos normalmente encontrados [23].

Quando se aplica este tipo de tratamento químico observam-se alterações das características do solo ao redor do eletrodo, resultando em redução do valor da resistividade traduzido por um coeficiente de redução de tratamento químico (K_T). Este coeficiente será tanto menor quanto maior for a resistividade do solo e é determinado na prática através da relação entre a resistência do eletrodo tratado quimicamente e a resistência do eletrodo sem o tratamento [24]. Os coeficientes de redução obtidos na prática variam de 0,05 a 0,50.

$$R_{1hT} = \frac{K_T \cdot \rho_a}{2\pi \cdot h} \ln \frac{4 \cdot h}{d} \quad (3.4)$$

Sendo:

K_T é a razão entre resistência após o tratamento e a resistência antes do tratamento.

A resistividade decresce com o aumento de sais no solo. Portanto o tratamento de um solo de alta resistividade, através de adição de sais minerais a sua composição química, resultará na obtenção de resistências de aterramento também menores. Contudo, a aplicação de alguns produtos, como o cloreto de sódio, apresenta bons resultados imediatos

e inúmeras desvantagens, destacando-se entre elas a possibilidade de rápida corrosão dos materiais de aterramento e diluição em presença de água.

A corrosão em barras de aterramento pode ocorrer pela ação eletroquímica (processo espontâneo) e/ou ação eletrolítica (potenciais externos) e/ou ação galvânica (diferença de potencial). Um eletrodo de aterramento é essencialmente um pedaço de metal envolvido por um eletrólito. Ao longo do tempo, os potenciais elétricos podem variar de um ponto do eletrodo para outro, como resultado da existência de áreas anódicas e catódicas. Estas áreas de diferentes potenciais elétricos são as bases para uma célula de corrosão. Desde que estejam em contato com um eletrólito comum (solo ou água).

A corrosão resultante de solos dissimilares, de forma muito similar às células de corrosão, podem se estabelecer em metais heterogêneos, uma haste de aterramento de aço/cobre atravessando solos heterogêneos pode estabelecer células de corrosão. O potencial natural de um metal em relação ao seu ambiente, pode variar com as diferenças na composição do eletrólito.

A corrosão consiste na deterioração dos materiais pela ação química ou eletroquímica do meio (oxidação, ataque químico, eletrólise, bacteriana). Ao se considerar o emprego de materiais nas instalações de sistemas de aterramento é necessário que estes resistam à ação do meio corrosivo.

Os processos de corrosão eletroquímica são mais freqüentes na natureza e se caracterizam basicamente pela necessidade da presença de água no estado líquido, de temperaturas abaixo do ponto de orvalho da água, sendo a grande maioria na temperatura ambiente; da formação de uma pilha ou célula de corrosão, com a circulação de elétrons na superfície metálica.

Os processos de corrosão química são denominados corrosão ou oxidação em altas temperaturas. Estes processos são menos freqüentes na natureza, envolvendo operações onde as temperaturas são elevadas. Tais processos corrosivos se caracterizam basicamente pela ausência da água líquida; temperaturas elevadas, sempre acima do ponto de orvalho da água; e, interação direta entre o metal e o meio corrosivo.

É um fato bem documentado que o pH do solo tem um efeito direto na vida útil de eletrodos metálicos (principalmente de aço). Mantendo-se todos outros elementos em condições inalteradas, quanto menor o pH (5 a 9), maior será a taxa de corrosão, resultando numa diminuição da vida útil do eletrodo.

3.4.4 - Mecanismo de Condução do Solo

Admitindo-se uma corrente contínua de valor I penetrando no solo no ponto O , por uniformidade e simetria esférica, esta corrente penetra uniformemente na casca da semi-esfera de raio r e produz uma densidade de corrente J que pode ser calculada por (veja Figura 3.12):

$$J = \frac{I}{2\pi \cdot r^2} \quad (3.5)$$

Então, admitindo-se o potencial da distribuição de campo elétrico no infinito igual a zero (ponto A_2) e A_1 a uma distância r do ponto O , temos:

$$V = \frac{\rho \cdot I}{2\pi \cdot r} \quad (3.6)$$

Onde:

V é o potencial no ponto A_1 ;

ρ é a resistividade do solo.

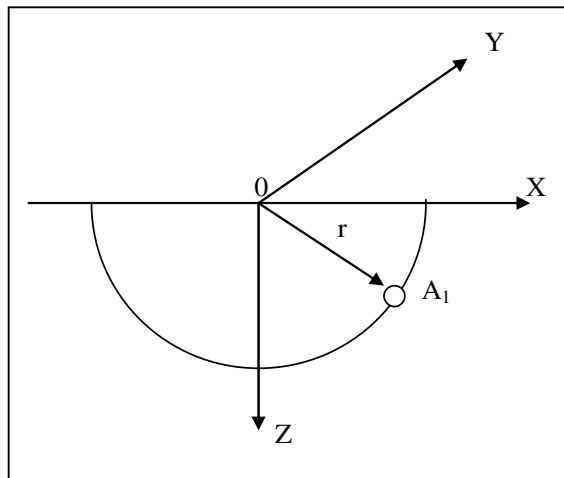


Figura 3.12. Diagrama de condução do solo.

Suponha uma massa metálica enterrada no solo recebendo um corrente I . Adotando-se um potencial igual à zero para um ponto remoto (devido à distribuição do campo elétrico no solo), pode-se determinar a resistência de aterramento deste sistema como sendo a relação entre o potencial nesta massa metálica e a corrente elétrica circulante. Sendo que as correntes elétricas iram passar da superfície desta massa metálica para o solo com certa distribuição de forma a deixar a superfície equipotencial. A somatória das correntes distribuídas que partem desta massa metálica para o solo resulta no valor total da corrente. De posse desta corrente e do potencial nesta massa metálica pode-se

determinar a resistência de aterramento, as tensões de passo, toque e transferência. Para este processo (Equipotencialidade Superficial), os cálculos são possíveis e bastante precisos com o auxílio de computadores a partir de formulações numéricas.

3.4.5 - Cálculo de Aterramentos pelo Processo de Distribuição Uniforme de Corrente

Seja uma haste vertical de comprimento l e raio r onde uma das extremidades permanece na superfície do solo e a outra a uma certa profundidade no solo. Aplicando o método das imagens, adotando um plano xy como referência, a uma distância $x=u$ a corrente $I(u)$ que circula pela haste é menor que a corrente aplicada na extremidade superior da haste e é função do ponto u na haste, uma vez que a corrente injetada na haste está deixando a haste para o solo desde $x=0$ até $x=l$. A corrente elementar que deixa o incremento du da haste é dI . Desta forma pode-se calcular o potencial em um ponto (xy) que o incremento du provoca. Sendo assim obtém-se o potencial no ponto (xy) devido à corrente total que deixa a haste:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_r^{\infty} E(r)dr = \frac{\rho \cdot I}{8\pi \cdot r} \\
 dI &= \frac{dI(u)}{du} du \\
 dV &= \frac{\rho}{8\pi \cdot r} dI \\
 r &= \sqrt{(x-u)^2 + y^2} \\
 V_{(xy)} &= \frac{\rho}{4\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{dI(u)du}{\sqrt{(x-u)^2 + y^2}}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Considerando a queda de tensão na haste desprezível impõe-se a condição de equipotencialidade na superfície da haste e determina a distribuição da corrente $I(u)$. Outro método é admitir uma distribuição uniforme de corrente na haste, obtendo-se a função potencial na superfície e trabalhando com o valor médio de potencial (método aproximado). Neste caso faremos $dI(u)$ constante e I linear em relação a u .

$$\begin{aligned}
\frac{dI(u)}{du} &= \frac{I}{l} \\
V_{(xy)} &= \frac{\rho \cdot I}{4\pi \cdot l} \int_{-l}^{+l} \frac{du}{\sqrt{(x-u)^2 + y^2}} \\
V_{(xy)} &= \frac{\rho \cdot I}{4\pi \cdot l} \ln \left(\frac{\sqrt{(x+l)^2 + y^2} + x+l}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2} + x-l} \right) \\
V_m &= \frac{1}{l} \int_0^l V(x,r) dx = \frac{\rho \cdot I}{4\pi \cdot l^2} \int_0^l \ln \left(\frac{\sqrt{(x+l)^2 + y^2} + x+l}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2} + x-l} \right) dx \\
V_m &= \frac{\rho \cdot I}{2\pi \cdot l} \left(\ln \left(\frac{l}{r} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2} \right) + \frac{r}{l} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2} \right) \right) \\
R_{1h} &= \frac{V_m}{I} = \frac{\rho}{2\pi \cdot l} \left(\ln \left(\frac{l}{r} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2} \right) + \frac{r}{l} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2} \right) \right) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Substituindo y pelo seu raio r e variando x desde 0 até l pode-se calcular o potencial na extremidade superficial da haste. Considerando que $l \gg r$ podemos calcular a resistência de aterramento para uma haste. Pela Equação (3.9) note que se pode diminuir o valor da resistência de aterramento aumentando-se l ou r , ou seja, aumentando o comprimento e/ou o raio (diâmetro) da haste.

$$R_{1h} = \frac{\rho}{2\pi \cdot l} \left(\ln \left(\frac{2 \cdot l}{r} \right) - 1 \right) \tag{3.9}$$

Uma outra forma de diminuir a resistência de aterramento é utilizando-se hastes verticais associadas em paralelo. Entretanto esta associação não resulta na metade do valor da resistência de uma haste devido a um termo adicional denominado resistência mútua. A resistência mútua diminui com o aumento do espaçamento entre as hastes. Considera-se $d \gg r$. Pode-se associar várias hastes em paralelo em uma topologia em linha.

$$\begin{aligned}
R_{2h} &= \frac{R_{1h}}{2} + \frac{\rho}{4\pi \cdot l} \left(\ln \left(\frac{2 \cdot l}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2 \cdot l} \right)^2} \right) + \frac{d}{2 \cdot l} - \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2 \cdot l} \right)^2} \right) \right) \\
R_{nh} &= \frac{1}{n} \left(R_{1h} + \frac{\rho}{\pi \cdot d} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right) \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Para uma topologia com três hastes colocadas nos vértices de um triângulo equilátero de lado d tem-se:

$$R_{\Delta h} = \frac{\left(1 + \frac{2l}{d \left(\ln \left(\frac{2l}{r} \right) - 1 \right)} \right) + R_{1h}}{3} \quad (3.11)$$

Para associações densas de hastes tais como quadrado ou retângulo utiliza-se a Equação (3.12):

$$R_{ah} = \frac{\rho}{2\pi \cdot L_h \cdot N} \left(\ln \left(\frac{8L_h}{d} \right) - 1 + \frac{2k_1 L_h}{\sqrt{A}} (\sqrt{N} - 1)^2 \right) \quad (3.12)$$

Onde:

R_{ah} é a resistência da associação de N hastes;

ρ é a resistividade do solo;

L_h é o comprimento da haste;

d é o diâmetro da haste;

N é o número de hastes em paralelo;

x é a razão entre o maior e o menor lado do retângulo;

$k_1 = 1,41 - 0,04x$ é o fator de correção;

A é igual à área delimitada pelas hastes.

Pode-se observar que o primeiro e segundo termos da Equação (3.12) correspondem à resistência de uma haste, enquanto o terceiro termo é uma correção relacionada com a resistência mútua entre as hastes [25].

As chamadas hastes profundas ou emendáveis são aquelas de maior comprimento, obtidas pelo acoplamento mecânico e elétrico de várias seções de hastes. São utilizadas para atingir camadas mais profundas do solo, que normalmente são mais úmidas e, portanto, apresentam menor resistividade, proporcionando um melhor valor para a resistência do aterramento. Além disso, estas camadas são menos sujeitas as variações de umidade e temperatura, o que proporciona um aterramento de resistência praticamente constante ao longo do tempo. Neste caso tem-se:

$$R_{1h} = \frac{\rho_x}{2\pi \cdot h} \ln \frac{4h}{d} \quad (3.13)$$

Onde:

h é o comprimento total das hastes interligadas.

Do ponto de vista prático não é recomendável o emprego de hastes emendáveis, com mais de 9m de comprimento total [24].

Para um cabo horizontal enterrado a uma profundidade h e submetido a uma corrente aplicada em seu centro temos:

$$V_m = \frac{\rho I}{2\pi l} \left(\ln \left(\frac{l}{r} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2} \right) \right) + \frac{r}{l} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2} + \ln \left(\frac{l}{h} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{l} \right)^2} \right) \right) + \frac{h}{l} - \sqrt{1 + \left(\frac{h}{l} \right)^2} \right) \quad (3.14)$$

$$2l = L$$

$$R_f = \frac{V_m}{2I} = \frac{\rho}{2\pi L} \left(\ln \left(\frac{L}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2r}{L} \right)^2} \right) \right) + \frac{2r}{L} - \sqrt{1 + \left(\frac{2r}{L} \right)^2} + \ln \left(\frac{L}{2h} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{L} \right)^2} \right) \right) + \frac{2h}{L} - \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{L} \right)^2} \right)$$

Considerando $L \gg r$ e $L \gg h$, tem-se:

$$R_f = \frac{\rho}{L\pi} \left(\ln \left(\frac{L}{\sqrt{r \cdot h}} \right) - 1 \right) \quad (3.15)$$

Uma configuração elementar de um aterramento é composta por uma haste vertical ou um fio horizontal. Entretanto pode-se associar estas e outras configurações com o objetivo de controlar as grandezas envolvidas em um aterramento [25].

A associação de cabos e hastes em solo uniforme envolve três cálculos diferentes, ou seja, cálculo da resistência de aterramento dos cabos, cálculo da resistência de aterramento das hastes e cálculo da resistência mútua entre cabos e hastes.

A resistência mútua será calculada de acordo com a geometria dos eletrodos. Para arranjos com hastes e cabos em linha calcula-se a resistência mútua entre um cabo e uma haste, enquanto que para malhas cobrindo certa área, temos:

$$R_{ch} = \frac{R_c + R_h - R_{mch}^2}{R_c + R_h - 2R_{mch}} \quad (3.16)$$

Onde:

R_c é a resistência de aterramento dos cabos;

R_h é a resistência de aterramento das hastes;

R_{mch} é a resistência mútua entre cabos e hastes.

Para o cálculo da resistência de aterramento em solo estratificado em duas camadas a principal diferença em relação ao solo homogêneo são as reflexões. Em solo homogêneo há apenas a reflexão associada à interface solo-ar. Em solo de duas camadas têm-se duas interfaces funcionando como espelhos, uma solo-ar e a outra entre os solos de resistividades diferentes.

Pode-se prever as dificuldades que seriam encontradas para expressar analiticamente uma configuração mista. A formulação numérica vem então reduzir a complexidade da análise de configurações mais complexas. A idéia básica é exprimir cada configuração elementar através de suas coordenadas num sistema de eixos cartesianos. Com a configuração ou associação delas presas aos eixos de referência subdivide cada configuração elementar em pequenos elementos em cujos centros se encontram as frações da corrente que circula por toda a associação.

Configurações com haste vertical podem ser perigosas quando se trata de tensão de passo. As configurações com fio horizontal possuem tensão de passo perigosa nas posições perpendiculares ao fio condutor. Já configurações com dois ou mais anéis em profundidades diferentes provocam um aumento nos potenciais e diferenças de potenciais na região interna destes e diminuição nas regiões externas a estes [26].

3.4.6 - Comportamento de um Aterramento Elétrico sob Descarga Atmosférica

O comportamento resistivo de um aterramento elétrico sob descarga atmosférica apresenta dois efeitos. O primeiro é um aumento da temperatura na parte do solo circundante aos condutores (devido a grande quantidade de energia que será dissipada por efeito *joule* – aumenta a resistividade do solo) e o segundo é a mudança no mecanismo de condução elétrica do solo (devido ao elevado campo elétrico que se estabelece na vizinhança dos condutores enterrados – acima de certos valores críticos diminui a resistência de aterramento pelo aumento fictício da secção dos condutores enterrados).

Devido ao intervalo de tempo extremamente pequeno de fluidez da descarga, o efeito produzido pela mudança de mecanismo de condução é altamente predominante sobre o efeito do aumento de temperatura, resultando desta forma numa redução do valor da resistência de aterramento durante o tempo que dure a descarga atmosférica.

A resistência estática de aterramento (R_E) pode ser obtida pela equação:

$$R_E = \frac{\rho}{4\pi \sum_{i=1}^n I_i} \quad (3.17)$$

Supondo uma corrente elétrica elevada circulando pelo aterramento, pode-se fazer novamente o cálculo da resistência de aterramento pela Equação (3.17). Como a corrente de uma descarga atmosférica varia com o tempo tem-se uma variação na resistência do

aterramento, obtendo-se assim a resistência dinâmica de aterramento, veja mais detalhes em [28].

Supondo que a equipotencialidade na superfície dos condutores se transfere para a superfície fictícia, para cada parte do aterramento composto por apenas um condutor retilíneo (l) pode-se obter o seu raio fictício (r_f) em função da corrente (I) que se transfere deste condutor para o solo:

$$r_f = \frac{\rho I}{2\pi \cdot l \cdot E_L} \quad (3.18)$$

Partindo-se da forma de onda típica de corrente de uma descarga atmosférica, a cada instante pode-se calcular o valor da resistência de aterramento dado o cálculo das novas dimensões dos elementos do aterramento. Estes valores formam a curva da resistência dinâmica de aterramento.

As variações da resistência de terra diante de uma descarga atmosférica assumem valores que justificam a utilização do conceito de resistência dinâmica de aterramento em projetos. Entretanto deve-se considerar que à medida que as dimensões dos aterramentos crescem, o efeito da formação dos canais de faísca sobre a resistência de terra diminui reduzindo o percentual de variação da resistência dinâmica em relação ao seu valor estático. A partir de certas dimensões limites, a resistência dinâmica permanece constante e igual ao valor estático durante todo o tempo da descarga atmosférica. Fato este que deve ser considerado frente a aterramentos em solos de alta resistividade [19].

Em regimes transitórios, dependendo da geometria e dimensão do sistema de aterramento, poderá aparecer um efeito indutivo em função da alta intensidade da corrente e sua rápida variação. Neste caso devem-se considerar os efeitos resistivos e indutivos do sistema de aterramento [25]. O efeito indutivo é caracterizado por uma indutância distribuída (L) entre os pontos de tomada de terra e remoto.

Quando a corrente descarregada pela malha é originada por raios, quer por descarga direta quer pela operação dos pára-raios de linha do sistema elétrico, a corrente assume uma forma denominada corrente de impulso (veja Figura 3.13), caracterizada por um tempo de subida t_1 e por um tempo de queda (cauda) ao meio valor t_2 . A amplitude I_{pk} e o tempo de subida t_1 são os parâmetros mais importantes para a resposta da malha de terra, pois a amplitude determina a existência de disrupção no solo, enquanto o tempo t_1 , determina a maior frequência da frente de onda ($f=1/t$). Experimentos com reprodução de descarga atmosférica podem ser vistos em [29].

A impedância ao surto é definida pela relação entre o valor máximo da queda de tensão desenvolvida no eletrodo e o valor máximo da corrente. Para hastes de aterramento, cujo comprimento seja $h \ll v.t_1$, onde v é a velocidade de propagação da onda de corrente.

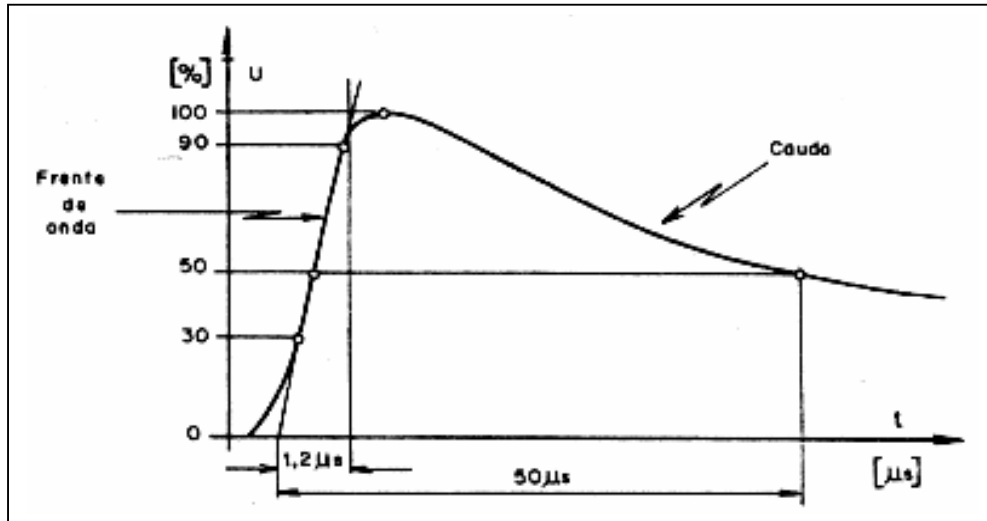


Figura 3.13. Forma de onda de uma descarga atmosférica [25].

Levando-se em conta a ionização do solo, temos:

$$R_0 = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{4h}{d_0} \quad (3.19)$$

$$d_0 = \frac{12,53 \rho \cdot I}{h \cdot E_0}$$

Onde:

R_0 é a resistência de aterramento (Ω);

d_0 é o diâmetro efetivo da haste (m);

d é o diâmetro equivalente da haste (m);

ρ é a resistividade do solo em $\Omega \cdot m$;

I é a corrente de surto em kA;

h é o comprimento da haste em metros;

E_0 é o gradiente de ruptura do solo, variando de 200kV/m a 2000kV/m.

Sem considerar a ionização do solo, temos a Equação (3.13).

A resistência com a ionização (R_0) é menor que a resistência sem a ionização (R).

Sendo o gradiente de tensão desenvolvido no solo é dado pela Equação (3.6). Se o gradiente desenvolvido no solo não ultrapassar o gradiente de ruptura do solo o valor da resistência de aterramento será obtido pela equação que não considera a ionização do solo.

Estudos experimentais mostram que, para comprimentos de eletrodos, horizontais ou verticais, que não excedam 10m a 15m, sua indutância não muda mais do que em 5% a distribuição da corrente entre suas extremidades [24].

3.4.7 - Modelamento de um Sistema de Aterramento

Um sistema de aterramento pode ser modelado como uma linha de transmissão. Ou seja, pode ser modelado como indutâncias e admitâncias distribuídas. Veja mais em [30].

A dependência dos parâmetros do solo em relação à frequência (resistividade e permissividade) e o efeito da intensidade da corrente injetada no sistema (processo de ionização) são considerações básicas para a formulação de um modelo consistente de um sistema de aterramento (dentre outros fatores). O desempenho do sistema de aterramento está diretamente associado ao conceito de impedância de aterramento, a qual é função da frequência. Esta dependência influi no comportamento da dispersão da corrente no solo, onde as correntes capacitivas podem ser desprezadas para baixas frequências, entretanto são bastante significativas para as altas frequências. A relação entre a impedância de aterramento e a resistência não é linear e depende das características do solo e da geometria do aterramento.

A transição da impedância inicial para a final depende da resistividade do solo e do comprimento do cabo e é também função das reflexões de ondas. Considerando o cabo como um condutor simples de uma linha de transmissão de comprimento (l) e constantes G , L e C por unidade de comprimento (desprezando R), com circuito aberto no final, a impedância final do cabo-eletrodo é dada pela Equação (3.20).

$$Z_c(t) \cong \frac{1}{G.l \left\{ 1 - e^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{8 \cdot \cos(\omega_k \cdot t)}{(2k-1)^2 \cdot \rho^2} - \frac{4}{G.l} \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\text{sen}(\omega_k \cdot t)}{(2k-1) \cdot \rho} \right] \right\}} \quad (3.20)$$

Com:

$$\omega_k \cong \frac{(2k-1) \cdot \rho}{2.l \sqrt{LC}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$R = \left(\frac{\rho}{\pi \cdot I} \right) \left(\ln \frac{2.l}{\sqrt{2 \cdot d \cdot p}} - 1 \right) (\Omega)$$

$$C = \pi \epsilon_0 (\epsilon_r + 1) \left(\ln \frac{2.l}{\sqrt{2.d.p}} - 1 \right) (F / m)$$

$$L = \left(\frac{\mu}{2\pi} \right) \left(\ln \frac{2.l}{\sqrt{2.d.p}} - 1 \right) (H / m)$$

Onde:

ρ é a resistividade do solo ($\Omega.m$);

l é o comprimento do cabo-eletrodo (m);

d é o diâmetro do cabo-eletrodo;

p é a profundidade em que o cabo-eletrodo foi enterrado;

ϵ é a permissividade do meio;

ϵ_0 é a permissividade do vácuo;

ϵ_r é a permissividade relativa do solo;

μ é a permeabilidade do solo.

De acordo com a formulação, a impedância é um parâmetro variável a qual tem uma impedância de surto inicial (Z_0) e reduz de modo exponencial para a resistência de dispersão final (I/G). Esta transição é praticamente completada quando $e^{-\alpha t} = 0,05$ ou quando $T=6C/G$ onde $\alpha = 1/2RC$.

Testes de campo sob diferentes condições e em várias localidades, mostram velocidades de propagação nos cabos da ordem de 30% a 40% da velocidade da luz e a impedância de surto de 120 Ω a 220 Ω .

A impedância de impulso depende de alguns fatores, entre eles, a extensão e configuração do eletrodo, o ponto de injeção da corrente, a intensidade e forma de onda da corrente, e da resistividade do solo.

Se o efeito de propagação ao longo dos eletrodos não é considerado, para uma determinada configuração de aterramento, quando a corrente injetada no solo (I) aumenta, a densidade de corrente na superfície do condutor aumenta linearmente, conforme a Equação 3.21.

$$\left| \sigma.E + \frac{\partial \epsilon.E}{\partial t} \right| \cong \frac{I}{A_c} \quad (3.21)$$

Onde:

$\sigma.E$ é a corrente de condução;

$\frac{\partial \epsilon.E}{\partial t}$ é a corrente de deslocamento;

I/A_c é a densidade de corrente na superfície do condutor (J).

A intensidade do campo elétrico (E) também aumenta. Para cada tipo de solo e condição de umidade, existe um valor de campo elétrico crítico (E_c) além do qual, um processo de disrupção é iniciado, contrariando a existência de uma parcela substancial de corrente de condução na região (para o IEEE, $E_c=350kV/m$). Este processo é similar ao efeito corona. A diferença está na irregularidade no processo de disrupção do solo. As características heterogêneas do solo, composto por várias e diferentes partículas, determinam a não uniformidade do campo elétrico na região adjacente ao eletrodo. Neste caso, o campo elétrico crítico é alcançado primeiramente em determinados pontos e algumas descargas se estabelecem, enquanto em outros pontos equidistantes do eletrodo não acontecem descargas. Nesta região de descargas a condução passa a ser por centelhamento e não mais por processo eletrolítico.

Quando este fenômeno é observado do ponto de injeção da corrente no solo, o efeito é traduzido pela diminuição na impedância de aterramento. Enquanto este processo de ionização não se inicia, há uma relação linear entre a tensão e a corrente aplicada no solo ($R=V/I$). Quando o campo elétrico crítico é excedido, um canal de plasma (com resistividade muito menor que a do solo) é estabelecido no solo e atua como uma extensão do eletrodo, sendo responsável por um aumento adicional da corrente em relação aquela associada a relação linear deste processo. Para descrever o comportamento dinâmico das características de aterramentos concentrados, o solo é caracterizado por três zonas (veja Figura 3.14).

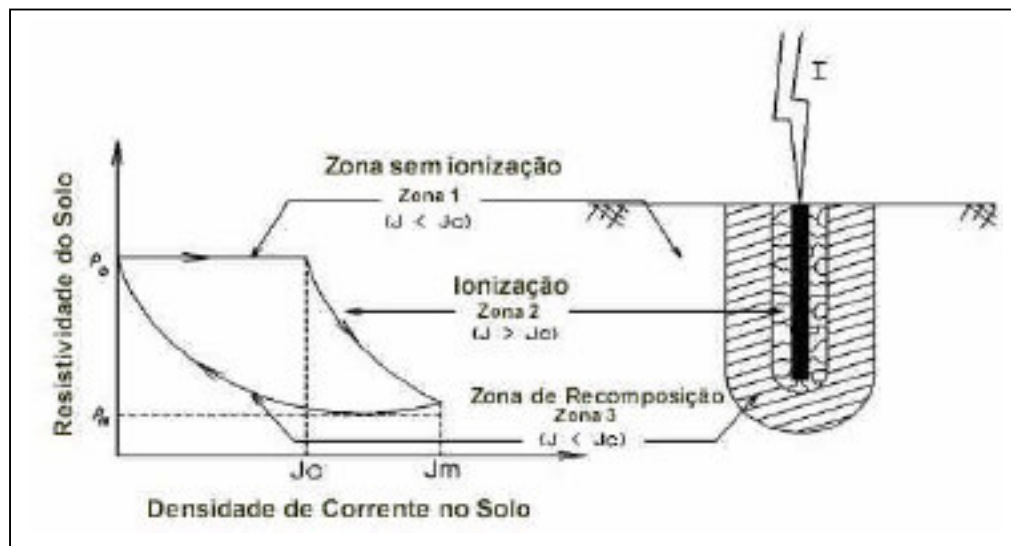


Figura 3.14. As três zonas que caracterizam o solo [25].

Não se deve desprezar a componente capacitiva da corrente para ondas impulsivas aplicadas no solo. A presença de canais de disrupção no solo afeta da mesma forma a condutância e capacitância do eletrodo e suas respectivas correntes. Para sistemas de aterramentos com pequenas dimensões e espectro representativo de baixas frequências, os cálculos para determinação do comportamento do aterramento são relativamente simples. Utiliza-se o método proposto por *Chisholm* (desenvolvido para análise de aterramento de torres). Neste método a resistência sob impulso é definida como:

$$R_i = \frac{V_p}{I_p} \quad (3.22)$$

Onde:

R_i é a impedância de surto;

V_p é a tensão de pico medida sobre o eletrodo de aterramento;

I_p é a corrente de pico injetada no eletrodo de aterramento.

Como o valor do campo elétrico no solo é função da densidade superficial de corrente sobre os eletrodos, o primeiro passo é definir a área e o comprimento total dos condutores enterrados, criando o parâmetro adimensional (P'_1):

$$P'_1 = 0,4517 + \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{s^2}{A}\right) \quad (3.23)$$

Onde:

s é a dimensão característica do eletrodo (para a haste é o comprimento);

A é a área total em contato com o solo (para hastes e cabos $A=2\pi rL$).

O valor do campo elétrico que provoca disrupção no solo foi parametrizado em função de ρ :

$$E_0 = 241\rho^{0,215} \quad (3.24)$$

Onde:

E_0 é dado em kV/m;

ρ é dado em $\Omega.m$.

O parâmetro adimensional P'_2 , função de P'_1 , permitirá saber se a corrente ultrapassou o valor necessário para provocar disrupção no solo:

$$P'_2 = 0,01314(P'_1)^{-3,2446}$$

$$I_{cr} = \frac{E_0 s^2 P'_2}{\rho} (kA) \quad (3.25)$$

Se a corrente injetada for menor que o valor de I_{cr} , não haverá disrupção, e o valor da impedância de surto será igual ao valor já calculado pela Equação (3.22). Se a corrente exceder o valor de I_{cr} , haverá disrupção, e o valor de R_i será dado por:

$$R_i = 0,263E_0.s.\left(\frac{\rho}{E_0.s^2}\right)^{0,692} I^{-0,308} \quad (3.26)$$

Para malhas grandes, devido a grande quantidade de material no solo, não há disrupção, e, particularmente para o caso de malhas reticuladas, a indutância não é desprezível. Utilizando o método de *Gupta* (no qual a malha é representada por parâmetros de linhas de transmissão) desprezando a resistência própria do condutor e a capacitância, assumindo um modelo com apenas indutância (L) e condutância (G). Para o cálculo do raio equivalente da malha (r_m), utiliza-se o raio de um disco com a mesma área da malha, ou seja:

$$r_m = \sqrt{\frac{A}{2\pi}} \quad (3.27)$$

O método define um raio efetivo equivalente da malha (r_e) dado por:

$$r_e = k\sqrt{\rho.t_1} \frac{1}{x^c} \quad (3.28)$$

Onde:

Para impulso aplicado no centro da malha, temos $k=1,45-0,05d$ e $c=0,029$;

Par impulso aplicado no canto da malha, temos $k=0,6-0,025d$ e $c=0,08$;

d é o tamanho da sub-malha;

x é a razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo externo da malha;

t_1 é o tempo de subida da corrente em μs ;

Se $r_m < r_e$, a impedância será:

$$Z_i = R_0.e^{+0,333\left(\frac{r_m}{r_e}\right)^{2,3}} \quad (3.29)$$

Se $r_m \geq r_e$, a impedância será [23]:

$$Z_i = R_0.e^{+0,333} \quad (3.30)$$

A propagação de ondas eletromagnéticas em um meio dissipativo (com perdas) semelhante ao solo, é composta por dois fenômenos: atenuação e distorção. A atenuação e

distorção constituem-se, respectivamente, em decréscimo (atenuação) da amplitude da onda e deformação da onda (defasagem) à medida que a mesma se propaga.

Em estudos de transitórios se deve considerar o parâmetro do solo permissividade elétrica relativa (ϵ_r), sendo que para solos aráveis secos são utilizados valores entre 2 e 20 e para solos muito úmidos em torno de 80. E, Para solos argilosos valores secos entre 5 e 40. Os parâmetros do solo permissividade elétrica relativa (ϵ_r) e condutividade (σ) são fortemente dependentes da frequência.

Nota-se o aumento do valor da condutividade (efetiva) e a diminuição do valor da permissividade do solo com o aumento da frequência [31].

O campo elétrico no solo pode ser considerado como a somatória de um campo elétrico impresso (E^i) e um campo elétrico induzido (E^s). Este campo elétrico induzido é resultado de correntes e cargas induzidas no sistema de aterramento pelo campo elétrico impresso (E^i).

Portanto, para simular o comportamento não linear dos eletrodos sob altas correntes é adotado um aumento no raio do eletrodo e uma diminuição da indutância do cabo. Portanto, elevados valores de correntes causam a diminuição da impedância de aterramento devido ao aumento tanto da corrente condutiva no eletrodo quanto a corrente capacitiva no solo. Considerando os sistemas de aterramento e seu comportamento quando submetidos a fenômenos de alta frequência, esta modelagem torna-se mais complexa devido a características do solo, da geometria do sistema de aterramento e dependência de alguns parâmetros com a frequência.

A partir deste ponto considera-se o desenvolvimento da formulação matemática, na qual são abordados tópicos como a modelagem dos trechos de linhas de transmissão, a modelagem do sistema de aterramento, o cálculo dos campos magnéticos e elétricos e o cálculo das tensões induzidas. Para o cálculo dos campos, o desenvolvimento a seguir aplica-se a deslocamentos de dipolos de correntes em quaisquer trechos de linhas de transmissão situados ao longo dos eixos z , x ou y .

As descargas atmosféricas podem ser representadas de maneira simplificada através de uma fonte de corrente ideal e unidirecional (veja Figura 3.13).

A resposta da célula elementar aos impulsos surgiu a partir da observação do método TLM, no qual, através de um processo de discretização, em que se substitui um sistema contínuo por uma malha composta por linhas de transmissão, obtêm-se os valores dos campos elétrico e magnético a partir da equivalência entre as equações de *Maxwell* e as equações das linhas de transmissão.

Na avaliação dos valores dos impulsos das tensões e das correntes na célula elementar se utiliza o método de linhas de transmissão sem perdas. Desta forma, assume-se que as tensões e correntes se propagarão com velocidade constante e sem alteração das suas formas enquanto as constantes das linhas de transmissão não se alterarem.

Desta forma, após a atribuição inicial dos valores de impulso de tensão em um instante $t=0$, é possível determinar-se a resposta aos impulsos através do cálculo em instantes sucessivos do estado da malha. As tensões nos nós do elemento tridimensional são obtidas considerando-se as tensões refletidas e incidentes [32]. Veja mais em [33].

3.5 - SIMULAÇÃO ELETROMAGNÉTICA

3.5.1 - Modelagem por Linhas de Transmissão

O método TLM se baseia no uso de redes de circuitos elétricos para solução de problemas de espalhamento, segundo a Teoria Ondulatória da Luz ou Princípio de *Huygens*. O TLM é um método matemático utilizado na resolução numérica no domínio do tempo das equações de *Maxwell* para os casos mais gerais de propagação de ondas eletromagnéticas, isto é, permite a modelagem de problemas com estruturas de geometrias complexas, materiais com propriedades não lineares, não homogêneos e com perdas, além de avaliar na sua formulação mais avançada materiais com parâmetros dispersivos (dependentes da frequência) e anisotrópicos [34].

De uma forma geral, pode-se identificar as seguintes etapas dentro de cada iteração no tempo para o método TLM-TD (*TLM Time Domain* – TLM no Domínio do Tempo):

- Determinação das tensões incidentes a cada segmento, considerando as excitações presentes;
- Cálculo de campos associados aos segmentos de interesse;
- Cálculo das tensões refletidas por cada segmento;
- Aplicação das condições de contorno para os segmentos ou nós que se localizam nas extremidades do domínio de cálculo;
- Determinação das novas tensões incidentes para o próximo passo de iteração.

Para a linha pode-se ter escolhidos o comprimento, a resistência, indutância, capacitância e condutância por unidade de comprimento. O método TLM-TD unidimensional é bastante preciso e pode ser utilizado em aplicações bem complexas,

como o caso da excitação na forma de impulso, surto atmosférico ou de manobra, e senoidal.

O método TLM unidimensional se baseia em LT (Linhas de Transmissão), especificamente em linhas de transmissão a dois condutores. Neste método os conceitos de resistência, capacitância, condutância e indutância são aplicados de forma a permitir uma visão do objeto e seu uso do ponto de vista da engenharia da transmissão [35]. Dois nós (x e $x+\Delta x$) são caracterizados por um conjunto de componentes (R , G , L e C) interligadas da forma apresentada na Figura 3.15 [36].

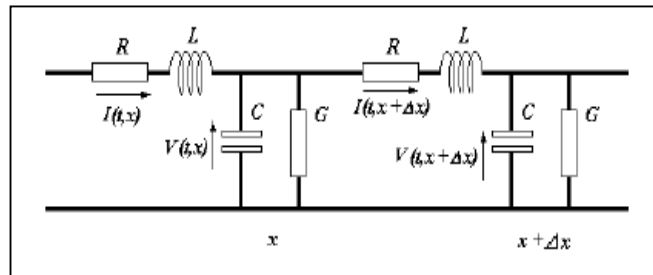


Figura 3.15. Modelo TLM unidimensional [36].

Dentre as inúmeras vantagens do método TLM, pode-se citar que os cálculos de corrente, tensão, campo elétrico e magnético podem ser feitos simultaneamente, no mesmo programa, na mesma simulação; que a formulação para casos de materiais não-homogêneos é simples; e que as versões 2D e 3D apresentam muitas facilidades de implementação quando a versão unidimensional é conhecida. O TLM, principalmente em uma versão tridimensional, apresenta o perfil mais conveniente para as aplicações na área de compatibilidade eletromagnética [37].

O desenho para o nó TLM bidimensional paralelo está apresentado na Figura 3.16 e serial na Figura 3.17.

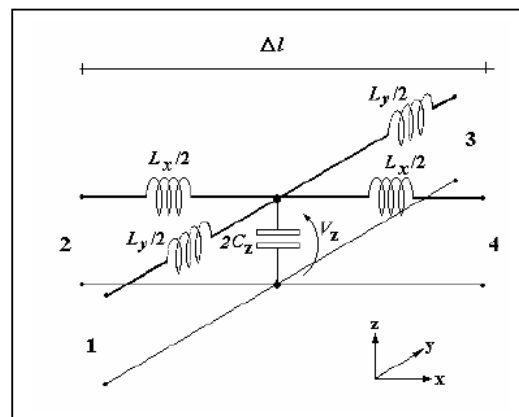


Figura 3.16. Célula básica do nó bidimensional TLM paralelo [36].

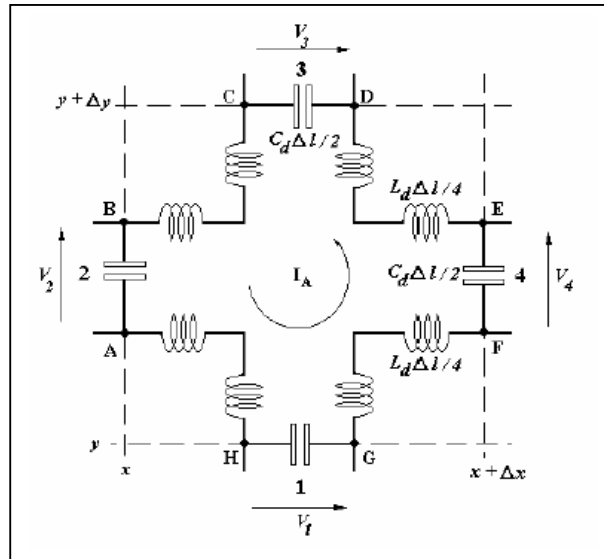


Figura 3.17. Célula básica do nó bidimensional TLM série [36].

3.5.2 - Método TLM Tridimensional

O desenvolvimento dos modelos tridimensionais foi fundamental para que o método TLM se estabelecesse como uma importante ferramenta para a análise de fenômenos de eletromagnetismo. Ao contrário do método FDTD, cujo princípio de aplicações em eletromagnetismo já se deu baseado em células tridimensionais, o método TLM teve início com uma proposição bidimensional, sendo que várias proposições de células tridimensionais foram colocadas até o surgimento de uma célula condensada em 1987, sobre a qual estão baseados os desenvolvimentos posteriores e boa parte dos códigos computacionais hoje em uso. Para o estudo do eletromagnetismo, um modelo tridimensional deve ser capaz de apresentar seis componentes de campos, quais sejam:

- E_x - campo elétrico na direção x ;
- E_y - campo elétrico na direção y ;
- E_z - campo elétrico na direção z ;
- H_x - campo magnético na direção x ;
- H_y - campo magnético na direção y ;
- H_z - campo magnético na direção z .

O SCN (*Symmetrical Condensed Node* - Nó Simétrico Condensado) é constituído de três nós série não interligados definindo 12 portas, como se vê na Figura 3.18. O nó tridimensional delimita um volume hexaédrico, estando presentes em cada uma das seis faces duas portas de nós série diferentes. Desta forma são apresentadas 12 portas,

constituindo duas componentes de tensão (campo elétrico) por face. No centro do nó aparecem as componentes de campo magnético.

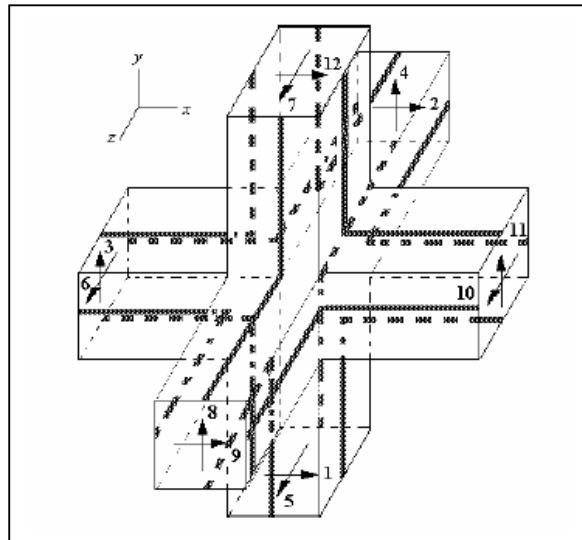


Figura 3.18. Nó simétrico condensado TLM tridimensional [37].

Para permitir melhor visualização dos nós série que constituem o SCN, pode-se separá-los, como apresentados na Figura 3.19.

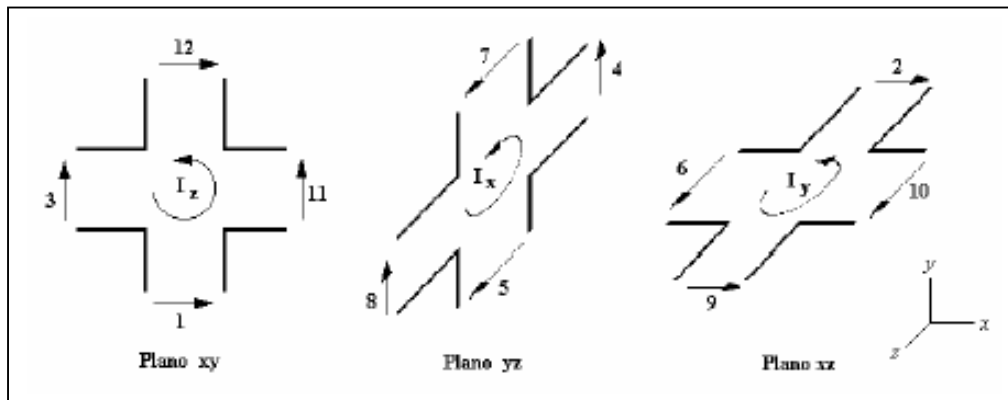


Figura 3.19. Detalhes do nó simétrico condensado TLM tridimensional [37].

Como os nós série não estão interligados, não é possível montar o circuito elétrico e o equivalente de *Thévenin* do SCN. A alternativa então para o estudo do comportamento do nó será fazer incidir um pulso em uma das portas e analisar quanto deste pulso irá refletir para todas as portas.

Tomando a Figura 3.19 e considerando a hipótese da incidência de um pulso de tensão unitário na porta 1 do nó que está no plano *xy*, percebe-se que este pulso está associado a um campo elétrico E_x , e, como contribui com a corrente I_z , está também associado a um campo H_z e a um campo E_y . Pelas equações de *Maxwell* vê-se que todas estão relacionadas (E_x , E_y e H_z). As diversas componentes estão presentes e espalhadas

pelas diversas equações, o que demonstra que a incidência de um pulso em uma única porta estará associada a respostas em diversas portas, tanto do seu próprio nó série como dos outros dois.

Sem o uso direto das equações de *Maxwell* pode-se fazer essa associação entre as diversas portas de um modo mais intuitivo e com o auxílio da Figura 3.20. Considere um nó regular onde as dimensões dos lados são iguais ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta l$) e que exista a incidência de um pulso unitário de tensão sobre a porta 1 do nó. Tal incidência ocasionará tensões refletidas em diversas portas. Pela simetria do nó existirão reflexões de tensão nas portas 1, 3, 12 e 11 (para o nó série do plano xy), bem como nas portas 2 e 9 (para o nó série do plano zx), pois todas estas portas estão em paralelo com a porta 1.

Devido à incidência do pulso de tensão unitária na porta 1, haverá uma tensão refletida na porta 1, cujo valor é desconhecido e que será chamada de a . Nas portas 2 e 9, pela simetria e polaridade, de b . Na porta 12 a reflexão será chamada de c . Na porta 3 será d e na porta 11, pela simetria com a porta 3 mas com sinal invertido, será chamada de $-d$.

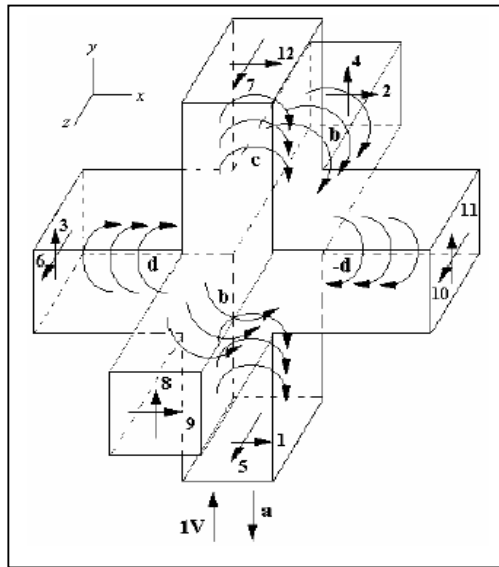


Figura 3.20. Aplicação de um pulso unitário a porta 1 [37].

Este procedimento pode ser repetido para cada uma das portas, individualmente, sempre buscando as tensões refletidas em todas as portas com relação ao pulso de tensão unitário incidente na porta escolhida. Com este conjunto de correspondências pode-se escrever uma Equação (3.31) geral.

$${}_k V^r = [S]_k V^i \quad (3.31)$$

Onde:

${}_k V^r$ representa o vetor das tensões refletidas para as diversas portas no instante k ;

${}_kV^i$ representa o vetor das tensões incidentes nas diversas portas no instante k ;

$[S]$ é a matriz de espalhamento.

A tensão refletida em cada porta será uma somatória das contribuições das reflexões originadas por todas as incidências.

A partir do raciocínio descrito acima pode-se escrever a matriz de espalhamento $[S]$ com 12 linhas e 12 colunas (doze tensões refletidas para doze incidentes), utilizando os símbolos a , b , c e d .

$$[S] = \begin{bmatrix} a & b & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & -d & c \\ b & a & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & c & -d & 0 & b \\ d & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & b & a & d & 0 & -d & c & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & a & b & c & -d & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & b & a & b & 0 & -d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & c & b & a & d & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & -d & 0 & d & a & 0 & 0 & b & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & a & d & 0 & b \\ 0 & -d & 0 & 0 & b & c & b & 0 & d & a & 0 & 0 \\ -d & 0 & c & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & d \\ c & b & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & d & a \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Para encontrar a solução desta matriz com os valores de a até d , algumas considerações matemáticas deverão ser feitas e estão descritas a seguir.

Em estudos de propagação de ondas planas a matriz de espalhamento relaciona as amplitudes das ondas refletidas com as amplitudes das ondas incidentes. Se nas interfaces onde ocorrerão as incidências e reflexões os meios são iguais (ou seja, coeficientes de reflexão e transmissão sempre iguais) e não há perdas (ou seja, haverá conservação de energia), a seguinte equação é válida:

$$[S]^T [S] = [I] \quad (3.33)$$

Onde:

$[S]^T$ é a matriz transposta de $[S]$;

$[I]$ a matriz identidade.

Resolvendo-se a Equação (3.33) matricial pode-se obter então o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
a^2 + 2b^2 + c^2 + 2d^2 &= 1 \\
2b(a + c) &= 0 \\
2d(a - c) &= 0 \\
2ac + 2b^2 - 2d^2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Com quatro Equações (3.34) e quatro variáveis a seguinte solução pode ser obtida:

$$\begin{aligned}
a &= 0 \\
b &= 0,5 \\
c &= 0 \\
d &= 0,5
\end{aligned}$$

Fazendo-se as substituições obtém-se:

$$\begin{bmatrix} V_1^r \\ V_2^r \\ V_3^r \\ V_4^r \\ V_5^r \\ V_6^r \\ V_7^r \\ V_8^r \\ V_9^r \\ V_{10}^r \\ V_{11}^r \\ V_{12}^r \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^i \\ V_2^i \\ V_3^i \\ V_4^i \\ V_5^i \\ V_6^i \\ V_7^i \\ V_8^i \\ V_9^i \\ V_{10}^i \\ V_{11}^i \\ V_{12}^i \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Observe-se como a matriz de espalhamento é notavelmente simples e fácil de implementar computacionalmente, devido ao grande número de zeros, o que acaba por diluir o corpo da matriz. Tal matriz é denominada matriz de espalhamento, e permite calcular as reflexões para tensões incidentes, em cada iteração. A conexão com o próximo passo de tempo é feita diretamente, da mesma forma como ocorre no método bidimensional.

Para possibilitar os cálculos de propagação é preciso definir as correspondências entre capacitância e indutância com a permissividade e permeabilidade do meio, pois será necessário relacionar os campos elétricos e magnéticos às tensões e correntes. Para isto considere-se novamente o nó SCN. Onde o nó determina uma região espacial qualquer de dimensões u , v e w .

A capacitância total na direção x está relacionada às portas 1, 2, 9 e 12, bem como à permissividade do meio dada por ε . A capacitância será definida pela permissividade distribuída em todo o plano com relação ao comprimento x do bloco espacial dado pelo nó SCN, ou seja:

$$C_x = \varepsilon \frac{wv}{u} \quad (3.36)$$

Da mesma forma para as capacitâncias nas direções y e z têm-se:

$$\begin{aligned} C_y &= \varepsilon \frac{uw}{v} \\ C_z &= \varepsilon \frac{uv}{w} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Considerando agora o nó série definido pelo plano xy , a indutância total está relacionada às portas 1, 3, 11 e 12, bem como à permeabilidade do meio dada por μ . Esta indutância é relacionada ao eixo z , pois o nó série respectivo irá definir um campo H_z (devido à corrente I_z). A indutância será dada então pela permeabilidade distribuída em todo o plano xy com relação ao comprimento z do bloco espacial do nó SCN, ou seja:

$$L_z = \mu \frac{uv}{w} \quad (3.38)$$

Da mesma forma para as indutâncias nas direções y e x têm-se:

$$\begin{aligned} L_y &= \mu \frac{uw}{v} \\ L_x &= \mu \frac{wv}{u} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para modificar as características dos parâmetros do meio, pode-se fazer a introdução de *stubs* no interior do nó, sem modificar o núcleo da matriz de espalhamento principal. Sendo assim, um conjunto de linhas e colunas será acrescido à matriz básica. Deverão ser introduzidos 6 *stubs* para corresponder às seis componentes de campo, onde para cada componente de campo elétrico deve ser introduzido um *stub* capacitivo com a extremidade em circuito aberto, e para cada componente de campo magnético deve ser introduzido um *stub* indutivo com extremidade em curto-circuito. A matriz será acrescida de 6 linhas e 6 colunas, passando a ter a dimensão 18×18 .

O campo elétrico está definido numa equivalência direta com as tensões, assim como o campo magnético com as correntes. Essas equivalências estão expressas por:

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{V_x}{\Delta l} \\
E_y &= -\frac{V_y}{\Delta l} \\
E_z &= -\frac{V_z}{\Delta l} \\
H_x &= \frac{I_x}{\Delta l} \\
H_y &= \frac{I_y}{\Delta l} \\
H_z &= \frac{I_z}{\Delta l}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Considera-se aqui que as dimensões das faces são iguais, ou seja, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta l$. Para o nó SCN a tensão V_x será obtida da média das tensões nas portas 1, 2, 9 e 12. Assim:

$$V_x = \frac{1}{4} \left[(V_1^i + V_1^r) + (V_2^i + V_2^r) + (V_9^i + V_9^r) + (V_{12}^i + V_{12}^r) \right] \tag{3.41}$$

Considerando a conservação das cargas, pode-se mostrar que a soma das tensões refletidas é igual à soma das tensões incidentes. Desta forma a Equação (3.41) pode ser simplificada para:

$$V_x = \frac{1}{2} \left[(V_1^i) + (V_2^i) + (V_9^i) + (V_{12}^i) \right] \tag{3.42}$$

Fazendo as devidas substituições, obtém-se:

$$E_x = \frac{1}{2\Delta l} \left[(V_1^i) + (V_2^i) + (V_9^i) + (V_{12}^i) \right] \tag{3.43}$$

O mesmo procedimento pode ser feito para as outras direções e obter-se:

$$\begin{aligned}
E_y &= \frac{1}{2\Delta l} \left[(V_3^i) + (V_4^i) + (V_8^i) + (V_{11}^i) \right] \\
E_z &= \frac{1}{2\Delta l} \left[(V_5^i) + (V_6^i) + (V_7^i) + (V_{10}^i) \right]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Para o cálculo das correntes, onde a corrente está diretamente relacionada às tensões das portas 4, 5, 7 e 8. Fazendo-se o equivalente de *Thévenin* para esse nó série (plano yz) a corrente pode ser determinada:

$$I_x = \frac{V_4^i + V_7^i - V_8^i - V_5^i}{2Z} \quad (3.45)$$

Fazendo as substituições chega-se a:

$$H_x = \frac{V_4^i + V_7^i - V_8^i - V_5^i}{2Z\Delta l} \quad (3.46)$$

O mesmo procedimento pode ser feito para as outras direções [36] e então:

$$H_y = \frac{V_6^i + V_9^i - V_2^i - V_{10}^i}{2Z\Delta l} \quad (3.47)$$

$$H_z = \frac{V_1^i + V_{11}^i - V_3^i - V_{12}^i}{2Z\Delta l}$$

Uma vez conhecido o comportamento de cada nó, quando sujeito a tensões incidentes, outro ponto importante é determinar como ocorre a propagação de ondas eletromagnéticas para fora do SCN. A modelagem de volumes com o SCN implica em que as extremidades dos nós adjacentes se toquem e que exista um acoplamento entre as tensões refletidas por um nó num dado instante e as tensões incidentes nos nós adjacentes, no próximo instante de tempo.

Para ilustrar, a tensão refletida pela porta 4 do nó localizado na posição (x,y,z) , no instante de tempo k , deverá corresponder à tensão incidente na porta 8 do nó adjacente que fica em $(x,y,z-1)$, no instante de tempo $k+1$. Da mesma forma, a tensão refletida pela porta 8 do nó em $(x,y,z-1)$, no instante k , corresponde à tensão incidente na porta 4 do nó em (x,y,z) , no instante $k+1$. O que acontece realmente é uma troca entre tensões de portas adjacentes. Assim, matematicamente, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} {}_{k+1}V_8^i(x, y, z-1) &= {}_kV_4^r(x, y, z) \\ {}_{k+1}V_4^i(x, y, z) &= {}_kV_8^r(x, y, z-1) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Onde:

${}_{k+1}V_8^i(x, y, z-1)$ é a tensão incidente na porta 8 do nó situado em $(x,y,z-1)$, no instante de tempo $k+1$;

${}_kV_4^r(x, y, z)$ é a tensão refletida na porta 4 do nó situado em (x,y,z) , no instante de tempo k ;

${}_k V_8^r(x, y, z-1)$ é a tensão refletida na porta 8 do nó situado em $(x, y, z-1)$, no instante de tempo k ;

${}_{k+1} V_4^i(x, y, z)$ é a tensão incidente na porta 4 do nó situado em (x, y, z) , no instante de tempo $k+1$.

O mesmo ocorre para todas as outras portas do SCN sendo possível determinar expressões matemáticas similares. Portanto para cada passo de iteração no tempo k , devem ser realizadas duas importantes etapas. A primeira etapa calcula as tensões refletidas no interior de cada nó, utilizando as tensões incidentes ao nó, no instante k , o espalhamento. A segunda etapa utiliza as tensões refletidas que acabaram de ser calculadas para determinar através das trocas, o valor de novas tensões incidentes que serão usadas para reiniciar um novo instante de tempo $k+1$, a conexão com o momento seguinte.

Evidentemente, dentro de um volume modelado existem nós que estão na fronteira, não apresentando contato com outros nós e inviabilizando para algumas portas, a etapa de conexão com o momento seguinte. Portanto é necessário determinar as condições de contorno para esta classe de nós especial.

Os nós que estão nos limites do volume possuem uma, duas ou três extremidades sem contato com outros nós. Isto faz com que sejam necessários alguns cálculos extras para determinar a conexão destas portas com o momento seguinte, uma vez que a etapa de espalhamento deve ser feita igualmente para todos os nós sem exceção.

Uma vez identificados os nós pertencentes às fronteiras do volume, aplica-se a conexão apresentada no item anterior para as portas que estão em contato com outros nós, mas para as portas que não possuem este contato e estão na fronteira do volume, aplica-se uma constante de reflexão para definir as novas tensões incidentes para o próximo passo de iteração. Admitindo que o volume modelado faz parte de um volume maior, basta aplicar um coeficiente de reflexão às portas que ficam na fronteira. Este coeficiente de reflexão é calculado levando em conta os parâmetros físicos do material de preenchimento do volume modelado e do material de preenchimento do volume maior

Se a intenção é admitir o volume modelado imerso no espaço aberto, o valor do coeficiente de reflexão é igual à zero, indicando que não existirá nenhuma tensão incidente retornando para o volume, no instante seguinte $k+1$. Se for o caso de simular, por exemplo, uma placa condutora perfeita em uma das fronteiras, aplica-se o coeficiente de reflexão igual a (-1) , sugerindo que toda tensão que incide na fronteira, retorna invertida para o volume modelado.

Para finalizar o processo é preciso determinar como ocorre a propagação de ondas no interior de um volume modelado com o SCN, objetivando estabelecer uma relação entre o tamanho do nó e o passo de tempo a ser utilizado em cada simulação.

Considerando que uma onda plana com campo elétrico polarizado na direção y incide perpendicularmente sobre a face esquerda de um volume modelado com o SCN, propagando-se portanto na direção x , verifica-se que apenas as portas 3 de todos os nós desta face receberão tensões incidentes.

Durante o primeiro passo de iteração, após o espalhamento, as portas 1, 4, 8 e 12 de todos os nós da desta face receberão tensões refletidas, conforme estabelece a matriz de espalhamento. A propagação da onda na direção x não pode ainda ser verificada, pois a tensão nas portas 11, que é porta correspondente ao campo elétrico na direção y ainda é zero.

No segundo passo de iteração porém, os nós da face esquerda receberão tensões incidentes nas portas 1, 4, 8 e 12, de acordo com a conexão com o momento seguinte. Após aplicada a matriz de espalhamento neste segundo passo de iteração, a porta 11 receberá tensões refletidas de valor diferente de zero. Neste momento, é possível verificar que a propagação da onda incidente na porta 3 até a porta 11, gastou dois (2) passos de iteração. Considera-se que o SCN é cúbico de dimensão Δl .

Então, a velocidade de propagação de uma onda plana incidindo perpendicularmente em um volume modelado com SCN, deverá ser:

$$u = \frac{\Delta l}{2 \cdot \Delta t} \quad (3.49)$$

Onde:

u é a velocidade de propagação da onda no meio.

Conhecidos os aspectos iniciais do TLM 3D apresentados até agora, torna-se necessário saber como excitar um SCN ou um conjunto deles para permitir a simulação de casos tridimensionais, no domínio tempo.

Para excitar qualquer componente de campo elétrico ou magnético, no TLM-TD que utiliza o SCN, é necessário identificar as portas que são responsáveis por determinar tal grandeza e injetar tensões nestes pontos. As equações para os componentes de campo, são:

$$\begin{aligned}
V_1^i = V_2^i = V_9^i = V_{12}^i &= -\frac{E_0 \Delta l}{2} \Rightarrow E_x \\
V_3^i = V_4^i = V_8^i = V_{11}^i &= -\frac{E_0 \Delta l}{2} \Rightarrow E_y \\
V_5^i = V_6^i = V_7^i = V_{10}^i &= -\frac{E_0 \Delta l}{2} \Rightarrow E_z \\
V_4^i = -V_8^i = V_7^i = -V_5^i &= -\frac{H_0 \Delta l \cdot Z_0}{2} \Rightarrow H_x \\
V_9^i = -V_2^i = V_6^i = -V_{10}^i &= -\frac{H_0 \Delta l \cdot Z_0}{2} \Rightarrow H_y \\
V_{11}^i = -V_3^i = V_1^i = -V_{12}^i &= -\frac{H_0 \Delta l \cdot Z_0}{2} \Rightarrow H_z
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Onde:

E_0 é o valor inicial de campo elétrico a ser aplicado nos nós selecionado como de excitação.

H_0 é o valor inicial de campo magnético a ser aplicado nos nós selecionado como de excitação.

Z_0 é a impedância característica do meio considerado.

Em alguns casos, faz-se necessária a excitação na forma de corrente, em materiais condutores por exemplo. Para isso basta injetar tensões nos nós adjacentes ao material condutor, de forma a aplicar um campo magnético ao redor deste, para satisfazer a lei de *Ampère*.

A forma da excitação a ser aplicada depende do caso em questão. Pode-se aplicar a um determinado dispositivo uma forma de onda cuja equação é conhecida, como tensões senoidais, pulsos simulando descargas atmosféricas ou eletrostáticas, ondas quadradas, etc. Para isso é preciso modificar os valores de E_0 e H_0 de acordo com estas equações, a cada passo de iteração no tempo. As respostas podem ser valores de campo ou corrente, no domínio tempo.

Por outro lado, se for necessário conhecer a resposta no domínio frequência para este dispositivo, deve-se aplicar um pulso rápido com duração de apenas um passo de iteração, que seria correspondente a um impulso. Este impulso tem a capacidade de gerar infinitas harmônicas, excitando todos os modos possíveis de oscilação, dentro de um dispositivo. Porém, as saídas de um programa baseado no TLM-TD serão grandezas no domínio tempo, sendo necessário neste caso, aplicar uma transformada tempo-frequência.

A partir destas informações, é preciso conhecer a maneira de calcular os valores de campo elétrico, campo magnético, correntes e tensões em qualquer porta de qualquer nó, em qualquer instante de tempo.

Para calcular o valor da tensão numa determinada direção, determina-se a média das tensões que estão nesta direção. Deve-se considerar que para o mesmo instante de tempo k , a tensão em cada porta é definida pela soma algébrica das tensões incidentes e refletidas. Assim, o cálculo da tensão nas direções (x, y, z) , fica:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{1}{4} \left[(V_1^i + V_1^r) + (V_2^i + V_2^r) + (V_9^i + V_9^r) + (V_{12}^i + V_{12}^r) \right] \\ V_y &= \frac{1}{4} \left[(V_3^i + V_3^r) + (V_4^i + V_4^r) + (V_8^i + V_8^r) + (V_{11}^i + V_{11}^r) \right] \\ V_z &= \frac{1}{4} \left[(V_5^i + V_5^r) + (V_6^i + V_6^r) + (V_7^i + V_7^r) + (V_{10}^i + V_{10}^r) \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

Porém, para manter a conservação de carga em cada nó e cada instante de tempo, verifica-se que a soma das tensões incidentes ao nó é igual à soma das tensões refletidas por ele. Então as expressões acima ficam:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{1}{2} (V_1^i + V_2^i + V_9^i + V_{12}^i) \\ V_y &= \frac{1}{2} (V_3^i + V_4^i + V_8^i + V_{11}^i) \\ V_z &= \frac{1}{2} (V_5^i + V_6^i + V_7^i + V_{10}^i) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Baseado nas Equações (3.52), pode-se calcular o valor do campo elétrico em qualquer nó, aplicando as equações:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{V_1^i + V_2^i + V_9^i + V_{12}^i}{2 \cdot \Delta l} \\ E_y &= -\frac{V_3^i + V_4^i + V_8^i + V_{11}^i}{2 \cdot \Delta l} \\ E_z &= -\frac{V_5^i + V_6^i + V_7^i + V_{10}^i}{2 \cdot \Delta l} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Da mesma forma, os campos magnéticos podem ser definidos por:

$$\begin{aligned}
H_x &= \frac{V_4^i - V_8^i + V_7^i - V_5^i}{2.Z_0.\Delta l} \\
H_y &= \frac{V_9^i - V_2^i + V_6^i - V_{10}^i}{2.Z_0.\Delta l} \\
H_z &= \frac{V_{11}^i - V_3^i + V_1^i - V_{12}^i}{2.Z_0.\Delta l}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Onde:

Z_0 é a impedância característica do nó sob análise.

Para calcular correntes utilizando o TLM-TD, pode-se recorrer à equação obtida a partir da Lei de Ampère.

$$I = \oint_L H . dl \tag{3.55}$$

Onde:

H é o campo magnético nos nós adjacentes ao nó onde se deseja calcular a corrente;

dl é o elemento de comprimento;

L é o caminho ao redor do nó onde se deseja calcular a corrente.

Primeiramente determina-se os campos magnéticos nos nós adjacentes ao nó que se deseja calcular a corrente e depois aplica-se a Equação (3.55). A Figura 3.21 ilustra este procedimento.

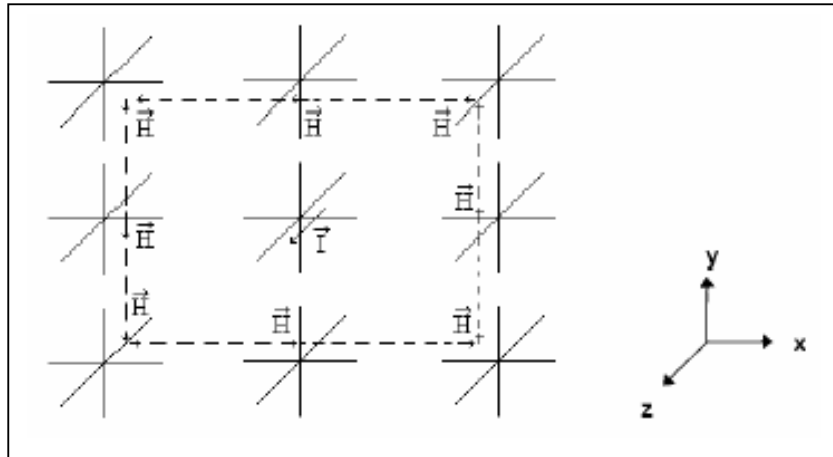


Figura 3.21. Procedimento para determinação da corrente [36].

Baseado na Figura 3.21, para determinar a corrente na direção z , do nó central situado na coordenada (x, y, z) , aplica-se a equação:

$$\begin{aligned}
I_z &= \frac{\Delta l}{2} H_x(x-1, y-1, z) + \frac{\Delta l}{2} H_x(x+1, y-1, z) + \frac{\Delta l}{2} H_y(x+1, y-1, z) + \frac{\Delta l}{2} H_y(x+1, y+1, z) \\
&- \frac{\Delta l}{2} H_x(x+1, y+1, z) - \frac{\Delta l}{2} H_x(x-1, y+1, z) - \frac{\Delta l}{2} H_y(x-1, y+1, z) - \frac{\Delta l}{2} H_y(x-1, y-1, z)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Esta equação pode facilmente ser expandida para cálculo de correntes ao redor de mais de um nó, configurando uma região de interesse. Pode-se dizer ainda que o cálculo de correntes normalmente recai sobre regiões constituídas por materiais condutores, fazendo deste tipo de material uma ocorrência comum [37].

Quanto às aplicações tecnológicas o nó SCN permitiu um grande avanço para o método TLM, especialmente em problemas de microondas, antenas e transientes, e atualmente com interesse especial na área de compatibilidade eletromagnética.

Toda modelagem, devido à sua distância do real que pretende modelar, apresenta um erro intrínseco, que deriva dessa própria distância. Quando o modelo representa um processo dinâmico, esse erro tem ainda a capacidade de se propagar e acumular. Dependendo do número de iterações do processo de cálculo, pode haver uma acumulação quantitativa do erro, e dependendo da dimensão do objeto modelado, pode haver uma acumulação qualitativa.

Como é impossível afastar a incidência de erros de um modelo (pois a inexistência total de erros seria o mesmo que ter o processo real, ou seja, o modelo se confundiria com o figurado), torna-se necessário conhecer sua origem, propriedades e dimensão. Com este conhecimento é possível criar ferramentas de controle sobre os resultados obtidos, diminuindo a importância do erro, ou simplesmente considerando-o como um dos dados do resultado.

A análise de erros e da dispersão em TLM tem sido um dos importantes campos de estudo nesta técnica numérica, onde continuamente são propostos novos enfoques e tratamentos do método. O fenômeno da dispersão ocorre em linhas de transmissão, pois a velocidade de fase pode variar com a frequência. Nesse caso, as frequências mais altas tendem a se deslocar mais rápido que as frequências mais baixas, e no ponto de saída do problema tais frequências podem somar-se compondo uma forma de onda diferente. No caso do método TLM tal fenômeno vai ocorrer e está relacionado à dimensão da célula, devido à discretização feita [36].

A maior preocupação no estudo de sistemas de aterramento está voltado a tensão de passo. Sobre este assunto será feita uma breve exposição a seguir.

3.6 - TENSÃO DE PASSO

Segundo [27], a tensão de passo é a tensão elétrica entre os pés de um ser humano no instante de uma descarga atmosférica. Nos projetos de aterramento de acordo com a Norma, considera-se a distância entre os pés de 1m.

$$V_p = (R_{ch} + 2R_c).I_c \quad (3.57)$$

Ou ainda:

$$V_p = (1000 + 2,3\rho).I_c \quad (3.58)$$

Onde:

V_p é a tensão de passo;

R_{ch} é a resistência do corpo humano;

R_c é a resistência de contato;

I_c é a corrente de choque;

ρ é a resistividade do solo.

Para $R_{ch}=1.000\Omega$, $R_c=200\Omega$, $I_c=200mA$ e $\rho=400\Omega.m$, tem-se a seguinte tensão de passo:

Segundo a Equação 3.57:

$$V_p=280V$$

Segundo a Equação 3.58:

$$V_p=384V$$

O aterramento só estará completo se a maior tensão de passo for menor do que o limite de tensão de passo para não causar fibrilação ventricular no ser humano.

$$V_p = (1000 + 6\rho).I_c \quad (3.59)$$

Ou seja, para $I_c=200mA$ ($t=3s$), $I_c=30mA$ ($t=30s$) e $\rho=400\Omega.m$, segundo a Equação 3.59, tem-se as seguintes tensões de passo:

$$V_p=500V, \text{ para } t=3s \text{ e } V_p=102V, \text{ para } t=30s$$

A tensão de passo é menos perigoso do que a tensão de toque. Isso se deve ao fato do coração não estar no percurso da corrente de choque no primeiro caso. Deve ser lembrado que as tensões geradas no solo criam superfícies equipotenciais. Se a pessoa estiver com os dois pés na mesma superfície de potencial, a tensão de passo será nula, não havendo choque elétrico. A tensão de passo pode assumir uma gama de valores, que vai desde zero até a máxima diferença entre duas superfícies equipotenciais separadas por 1m.

Um agravante é que a corrente de choque, devido à tensão de passo, contrai os músculos da perna, fazendo a pessoa cair, e, ao tocar o solo com as mãos, a tensão se transforma em tensão de toque no solo. Neste caso, o perigo é maior, porque o coração está contido no percurso da corrente de choque.

A tensão de passo pode causar alguns confrontos sobre assuntos de engenharia, a saber [38]:

- Risco de litígio devido à morte/danos: a base para projetos de engenharia precisa ser robusta e transparente para administrar este risco. Há um risco significativo de empresas e projetistas serem processados por falhar no exercício de um dever de cuidado.

- Responsabilidade econômica: há uma responsabilidade dos planejadores e projetistas em desenvolver estratégias que equilibram a engenharia e as necessidades econômicas.

- Avaliação de risco da engenharia: projetos e planejamento de engenharia são preparados considerando o risco de um evento acontecer. Se um problema surgir, então a avaliação de risco precisa ser transparente e seguro.

Dalziel [39] postulou que para choques de duração de 3s, havia uma correlação entre o peso do corpo e a corrente de choque de fibrilação do corpo para animais das mesmas espécies [40]. Da análise estatística usando gráfico (veja Figura 3.22), e baseado nos resultados para correntes de fibrilação de duração de 3s, *Dalziel* desenvolveu uma expressão matemática para o limiar de fibrilação do ventricular, sendo:

$$I = \frac{K}{\sqrt{t}} \quad (3.60)$$

Onde:

I é a corrente de choque do corpo do limiar de fibrilação (mA);

t é a duração do fluxo de corrente (s);

K é uma constante dependente do peso e do grupo de risco.

$$I(5\%) = \frac{K}{\sqrt{t}} = \frac{165}{\sqrt{t}} \text{ mA} \quad (3.61)$$

Pela Equação 3.61 tem-se:

Para $t=3s$:

$$I(5\%) = 198,15 \text{ mA}$$

Para $t=30s$:

$$I(5\%) = 30,12 \text{ mA}$$

O limiar de fibrilação ventricular para *Biegelmeier e Lee* para homens com 5% de probabilidade de fibrilação e limite de segurança contra fibrilação ventricular para homens e dado pela Figura 3.22 [41].

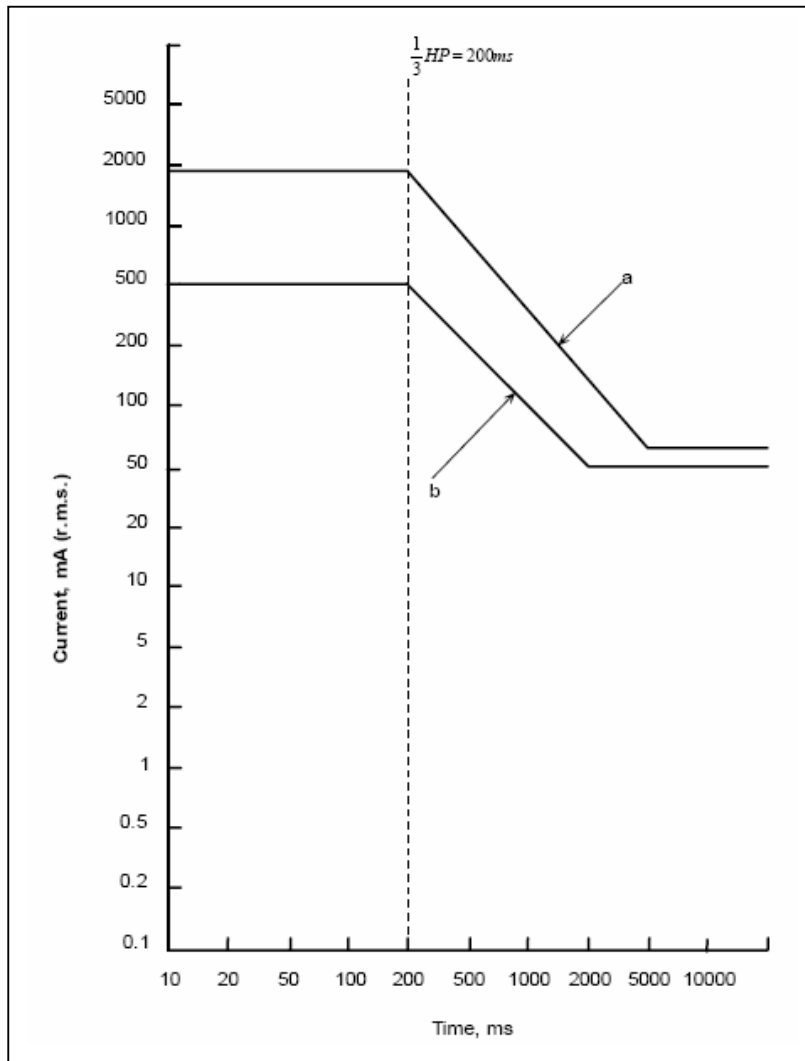


Figura 3.22. Limiar de fibrilação ventricular para *Biegelmeier e Lee* [42].

Notas para Figura 3.22:

- Curva a: o limiar de fibrilação para homens inclusive crianças para 50% probabilidade de fibrilação.

- Curva b: limiar de não fibrilação para homens inclusive crianças. Abaixo desta linha normalmente não há nenhum perigo de fibrilação.

Obs.: Os batimentos do coração foram considerados normais a 100bpm (600ms).

A Tabela 2.3 mostra a impedância de corpo total Z_T para um caminho da corrente de mão para mão a 50/60Hz para áreas de superfície grandes de contato. Baseada na IEC 60479:1994.

Tabela 3.3. Impedância total de corpo Z_T [42].

Tensão de Toque (V)	Valor da impedância total do corpo que não excedem uma percentagem de Ω :		
	5% da População	50% da População	95% da população
25	1.750 Ω	3.250 Ω	6.100 Ω
50	1.450 Ω	2.625 Ω	4.375 Ω
75	1.250 Ω	2.200 Ω	3.500 Ω
100	1.200 Ω	1.875 Ω	3.200 Ω
125	1.125 Ω	1.625 Ω	2.875 Ω
220	1.000 Ω	1.350 Ω	2.125 Ω
700	750 Ω	1.100 Ω	1.550 Ω
1000	700 Ω	1.050 Ω	1.500 Ω
Valor assintótico	650 Ω	750 Ω	850 Ω

Nota: Algumas medidas indicam que a impedância total do corpo para o caminho de corrente da mão para o pé é um pouco menor que um caminho de corrente mão para mão (10% a 30%)

A impedância interna do corpo humano depende do caminho da corrente e isto pode ser determinado da Figura 3.23 e da Tabela 3.3.

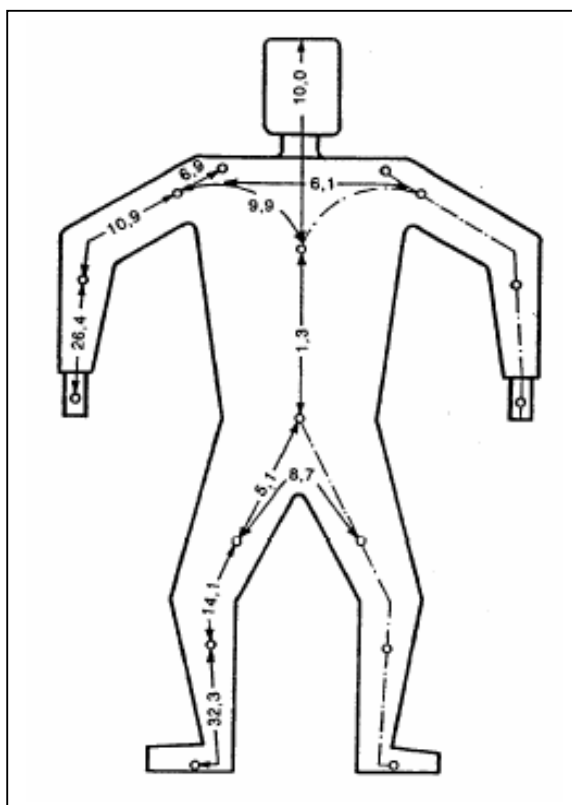


Figura 3.23. Impedâncias Internas do Corpo humano (AS/NZS 60479.1:2001) [42].

Notas para Figura 3.23:

- Os números indicam a percentagem da impedância interna do corpo para as partes concernentes ao corpo em relação ao caminho da mão para o pé;
- Para calcular a impedância total Z_T para um dado caminho da corrente, as impedâncias internas de todas as partes do corpo no caminho da corrente devem ser adicionadas, assim como as impedâncias de áreas da pele em contato.

Sejam $R_{ch}=1.000\Omega$ e $R_c=200\Omega$, então a impedância total Z_T para o caminho da corrente do pé esquerdo para o pé direito é:

$$\%Z=32,3+14,1+5,1+8,7=60,2\%=0,602$$

$$Z_T=0,602 \times 1.000 + 2 \times 200 = 1.002\Omega$$

A IEC 60990:1999 “Métodos de Medida de Corrente de Toque e Corrente no Condutor de Proteção” [43] recorre às correntes de choque de corpo e modelos de impedância da IEC 60479.1, então adota 500Ω como um modelo de impedância de corpo para estabelecer os limiares, sob condições de corrente de choque de corpo, de:

- Percepção;
- Inabilidade para sair;
- Não fibrilação física.

A AS/NZS 60479.1 provê um método adicional para determinar o efeito no coração para outros caminhos de correntes diferente da mão esquerda para ambos os pés. Este método usa um fator de corrente de coração onde:

$$I_h = \frac{I_{ref}}{F} \tag{3.62}$$

Onde:

I_{ref} é a corrente de corpo para o caminho da mão esquerda para o pé;

I_h é a corrente de corpo para os caminhos dados na Tabela 3.4;

F é o fator de corrente do coração para os caminhos dados na Tabela 3.4 (de AS/NZS 60479.1).

Tabela 3.4. Fator de corrente de coração F para diferentes caminhos da corrente [42].

Caminho da Corrente	Fator de corrente de coração (F)
Mão esquerda para pé esquerdo, direito ou ambos.	1,0
Ambas as mãos para ambos os pés	1,0
Mão esquerda para mão direita	0,4
Mão direita para pé esquerdo, direito ou ambos	0,8
Costas para a mão direita	0,3
Costas para a mão esquerda	0,7
Tórax para mão direita	1,3
Tórax para mão esquerda	1,5
Nádegas para mão esquerda, direita ou ambas	0,7

Então sendo $I_{ref}=30mA$ e o caminho da corrente da mão esquerda para mão direita, pela Equação 3.62 e Tabela 3.4 tem-se:

$$I_h=30/0,4=75mA$$

A ESAA EG-1:2000 “Guia de Aterramento de Subestação” [44] provê limites de tensão de toque e de passo conforme IEEE 80 baseada geralmente no trabalho de *Dalziel*, resumiu como se segue:

A equação básica para uma corrente de choque de corpo é determinada por:

$$I_B = \frac{V_{Th}}{Z_{Th} + R_b} \quad (3.63)$$

Onde:

I_B é a corrente de corpo;

V_{Th} é tensão de passo ou de toque;

Z_{Th} é a impedância de contato do corpo;

R_b é a resistência do corpo.

Da fórmula geral para a resistência de solo de um disco metálico:

$$R = \frac{\rho}{4b} \quad (3.64)$$

Onde:

ρ é a resistividade do solo;

b é o raio de um disco metálico.

A equação para tensão de passo limite (V_p) se torna:

$$V_p = I(R_b + 6\rho) \quad (3.65)$$

E para uma camada magra de material de superfície, a resistência de aterramento do pé na superfície do material R_{sf} é determinada por:

$$R_{sf} = \left[\frac{\rho_s}{4b} \right] \cdot C_s \quad (3.66)$$

Onde:

C_s é um fator de redução devido às densidades da superfície e o tipo de material da superfície.

ρ_s é a resistividade do material da superfície de contato.

E as equações gerais se tornam:

$$V_p = I_B (R_b + 6\rho_s C_s) \quad (3.67)$$

Então, pela Equação 3.63, a corrente de choque de corpo, para $V_{Th}=500V$, $Z_{Th}=200\Omega$ e $R_b=1.000\Omega$ é:

$$I_B=416,67mA$$

Pela Equação 3.64, a resistência de solo de um disco metálico, para $\rho=400\Omega.m$ e $b=0,5m$ é:

$$R=200\Omega$$

Pela Equação 3.65, a tensão de passo limite, para $I=198,15mA$ ($t=3s$), $R_b=500\Omega$ e $\rho=400\Omega.m$ é:

$$V_p=574,64V$$

Pela Equação 3.66, a resistência de aterramento do pé na superfície do material, para $C_s=1$, $\rho_s(\text{camada de brita})=3.000\Omega.m$ e $b=0,5m$ é:

$$R_{sf}=1.500\Omega$$

Pela Equação 3.67, tem-se:

$$V_p=0,41667(500+6x400x1)$$

$$V_p=1.208,34V$$

Tabela 3.5. Limites para tensão de passo (EG-1).

	Tensão de Passo Esperada	Para $t=3s$, $C_s=1$ e $\rho_s=400\Omega.m$
Peso do corpo igual a 50kg (para ser usado em áreas com acesso público)	$V_p = \frac{116 + 0,696C_s\rho_s}{\sqrt{t}}$	$V_p=227,71V$
Peso do corpo igual a 70kg (pode ser usado em áreas restritas como subestações)	$V_p = \frac{157 + 0,942C_s\rho_s}{\sqrt{t}}$	$V_p=308,20V$

Então, como visto, o IEEE80 e EG-1 provêem uma orientação adicional para os limites de tensão de passo e de toque para assegurar que os sistemas elétricos sejam projetados para prevenir incidentes de choques elétricos fatais.

Passa-se agora a discutir o tratamento estatístico dos elementos que compõem e determinam a tensão de passo.

4 - TEORIA DA TRANSFORMADA DE INCERTEZA

4.1 - FUNDAMENTOS DE ESTATÍSTICA

A estatística é a arte de tomar decisões acertadas em face da incerteza. A estatística é um método científico de análise com larga aplicação em todas as ciências sociais e naturais. Tendo em vista a impossibilidade de trabalhar com toda a população, em estatística extrai-se uma amostra aleatória desta população na esperança de que a proporção amostral constitua uma boa estimativa da proporção populacional [45]. Esta amostra deve representar uma quantidade significativa da população.

Em amostras maiores, a proporção amostral, P , é uma estimativa mais confiável. E, a maneira mais fácil de mostrar quão bem π é estimada por P consiste em estabelecer o chamado intervalo de confiança, I :

$$\pi = P \pm I \quad (4.1)$$

Numa amostragem aleatória simples, pode-se afirmar com 95% de confiança que:

$$\pi = P \pm 1,96 \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \quad (4.2)$$

Onde:

π é a proporção populacional;

P é a proporção amostral;

n é o tamanho da amostra.

Seja a distribuição de freqüências relativas para um “dado”, para vários tamanhos de amostras (jogadas) como na Tabela 4.1 e a Figura 4.1.

Tabela 4.1. Distribuição de freqüências relativas para um “dado” [45].

X Número de pontos	$f / n = p(X)$		
	n=10	n=50	n= ∞
1	0,10	0,22	1/6=0,167
2	0,00	0,12	0,167
3	0,10	0,14	0,167
4	0,20	0,14	0,167
5	0,30	0,14	0,167
6	0,30	0,24	0,167
	1,00	1,00	1,00

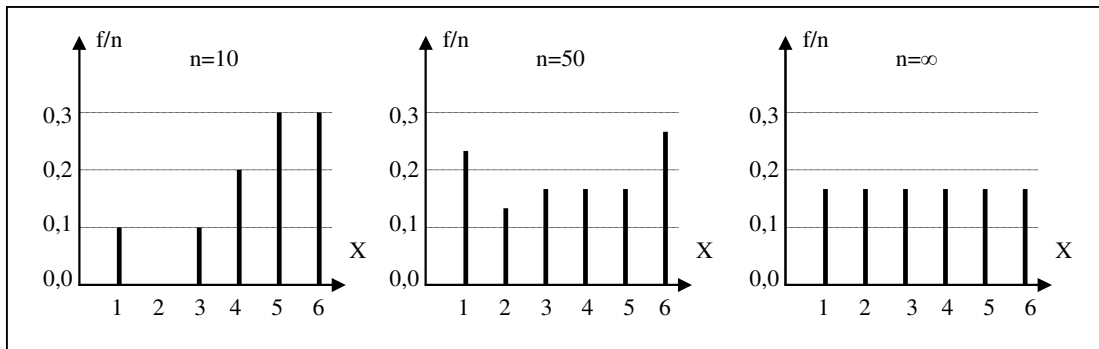


Figura 4.1. Gráficos da Distribuição de freqüências relativas para um “dado” [45].

Pode-se definir uma variável aleatória como um resultado do número de um experimento aleatório.

A teoria das probabilidades é um ramo da matemática extremamente útil para o estudo e a investigação das regularidades dos chamados fenômenos aleatórios.

Probabilidade = limite da freqüência relativa

$$\sum p(X) = 1 \quad (4.3)$$

Uma distribuição de probabilidade a priori (antes do acontecimento) não deve ser considerada como uma verdade absoluta, e sim como uma boa aproximação.

Seja a Tabela 4.2 a função de probabilidade para o lançamento de um “dado”.

Tabela 4.2. Função de probabilidade para um “dado” [45].

X	P(X)
1	0,02
2	0,09
3	0,23
4	0,32
5	0,23
6	0,11
	1,00

$$P_r(X < 2) = 11 \text{ ou } 11\%.$$

$$Pr(\text{evento complementar}) = 1 - Pr(\text{evento})$$

$$P_r(X \geq 2) = 1 - P_r(X < 2) = 0,89 \text{ ou } 89\%.$$

Seja x_1, x_2, \dots, x_n uma amostra de n observações. A média, \bar{X} , obtém-se somando as amostras e dividindo a soma pelo tamanho n da amostra.

$$\bar{X} \equiv \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (4.4)$$

$$\bar{X} \equiv \frac{1}{n} \sum X$$

A variância, s^2 , e o desvio padrão, s , obtêm-se das fórmulas:

$$s^2 \equiv \frac{1}{n-1} \sum (X - \bar{X})^2 \quad (4.5)$$

$$s \equiv \sqrt{s^2} \quad (4.6)$$

O desvio padrão está em um ponto entre o menor e o maior dos desvios $(X - \bar{X})$. A

Tabela 4.3 mostra um exemplo de cálculo da média e do desvio padrão para alturas.

Tabela 4.3. Exemplo de cálculo da média e do desvio padrão para alturas [45].

Dados		Cálculo da Média	Cálculo do Desvio Padrão		
X	f	$X \cdot f$	$(X - \bar{X})$	$(X - \bar{X})^2$	$(X - \bar{X})^2 \cdot f$
60	4	240	-9	81	324
63	12	756	-6	36	432
66	44	2.904	-3	9	396
69	64	4.416	0	0	0
72	56	4.032	3	9	504
75	16	1.200	6	36	576
78	4	312	9	81	324
	n=200	$\bar{X} = 69,3$	$s \approx 3,58$		

A Tabela 4.4 mostra um conjunto de equações para momentos amostrais e momentos populacionais.

Tabela 4.4. Equações para momentos amostrais e momentos populacionais [45].

Momentos Amostrais	Momentos Populacionais
Média Amostral $\bar{X} \equiv \sum X \cdot (f / n)$	Média Populacional $\mu \equiv \sum X \cdot p(x)$
Variância Amostral $s^2 \equiv \sum (X - \bar{X})^2 \cdot (f / n)$	Variância Populacional $\sigma^2 \equiv \sum (\mu - \bar{X})^2 \cdot p(x)$

A Tabela 4.5 mostra um exemplo de cálculo da média e da variância para número de meninas.

Tabela 4.5. Exemplo de cálculo da média e da variância para número de meninas [45].

Distribuição de Probabilidade		Cálculo da Média	Cálculo da Variância		
X	p(x)	$X \cdot p(x)$	$(X - \mu)$	$(X - \mu)^2$	$(X - \mu)^2 \cdot p(x)$
0	1/8	0	-3/2	9/4	9/32
1	3/8	3/8	-1/2	1/4	3/32
2	3/8	6/8	1/2	1/4	3/32
3	1/8	3/8	3/2	9/4	9/32
		$\mu=3/2$	$\sigma=0,87$		

4.1.1 - Monte Carlo

O problema típico de estatística é não se saber como se comporta uma população, especificamente, qual é a sua média, μ . Extrai-se, então, uma amostra relativamente pequena desta população e calcula-se sua média, \bar{X} . Em geral, esta média amostral \bar{X} não diferirá muito da média populacional (alvo), μ [45]. O problema é então saber qual a confiabilidade de \bar{X} como estimativa de μ . Na análise Monte Carlo, faz-se várias experiências e calcula suas médias amostrais. O exemplo a seguir ilustrará uma análise Monte Carlo. Verifica-se a altura de uma turma pequena com $n=4$ por diversas pessoas e diversas vezes e encontre pelo menos 50 médias amostrais (para análise sem repetições $\mu=69$ e $\sigma=3,2$). Agrupam-se os valores de \bar{X} em intervalos de amplitude 1, ou seja, arredondando \bar{X} para o inteiro mais próximo, conforme Tabela 4.6.

Tabela 4.6. Médias relativas para o exemplo Monte Carlo [45].

\bar{X}	Frequência	Frequência Relativa
66	3	0,06
67	2	0,04
68	13	0,26
69	14	0,28
70	9	0,18
71	4	0,08
72	4	0,08
73	0	0,00
74	1	0,02
	50	1,00

Repetindo o experimento amostral sucessivamente começa-se a entender a aleatoriedade das extrações, tal como no caso de uma roleta (razão do nome Monte Carlo). Se fosse possível obter milhões de valores de \bar{X} , as frequências relativas da Tabela 4.6 tenderiam para probabilidades constantes. Um gráfico de todos os valores possíveis de \bar{X} mostra que \bar{X} é uma boa estimativa de μ .

Calcula-se a média e o desvio padrão da distribuição de \bar{X} e compara-os com os valores correspondentes $\mu=69$ e $\sigma=3,2$ da população obtida, conforme Tabela 4.7.

Tabela 4.7. Cálculo do valor esperado de \bar{X} [45].

Distribuição Amostral		Cálculo do Valor Esperado (E)	Cálculo do Erro Padrão (Ep)	
\bar{X}	$p(\bar{X})$	$\bar{X} \cdot p(\bar{X})$	$(\bar{X} - \mu)^2$	$(\bar{X} - \mu)^2 \cdot p(\bar{X})$
65	0,01	0,65	16	0,16
66	0,05	3,30	9	0,45
67	0,12	8,04	4	0,48
68	0,19	12,92	1	0,19
69	0,26	17,94	0	0,00
70	0,19	13,30	1	0,19
71	0,12	8,52	4	0,48
72	0,05	3,60	9	0,45
73	0,01	0,73	16	0,16
	1,00	E=69,00	$\sigma^2 = 2,56 \quad Ep = \sqrt{2,56} = 1,60$	

Verifica-se que o desvio padrão de \bar{X} , Ep , é exatamente a metade do desvio padrão populacional, σ . Para distinguir entre esses dois desvios padrão diferentes, designa-se por erro padrão de \bar{X} o desvio padrão respectivo, Ep . $Ep = \text{erro padrão de } \bar{X} = \text{desvio padrão de } \bar{X}$.

Pode-se ver que quanto maior a amostra, mais confiável é \bar{X} como estimativa de μ , pois neste caso, \bar{X} flutua menos em torno de σ . Este fato permite concluir que o tamanho da amostra n é crítico para determinar o grau de flutuação de \bar{X} .

4.2 - INTRODUÇÃO A PROBABILIDADE

Como tantos outros campos da matemática, o desenvolvimento da teoria das probabilidades tem sido estimulado pela variedade de suas aplicações. E simultaneamente, a cada avanço da teoria tem permitido o alargamento da sua esfera de influência. Sua

aplicação ocorre em campos tão diversos como a engenharia, a medicina, as ciências sociais, etc.

A teoria das probabilidades é um ramo da matemática extremamente útil para o estudo e a investigação das regularidades dos chamados fenômenos aleatórios.

Deve-se entender como experiência qualquer processo ou conjunto de circunstâncias capaz de produzir resultados observáveis; quando uma experiência está sujeita à influência de fatores casuais e conduz a resultados incertos diz-se que a experiência é aleatória.

Fundamentalmente as experiências aleatórias caracterizam-se por;

(i) poder repetir-se um grande número de vezes nas mesmas condições ou em condições muito semelhantes;

(ii) cada vez que a experiência se realiza obtém-se um resultado individual, mas não é possível prever exatamente esse resultado;

(iii) os resultados das experiências individuais mostram-se irregulares, mas os resultados obtidos ao longo de uma longa repetição da experiência patenteiam uma grande regularidade estatística, quando tomados em conjunto.

Espaço de Resultados (Ω) é o conjunto formado por todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória. A importância da definição de espaço de resultados advém sobretudo por ser o meio empregue para a definição de acontecimentos. Existe um paralelismo perfeito entre álgebra de conjuntos e álgebra de acontecimentos.

Os subconjuntos de espaço de resultados designam-se por acontecimentos; os subconjuntos formados por um único elemento chamam-se acontecimentos elementares.

O acontecimento que contém todos os elementos de espaço de resultados chama-se acontecimento certo.

O acontecimento que não contém alguns elementos de espaço de resultados chama-se acontecimento impossível.

Dois acontecimentos A e B são mutuamente exclusivos ou incompatíveis ou disjuntos se não têm em comum qualquer acontecimento de espaço de resultados.

A união dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e somente se A ou B se realizam. Representa-se por $A \cup B$ ou $A + B$ e é formado pelos elementos que pertencem a A ou a B .

A intersecção dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e somente se A e B se realizam conjuntamente. Representa-se por $A \cap B$ ou AB e é formado pelos elementos comuns a A e a B .

Lei de *Laplace* ou Probabilidade a priori: se uma experiência aleatória pode ter N resultados mutuamente exclusivos e igualmente possíveis, e se desses resultados, n tem um atributo A , então a probabilidade de A é dada por $\frac{n}{N}$. Habitualmente escreve-se,

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{numero\#de\#resultados\#favoraveis}}{\text{numero\#de\#casos\#possiveis}} \quad (4.7)$$

Função de Probabilidade é uma função de conjuntos, cujo domínio é o conjunto das partes do espaço de resultados Ω , e tem por contradomínio o intervalo $[0, 1]$ e satisfaz os seguintes axiomas:

$$P(A) \geq 0 \quad (4.8)$$

$$P(\Omega) = 1 \quad (4.9)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ se } A \cap B = 0 \quad (4.10)$$

Propriedades:

$$P(\emptyset) = 0 \quad (4.11)$$

$$P(A - B) = P(B) - P(A \cap B) \quad (4.12)$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) \quad (4.13)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (4.14)$$

A probabilidade de um acontecimento é definida como sendo o valor para o qual tende a frequência relativa do acontecimento quando o número de repetições da experiência aumenta.

A probabilidade condicional de A dado B , $P(A|B)$ é definida pela Equação (4.15).

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (4.15)$$

Sempre que $P(B) > 0$; ou, equivalente:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (4.16)$$

Esta definição generaliza-se facilmente para um número finito de acontecimentos:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad (4.17)$$

A e B dizem-se acontecimentos independentes se e somente se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ou equivalentemente, $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$

Esta última relação evidencia o significado de independência. O conhecimento de que B ocorreu não influencia a probabilidade de que A ocorra e o conhecimento de que A ocorreu não influencia a probabilidade de que B ocorra.

Teorema de *Bayes*: Se $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ é uma partição do espaço de resultados Ω de uma experiência aleatória, $P(A_i) > 0$, para $i=1, 2, \dots, n$, dado qualquer acontecimento B , tal que $P(B) > 0$, então:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)} \quad (4.18)$$

Este teorema pode ser interpretado da seguinte forma: seja B um acontecimento que se realiza se e somente se um dos acontecimentos mutuamente exclusivos A_1, A_2, \dots, A_n se verifica.

Aos acontecimentos A_i dá-se por vezes o nome de causas. A fórmula de *Bayes* dá então a probabilidade de que o acontecimento B que se deu é o resultado da causa A .

A probabilidade $P(A_i)$ toma o nome de probabilidade a priori da causa A_i . $P(A_i | B)$ é a probabilidade a posteriori, isto é, a probabilidade de A_i calculada sob a hipótese de que B se realizou.

4.2.1 - Variáveis Aleatórias

Em muitas experiências aleatórias os elementos do espaço de resultados (Ω) são números reais ou conjuntos ordenados de números reais. Assim acontece com o registro de temperaturas, da pluviosidade, etc.

Quando Ω não é um conjunto numérico atribui-se muitas vezes a cada elemento w do espaço de resultados, um número real, atribuição essa que pode ser meramente convencional.

Supondo agora que só se está interessados no estudo de uma característica dos elementos de Ω , associa-se a cada elemento $w \in \Omega$ um número real $X(w)$. Está-se assim a definir uma função $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$. Sendo A um acontecimento, chama-se imagem de A por X , e representa-se por $X(A)$, ao conjunto dos valores que X assume para os elementos w de A , isto é:

$$X(A) = \{X(w) : w \in A\} \quad (4.19)$$

Por outro lado, cada subconjunto de $E \subset \mathfrak{R}$, pode fazer-se corresponder o subconjunto $X^{-1}(E)$ formado por todos os elementos $w \in \Omega$. Tais que $X(w) \in E$.

$$X^{-1}(E) = \{w : X(w) \in E\} \quad (4.20)$$

A este conjunto $X^{-1}(E)$ chama-se a imagem inversa de E por X .

Uma função real $X(\omega)$ definida no conjunto Ω dos acontecimentos elementares, chama-se uma variável aleatória se a imagem inversa de qualquer intervalo I do eixo real da forma $]-\infty, x]$, é um acontecimento aleatório.

4.2.2 - Função de Distribuição

Seja uma variável aleatória X , um intervalo real $E_x =]-\infty, x]$ e a respectiva imagem inversa $X^{-1}(E_x)$. Pela Definição de variável aleatória existe sempre $P(X \leq x) = P[X^{-1}(E_x)]$. Como $P(X \leq x)$ depende de x , a igualdade $F_x(x) = P(X \leq x)$ define uma função real de variável real.

A função $F_x(x)$ definida por $F_x(x) = P(X \leq x)$ chama-se Função de Distribuição da variável aleatória X .

Propriedades elementares da função de distribuição $F(x)$:

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad (4.21)$$

$F(x)$ é uma função não decrescente.

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad (4.22)$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \quad (4.23)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (4.24)$$

$F(x)$ é contínua a direita.

$$F(X = a) = F(a) - \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) \quad (4.25)$$

4.2.3 - Variáveis Aleatórias Discretas

Seja X uma variável aleatória e D o conjunto $\{a : P(X = a) > 0\}$ (conjunto de pontos de descontinuidade da função distribuição). A variável aleatória X diz-se do tipo discreto quando $P(X \in D) = 1$. Quando a variável é discreta existe um conjunto finito ou numerável, $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, tal que:

$$P(X \in D) = \sum P(X = a_i) = 1, \text{ e} \quad (4.26)$$

$$P(X = a_i) > 0, \text{ para } i=1, 2, \dots \quad (4.27)$$

Seja D o conjunto definido anteriormente. A função, $f(x) > 0$ se $x \in D$, e $f(x) = 0$ se $x \in D^c$ chama-se função de probabilidade da variável aleatória X .

A função de distribuição de uma variável aleatória discreta (Figura 4.2) pode exprimir-se facilmente em termos da respectiva função de probabilidade:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad (4.28)$$

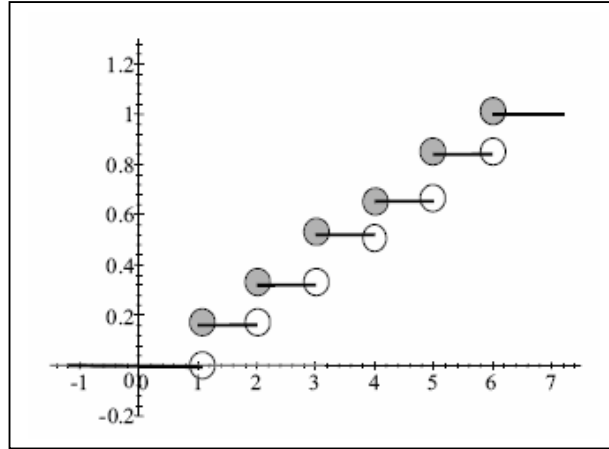


Figura 4.2. Função distribuição de uma variável aleatória discreta [46].

4.2.4 - Variáveis Aleatórias Contínuas

Seja X uma variável aleatória e $F(x)$ a respectiva função de distribuição (Figura 4.3); se, $D = \{a : P(X=a) > 0\} = \emptyset$ resulta que $F(x)$ não apresenta descontinuidade. Se, além disso, existe uma função não negativa, $f(x) \geq 0$, tal que para todo o número real x se verifica a relação:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (4.29)$$

Então a variável aleatória X diz-se contínua.

A função não negativa, $f(x)$, introduzida na definição anterior, chama-se função de densidade de probabilidade ou simplesmente função de densidade. Da definição de função de distribuição e da sua relação com a função de densidade, têm-se as seguintes propriedades:

$$f(x) \geq 0; \quad (4.30)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1; \quad (4.31)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = P(a < X < b) \quad (4.32)$$

Repare-se que $P(a < X < b)$ pode ser interpretada geometricamente como uma área, visto que é calculada através de uma integral definida de uma função não negativa.

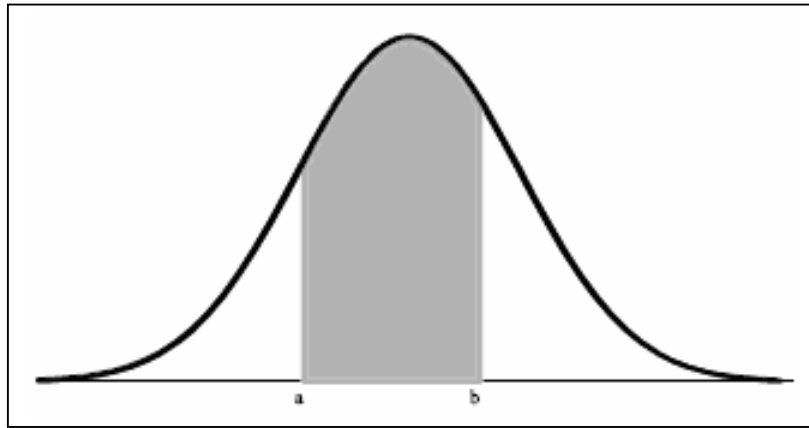


Figura 4.3. Função distribuição de uma variável aleatória contínua $P(a < X < b)$ [46].

4.2.5 - Valor Esperado

O conceito de Valor Esperado foi introduzido por *Huygens*.

Uma importante família de parâmetros de uma distribuição são os momentos. O momento de ordem k em relação à origem ou momento ordinário de ordem k (inteiro positivo) de uma variável aleatória é o valor esperado da função $G(X) = X^k$. Isto é:

$$\mu_k = E[X^k] \quad (4.33)$$

Se a variável aleatória for discreta:

$$E[X^k] = \sum_i x_i^k p_i \quad (4.34)$$

No caso de ser contínua:

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx \quad (4.35)$$

O momento de ordem 1 em relação à origem de uma variável aleatória chama-se valor esperado e representa-se por μ ou $E[X]$.

O momento de ordem k em relação à média ou momento central de ordem k (inteiro positivo) de uma variável aleatória é o valor esperado da função $G(X) = (X - \mu)^k$, isto é:

$$E[(X - \mu)^k] \quad (4.36)$$

Se a variável aleatória for discreta:

$$E[(X - \mu)^k] = \sum_i (x_i - \mu)^k p_i \quad (4.37)$$

No caso de ser contínua:

$$E[(X - \mu)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x) dx \quad (4.38)$$

O momento central de segunda ordem de uma variável aleatória X , é chamado variância de X , e representa-se habitualmente por $V[X]$ ou σ^2 .

A raiz quadrada positiva da variância de uma variável aleatória X , σ , chama-se desvio padrão.

O parâmetro σ^2 é uma medida de dispersão da variável aleatória em torno do seu valor esperado. Quanto mais concentrada for a distribuição, tanto menor será o valor de σ^2 .

O papel do desvio padrão como um parâmetro que mede a dispersão de uma variável aleatória é particularmente claro quando se observa a famosa desigualdade de *Chebyshev*; esta desigualdade obtém-se a partir do seguinte teorema:

Se uma variável aleatória X toma apenas valores não negativos e tem valor esperado $E[X]$, então para qualquer número positivo K , tem-se:

$$P(X \geq K) \leq \frac{E[X]}{K} \quad (4.39)$$

Desigualdade de *Chebyshev*: se X é uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 , finita, então, para um qualquer número real $K > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq K\sigma) \leq \frac{1}{K^2} \quad (4.40)$$

A importância desta desigualdade advém de ser válida para toda e qualquer variável aleatória que tenha uma variância finita podendo empregar-se mesmo quando não se conhece a distribuição da variável aleatória.

Algumas propriedades da Esperança Matemática e da Variância:

Se X é uma variável aleatória e a e b são constantes reais $E[aX + b] = aE[X] + b$.

Seja X uma variável aleatória e $G(X)$ e $H(X)$ funções de X ; então:

$$E[G(X) + H(X)] = E[G(X)] + E[H(X)]$$

Se X é uma variável aleatória, $V[X] = E[X^2] - E^2[X]$

Se X é uma variável aleatória, $V[X] \geq 0$

Se X é uma variável aleatória constante, isto é, se $X \equiv 0$, então $V[X] = 0$.

Se X é uma variável aleatória e a e b são constantes reais, $V[aX + b] = a^2 V[X]$

4.2.6 - Variáveis Aleatórias Discretas Bidimensionais

Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensional. Chama-se função de probabilidade conjunta de (X, Y) a função $f(x, y)$ que associa a cada elemento de \mathfrak{R}^2 uma probabilidade $f(x, y) = P(X=x, Y=y)$ e que verifica as seguintes condições:

$$0 \leq f(x, y) \leq 1, \forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2 \quad (4.41)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) = 1 \quad (4.42)$$

A representação de $f(x, y)$ pode ser feita através de uma tabela ou por meio de uma expressão analítica.

Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensional. Chama-se função de distribuição conjunta de (X, Y) a função $F(x, y)$, tal que

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \text{ e que verifica as seguintes propriedades:}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \text{ fixo}}} F(x, y) = x \lim_{\substack{y \rightarrow -\infty \\ x \text{ fixo}}} F(x, y) = 0 \quad (4.43)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0 \quad (4.44)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1 \quad (4.45)$$

$$0 \leq F(x, y) \leq 1 \quad (4.46)$$

$$(x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2) \Rightarrow F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2); \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \quad (4.47)$$

Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensional. As variáveis aleatórias unidimensionais X e Y são independentes se $f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y); \forall (x, y)$.

4.2.7 - Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais

Uma variável aleatória bidimensional (X, Y) diz-se contínua se existir uma função $f(x, y) \geq 0$, de tal modo que seja possível definir $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ como:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv; \forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2 \quad (4.48)$$

$f(x, y)$ é uma função de densidade de probabilidade conjunta e $F(x, y)$ é uma função de distribuição conjunta da variável aleatória (X, Y) .

Propriedades da função de densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x, y) \geq 0; \forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2 \quad (4.49)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 \quad (4.50)$$

Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional. As variáveis aleatórias unidimensionais X e Y são independentes se $f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y); \forall (x, y)$.

A covariância é uma medida da distribuição conjunta dos valores dos desvios de X e Y em relação às respectivas médias, que descreve a dependência linear entre as variáveis.

A covariância entre X e Y [$cov(X, Y)$ ou $\sigma_{X, Y}$] define-se como:

$$cov(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = \sigma_{X, Y} \quad (4.51)$$

Para variáveis discretas, têm-se:

$$\sigma_{X, Y} = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) f(x_i, y_j) \quad (4.52)$$

Para variáveis contínuas, têm-se:

$$\sigma_{X, Y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy \quad (4.53)$$

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional.

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] \quad (4.54)$$

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então:

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] \quad (4.55)$$

$$Cov(X, Y) = 0 \quad (4.56)$$

4.2.8 - Distribuição Teórica Normal Contínua

Para muitas variáveis aleatórias, a distribuição de probabilidade é uma curva específica, em forma de sino, chamada curva normal ou curva Gaussiana. A distribuição Normal é de grande importância na teoria das probabilidades e estatísticas. Na natureza e na tecnologia são inúmeros os fenômenos que apresentam características idênticas as de uma distribuição normal. Além disso, sob hipóteses bastantes gerais, a distribuição normal é a distribuição limite para somas de variáveis aleatórias independentes quando o número de termos tende para infinito.

Uma variável aleatória X tem uma distribuição Normal se a sua função de densidade é dada pela Equação (4.57).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \text{ onde } \sigma > 0 \text{ e } -\infty < \mu < +\infty \quad (4.57)$$

A distribuição Normal é definida a partir de dois parâmetros: μ e σ ; onde μ representa o valor esperado de X , e σ , o seu desvio padrão.

Pode-se demonstrar que se X é uma variável aleatória com uma distribuição Normal, a variável transformada $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ tem também uma distribuição de média 0 e desvio padrão 1, $Z \sim N(0,1)$. Este resultado é particularmente importante pois a função de distribuição Normal no caso especial $\mu=0$ e $\sigma=1$, encontra-se largamente tabelada [46]. A Figura 4.4 mostra algumas funções de distribuição e de densidade para algumas combinações de μ e σ^2 .

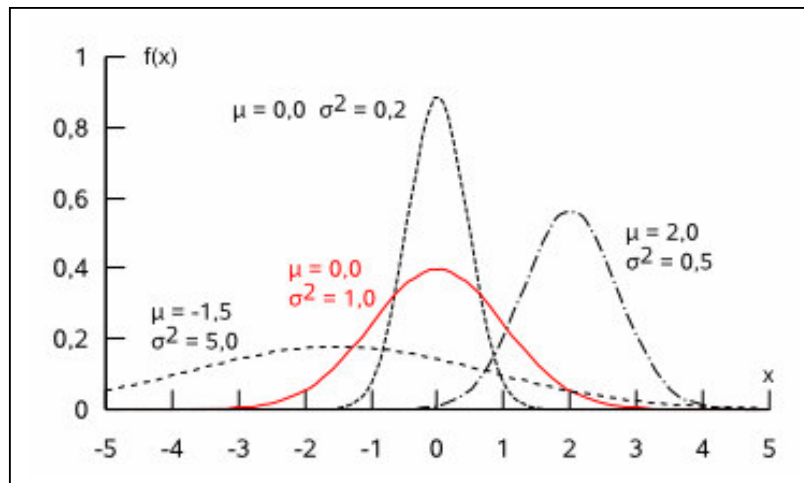


Figura 4.4. Funções de distribuição e de densidade para combinações de μ e σ^2 [47].

A Figura 4.5 mostra a função de densidade para a distribuição normal padrão localizando os desvios 1σ , 2σ e 3σ .

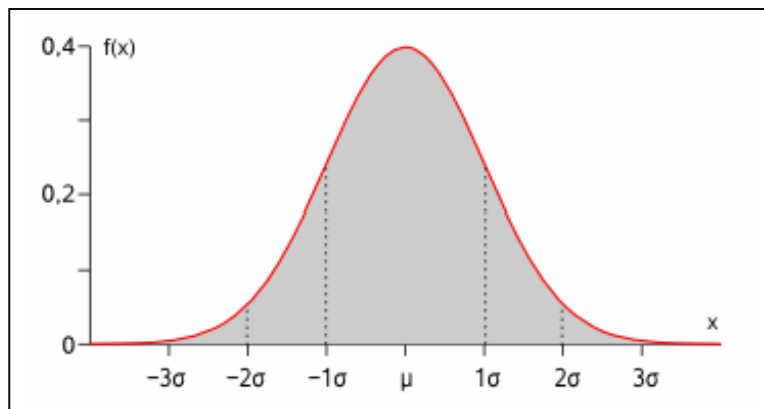


Figura 4.5. Função de densidade para a distribuição normal padrão [47].

A mais simples das distribuições normais é a distribuição normal padronizada e chamada simplesmente de distribuição Z (veja Figura 4.6). Distribui-se em torno da média $\mu=0$ com desvio padrão $\sigma=1$ [45]. A Figura 4.6 mostra a função de densidade para a distribuição normal padrão (média $\mu=0$ e desvio padrão $\sigma=1$).

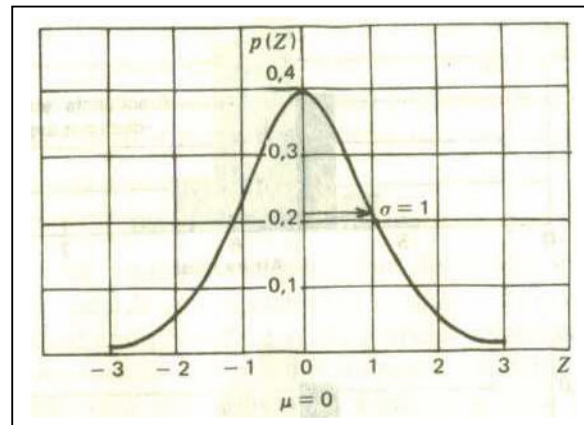


Figura 4.6. Função de densidade de distribuição normal ($\mu=0$ e $\sigma=1$) [45].

A Figura 4.7 mostra a Probabilidade incluída além do ponto $Z_0=1,4$.

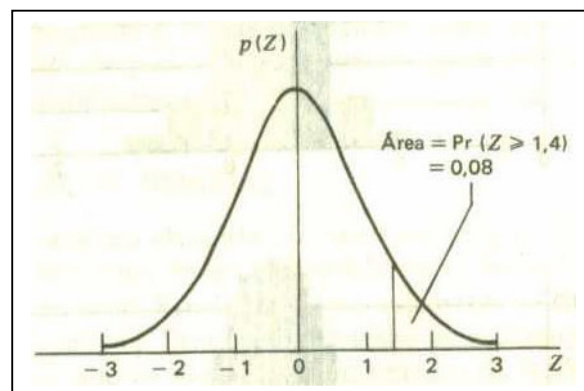


Figura 4.7. Probabilidade incluída além do ponto $Z_0=1,4$ [45].

4.2.9 - Considerações sobre o Desvio Padrão e Intervalo de Confiança

De acordo com propriedades da função de densidade, a área total sob a curva é unitária porque indica a probabilidade de todo o conjunto observado. E a área sob a curva entre dois valores quaisquer de x indica a probabilidade da ocorrência entre esses valores.

A análise da curva permite a conclusão lógica do que se observa na prática: as ocorrências tendem a se concentrar em torno de uma média e se tornam mais raras ou menos prováveis à medida que dela se afastam.

Por simples integração da função de densidade, é possível calcular a probabilidade de ocorrência em função do afastamento da média segundo o número de desvios-padrão (valores aproximados com 3 dígitos significativos):

0,682 ou 68,2% para faixa $\mu \pm 1\sigma$

0,954 ou 95,4% para faixa $\mu \pm 2\sigma$

0,997 ou 99,7% para faixa $\mu \pm 3\sigma$

Na faixa $\mu \pm 3\sigma$ ocorre a quase totalidade (99,7%) dos valores. Por isso, ela é, em algumas referências, denominada dispersão natural do processo [47].

Se considerarmos X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f=f(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$ em que θ é o parâmetro desconhecido a estimar, X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória e $L_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ e $L_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ duas estatísticas tais que $L_1 < L_2$ e $P(L_1 < \theta < L_2) = 1 - \alpha$.

Nestas condições, para uma realização da amostra x_1, x_2, \dots, x_n , calculamos l_1 e l_2 e:

- Ao intervalo $]l_1, l_2[$ denominamos intervalo de confiança a $(1-\alpha)100\%$ para o parâmetro θ ;
- A probabilidade $(1-\alpha)$ dá-se o nome de coeficiente de confiança do intervalo;
- A probabilidade complementar α dá-se o nome de nível de significância;
- Aos extremos do intervalo, l_1 e l_2 , chamamos limites de confiança inferior e superior, respectivamente.

Como pretende-se que uma estimativa possua o máximo de confiança possível, no entanto, se uma maior confiança é pretendida na estimação, esta conduz a probabilidades de erros maiores, dado que um elevado nível de significância produz um intervalo de estimação menor e, como tal, a precisão da estimação diminui [46].

Por exemplo: Sejam $\sigma^2=144$, $n=36$, $\bar{X} = 63,4$ e $I=90\%$. Então:

$$\sigma=12$$

$$1-\alpha=0,90$$

$$\alpha=0,10$$

Busca-se da Tabela 4.8 o valor de Z para $(0,5- \alpha/2)=0,45$.

Da Tabela 4.8 tem-se $Z=1,64$ para 0,4495 e $Z=1,65$ para 0,4505. Por interpolação temos $Z_{\alpha/2}=1,645$. Sendo assim:

$$l_1 = \bar{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 60,11$$

$$l_2 = \bar{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 66,69$$

Portanto, para 90% de confiança temos o intervalo:

$$60,11 \leq \mu \leq 66,69$$

Desde que a distribuição normal é simétrica, se desejar a área entre $-\infty$ e z conforme $\{P(X \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty, z} \varphi(u) du = [1/(\sqrt{2\pi})] \int_{-\infty, z} e^{-u^2/2} du\}$ (isso representa a área entre $-\infty$ e z sob a curva da função de densidade), basta somar 0,5 aos valores da Tabela 4.8.

Tabela 4.8. Tabela para determinação do valor de Z [47].

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Alguns exemplos de uso da tabela:

- Probabilidade de $X \leq 1,53$. Na interseção da linha 1,5 com a coluna 0,03 temos o valor 0,4370. Precisamos somar 0,5 porque, conforme visto, a tabela dá valores a partir de zero. Assim, $P(X \leq 1,53) \approx 0,4370 + 0,5 = 0,9370$.

- Probabilidade de $-1 \leq X \leq 0,5$. A idéia gráfica permite concluir que é igual à diferença entre os valores calculados para cada extremo [47].

$$P(X \leq 0,5) = 0,5 + 0,1915 = 0,6915.$$

$$P(X \leq -1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (0,5 + 0,3413) = 0,1587.$$

$$\text{Portanto o resultado é dado por } P(-1 \leq X \leq 0,5) = 0,6915 - 0,1587 = 0,5328$$

4.3 - INTRODUÇÃO AO PROCESSO ESTOCÁSTICO

Qualquer sistema real opera sempre em ambientes onde a incerteza impera, principalmente quando o sistema envolve, a natureza, ações humanas imprevisíveis ou avarias de máquinas. Os modelos determinísticos certamente contribuem para a compreensão, a um nível básico, do comportamento dinâmico de um sistema. No entanto, por não poderem lidar com a incerteza, acabam por ser insuficientes nos processos de tomada de decisão. Assim, recorre-se aos processos estocásticos como uma forma de tratar quantitativamente estes fenômenos, aproveitando certas características de regularidades que eles apresentam para serem descritos por modelos probabilísticos [48].

Pode definir-se um Processo Estocástico como um conjunto de variáveis aleatórias indexadas a uma variável (geralmente a variável tempo), sendo representado por $\{X(t), t \in T\}$. Estabelecendo o paralelismo com o caso determinístico, onde uma função $f(t)$ toma valores bem definidos ao longo do tempo, um processo estocástico toma valores aleatórios ao longo do tempo. Os valores que $X(t)$ pode assumir chamam-se estados e ao seu conjunto X espaço de estados.

Processo Estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro $t \in R$, ou seja;

$$X = \{X(t_0), X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\} \quad (4.58)$$

A variável aleatória $X(t)$ é definida em um espaço denominado de espaço de estados.

A variável tempo é, por definição, uma variável contínua, a qual pode ser discretizada se os fenômenos forem observados em intervalos regulares.

Os processos estocásticos se classificam em:

- Quanto ao estado: discreto (cadeia) ou contínuo (processo);
- Quanto ao tempo: discreto $\{X(t), t=0, 1, 2, 3, \dots\}$ ou contínuo $\{X(t), t \geq 0\}$.

Os processos estocásticos estacionários mantêm seu comportamento invariante no tempo (se a função distribuição da variável aleatória que o define não variar no tempo).

Um processo estocástico se diz de *Markov* se for estacionário e gozar da propriedade da perda de memória, isto é, se seu comportamento futuro apenas for condicionado pelo estado presente, independentemente dos estados visitados no passado.

Para um processo de *Markov* é completamente irrelevante qualquer informação sobre estados passados ou sobre o tempo de permanência no estado presente.

Num processo estocástico as transições entre estados são causadas pela ocorrência de eventos, e restringidas pelo tempo entre eventos sucessivos. A única distribuição contínua que apresenta a propriedade de ausência de memória é a distribuição exponencial. Assim em um processo de *Markov* todos os tempos entre eventos tem de ser exponencialmente distribuídos.

A cadeia de *Markov* é de tempo discreto quando as transições ou as variáveis aleatórias $X(t)$ ocorrem em instantes $0, 1, 2, \dots, k$. Neste caso:

$$\begin{aligned}
 &P[X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \dots, X(t_1) = x_1, X(t_0) = x_0] \\
 &= P[X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k] \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

Para todo $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1}$

Propriedades:

- (i) as informações de estados passados são irrelevantes;
- (ii) o tempo que o processo está no estado atual é irrelevante.

Uma cadeia de *Markov* em tempo discreto fica completamente definida se conhecermos os estados $X=\{0, 1, 2, \dots, s\}$ e as probabilidades de transição entre os estados em um período. A Tabela 4.9 mostra a classificação do processo de *Markov*.

Tabela 4.9. Classificação do processo de *Markov* [49].

Espaço de Estado	Tipo de Parâmetro	
	Discreto	Contínuo
Discreto	(Parâmetro Discreto) Cadeia de Markov	Cadeia de Markov de Parâmetro Contínuo
Contínuo	Processo de Markov de Parâmetro Discreto	Processo de Markov de Parâmetro Contínuo

Recordando, uma variável aleatória x é uma regra para nomear a todos os resultados ζ de uma experiência k um número $x(\zeta)$. Um processo estocástico $x(t)$ é uma regra para

nomear a todas ζ uma função $x(t, \zeta)$. Assim, um processo estocástico é uma família de funções no tempo que dependem do parâmetro ζ ou, equivalentemente, uma função de t e ζ . O domínio de ζ é o conjunto de todos os resultados experimentais e o domínio de t é um conjunto fixo J de números reais [48].

Se J é o eixo real, então $x(t)$ é um processo de tempo contínuo. Se J é o conjunto de números inteiros então $x(t)$ é um processo de tempo discreto. Um processo de tempo discreto é, assim, uma sucessão de variáveis aleatórias. Tal seqüência será denotada por x_n , para evitar índices dobrados, como $x[n]$.

Usa-se a notação $x(t)$ para representar um processo estocástico omitindo, como no caso de variáveis aleatórias, sua dependência em ζ . Assim $x(t)$ tem as seguintes interpretações:

- Ele é uma família (ou um conjunto) de funções $x(t, \zeta)$. Nesta interpretação, t e ζ são variáveis;

- Ele é uma única função de tempo (ou uma amostra de determinado processo). Neste caso, t é uma variável e ζ é fixo;

- Se t é fixo e ζ é variável, então $x(t)$ é uma variável aleatória igual ao estado do dado processo no tempo t ;

- Se t e ζ são fixos, então $x(t)$ é um número.

Será entendido do contexto que destas interpretações possuem em particular caso [48].

Simulação estocástica é a arte de gerar amostras de variável aleatória em um ambiente computacional e usar estas amostras para obtenção de um resultado, onde a não linearidade é transformada para incerteza do problema linear equivalente.

4.4 - TRANSFORMADA DE INCERTEZA COM SIMULAÇÕES TLM

O problema de modelar incerteza é equivalente a encontrar os momentos estatísticos da função não linear $G(U+\hat{u})$ de uma variável aleatória. Neste trabalho, a simulação eletromagnética constitui desta função não linear [50].

Para estimar a variável aleatória utiliza-se a UT, a qual calcula as estatísticas de variáveis aleatórias que sofre uma transformação não linear. Existem artigos que demonstram cálculos de resistência de aterramento, tensão de passo e de toque, cada um possuindo diferentes suposições e objetivos. No entanto, poucos consideram a incerteza dos dados trabalhados [1].

A idéia chave da UT é que é mais fácil aproximar uma distribuição Gaussiana do que uma transformação/função não linear arbitrária [2]. Na UT um conjunto de pontos (denominados de pontos sigma) é escolhido deterministicamente de tal forma que os pontos configurem uma média e uma covariância específicas. A função não linear é aplicada a cada ponto, e então as estatísticas dos pontos transformados são calculadas, obtendo assim a média e a covariância transformadas [2].

Uma possível interpretação da UT é uma aproximação discreta da FDP (Função Densidade Probabilidade) contínua $w(\hat{u})$ por uma distribuição discreta w_i . Então, têm-se duas distribuições: uma contínua e outra discreta como mostrada na Figura 4.8.

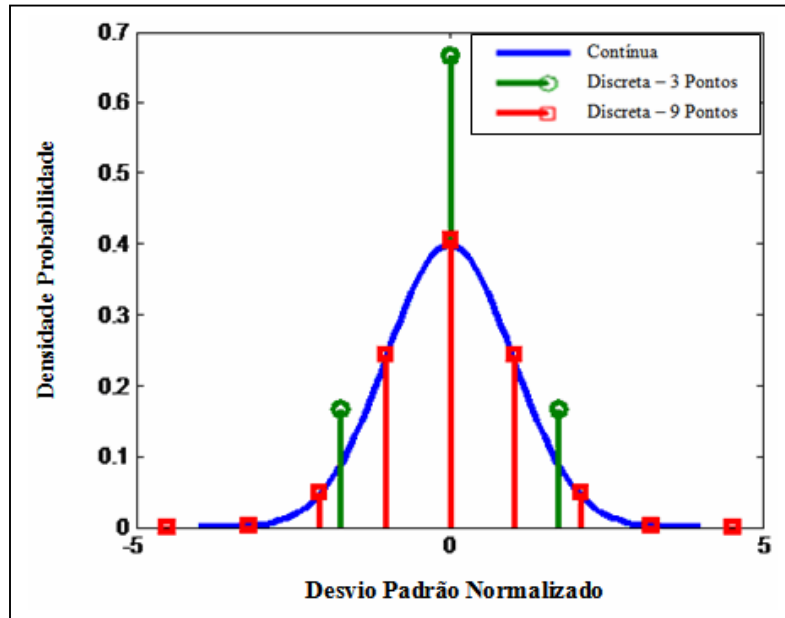


Figura 4.8. Função densidade probabilidade normal contínua e a aproximação discreta.

A aproximação é executada de forma que o mapa das duas distribuições produz os mesmos momentos depois do mapeamento não linear [3]:

$$E_d \{ \hat{u}^k \} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}^k w(\hat{u}) d\hat{u} = \sum_i w_i S_i^k \quad (4.60)$$

Onde:

E_d é o valor esperado;

\hat{u} é o conjunto de variáveis aleatórias;

$w(\hat{u})$ é a função densidade probabilidade contínua;

w_i é a função densidade probabilidade discreta (pesos);

S_i são os pontos sigma.

Os pesos w_i e pontos sigma S_i estarão completamente disponíveis uma vez que os momentos necessários sejam calculados. Da Equação (4.60) e considerando uma distribuição média nula, os pontos sigma de segunda ordem são calculados usando o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 w_i S_i &= E\{\hat{u}\} = 0 \\
\sum_{i=1}^2 w_i S_i^2 &= E\{\hat{u}^2\} = \sigma^2 \\
\sum_{i=1}^2 w_i S_i^3 &= E\{\hat{u}^3\} = \gamma_1 \sigma^3 \\
\sum_{i=1}^2 w_i S_i^4 &= E\{\hat{u}^4\} = (\gamma_2 + 3)\sigma^4
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Onde:

σ é a variância;

γ_1 é a assimetria da distribuição de probabilidade;

γ_2 é seu curtose de excesso.

A solução da Equação (4.61) é:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sqrt{\frac{\gamma_2 + 3}{1 - \gamma_1 + \gamma_1^2}} \sigma \\
S_2 &= -(1 - \gamma_1) \sqrt{\frac{\gamma_2 + 3}{1 - \gamma_1 + \gamma_1^2}} \sigma \\
w_1 &= \frac{1 - \gamma_1 + \gamma_1^2}{6 + 2\gamma_2 - 3\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2} \\
w_2 &= \frac{1}{(1 - \gamma_1)} \frac{1 - \gamma_1 + \gamma_1^2}{6 + 2\gamma_2 - 3\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Os resultados apresentados na Equação (4.62) são úteis para qualquer distribuição com média nula. Os parâmetros UT calculados (pontos sigma e pesos) são usados na computação dos parâmetros estatísticos da função distribuição final. Então, no caso de TLM, a solução da propagação da incerteza é o equivalente a função não linear $G(U + \hat{u})$ de uma variável aleatória.

Uma vez que os pontos sigma sejam conhecidos, é direto aplicá-los a função não linear. Usando a Equação (4.61) com os resultados da Equação (4.63) ou Equação (4.67), é possível calcular o valor esperado e a variância.

$$\bar{G} = E\{G(\bar{U} + \hat{u})\} = \sum_i w_i G(\bar{U} + S_i) \tag{4.63}$$

A outra ordem mais alta dos momentos centrais é dada por:

$$E\left\{G(\bar{U} + \hat{u}) - \bar{G}\right\}^k = \sum_i w_i (G(\bar{U} + S_i) - \bar{G})^k \quad (4.64)$$

A variância é dada por:

$$\sigma_G^2 = \sum_i w_i (G(\bar{U} + S_i) - \bar{G})^2 \quad (4.65)$$

A combinação da Equação (4.61) com os resultados de Equação (4.63) ou Equação (4.67) também permite o cálculo da assimetria (γ_1) e da curtose (γ_2).

$$\begin{aligned} {}_G \gamma_1 \sigma_G^3 &= \sum_i w_i (G(\bar{U} + S_i) - \bar{G})^3 \\ ({}_G \gamma_2 + 3) \sigma_G^4 &= \sum_i w_i (G(\bar{U} + S_i) - \bar{G})^4 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Os momentos são calculados corretamente após o traçado não linear, usando um pequeno conjunto de pontos selecionados (Pontos Sigma). A interpretação que a UT é uma aproximação para a distribuição contínua também significa que a Equação (4.64) é a aproximação discreta para:

$$\sum_i w_i G(\bar{U} + S_i) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\hat{u}) w(\hat{u}) d\hat{u} \quad (4.67)$$

A Equação (4.67) mostra que a expressão de UT para a média é uma aproximação à integral da função $G(\hat{u})$ ponderada (pesada) por uma função janela $w(\hat{u})$. Esta é de fato a formulação para o esquema de integração de quadratura Gaussiana [3]. A vantagem de ver a UT como um esquema de integração é que os pesos e os pontos sigma são agora facilmente calculados a partir das raízes da interpolação polinomial. Naturalmente, o polinômio é dependente da função de janela $w(\hat{u})$. A Tabela 4.10 resume os polinômios e suas funções densidade probabilidade correspondente.

Tabela 4.10. Funções densidade probabilidade e polinômios correspondentes.

Funções Densidade Probabilidade	Polinômios
$w(\hat{u}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \hat{u} < 1 \\ 0 & \hat{u} > 1 \end{cases}$ <p style="text-align: right;">(Uniforme)</p>	<p><i>Legendre</i></p> <p>Para $n=2$ temos $y_2(x) = 1 - 3x^2$</p> <p>Para $n=3$ temos $y_3(x) = x - \frac{5x^3}{3}$</p>
$w(\hat{u}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-\hat{u}^2}} & \hat{u} < 1 \\ 0 & \hat{u} > 1 \end{cases}$	<p><i>Chebyshev (1st kind)</i></p> <p>Para $n=2$ temos $T_2(x) = 2x^2 - 1$</p> <p>Para $n=3$ temos $T_3(x) = 4x^3 - 3x$</p>
$w(\hat{u}) = \begin{cases} e^{-\hat{u}} & \hat{u} > 0 \\ 0 & \hat{u} < 0 \end{cases}$ <p style="text-align: right;">(Exponencial)</p>	<p><i>Laguerre</i></p> <p>Para $n=2$ temos $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$</p> <p>Para $n=3$ temos $L_3(x) = x^3 + 9x^2 - 18x + 6$</p>
$w(\hat{u}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\hat{u}^2}{2}}$ <p style="text-align: right;">(Gaussiana)</p>	<p><i>Hermite</i></p> <p>Para $n=2$ temos $H_2(x) = 4x^2 - 2$</p> <p>Para $n=3$ temos $H_3(x) = 8x^3 - 12x$</p>

Naturalmente, a expressão de UT como um esquema de integração sugere que outros esquemas pudessem ser usados em vez de quadratura Gaussiana. Porém, a ótima colocação de abscissas dado pela quadratura provê a melhor estimativa numérica para a integral.

A ordem do polinômio tem um efeito direto no cálculo de momentos de ordem mais alta (Equação 4.64). A aproximação de momento de ordem mais alta melhora com o aumento da ordem polinomial. Como uma regra de manuseio, a ordem dos resultados polinomiais tem boas estimativas dos momentos até essa ordem. Um polinômio de 5° ordem dará estimativas boas dos quatro momentos estatísticos principais (média, variância, assimetria e curtose). A Tabela 4.11 mostra os pesos e pontos sigma para as diferentes Funções Densidade Probabilidade.

Tabela 4.11. Pesos, pontos sigma e funções densidade probabilidade correspondentes.

N	Pesos					Pontos Sigma					Função Densidade Probabilidade	Polinômios	
2	0,5	0,5				-0,577	0,577	0,577	0	0,775		$w(\hat{u}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \hat{u} < 1 \\ 0 & \hat{u} > 1 \end{cases}$	Uniforme (<i>Legendre</i>)
3	0,278	0,448	0,278			-0,775	0	0,775		0,861			
4	0,174	0,326	0,326	0,174		-0,861	-0,340	0,340	0,861				
5	0,118	0,239	0,2845	0,239	0,118	-0,906	-0,538	0	0,538	0,906			
2	0,5	0,5				-0,707	0,707	0,707	0				
3	0,333	0,333	0,333			-0,866	0	0,866					
4	0,25	0,25	0,25	0,25		-0,9238	-0,3827	0,3827	0,9238				
5	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	-0,951	-0,5878	0	0,5878	0,951			
2	0,854	0,146				0,586	3,414						
3	0,711	0,279	0,010			0,416	2,294	6,290					
4	0,6031	0,3574	0,0389	0,0005		0,323	1,746	4,537	9,395				
5	0,5218	0,3987	0,0759	0,0036	0,00002	0,264	1,413	3,596	7,086	12,64			
2	0,5	0,5				-0,707	0,707						
3	0,167	0,666	0,167			-1,225	0	1,225					
4	0,107	0,337	0,337	0,107		-1,650	-0,523	0,523	1,650				
5	0,011	0,222	0,5333	0,222	0,011	-2,021	-0,959	0	0,959	2,021			

Como esperado, os pesos e pontos sigma calculados com (4.62) são exatamente o mesmo dos provido na Tabela 4.11 com $N=3$. As relações descritas na Tabela 4.10 e 4.11 podem ser resumidas com o uso da Fórmula Rodrigues [3] e o cálculo de peso:

$$p_n(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (w(x)Q(x)^n)$$

$$w_i = \frac{1}{\left. \frac{dp_n(x)}{dx} \right|_{x=x_i}} \int w(x) \frac{p_n(x)}{x-x_i} dx \quad (4.68)$$

Neste caso x_i serão os zeros do polinômio.

No caso de três variáveis aleatórias, haverá 34 equações para serem satisfeitas. Desde que cada ponto sigma tenha quatro variáveis (w_i , 1S_i , 2S_i e 3S_i), então o número mínimo de pontos sigma para satisfazer todas as condições é 9.

O número de pontos sigma para um número arbitrário de variáveis usa uma formulação combinatorial. Se n_{RV} for o número de variáveis aleatórias, o número de equações na aproximação de segunda ordem é o dado pela Equação (4.69):

$$N_{eq} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(n_{RV} + k - 1)!}{k!(n_{RV} - 1)!} \quad (4.69)$$

Onde:

N_{eq} é o número de equações na aproximação de segunda ordem;

n_{RV} é o número de variáveis aleatórias;

K é a ordem do momento.

Considerando que cada ponto sigma acrescenta $n+1$ pontos desconhecidos ao problema, o número de pontos sigma é o próximo número inteiro dado pela Equação 4.70.

$$N_s = \frac{N_{eq}}{n_{RV} + 1} = \frac{1}{n_{RV} + 1} \sum_{k=1}^4 \frac{(n_{RV} + k - 1)!}{k!(n_{RV} - 1)!} \quad (4.70)$$

O número necessário de pontos sigma para manter a segunda ordem de aproximação pode ser visto na Tabela 4.12.

Tabela 4.12. Número mínimo de pontos sigma na segunda e quarta ordem de aproximação.

n_{RV}	N_{eq} (Segunda ordem)	N_s (Segunda ordem)	N_{eq} (Quarta ordem)	N_s (Quarta ordem)
1	4	2+1	8	4+1
2	14	5+1	43	15+1
3	34	9+1	155	39+1
4	69	14+1	449	90+1
5	125	21+1	1121	187+1
6	209	30+1	2507	359+1
7	329	42+1	5147	644+1
8	494	55+1	9866	1097+1
9	714	72+1	16874	1788+1
10	1000	91+1	30887	2807+1

Como a Tabela 4.12 mostra, o número mínimo de pontos sigma para uma aproximação de quarta ordem cresce muito rapidamente com o número de variáveis aleatórias.

Até aqui todas as variáveis eram independentes. Como levar em conta a correlação? Em condições práticas há dois modos. O primeiro modo é reescrever as equações de momento que levam em conta a correlação. O segundo modo é calcular os pontos sigma como se as variáveis fossem independentes, e então usar uma transformação para obter os pontos sigma para o caso dependente.

O ábaco a ser utilizado na combinação UT+TLM é obtido pelos valores de entrada das variáveis (neste estudo, duas (permissividade elétrica e condutividade elétrica)) normalizadas. Os valores da primeira variável ocupam a primeira coluna e os da segunda, a primeira linha. Os pesos UT ocupam as segundas linhas e colunas do ábaco. O valor da posição A_{33} ($A_{\text{ColunaLinha}}$) é igual à multiplicação das posições A_{23} e A_{32} , da posição $A_{43} = A_{42} \times A_{23}$ e assim por diante. As Tabelas 4.13 e 4.14 mostram exemplos de Ábacos UT para 3 e 5 pontos sigma e seus pesos.

Tabela 4.13. Ábaco UT para 3 pontos sigma.

RV	σ	0,00123	0,02000	0,02775
ϵ_r	Pesos	0,27800	0,44400	0,27800
6,0500	0,2780	0,07728	0,12343	0,07728
20,000	0,4440	0,12343	0,19714	0,12343
33,950	0,2780	0,07728	0,12343	0,07728

Tabela 4.14. Ábaco UT para 5 pontos sigma.

RV	σ	0,0011	0,0015	0,0020	0,0025	0,0031
ϵ_r	Pesos	0,1180	0,2390	0,2845	0,2390	0,1180
3,692	0,1180	0,0139	0,0282	0,0336	0,0282	0,0139
10,316	0,2390	0,0282	0,0571	0,0680	0,0571	0,0282
20,000	0,2845	0,0336	0,0680	0,0809	0,0680	0,0336
29,684	0,2390	0,0282	0,0571	0,0680	0,0571	0,0282
36,308	0,1180	0,0139	0,0282	0,0336	0,0282	0,0139

A combinação de UT+TLM é direta. Os momentos são calculados considerando TLM como uma função não linear. Isto é mostrado considerando a formulação básica de TLM com matrizes globais. Esta aproximação provê uma representação mais clara de variáveis aleatórias em TLM. A formulação global no domínio tempo representa TLM como a equação matricial iterada:

$$[V^r]_k = [S][V^i]_k \quad (4.71)$$

$$[V^i]_{k+1} = [C][V^r]_k \quad (4.72)$$

A combinação das equações produz a equação estática global:

$$[V^i]_{k+1} = [C][S][V^i]_k \quad (4.73)$$

Onde:

$[V^r]_k$ é a matriz tensões refletidas no instante k ;

$[V^r]_{k+1}$ é a matriz tensões refletidas no instante $k+1$;

$[V^i]_k$ é a matriz tensões incidentes no instante k ;

$[V^i]_{k+1}$ é a matriz de tensões incidentes no instante $k+1$;

$[C]$ é a matriz de conexão;

$[S]$ é a matriz de espalhamento;

O conjunto $[\hat{u}]$ de variáveis aleatórias fazem parte da descrição do problema (limites ou média) e são representados nas matrizes de conexão e/ou espalhamento globais. Uma representação compacta combina todo o conjunto $[\hat{u}]$ em uma única matriz $[A(\hat{u})]$. Então (4.74) se torna a matriz equação estática:

$$[V^i]_{k+1} = [A(\hat{u})][V^i]_k \quad (4.74)$$

A Equação (4.74) mostra que o estado no passo de tempo $k+1$ é dependente do estado no passo de tempo k . Porém, é possível avançar simplificando esta equação. A simplificação envolve a eliminação da dependência do passo de tempo prévio. Isto só é possível para excitação impulsiva.

$$[V^i]_{k+1} = [A(\hat{u})]^{k+1} [V^i]_0 \quad (4.75)$$

O vetor de tensões iniciais $[V^i]_0$ não é uma variável aleatória. Então, a função $[A(\hat{u})]^{k+1}$ representa o efeito do conjunto completo de variáveis aleatórias. A representação de TLM pelas Equações (4.74) e (4.75) é equivalente, embora haja algumas diferenças que consideram como representar variáveis aleatórias em cada uma das equações (especialmente relativo a covariância entre variáveis). A mesma formulação é possível no domínio da frequência TLM ou problemas de oito valores. Esta descrição mostra que para todas as variáveis aleatórias no problema, o procedimento TLM age como uma função não linear:

$$[V^i]_{k+1} = G(\hat{u}) \quad (4.76)$$

A Equação (4.74) mostra atos TLM como uma função não linear de um conjunto de variáveis aleatórias. Então, os resultados TLM podem ser usados com as Equações (4.64) e (4.65) para obter os parâmetros estatísticos desejados.

O método TLM torna possível o cálculo de tensões de pico, campos elétricos e eletromagnéticos em muitos pontos de interesse [51]. Como já comparado em diversas pesquisas, as características dos sistemas de aterramento elétricos sujeitos a alta corrente de impulso são dramaticamente diferente desta para a frequência de 60Hz. Porque o comportamento reativo se torna muito importante, fazendo as características transientes tipicamente não lineares [28].

Por exemplo: sejam as variáveis aleatórias de entrada ϵ_r (permissividade elétrica relativa do solo) e ρ (resistividade elétrica do solo em $\Omega.m$), onde o valor médio de ϵ_r é 11 e o intervalo é 9, e o valor médio de ρ é $100\Omega.m$ e o intervalo é $50\Omega.m$. Então $\epsilon_r = 11 \pm 9$ e $\rho = 100 \pm 50\Omega.m$. A função densidade probabilidade é modelada como sendo uniforme. A escolha está baseada na vasta variação de parâmetros elétricos em sistemas de aterramento. Usa-se três pontos sigma ($n=3$) e são necessárias três simulações. Da Tabela 4.11 temos:

$$\begin{aligned} S_1 &= -0,775 \\ S_2 &= 0,000 \\ S_3 &= 0,775 \end{aligned} \quad (4.77)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} s_1 \epsilon_r &= \epsilon_r + \Delta \epsilon_r . S_1 = 4,025 \\ s_2 \epsilon_r &= \epsilon_r + \Delta \epsilon_r . S_2 = 11,000 \\ s_3 \epsilon_r &= \epsilon_r + \Delta \epsilon_r . S_3 = 17,975 \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned}
s_1 \rho &= \rho + \Delta\rho.S_1 = 61,250\Omega.m \\
s_2 \rho &= \rho + \Delta\rho.S_2 = 100,000\Omega.m \\
s_3 \rho &= \rho + \Delta\rho.S_3 = 138,750\Omega.m
\end{aligned}
\tag{4.79}$$

Da Tabela 4.13, utilizando-se os pesos w_1 , w_2 e w_3 , define-se a Matriz de Incerteza [A] para UT(3):

$$[A] = \begin{bmatrix} 0,07728 & 0,12343 & 0,07728 \\ 0,12343 & 0,19714 & 0,12343 \\ 0,07728 & 0,12343 & 0,07728 \end{bmatrix}$$

Utilizando-se os resultados das Equações (4.78) e (4.79) procede-se as simulações com o *software* MEFISTo e chega-se a Matriz de Valores Simulados da tensão de passo [M]:

$$[M] = \begin{bmatrix} 0,055 & 0,079 & 0,099 \\ 0,114 & 0,148 & 0,174 \\ 0,161 & 0,200 & 0,227 \end{bmatrix}$$

A Média \bar{G} é dada pela solução da Equação (4.63), ou seja:

$$[G] = \begin{bmatrix} 0,00425 & 0,00945 & 0,00765 \\ 0,01407 & 0,02918 & 0,02148 \\ 0,01244 & 0,02469 & 0,01754 \end{bmatrix}$$

$$\bar{G} = \sum_i G_{nm} = 0,14105$$

A Variância σ_G^2 é dada pela solução da Equação (4.65) e o Desvio Padrão

por $\sigma_G = \sqrt{\sigma_G^2}$, ou seja:

$$[B] = [M] - \bar{G}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -0,08605 & -0,06205 & -0,04205 \\ -0,02705 & 0,00695 & 0,03295 \\ 0,16100 & 0,05895 & 0,08595 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [A] \times [B^2]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0,00057 & 0,00048 & 0,00014 \\ 0,00009 & 0,00001 & 0,00013 \\ 0,00200 & 0,00043 & 0,00057 \end{bmatrix}$$

Onde:

[B] e [C] são matrizes auxiliares.

$$\sigma_G^2 = \sum_i C_{nm} = 0,00442$$

$$\sigma_G = \sqrt{\sigma_G^2} = 0,06649$$

Finalmente calcula-se a probabilidade de ocorrência em função do afastamento da média segundo o número de desvios-padrão, ou seja, para 95,4% (faixa $\bar{G} \pm 2\sigma$), temos:

$$\bar{G} - 2\sigma$$

$$\bar{G} + 2\sigma$$

$$0,00807 \leq \bar{G} \leq 0,27403$$

Então para este exemplo tem-se uma média da tensão de passo de 0,14105kV com afastamento de $\pm 0,06649$ kV para 95,4% de confiabilidade. Ou seja, a média estará no intervalo de [0,00807kV; 0,27403kV] com 95,5% de confiabilidade.

5 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

A interface elétrica entre o sistema de aterramento e o solo é um dos elementos mais críticos para o estabelecimento de um bom aterramento. Como a homogeneidade do solo é rara na prática, é necessário introduzir o modelo de estratificação da resistividade do solo. Embora este modelo não seja uma representação perfeita do solo real, é suficiente para os cálculos de um aterramento. Para executar uma estratificação do solo é necessário fazer uma série de medições de campo dos valores da resistividade aparente do solo. As medidas são efetuadas em *ohms* e o valor calculado da resistividade é dado em $\Omega.m$. O principal método utilizado para fazer estas medições é o de *Wenner* [14]. A equação citada pela NBR-7117 [13] para este método é a Equação (3.2).

Como a composição do solo não é homogênea ao longo do terreno, e como é impraticável o corte transversal do terreno para sua análise, costuma-se aproximá-lo por um modelo matemático [23].

Considerando a distribuição constante de corrente no solo, o comprimento do cabo é muitíssimo maior que o raio do mesmo ($L \gg r$) e o comprimento do cabo é muito maior que a profundidade que o mesmo está enterrado ($L \gg h$), para um cabo horizontal enterrado e submetido a uma corrente aplicada no seu centro temos a resistência de aterramento do cabo dada pela Equação (5.1):

$$R_f = \frac{\rho}{L \cdot \pi} \left(\ln \left(\frac{L}{\sqrt{r \cdot h}} \right) - 1 \right) \quad (5.1)$$

Onde:

R_f é a resistência do aterramento (Ω);

ρ é a resistividade do solo ($\Omega.m$);

L é o comprimento do cabo (m);

r é o diâmetro do cabo (mm);

h é a profundidade em que o cabo está enterrado (m).

Sejam: $\rho=67\Omega.m$; $L=18m$; $r=0,008m$ e $h=0,50m$.

Então pela Equação 5.1, temos:

$$R_f=6,87\Omega$$

A dependência dos parâmetros do solo com relação à resistividade e permissividade e o processo de ionização devem ser introduzidos no modelo para melhor representação de um sistema de aterramento. A relação entre a impedância de aterramento e a resistência

não é linear e depende das características do solo e da geometria do aterramento [31]. O desempenho do sistema de aterramento está diretamente associado ao conceito de impedância de aterramento, o qual é função da frequência (Equação 5.2).

$$\rho_f = \rho_{(100)} \cdot \left(\frac{100}{f} \right)^{0,072} \quad (5.2)$$

Onde:

ρ_f é a resistividade do solo dependente da frequência ($\Omega.m$);

$\rho_{(100)}$ é a resistividade do solo a 100Hz ($\Omega.m$);

f é frequência (Hz).

A Figura 5.1 mostra a relação da resistividade do solo com a frequência.

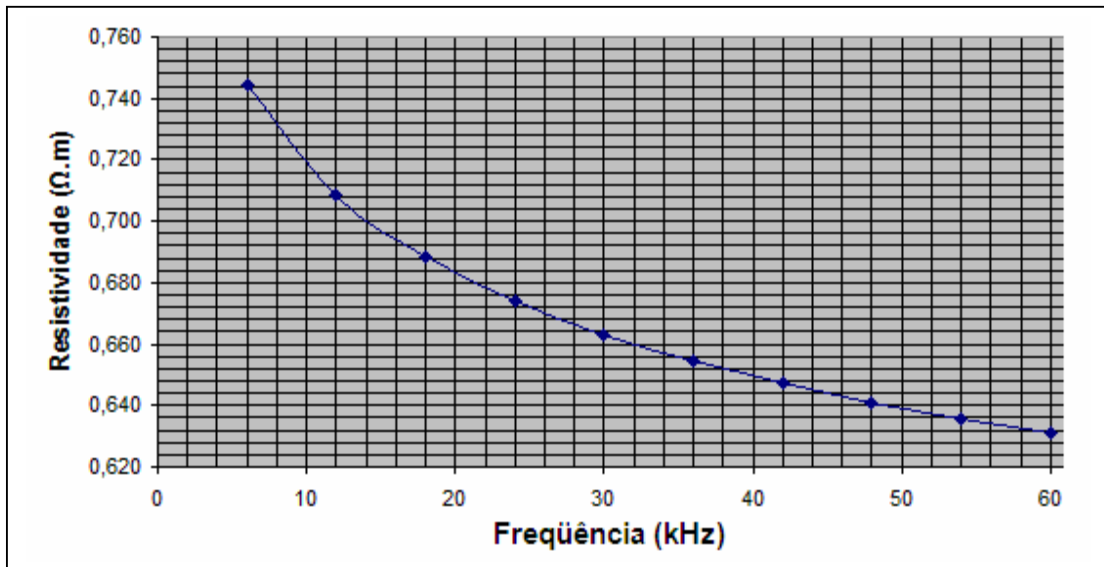


Figura 5.1. Resistividade do solo em função da frequência (Equação 5.2 com $\rho_{(100)}=1\Omega.m$).

Neste trabalho, levou-se em conta as variações da resistividade elétrica aparente do solo (ρ), da distância do condutor de terra ao ponto de medida (d), da variação da corrente de pico (I_{pk}) aplicada ao condutor enterrado (de terra), da permissividade elétrica relativa (ϵ_r) do solo e da condutividade elétrica (σ). A permeabilidade magnética relativa do solo foi considerada igual a um.

No primeiro caso de simulação, no caso da permissividade relativa, o valor médio é 20 e o intervalo é 18. Usa-se três Pontos Sigma ($n=3$), então três simulações são necessárias. Os resultados destas computações são usados nas Equações (4.63) e (4.64) com os pesos correspondentes ($n=3$) no cálculo do valor esperado e momentos de ordem mais altos.

Utilizou-se permissividade relativa ($\epsilon_r = 20 \pm 18$) e a condutividade do solo ($\sigma = 0,002 \pm 0,001 S/m$), ou seja, no caso da permissividade relativa, o valor médio é 20 e o intervalo é 18. A primeira simulação usa $_{s1}\epsilon_r = 6,0574$, a segunda $_{s2}\epsilon_r = 20$ e a última $_{s3}\epsilon_r = 33,9426$.

A espessura da camada de solo e de ar foram ambas consideradas iguais a 5m. Em uma estrutura de simulação de $x=40m$, $y=10m$ e $z=40m$. Sendo as células do tipo cubo com cada aresta medindo um metro ($\Delta S=1m$) perfazendo um total de 16.000 células (Figura 5.2).

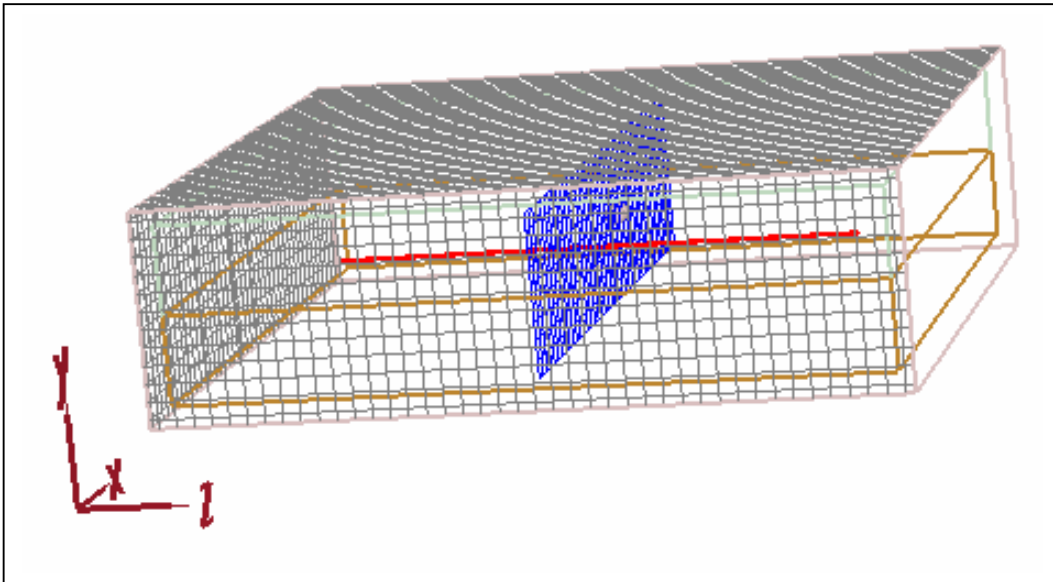


Figura 5.2. Visão tridimensional da área de simulação no MEFISTO-3d para o primeiro caso.

O condutor de terra foi modelado, para a situação física [54] mostrada na Figura 5.2, como uma fonte distribuída com comprimento de 30m e área de seção transversal de $625mm^2$.

A fonte de sinal considerada foi um campo elétrico (E) com forma de onda NEMP (*Nuclear Electromagnetic Pulse* – Pulso Eletromagnético Nuclear) de valor máximo de $0,7127kV/m$, tempo de subida de $2,56\mu s$ e tempo de queda de $57,44\mu s$ (veja Figura 5.3). O parâmetro de saída foi a tangencial do campo elétrico ao chão. Neste caso a UT foi usada com duas variáveis aleatórias (permissividade relativa e condutividade). O campo foi provado a d (m) do centro do cabo [50].

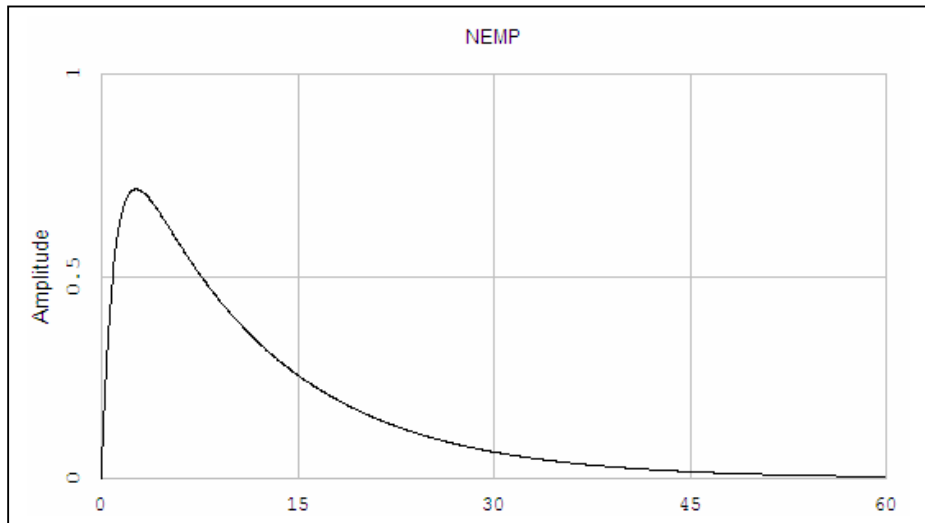


Figura 5.3. Forma de onda do sinal de entrada.

A ferramenta computacional utilizada foi o MEFISTo-3D [Commercial Software from Faustus Scientific Corporation] que utiliza a técnica de simulação TLM-3D. O tempo médio de simulação foi de 4 minutos (95.500 iterações e $\Delta t=159,277\mu s$) em um microcomputador PC-AT com CPU Intel Core Duo 1,83MHz e 2GB de memória RAM.

Foi verificada a variação da amplitude do campo elétrico (E) em função da permissividade elétrica relativa (ϵ_r) e da distância (d). Para uma condutividade do solo ($\sigma=0,001$) e um condutor horizontal (Cabo) de 30m (Figura 5.4).

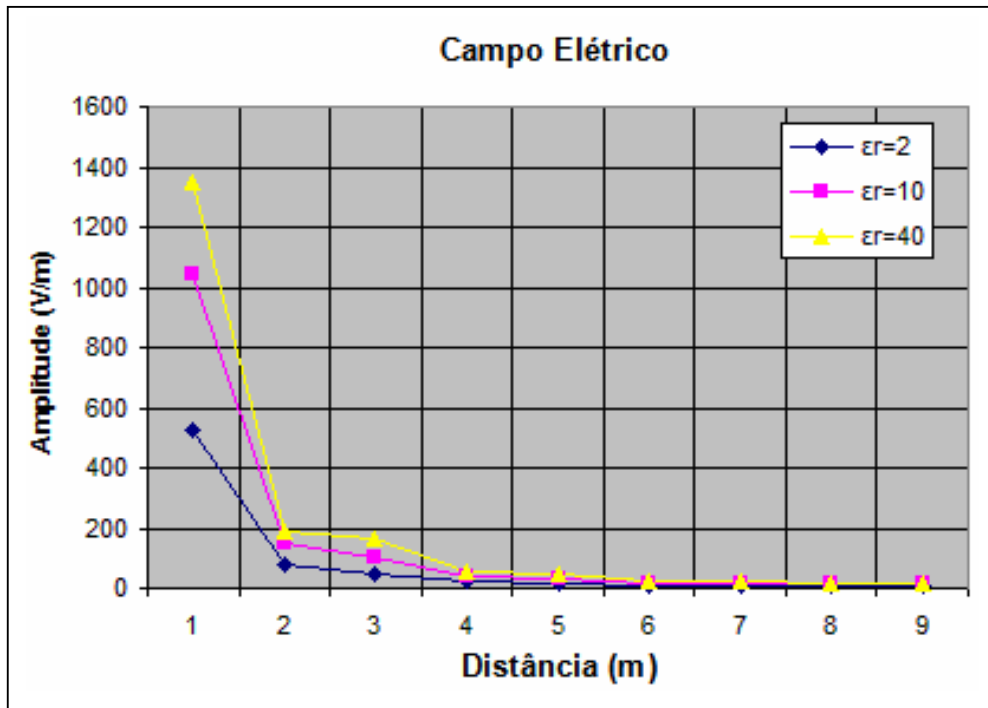


Figura 5.4. Campo elétrico em função da permissividade elétrica relativa e da distância.

Foi verificada a variação da amplitude do Campo elétrico (E) em função da condutividade do solo (σ) e da distância (d). Para uma permissividade elétrica relativa ($\epsilon_r=10$) e um condutor horizontal (Cabo) de 30m (Figura 5.5).

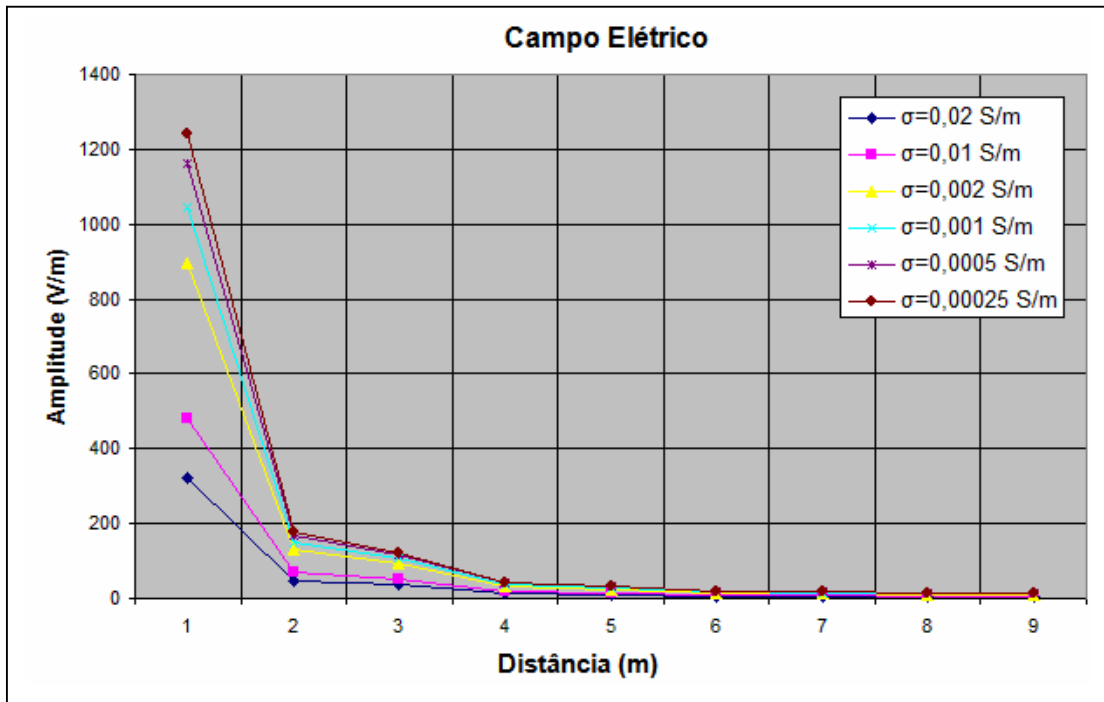


Figura 5.5. Campo elétrico em função da condutividade elétrica e da distância.

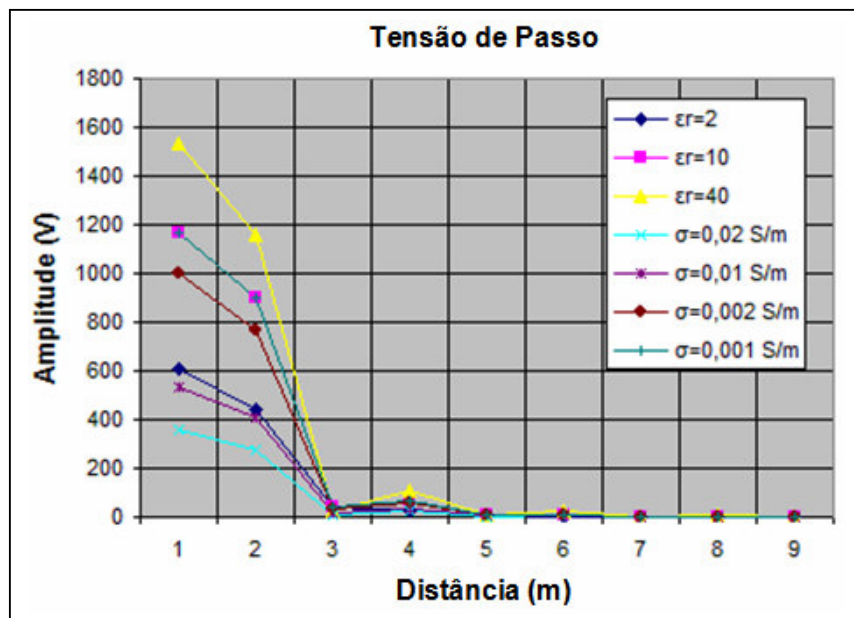


Figura 5.6. Tensão de passo em função da distância, ϵ_r e σ .

Os sinais coletados nos pontos de observação foram convertidos em tensão (V_A e V_B) e posteriormente calculada a tensão de passo relacionada (Figura 5.6):

$$\begin{aligned}
 V_A &= E_A \cdot \Delta S \\
 V_B &= E_B \cdot \Delta S \\
 V_p &= V_A - V_B
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Este procedimento foi executado com 3 e 5 pontos sigma para cada variável aleatória. A Tabela 5.1 mostra o valor esperado e o desvio padrão da tensão induzida nos dois casos. Como pode ser visto, os resultados com 3 pontos sigma são consistentes.

Tabela 5.1. Valor esperado e desvio padrão da tensão induzida para o primeiro caso.

Numero de Pontos Sigma	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)
3 (9 simulações no total)	13,36	4,75
5 (25 simulações no total)	13,35	4,73

A FDC (Função Distribuição Cumulativa) é mostrada na Figura 5.7. A FDC provê mais informação que o valor esperado e o desvio padrão. Pode ser usado para determinar intervalos de confiança dos resultados calculados. Usando os resultados para 5 pontos sigma, há uma chance de 91,3% que a tensão induzida estar no intervalo [3,8kV a 19kV]. Ambos, 3 e 5 pontos sigma por simulações de variável aleatória, mostram que a probabilidade de que a tensão induzida seja maior que 18,5kV é menor que 8% [50].

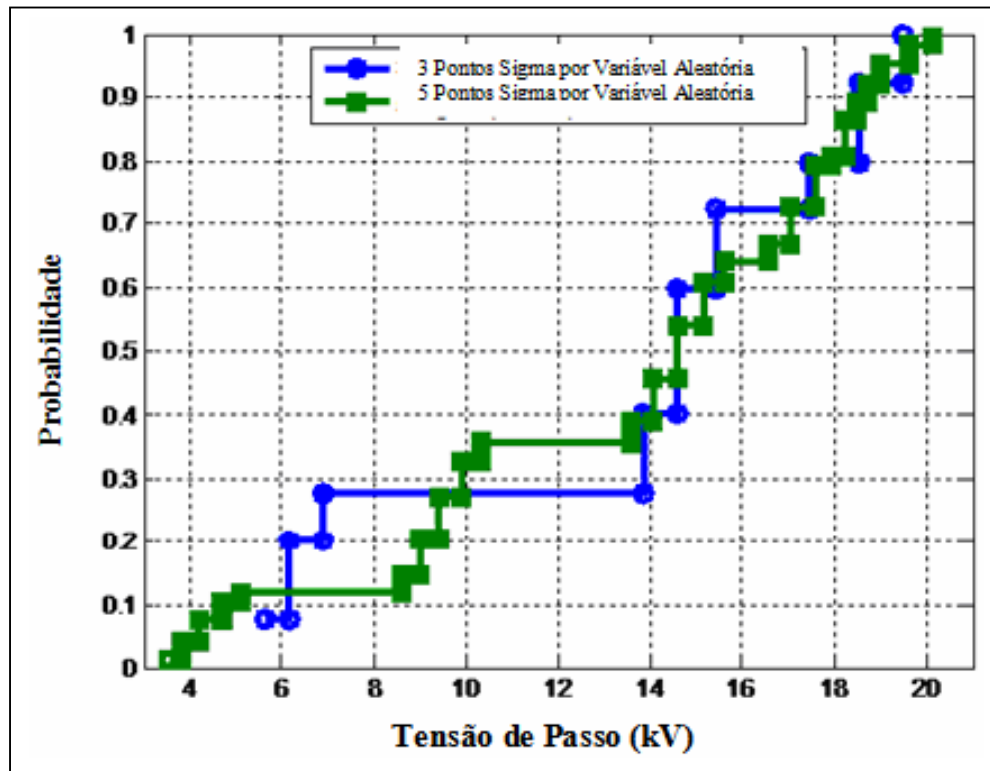


Figura 5.7. FDC da tensão de passo calculada com o UT(3 e 5) para o primeiro caso.

Formulações analíticas para tensão de passo podem ser utilizadas para validar as simulações. Tais como a Equação (5.4).

$$V_A = \frac{\rho \cdot I_{pk}}{2\pi \cdot d}$$

$$V_B = \frac{\rho \cdot I_{pk}}{2\pi \cdot (d + dp)}$$

$$V_p = V_A - V_B = \frac{\rho \cdot I_{pk}}{2\pi \cdot d} - \frac{\rho \cdot I_{pk}}{2\pi \cdot (d + dp)}$$

$$V_p = I_{pk} \cdot \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{dp}{d(d + dp)} \quad (5.4)$$

Onde:

V_p é a tensão de passo (V);

I_{pk} é a corrente de descarga de pico (kA);

ρ é a resistividade do solo ($\Omega \cdot m$);

dp é a distância entre os pés (m);

d é a distância mais próxima do ponto de descarga (m).

Foi calculada a variação da amplitude da Tensão de Passo em função da resistividade do solo e da distância pela Equação (5.4) (veja Figura 5.8).

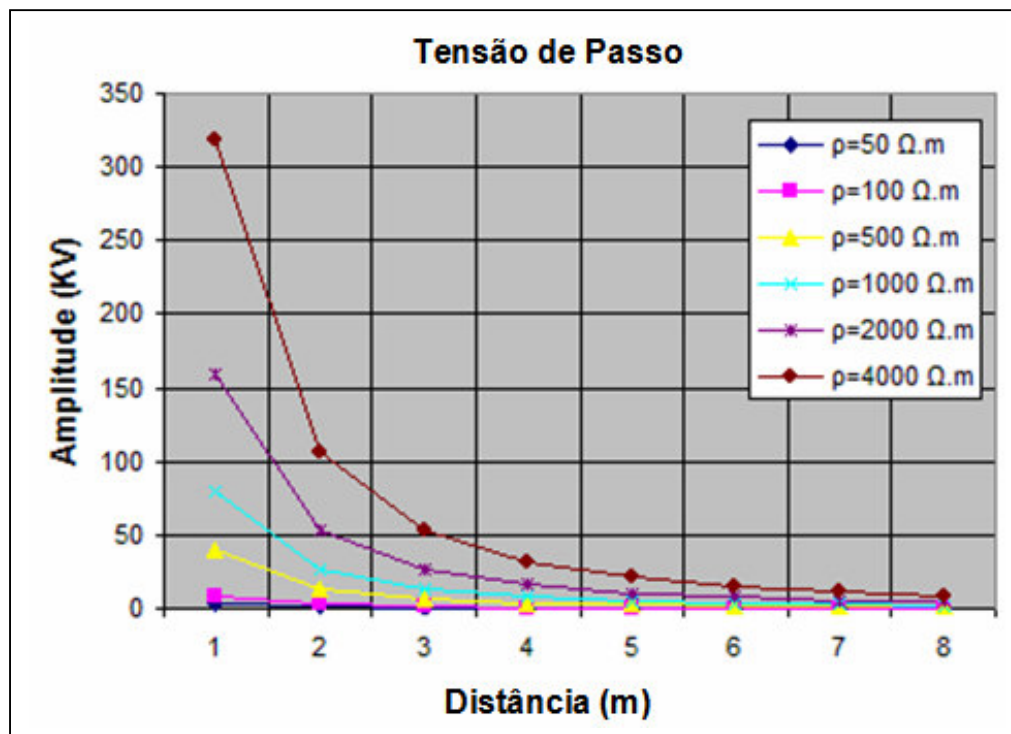


Figura 5.8. Tensão de passo para $I_{pk}=1kA$ em função da distância, ϵ_r e σ (Equação 5.4).

No segundo caso de simulação utilizou-se permissividade relativa ($\epsilon_r = 11 \pm 9$) e a condutividade do solo ($\sigma = 0,015 \pm 0,010S/m$), ou seja, no caso da permissividade relativa, o valor médio é 11 e o intervalo é 9. Usa-se três Pontos Sigma ($n=3$), então três simulações são necessárias. A primeira simulação usa $_{s1}\epsilon_r = 4,025$, a segunda $_{s2}\epsilon_r = 11$, e a última $_{s3}\epsilon_r = 17,975$. Os resultados destas computações são usados nas Equações (4.63) e (4.64) com os pesos correspondentes ($n=3$) no cálculo do valor esperado e momentos de ordem mais altos.

A espessura da camada de solo é igual a 10m e a do ar é igual a 5m. Em uma estrutura de simulação de $x=20m$, $y=15m$ e $z=40m$. Sendo as células do tipo cubo com cada aresta medindo um metro ($\Delta S=1m$). A haste foi modelada como uma fonte distribuída com 3m de comprimento e 16mm de diâmetro (Figura 5.9). A fonte de sinal considerada foi um campo elétrico (E) com forma de onda NEMP (Figura 5.3).

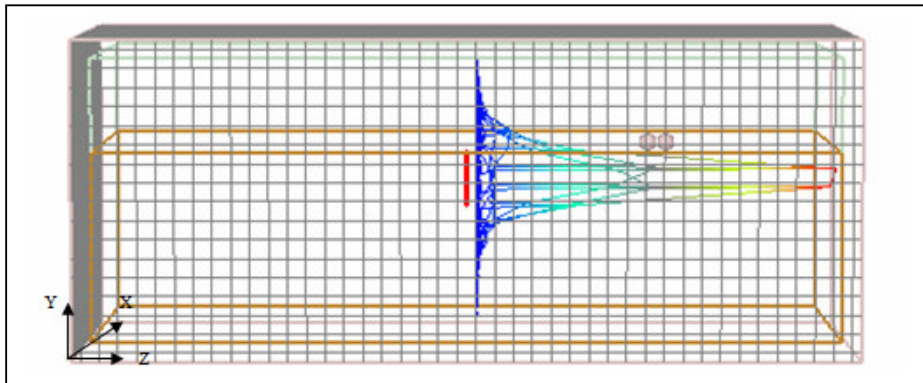


Figura 5.9. Visão tridimensional da área de simulação no MEFISTo-3d para o segundo caso.

O parâmetro de saída foi o campo elétrico tangencial ao solo. Neste caso foram usadas duas variáveis aleatórias (ϵ_r e σ). O campo foi amostrado a 10m da haste. Este procedimento foi executado com 3 e 5 pontos sigma para cada variável aleatória. A Tabela 5.2 mostra o valor esperado e o desvio padrão da tensão induzida nos dois casos. Como pode ser visto, os resultados com 3 pontos sigma são consistentes.

Tabela 5.2. Valor esperado e desvio padrão da tensão induzida para o segundo caso.

Numero de Pontos Sigma	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)
3 (9 simulações no total)	0,123	0,051
5 (25 simulações no total)	0,122	0,051

A FDC é mostrada na Figura 5.10. Usando os resultados para 5 pontos sigma, há uma chance de 92% que a tensão induzida estar no intervalo [0,035kV a 0,228kV]. Para 5 pontos sigma por simulações de variável aleatória mostram que a probabilidade de que a

tensão induzida seja maior que 0,211kV é menor que 8%, e que a probabilidade de que a tensão induzida seja menor que 0,190kV é maior que 84% [55].

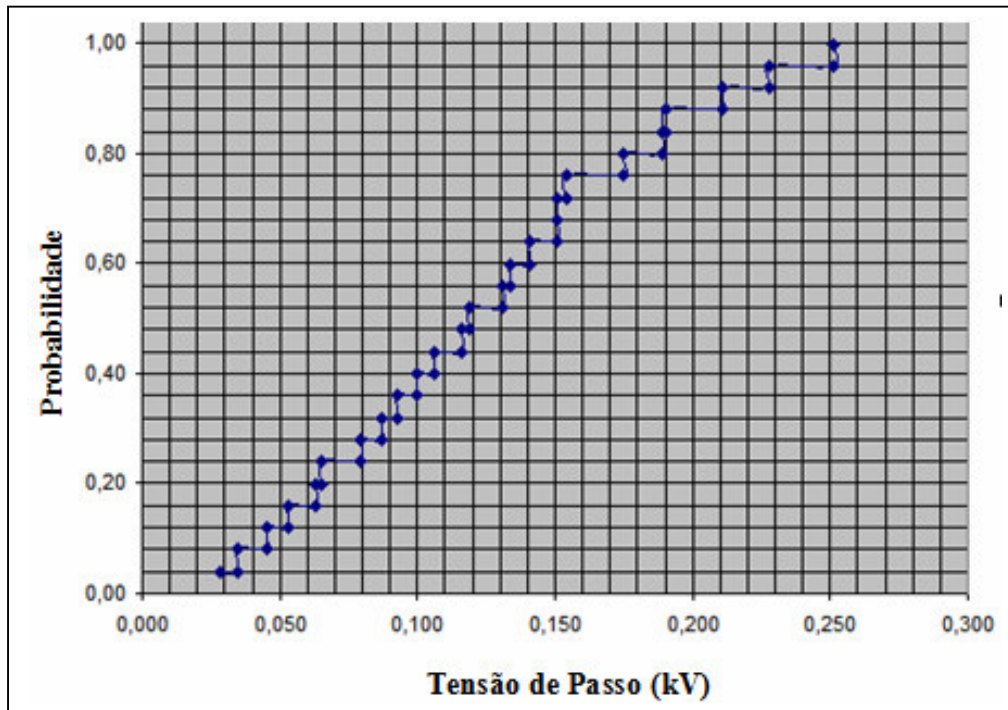


Figura 5.10. FDC da tensão de passo calculada com o UT(5) para o segundo caso.

A Tabela 5.3 mostra os resultados para outras configurações de sistema de aterramento (baseadas nas mostradas pelas Figuras 5.9 e 511). Em todos os casos o campo foi amostrado a 10m de distância da fonte de sinal, a qual é igual à mostrada na Figura 5.9.

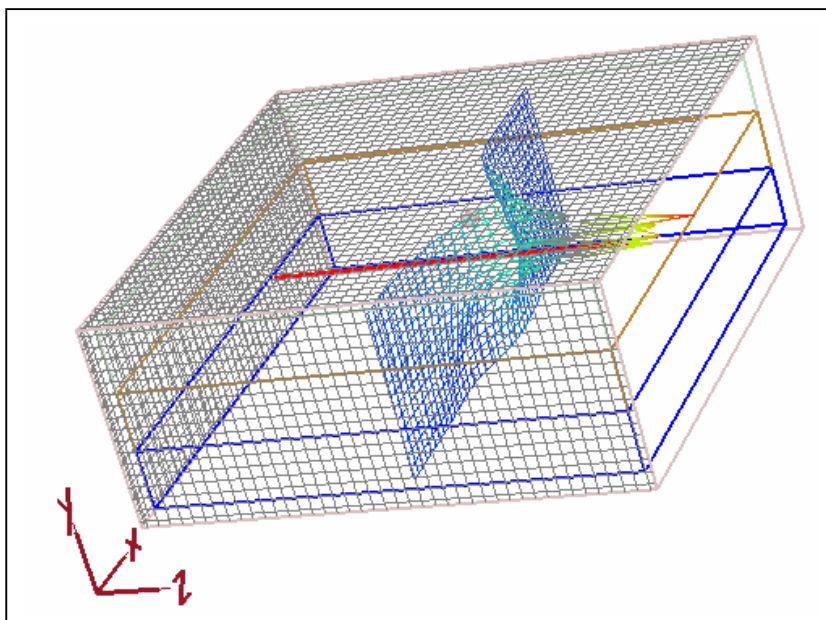


Figura 5.11. Visão tridimensional da área de simulação no MEFISTO-3d para o caso de solo de duas camadas.

Tabela 5.3. Resultados para outras configurações de sistema de aterramento.

Dados de Configuração	Pontos Sigma	Valor Esperado (kV)	Desvio padrão (kV)
Eletrodo: Haste de 3m; $\epsilon_r = 11 \pm 9$ e $\sigma = 0,015 \pm 0,010S/m$	3	0,141	0,066
	5	0,141	0,050
Eletrodo: Haste de 9m; $\epsilon_r = 11 \pm 9$ e $\sigma = 0,015 \pm 0,010S/m$	3	0,351	0,145
	5	0,349	0,150
Eletrodo: Cabo de 9m; $\epsilon_r = 11 \pm 9$ e $\sigma = 0,015 \pm 0,010S/m$	3	0,704	0,353
	5	0,705	0,349
Eletrodo: Cabo de 18m; $\epsilon_r = 11 \pm 9$ e $\sigma = 0,015 \pm 0,010S/m$	3	0,472	0,183
	5	0,470	0,185
Eletrodo: Haste de 3m; 1º Camada: $\epsilon_r = 11 \pm 9$ e $\sigma = 0,015 \pm 0,010S/m$ 2º Camada: $\epsilon_r = 30$ e $\sigma = 0,030S/m$	3	0,124	0,079
	5	0,132	0,054
Eletrodo: Haste de 9m; 1º Camada: $\epsilon_r = 11 \pm 9$ e $\sigma = 0,015 \pm 0,010S/m$ 2º Camada: $\epsilon_r = 30$ e $\sigma = 0,030S/m$	3	0,422	0,195
	5	0,432	0,099
Eletrodo: Haste de 9m; 1º Camada: $\epsilon_r = 11 \pm 9$ e $\sigma = 0,015 \pm 0,010S/m$ 2º Camada: $\epsilon_r = 30$ e $\sigma = 0,0033S/m$	3	0,520	0,235
	5	0,536	0,113
Eletrodo: Haste de 9m; 1º Camada: $\epsilon_r = 11 \pm 9$ e $\sigma = 0,015 \pm 0,010S/m$ 2º Camada: $\epsilon_r = 2$ e $\sigma = 0,030S/m$	3	0,239	0,146
	5	0,254	0,099

Para validar os resultados apresentados até aqui, passa-se agora a fazer uma comparação entre os métodos MC e UT. Para tal foram efetuadas várias simulações e cálculos envolvendo os dois métodos. Sendo alguns destes apresentados a seguir.

Utilizando a Equação 5.4, uma corrente aplicada no solo de $I_{pk}=0,7127kA$ e um solo com permissividade relativa (não considerado) e a condutividade do solo ($\sigma = 0,002 \pm 0,001S/m$), foi calculado a tensão de passo a uma distância de 5m. Os resultados são mostrados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4. Valor esperado e desvio padrão da tensão de passo para MC e UT.

Monte Carlo (MC)					Transformada de Incerteza (UT)				
Número de Pontos Aleatórios	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)	Erro Absoluto (%)	Erro Relativo (%)	Número de Pontos Sigma	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)	Erro Absoluto (%)	Erro Relativo (%)
100	1,97	0,67	34,01	17,26	3	2,11	0,88	41,71	19,77
-	-	-	-	-	5	2,13	0,90	42,25	19,84

Utilizando a estrutura mostrada na Figura 5.12, aplicando uma corrente no solo de $I_{pk}=0,7127kA$ e um solo com permissividade relativa ($\epsilon_r = 1$) e a condutividade do solo ($\sigma = 0,002 \pm 0,001S/m$), foi simulado e calculado a tensão de passo a uma distância de 5m. Os resultados são mostrados na Tabela 5.5.

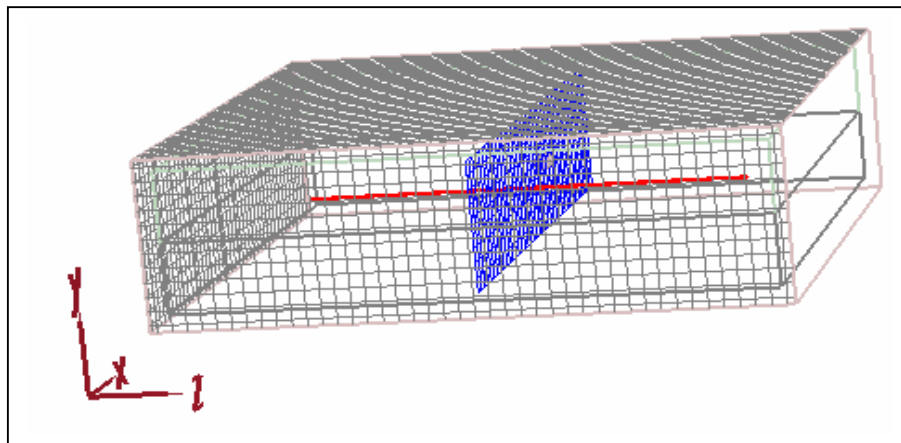


Figura 5.12. Estrutura de aterramento de uma camada utilizada na simulação MC e UT Tabela 5.5. Valor esperado e desvio padrão da tensão de passo para uma estrutura de aterramento com uma camada.

Monte Carlo (MC)					Transformada de Incerteza (UT)				
Número de Pontos Aleatórios	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)	Erro Absoluto (%)	Erro Relativo (%)	Número de Pontos Sigma	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)	Erro Absoluto (%)	Erro Relativo (%)
100	1,809	0,045	2,49	1,38	3	1,813	0,061	3,36	1,85
-	-	-	-	-	5	1,820	0,058	3,19	1,75

Utilizando a estrutura mostrada na Figura 5.13, aplicando uma corrente no solo de $I_{pk}=0,7127kA$ e um solo de duas camadas com permissividade relativa ($\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$) e a condutividade do solo ($\sigma_1 = 0,002 \pm 0,001S/m$ e $\sigma_2 = 0,004S/m$), foi simulado e calculado a tensão de passo a uma distância de 5m. Os resultados são mostrados na Tabela 5.6.

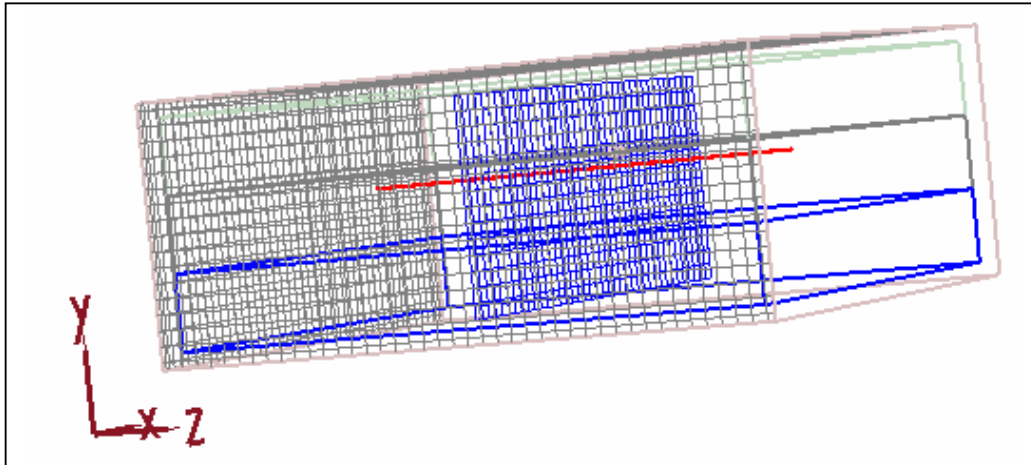


Figura 5.13. Estrutura de aterramento de duas camadas utilizada na simulação MC e UT

Tabela 5.6. Valor esperado e desvio padrão da tensão de passo para uma estrutura de aterramento com duas camadas simulado com MEFISTO-3D.

Monte Carlo (MC)					Transformada de Incerteza (UT)				
Número de Pontos Aleatórios	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)	Erro Absoluto (%)	Erro Relativo (%)	Número de Pontos Sigma	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)	Erro Absoluto (%)	Erro Relativo (%)
100	1,940	0,070	3,61	1,86	3	1,956	0,092	4,70	2,40
-	-	-	-	-	5	1,950	0,093	4,77	2,45

Utilizando as Equações 5.4 e 5.5, uma corrente aplicada no solo de $I_{pk}=0,7127kA$ e um solo com duas camadas com permissividades relativas (não consideradas) e a condutividade do solo na primeira camada ($\sigma_1 = 0,002 \pm 0,001S/m$) e a condutividade do solo na segunda camada ($\sigma_2 = 0,004S/m$), foi calculado a tensão de passo a uma distância de 5m. Os resultados são mostrados na Tabela 5.7.

$$\rho_{eq} = \frac{L_1 + L_2}{\frac{L_1}{\rho_1} + \frac{L_2}{\rho_2}} \quad (5.5)$$

Tabela 5.7. Valor esperado e desvio padrão da tensão de passo para uma estrutura de aterramento com duas camadas calculado com as Equações 5.4 e 5.5.

Monte Carlo (MC)					Transformada de Incerteza (UT)				
Número de Pontos Aleatórios	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)	Erro Absoluto (%)	Erro Relativo (%)	Número de Pontos Sigma	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)	Erro Absoluto (%)	Erro Relativo (%)
100	1,250	0,124	9,92	7,94	3	1,273	0,166	13,04	10,24
-	-	-	-	-	5	1,269	0,168	13,24	10,43

Utilizando a estrutura mostrada na Figura 5.14, aplicando uma corrente no solo de $I_{pk}=0,7127kA$ e um solo de duas camadas com permissividade relativa ($\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$) e a condutividade do solo ($\sigma_1 = 0,002 \pm 0,001S/m$ e $\sigma_2 = 0,004S/m$), foi simulado e calculado a tensão de passo a uma distância de 5m. Os resultados são mostrados na Tabela 5.8.

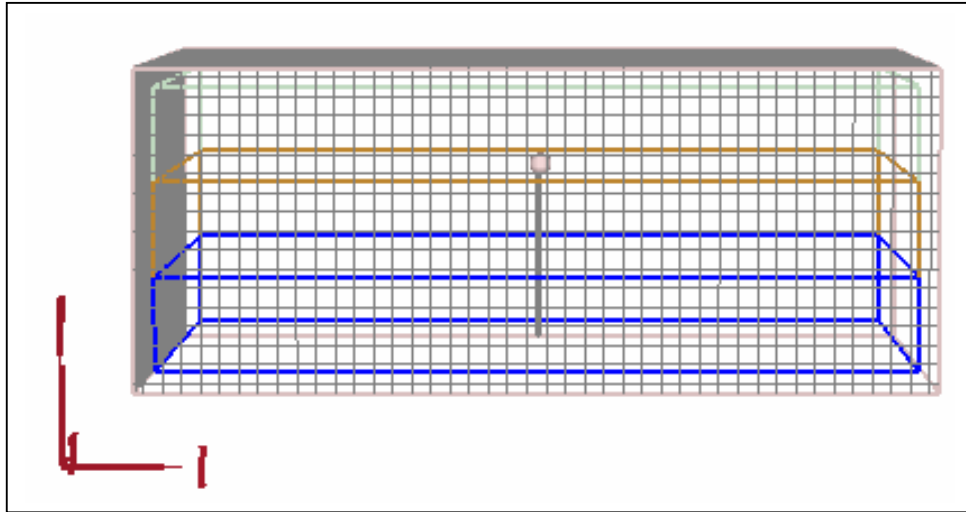


Figura 5.14. Estrutura de aterramento com haste em duas camadas utilizada na simulação MC e UT

Tabela 5.8. Valor esperado e desvio padrão da tensão de passo para uma estrutura de aterramento com haste em duas camadas.

Monte Carlo (MC)					Transformada de Incerteza (UT)				
Número de Pontos Aleatórios	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)	Erro Absoluto (%)	Erro Relativo (%)	Número de Pontos Sigma	Valor Esperado (kV)	Desvio Padrão (kV)	Erro Absoluto (%)	Erro Relativo (%)
100	0,727	0,013	1,79	2,46	3	0,796	0,064	8,04	10,10
-	-	-	-	-	5	0,795	0,062	7,80	9,81

Outras simulações foram efetuadas e verificadas aplicando o método TLM e/ou UT. Algumas destas são mostradas a seguir.

O potencial elétrico transitório [56] foi amostrado na célula de índice (10, 3, 30) e equacionado como: $V(n) = -E_z^n(10,3,30)dz$, na qual n é o índice das interações temporais.

A corrente transitória foi amostrada, utilizando a lei circuital de Ampere, resultando em: $I(n) = [H_{x1}(10,4,30) - H_{x2}(10,2,30)]dx + [H_{y1}(9,3,30) - H_{y2}(11,3,30)]dy$.

A TRG (*Transient Resistance Ground* - Resistência de Aterramento Transitória) é calculada a partir dos valores acima obtidos da seguinte forma: $TRG(n) = V(n) / I(n)$.

Os resultados das simulações em termos de corrente, tensão e TRG são mostrados na Figura 5.15. Estes resultados mostram a potencialidade da técnica utilizada, permitindo fazer várias e novas análises, com vistas à solução de problemas críticos em sistemas de aterramento.

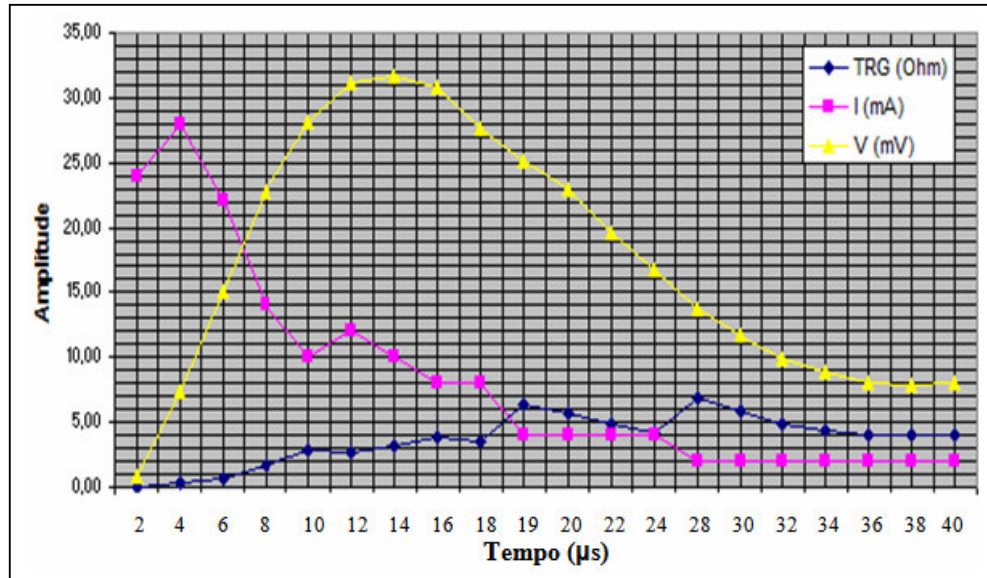


Figura 5.15. Características dinâmicas do solo em função do tempo simulado pelo MEFISTo-3D ($\epsilon_r=11$, $\sigma=0,015S.m$, $L=18m$ e fonte NEMP)

A Figura 5.16 mostra as variações da tensão, corrente e TRG no solo, em função da frequência, quando submetido a uma fonte impulsiva. A forma de amostragem e cálculo dos valores são os mesmos utilizados para determinação dos valores mostrados na Figura 5.15.

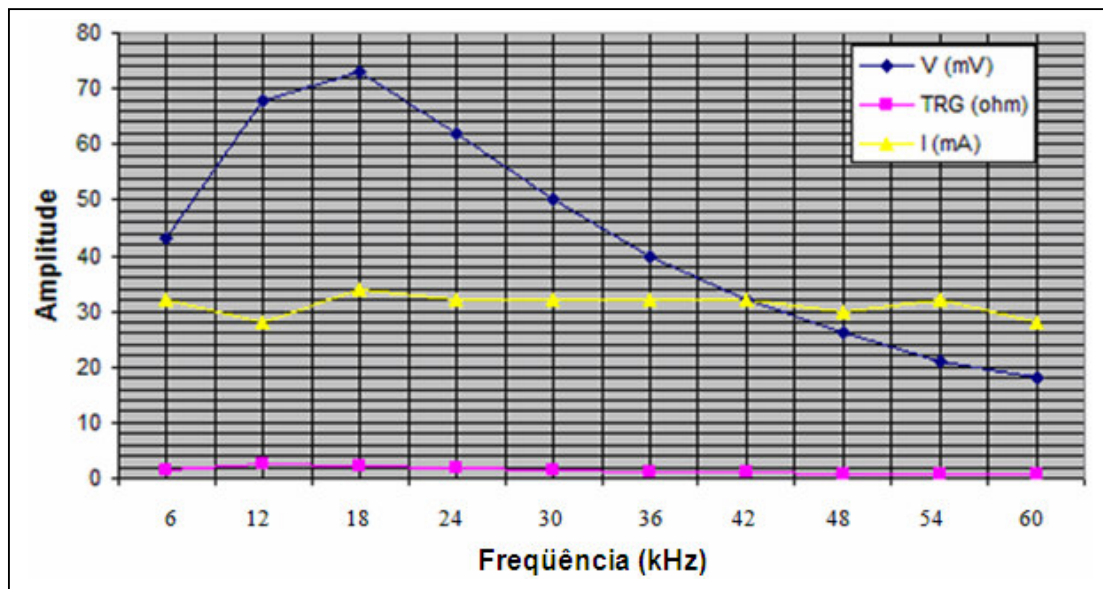


Figura 5.16. Características dinâmicas do solo em função da frequência simulado pelo MEFISTo-3D ($\epsilon_r=11$, $\sigma=0,015S.m$ e fonte impulso $t=1,668\mu s$)

A Figura 5.17 mostra as variações da TRG, em função da frequência e ϵ_r , quando submetido a uma fonte impulsiva.

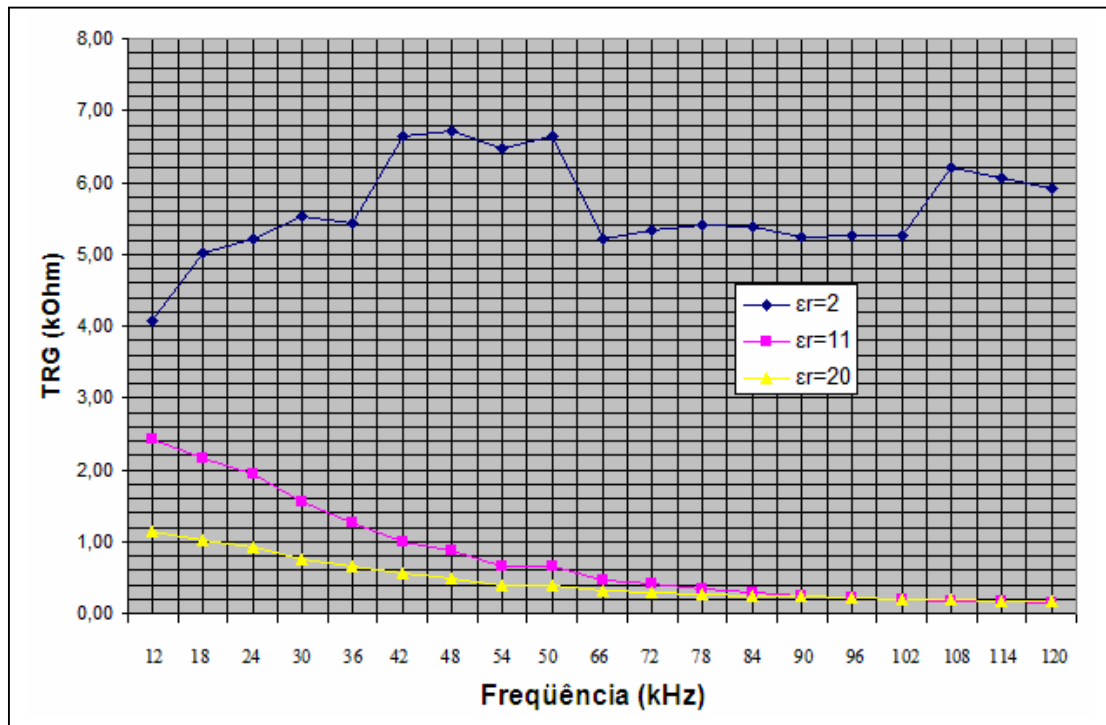


Figura 5.17. Características dinâmicas do solo em função da frequência e ϵ_r simulado pelo MEFISTo-3D ($\sigma=0,015S/m$ e fonte impulso $t=1,668\mu s$)

A Tabela 5.9 mostra a situação para uma descarga elétrica sobre uma pequena esfera na superfície do solo com duas camadas, onde $I_{pk}=0,7127kA$, $\epsilon_{r1}=\epsilon_{r2}=1$, $\sigma_1=0,002+/-0,001S/m$, $\sigma_2=0,0005S/m$ ou $\sigma_2=0,002S/m$ ou $\sigma_2=0,004S/m$, $d=5m$, utilizando o MEFISTo para as simulações e aplicando UT(3), temos:

Tabela 5.9. Simulação de Tensão de Passo em solo de duas camadas, descarga sobre esfera e $\sigma_1 \neq \sigma_2$

	Tensão de Passo (kV)	
	$\sigma_1 < \sigma_2$	$\sigma_1 > \sigma_2$
Valor Estimado	0,320	0,322
Desvio Padrão	0,016	0,016

A Tabela 5.10 mostra a situação para uma descarga elétrica sobre uma haste de 4m enterrada no solo a 0,5m da superfície do solo com duas camadas, onde $I_{pk}=0,7127kA$, $\epsilon_{r1}=\epsilon_{r2}=1$, $\sigma_1=0,002+/-0,001S/m$, $\sigma_2=0,0005S/m$ ou $\sigma_2=0,002S/m$ ou $\sigma_2=0,004S/m$, $d=5m$, utilizando o MEFISTo para as simulações e aplicando UT(3), temos:

Tabela 5.10. Simulação de Tensão de Passo em solo de duas camadas, descarga sobre haste e $\sigma_1 \neq \sigma_2$

	Tensão de Passo (kV)		
	$\sigma_1 < \sigma_2$	$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 > \sigma_2$
Valor Estimado	0,6133	0,5987	0,5870
Desvio Padrão	0,0341	0,0265	0,0326

As Tabelas 5.9 e 5.10 mostram a influência de uma segunda camada do solo com resistividades elétricas diferentes.

Tabela 5.11. Simulação de Tensão de Passo em solo de duas camadas, descarga sobre esfera e $\epsilon r_1 \neq \epsilon r_2$

	Tensão de Passo (kV)	
	$\epsilon r_1 < \epsilon r_2$	$\epsilon r_1 > \epsilon r_2$
Valor Estimado	0,2228	0,2266
Desvio Padrão	0,0091	0,0035

Tabela 5.12. Simulação de Tensão de Passo em solo de duas camadas, descarga sobre haste e $\epsilon r_1 \neq \epsilon r_2$

	Tensão de Passo (kV)		
	$\epsilon r_1 < \epsilon r_2$	$\epsilon r_1 = \epsilon r_2$	$\epsilon r_1 > \epsilon r_2$
Valor Estimado	0,3921	0,2136	0,1233
Desvio Padrão	0,1217	0,1226	0,1248

As Tabelas 5.11 e 5.12 mostram, para a mesma situação, a influência de uma segunda camada do solo com permissividades relativas diferentes ($\epsilon r_1 = 11 \pm 9$, $\epsilon r_2 = 1$ ou $\epsilon r_2 = 11$ ou $\epsilon r_2 = 40$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,002 S/m$).

Inúmeras outras situações poderiam ser aqui apresentadas. Entretanto as que mais interessava dentro da proposta de trabalho foram apresentadas, deixando as demais para trabalhos futuros.

6 - CONCLUSÕES

Com relação à tensão de passo, potencial, corrente e resistência num solo com características variáveis de permissividade relativa e condutividade elétrica pode-se concluir que:

- A tensão induzida na superfície (potencial elétrico) é maior quanto maior for o comprimento do eletrodo. Porém, a tensão de passo é menor quanto maior for o comprimento do cabo e é menor quanto menor for o comprimento da haste;

- Quanto maior a profundidade do eletrodo em relação à superfície do solo, maior é o potencial elétrico e a tensão de passo;

- Configurações com haste vertical produzem tempo de subida e queda mais rápida da tensão de passo em contrapartida a configurações com cabo horizontal;

- A velocidade de propagação no solo aumenta com a redução de ϵ_r e reduz com a redução de σ .

- Um aumento da permissividade relativa (ϵ_r) provoca um rápido aumento na tensão de passo. Já um aumento na condutividade elétrica (σ) provoca uma rápida diminuição na tensão de passo. Aumentos simultâneos em ϵ_r e σ provoca um aumento lento na tensão de passo, mostrando a predominância da variação de ϵ_r em relação à σ .

- Com o aumento da permissividade relativa (ϵ_r) a corrente no solo oscila mais, ou seja, com maior rapidez. Já para valores menores, como $\epsilon_r=2$, a variação da corrente acompanha a variação da tensão, que por sua vez acompanha a variação do sinal de entrada.

- Com a redução da condutividade elétrica (σ) a corrente no solo oscila mais. Já para valores maiores a variação da corrente acompanha a variação da tensão.

- Independente da relação entre σ_1/σ_2 (resistividade elétrica das duas camadas), para uma descarga atmosférica sobre uma esfera na superfície, a tensão de passo é praticamente a mesma. Para uma descarga atmosférica sobre uma haste de 4m enterrada na primeira camada e a 0,5m da superfície, à medida que esta relação diminui, a tensão de passo aumenta, isto devido a maior resistividade na primeira camada do solo.

- A influência da proximidade do ponto avaliado ao ponto de incidência do raio, bem como as variações relativas à forma da curva do campo elétrico e da tensão induzida é evidente.

- É evidente também a importância da configuração geométrica e parâmetros associados ao sistema de aterramento, bem como a posição considerada na análise da tensão induzida associada.

Com relação ao método TLM+UT pode-se concluir que:

- As principais vantagens deste método é o fato de não existir a necessidade de se resolver sistemas de equações, consistindo-se de um método numérico-analítico bastante simples, estável e capaz de avaliar estruturas complexas envolvendo esforços computacionais modestos, pequenos tempos de processamento, poucas simulações e utilização de ferramentas computacionais de mercado.

- Permite determinar com um grau de precisão satisfatório, o valor esperado (estimado) da tensão de passo e seu desvio padrão, para variações da permissividade relativa e condutividade elétrica do solo, de maneira rápida e simples.

A maior contribuição deste trabalho é a transformada de incerteza, pois a utilização da UT comparada com o método MC é muito mais rápida devido a um pequeno número de simulações necessárias. A convergência do método MC começa a partir de 50 médias amostrais (50 simulações), enquanto que a UT converge com apenas 3 pontos sigma (3 simulações) por variável.

6.1 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Dando continuidade a este trabalho, aplicar o método TLM+UT em outras configurações de sistemas de aterramento definindo a que melhor se adapte a um problema real;

- Realizar medições de campo para validação do método TLM+UT, buscando a melhor configuração de sistemas de aterramento para prevenção da tensão de passo;

- Aplicar o método TLM+UT em outras situações problemas da área de Engenharia Elétrica, principalmente em compatibilidade eletromagnética.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Tatsuo Itoh, **Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-wave Passive Structures**, New York: John Wiley, 1989.
- [2] L. E. B. Dorini, **Propagação de Pontos Característicos e suas Incertezas Utilizando a Transformada Unscented**, Unicamp: IC, 2006.
- [3] L. de Menezes, A. Ajayi, C. Christopoulos, P. Sewell, G. A. Borges, **Efficient Computation of Stochastic Electromagnetic Problems Using Unscented Transforms**, submitted to IET Science, Measurement & Technology on May 23th, 2007.
- [4] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, **Unscented Filtering and Nonlinear Estimation**, Proc. IEEE, vol. 92, nr. 3, pp. 401-422, March 2004.
- [5] G. A. D. Dias e M. Toledo, **Compatibilidade Eletromagnética em Subestações de Alta Tensão**, XV SNPTEE, Foz do Iguaçu, 1999.
- [6] Amilton Soares, Marco A. O. Schroeder e Visacro F. Silvério, **Cálculo de Sobretensões Associadas a Descargas Atmosféricas em Linhas de Transmissão**, XVI SNPTEE. Campinas. 2001.
- [7] NBR 5410:1997 '**Instalações Elétricas de Baixa Tensão**', ABNT.
- [8] NR-10:2004 **Segurança e Medicina do Trabalho - Instalações e Serviços em Eletricidade**, MTE (Portaria 598).
- [9] Henry W. Ott. **Noise Reduction Techniques in Electronic Systems**. Wiley Interscience Publication. Second Edition. New York. 1987.
- [10] Golberri de Salvador Ferreira e Mauro Faccioni Filho. **Poluição e Compatibilidade Eletromagnética em Sistemas de Comunicação**. CTAI. Florianópolis. 2.002.

- [11] Guilherme A. D. Dias e Marcos Tello. **Compatibilidade Eletromagnética em Subestações de Alta Tensão**. XV SNPTEE. Foz do Iguaçu. 1.999.
- [12] Silvério Visacro Filho. **Aterramentos Elétricos, Conceitos Básicos, Técnicas de Medição e Instrumentação e Filosofias de Aterramento**. Ed. Artliber. São Paulo. 2002.
- [13] NBR 5419: 2001. **Proteção de Estruturas contra Descargas Atmosféricas**. ABNT.
- [14] NBR 7117:1981. **Medição da Resistividade do Solo pelo Método dos Quatro Pontos (Wenner)**. ABNT.
- [15] Apostila: **Compatibilidade Eletromagnética**. Disponível para pessoas cadastradas no site www.schneiderelectric.com.br. Última visita em 02/01/2008.
- [16] Osmar Pinto Jr., Iara R. C. A. Pinto. **Tempestades e Relâmpagos no Brasil**. INPE. São José dos Campos. 2000.
- [17] Geraldo Kindermann. **Descargas Atmosféricas**. 2ª Edição. Sagra Luzzatto Editores. Porto Alegre. 1.997.
- [18] Ibrahim A. Metwally and Fridolim H. Heider, **Improvement of the Lightning Shielding Performance of Overhead Transmission Lines by Passive Shield Wires**. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. 45, nr. 2, pp. 378-391, May 2003.
- [19] Apostila: **Proteção contra Descargas Atmosféricas**. Disponível para pessoas cadastradas no site www.schneiderelectric.com.br. Última visita em 02/01/2008.
- [20] Adolar Ricardo Bohn. Apostila: **Projeto de Sistemas de Proteção contra Descargas Atmosféricas**. Disponível em <http://www.centralmat.com.br/Artigos/Mais/projeto>. Última visita em 17/01/2008.

- [21] *Termotécnica Ind. Com. Ltda.* Apostila: **SPDA (Sistemas de Proteção contra Descargas Eléctricas Atmosféricas)**. (Fonte: NBR-5419 / 2001 da ABNT). 4ª Edição. Belo Horizonte. 2.003.
- [22] Ibrahim A. Metwally, Fridolim H. Heider, and Wolfgang J. Zischank, **Magnetic Fields and Loop Voltages Inside Reduced and Full-Scale Structures Produced by Direct Lightning Strikes**. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. 48, nr. 2, pp. 414-426, May 2006.
- [23] Carlos Moreira Leite. **Técnica de Aterramentos Eléctricos**. 2ª Edição. Officina de Mydia. São Paulo. 1.996.
- [24] Daisy Spolidoro Ferreira Gomes. **Aterramentos e Proteção contra Sobretensões em Sistemas Aéreos de Distribuição**. Volume 7. EDUFF. Niterói. 1.990.
- [25] Luciano Martins Neto. Apostila: **Técnicas para o Cálculo de Projetos de Aterramentos Eléctricos**. UFU. Uberlândia. 1.991.
- [26] Yaqing Liu. **Transient Response of Grounding Systems Caused by Lightning: Modelling and Experiments**. Uppsala University. 2004.
- [27] Geraldo Kindermann. **Aterramento Eléctrico**. 5ª Edição. UFSC. Florianópolis, 2.002.
- [28] Yanqing Gao, Rong Zeng, Jinliang He and Xidong Liang, **Loss Transmission-line Model Grounding Electrodes Considering Soil Ionization of Lightning Impulse**, 0-7803-7277-8/02/\$10.00©2002 IEEE, pp. 294-298, August 2002.
- [29] V. D. Selemir, A. S. Kravchenko, V. A. Zolotov, A. S. Yurizhev, M. M. Saitkulov, O. M. Tatsenko, A. N. Moiseenko, I. M. Markevtsev, V. F. Bukharov, S. V. Bulychev, **Reproduction of Current Pulse of Lightning Discharge of Positive Lightning with Amplitude of 90kA on Lightning Rod Using MCG Based Power Source**. IEEE, pp. 179-182, August 2002.

- [30] Marcos Andre de Frota Mattos, **Grounding Grids Transient Simulation**, IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 20, nr. 2, pp. 1370-1378, April 2005.
- [31] Paulo Jose Clebicar Nogueira. Dissertação de Mestrado: **Influência da Estratificação do Solo na Impedância de Aterramentos de Linhas de Transmissão**. PUC-MG. Belo Horizonte. 2.002.
- [32] Carlos Antonio Franca Sartori. Tese de Doutorado: **Aspectos de Compatibilidade Eletromagnética em Estruturas Atingidas por Descargas Atmosféricas**. USP. São Paulo. 1.999.
- [33] Golberi S. Ferreira, Jony L. Silveira, Adroaldo Raizer, **TLM (Transmission-line Modeling Method) Applied to Grounding**, IEEE, pp. 1123-1126, 2001.
- [34] Hugo A. D. Almaguer e Adroaldo Raizer. **Aplicação do Método TLM no Estudo da Interação dos Campos Irrradiados por Telefones Celulares com a Cabeça Humana**. RBEB. 2.002.
- [35] Christos Christopoulos. **The Transmission-Line Modeling Method (TLM)**. Oxford University Press. 1.995.
- [36] Mauro Faccioni Filho. Tese de Doutorado: **Estudos de Modelagem Eletromagnética com o Método das Linhas de Transmissão (TLM)**. UFSC. Florianópolis. 2001.
- [37] Golberi de Salvador Ferreira. Tese de Doutorado: **Modelagem Numérica de Problemas de Compatibilidade Eletromagnética Utilizando TLM (Transmission-Line Modeling Method)**. UFSC. Florianópolis. 1.999.
- [38] AS 2067-1984 **'Switchgear assemblies and ancillary equipment for alternating voltages above 11 kV'**.
- [39] C. F. Dalziel. **Threshold 60 cycle fibrillating currents**. AIEE transactions on power apparatus and systems v 79, n 50, Part 3(60-40):667-673 Oct 1960.

- [40] W. B. Kouwenhoven, G. G. Knickerbocker, R. W. Chestnut, W. R. Milnor, D. J. Sass. **AC shocks on varying parameters affecting the heart.** Ibid., pt I (Communications and electronics) vol. 78, May 1959, pp 163-69.
- [41] G. Biegelmeier, W. R. Lee. **New considerations on the threshold of ventricular fibrillation.** IEEE Proceedings Vol 127, No 2, Pt A, March 1980.
- [42] Australian Standard AS/NZS 60479:2001 **'Effects of current on human beings and livestock'**.
- [43] IEC 60990:1999 **'Methods of measurement of touch current and protective conductor current'**.
- [44] ESAA EG-1:2000 **'Substation Earthing Guide'**.
- [45] Ronald J. Wonncott e Thomas H. Wonncott. **Fundamentos de Estatística.** Ed. LTC. Rio de Janeiro. 1.985.
- [46] Caldeira Duarte e Anabela Pereira. **Probabilidades e Estatística.** EST/IPT. Setúbal-PT. 1990.
- [47] http://www.mspc.eng.br/matm/prob_est240.shtml. **Probabilidade e Estatística.** Ultima visita em 17/01/2008.
- [48] Athanasios Papoulis. **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes.** Ed. Mc Graw-Hill. Second Edition. New York-USA. 1.984.
- [49] Luciano Cajado Costa. **Teoria das Filas.** Disponível em http://www.decom.ufop.br/prof/rduarte/CIC271/TeoriaFilas_Cajado.pdf. Ultima visita em 17/01/2008.
- [50] Leonardo R.A.X. de Menezes, João Batista J. Pereira, Geovany A. Borges. **Statistical Model of Induced Ground Voltage Using the TLM Method.** Submitted to ACES Nov 16th, 2007.

- [51] G. P. Caixeta, J. Pissolato Filho, **Electromagnetic Fields Generated by Lightning on Protection Structures of Telecommunication Centers**, 0-7803-4240-6/97/\$10.00©1997 IEEE, pp. 274-278, June 1997.
- [52] Carlos M. Leite e Mario Leite P. Filho. **Malhas de Aterramento, Técnicas de Aterramentos Elétricos**. Ed. Officina de Mydia. São Paulo. 2007.
- [53] Emanuel dos S. Souza Jr, Rodrigo M. S. de Oliveira e Carlos Leônidas da S. S. Sobrinho. **Desenvolvimento de Ambiente Computacional para Simulação do Método de Wenner**. UFPA-DEEC. Belém-PA. 2007.
- [54] Yaqing Liu, Mihael Zitnik and Rajeev Thottappillil, **An Improved Transmission-Line Model of Grounding System**, Proc. IEEE, vol. 43, nr. 3, pp. 348-355, August 2001.
- [55] Leonardo R.A.X. de Menezes, João Batista J. Pereira, Geovany A. Borges. **Statistical Analysis of Induced Ground Voltage Using the TLM+UT Method**. Submitted to EMC-2008. Agu 18th, 2008.
- [56] - Eduardo T. Tuma, Ronaldo O. dos Santos, Rodrigo M. S. de Oliveira e Carlos Leônidas da S. S. Sobrinho, **Análise do Comportamento Transitório dos Parâmetros de Sistemas de Aterramento usando o Método FDTD**, UFPA.

BIBLIOGRAFIA

- Hans R. Seedher, and J. K. Arora, **A Practical Approach for Computation on Grid Current**. IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 14, nr. 3, pp. 897-902, July 1999.
- Rong Zeng, Peng Kang, Jinliang He, Bo Zhang, Shuiming Chen, and Jun Zou, **Lightning Transient Performance Analysis of Substation Based on Complete Transmission Line Model of Power Network and Grounding Systems**, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 42, nr. 4, pp. 875-878, April 2006.
- G. P. Caixeta and J. Pissolato Filho. **Electromagnetic Fields Generated By Lightning on Protection Structures of Telecommunication Centers**. IEEE, pp. 374-378, June 1997.
- G. P. Caixeta and J. Pissolato Filho. Analysis of **Electromagnetic Fields Generated By Lightning in Different Configurations of Protection Structures**. IEEE, pp. 171-175, 1999.
- G. A. Borges, and L. R. A. X. de Menezes, **Uncertainty Propagation in Transmission Line Modelling (TLM) Method**. International Journal of Numerical Modeling: Electronic Networks, Devices and Fields, January, 2007.
- Ronald J. Wonnacott and Thomas H. Wonnacott. **Fundamentos de Estatística**. Editora LTC. Rio de Janeiro. 1985.
- William H. Hayt Jr. **Eletromagnetismo**. Editora LTC. Terceira Edição. Rio de Janeiro. 1994.
- S. J. Barberini e W. A. Artuzi Jr. **Análise Eletrodinâmica em Eletrodos de Aterramento usando o Método FDTD**. UFPR. 2004.
- Marcos A. F. Mattos. **Simulação Numérica do Líder Passado**. GROUND'2004 and 1st LPE, November, 2004.

- C. Christopoulos, **Application of the TLM to Equipment Shielding Problems**. IEEE, pp. 188-193. April 1998.

- Chritos Christopoulos, and Jonathan L. Harring. **The Application of Transmission-Line Modeling (TLM) to Electromagnetic Compatibility Problems**. IEEE Transactions on Elettromagnetic Compatibility, vol. 35, nr. 2, pp.185-191, May 1993.

- P. Argus, P. Fischer, A. Konrad, A. J. Schwab, **Efficient Modeling of Apertures in Thin Conducting Screens by the TLM Method**. IEEE, pp.101-106, Feb 1998.

- A. P. Duffy, T. M. Benson and C. Christopoulos. **A Computationally Efficient Method for Studying the Behaviour of Complex Systems Containing Thin Wires**. IEE Electromagnetic Compatibility Conferece Publication nr. 396, pp. 274-281, September.

- Duílio Morreira Leite. **Proteção contra Descargas Atmosférica**. Volume I. MM Editora. São Paulo. 1.993.

- D. Spolidoro F. Gomes et alii, **Aterramento e Proteção contra Sobretensões em Sistemas Aéreos de Distribuição**, Niterói/RJ, EDUFF, 1990.

- M. Faccioni Filho, G. S. Ferreira, A. Raizer, **Non-linear Device Modeling for Transient Suppression**, in *Proc. IEEE CEFC'98*, Arizona, June 1998.

- R. Kascher Moreira. Dissertação de Mestrado: **Estudos de Protetores Híbridos Contra Transitórios Elétricos para Aplicação em Linhas de Telecomunicações**. UFMG. Belo Horizonte/MG, 1997.

- Ary V. S. Filho e Luciano M. Neto. **Uma Modelagem da Resistência de Aterramento sob Descarga Atmosférica**. UFU. Uberlândia. 2.001.