

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**UMA ANÁLISE DO ESPAÇO INTERNO
ASSOCIADO AO EQUIVALENTE
TELEPARALELO DA RELATIVIDADE GERAL**

LEANDRO RIBEIRO ANDRADE BELO

Brasília, 2 de março de 2012

TESE DE DOUTORADO

**UMA ANÁLISE DO ESPAÇO INTERNO
ASSOCIADO AO EQUIVALENTE
TELEPARALELO DA RELATIVIDADE GERAL**

LEANDRO RIBEIRO ANDRADE BELO

ORIENTADORA:

VANESSA CARVALHO DE ANDRADE

Brasília, 2 de março de 2012

3ª Do Plural

Corrida pra vender cigarro
Cigarro pra vender remédio
Remédio pra curar a tosse
Tossir, cuspir, jogar pra fora
Corrida pra vender os carros
Pneu, cerveja e gasolina
Cabeça pra usar boné
E professar a fé de quem patrocina
Eles querem te vender, eles querem te comprar
Querem te matar a sede, eles querem te sedar
Quem são eles?
Quem eles pensam que são?
Corrida contra o relógio
Silicone contra a gravidade
Dedo no gatilho, velocidade
Quem mente antes diz a verdade
Satisfação garantida
Obsolescência programada
Eles ganham a corrida antes mesmo da largada
Eles querem te vender, eles querem te comprar
Querem te matar de rir, querem te fazer chorar
Quem são eles?
Quem eles pensam que são?
Vender, comprar, vender os olhos
Jogar a rede... contra a parede
Querem te deixar com sede
Não querem te deixar pensar
Quem são eles?
Quem eles pensam que são?

Humberto Gessinger - Engenheiros do Hawaii

Agradecimentos

Aos meus pais Wellington e Marlene, a quem devo minha vida; e que apesar de todas as dificuldades sempre lutaram pela felicidade de seus filhos. Obrigado pelo apoio e incentivo incondicionais.

À querida Andrezza, por providenciar-me um lar. É bom ter você ao meu lado.

À Professora Vanessa Carvalho de Andrade pela orientação, em especial pela autonomia que me foi concedida.

Aos meus irmãos Leonardo e Liege.

À minha cunhada Aninha.

Às lindinhas Ana Laura e Ana Alice.

A todos os meus familiares.

A todos os professores e funcionários do IF/UnB.

Aos amigos de Formiga, Viçosa e Brasília, que de uma forma ou de outra contribuíram para o desenvolvimento do trabalho, e que por motivos óbvios, não serão aqui citados explicitamente.

Aos amigos Juliano e Ednardo, pelas discussões que tanto contribuíram para o desenvolvimento do trabalho.

Aos amigos de sala Fernando, Marcio e Thiago, pelos momentos de descontração.

Ao Sr. Aylton e à D. Gloria, sem a ajuda deles teria sido bem mais difícil.

Aos Professores do início da caminhada, sem os quais teria sido impossível aprender algo mais. Em especial à D. Silvia, me ensinou a ler e escrever, e à D. Diquinha, despertou meu gosto pela matemática.

À Universidade de Brasília - UnB.

E finalmente à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Aplicando o procedimento de Dirac, para tratar sistemas dinâmicos vinculados, ao Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral (ETRG) investigamos, a partir dos vínculos de primeira classe, as transformações de calibre no campo fundamental: as componentes do campo de tetradas. As dificuldades envolvidas na obtenção de uma formulação hamiltoniana através de uma simples transformada de Legendre foram evidenciadas. Ao fazer uma escolha apropriada, as transformações de calibre obtidas permitiram uma analogia direta com as transformações de calibre da teoria de Yang-Mills. Além disso, para o caso assintoticamente plano em que o índice de álgebra é fixado, foi possível recuperar as transformações do Eletromagnetismo. Considerando ainda o limite assintoticamente plano, evidenciamos também a dependência do parâmetro de transformação de calibre nas variáveis de espaço-tempo. Obtivemos ainda, através das transformações de calibre de segundo gênero, as transformações mais fundamentais, a saber, as de primeiro gênero. Mostramos que, considerando a possibilidade de decompor as componentes do campo de tetradas como uma parte trivial, mais algum potencial, além dos usuais potenciais de translação e de Lorentz, há também a possibilidade de que o grupo de simetria do espaço interno seja uma generalização do grupo de Poincaré. Além disso, para o caso em que a decomposição das componentes do campo de tetradas inclui apenas uma parte trivial somada a um potencial translacional, recuperamos o grupo de translação. Por fim, o trabalho permitiu corroborar recentes definições para os campos Gravitoeletromagnéticos; fazendo uso dessas definições investigamos seu comportamento sob a óptica de diferentes observadores.

Abstract

Applying the Dirac procedure to treat constrained dynamical systems to the Teleparallel Equivalent of General Relativity (TEGR) we have investigated, from the first class constraints, the gauge transformations in the fundamental field: the tetrad field components. The difficulties involved in obtaining a Hamiltonian formulation by a simple Legendre transformation were found. By making an appropriate choice, the gauge transformations obtained enabled a direct analogy with the gauge transformations of the Yang-Mills theory. In addition, for the asymptotically flat case in which the algebra index is fixed, it was possible to recover the transformations of Electromagnetism. Considering yet the asymptotically flat limit, we found the dependence of the gauge transformation parameter in the space-time variables. We have also obtained, through the second kind gauge transformations, the most fundamental transformations, namely those of the first kind. We show that, considering the possibility to decompose the components of the tetrad field as a trivial part, plus some potential, beyond the translational and Lorentz potentials, there is also the possibility that the symmetry group of the internal space be a generalization of Poincaré group. In addition, for the case where the decomposition of the tetrad field components includes only a trivial part plus a translational potential, we retrieve the translation group. Finally, the work allowed, in some sense, to corroborate recent Gravitoelectromagnetic field definitions; using these definitions we investigate its behavior from the perspective of different observers.

Sumário

1	Introdução	1
2	Considerações Gerais	5
2.1	O Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral	5
2.1.1	Da Gravidade Teleparalela ao ETRG	5
2.1.2	Versões lagrangianas	7
2.1.3	Equações de campo e equivalência com a RG	8
2.2	Teorias de Calibre	8
2.2.1	Simetrias e Leis de Conservação	9
2.2.2	Invariância de Calibre	12
2.2.3	Teoria de calibre para o grupo das translações	16
2.2.4	Teoria de calibre para o grupo de Poincaré	19
2.3	Sistemas Hamiltonianos Vinculados	22
2.3.1	O formalismo	22
2.3.2	O Eletromagnetismo	28
2.3.3	A Gravitação descrita pelo ETRG	30
3	Análise do Espaço Interno associado ao ETRG	37
3.1	Momentos canonicamente conjugados às componentes do campo de tetradas	37
3.2	Vínculos como geradores de transformação de calibre	40
3.3	Transformações locais: cinemática do espaço-interno	46

3.4	Dependência do parâmetro de transformação de calibre nas variáveis de espaço-tempo	48
3.5	Universalidade via abordagem de calibre	49
4	Gravitoeletromagnetismo	55
4.1	O papel dos observadores na medição do campo gravitoeletromagnético teleparalelo em diferentes geometrias	56
4.1.1	Queda livre no espaço-tempo de Schwarzschild	58
4.1.2	Força de Lorentz gravitacional	62
4.1.3	Energia do campo gravitacional	63
4.1.4	Considerações finais	65
4.2	O efeito de <i>boosts</i> na medição do campo gravitoeletromagnético na geometria de Schwarzschild	66
4.2.1	Regime de campo fraco	69
5	Conclusões e Perspectivas	73

Capítulo 1

Introdução

Teorias de Calibre da gravitação são uma tentativa de descrever tal interação, dita fundamental, utilizando-se de técnicas bem estabelecidas na descrição das demais interações fundamentais. O estudo de simetrias, e conseqüentemente leis de conservação no espaço físico, é uma poderosa ferramenta para a compreensão dos fundamentos da mecânica. A idéia de extrapolar e utilizar-se desse mesmo tipo de aparato em um espaço dito interno, ou de calibre, abre uma janela de possibilidades; foi exatamente isso que nos permitiu compreender a real essência das "cargas": quantidades conservadas sob a ação de um determinado grupo de simetria do espaço interno [1].

A existência de um espaço interno, por sua vez, está associada a graus de liberdade extras que são evidenciados na formulação hamiltoniana da teoria. Essas teorias são ditas vinculadas ou restritas, já que têm seu espaço de fase diminuído [2]. Embora no estudo de sistemas hamiltonianos vinculados, o surgimento dos graus de liberdade extras - espaço interno - seja uma consequência da magnitude do espaço de configuração, sem dar qualquer noção física da real essência desse espaço, sabemos que são graus de liberdade associados ao próprio campo fonte; uma consequência da invariância do lagrangiano total sob transformações desse campo. Mais detalhes serão vistos no capítulo 2.

O princípio da equivalência estabelece que as equações da Relatividade Especial sejam recuperadas em um sistema de coordenadas localmente inercial, no qual

os efeitos da gravitação estejam ausentes. Dessa forma, baseado nesse princípio, seria natural esperar que a gravitação tivesse uma simetria local de Poincaré, e que fosse possível descrevê-la como uma teoria de calibre para esse grupo. De fato, isso é possível [3]. No entanto, há evidências teóricas e experimentais/observacionais, de que do ponto de vista mais fundamental - além do modelo padrão - a simetria de Lorentz seja quebrada [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Isso eliminaria o grupo de Poincaré como grupo de simetria local da gravitação, deixando espaço apenas para o setor translacional, ou outro mais geral.

É importante ressaltar que existem duas linhas de pensamento a serem seguidas quando se pensa em descrever a gravitação como uma teoria de calibre. Na primeira, a gravitação é universal, e encontrar um grupo de simetria para o espaço interno torna-se uma tarefa equivalente a encontrar o grupo cinemático do espaço físico. Nessa linha de pensamento, a gravitação não teria uma estrutura de calibre genuína como as demais interações, uma vez que torna-se infactível a separação dos espaços físico e interno. Na segunda, a versão fraca do princípio da equivalência é violada, isto é, a queda livre deixa de ser universal ¹; dessa forma, o espaço físico, que é deformado como consequência de transformações de calibre de primeiro gênero no espaço interno, não é o espaço-tempo no qual são definidos todos os demais campos da natureza. Assim, a cinemática do espaço-tempo seria completamente independente do grupo de simetria do espaço interno. Aqui cabe um comentário sobre um trabalho publicado recentemente, no qual os autores afirmam não haver qualquer "granularidade" associada ao espaço-tempo [11], pelo menos em uma escala de até $10^{-48}m$. Ou seja, quantizar a gravitação não significa quantizar o espaço-tempo; mas um espaço físico que faz parte de um fibrado específico da gravitação. Isso nos leva então a pensar que a segunda linha de pensamento colocada acima faça mais sentido. Independente de preconceitos, nesse trabalho seguiremos

¹É importante enfatizar que não é nossa intenção questionar o princípio da equivalência, mas simplesmente supor sua não validade em determinados regimes.

os procedimentos padrões na procura pelo grupo de simetria do espaço interno, de forma que somente ao final tentaremos analisar com qual abordagem nossos resultados mais se identificam.

A teoria gravitacional utilizada será o Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral (ETRG), que é um caso particular de uma teoria mais geral que possui um conjunto de três parâmetros livres, a Gravidade Teleparalela, e que é totalmente equivalente à Relatividade Geral (RG) [12, 13, 14, 15, 16]. Objetivando compreender melhor sua estrutura interna, aplicamos o ferramental mencionado nos parágrafos acima. Como será visto, mostramos que partindo do lagrangiano do ETRG contido na literatura, é possível concluir que não há uma isotropia no espaço físico com relação às transformações de calibre, ou seja, dado um campo gravitacional arbitrário, oriundo de uma transformação de calibre no espaço interno, o espaço físico reage de forma diferente nas componentes espacial e temporal. Fazendo uma escolha apropriada mostramos ainda que as transformações de calibre das componentes do campo de tetradas permitem uma analogia direta com as transformações de calibre da teoria de Yang-Mills. Além disso, para o caso assintoticamente plano no qual o índice de álgebra é fixado, recuperamos transformações similares as do Eletromagnetismo. Ainda no limite assintoticamente plano, a dependência do parâmetro de transformação de calibre nas variáveis de espaço-tempo é periódica, exatamente como no Eletromagnetismo. Mostraremos também que o espaço interno da teoria parece ser invariante sob a ação de um grupo que pode generalizar o grupo de Poincaré. Além disso, o próprio espaço físico - em escala local - deve ser pensado como espaço interno, uma vez que os parâmetros de transformação de calibre calibram "fontes" em ambos os espaços. Veremos também que os campos gravitoeletrico e gravitomagnético, como foram recentemente definidos, fazem sentido uma vez que permitem uma relação direta com os momentos, o que é análogo ao que ocorre nas demais teorias de calibre.

O trabalho exposto nessa tese é basicamente uma ampliação de quatro artigos produzidos pelo grupo. O primeiro deles aceito para publicação no *Advanced*

Studies in Theoretical Physics [17], o segundo submetido no Chinese Journal of Physics [18], o terceiro submetido no General Relativity and Gravitation [19] e o quarto em processo final de confecção [20]. O texto está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2 encontram-se as considerações gerais, que incluem uma revisão bibliográfica sobre o desenvolvimento do ETRG, das teorias de calibre e dos sistemas hamiltonianos vinculados. O capítulo 3 é dedicado a discutir o problema em questão, ou seja, a análise do espaço interno associado ao ETRG. No capítulo 4 encontra-se uma discussão acerca dos outros dois trabalhos sobre os campos gravitoeletrico e gravitomagnético. Finalmente, no capítulo 5 encontram-se as conclusões gerais e as perspectivas futuras.

Notação: o alfabeto grego é utilizado para representar índices de espaço-tempo ($\alpha, \beta, \chi, \dots = 0, 1, 2, 3$), a primeira metade do alfabeto latino ($a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$) representa índices do espaço interno, ou de calibre, e a segunda metade do alfabeto latino (i, j, k, \dots) assume os valores de 1, 2 e 3 do espaço-tempo.

Capítulo 2

Considerações Gerais

Objetivando uma maior auto-suficiência, nesse capítulo é apresentado o mínimo necessário a ser compreendido para o entendimento do trabalho. Uma análise detalhada acerca da evolução das idéias da gravitação é deixada à parte, devendo, quando necessário, ser buscada na literatura [21, 22].

2.1 O Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral

A descrição teleparalela da gravitação é fundamentalmente baseada na nulidade do tensor de curvatura e na permanência do tensor de torção. Existem algumas descrições distintas desta formulação, e até mesmo interpretações diferentes dentro de uma mesma descrição. Nesse texto iremos nos ater à descrição equivalente à Relatividade Geral, na qual é sempre possível interpretar os índices de álgebra como índices de um espaço interno.

2.1.1 Da Gravidade Teleparalela ao ETRG

A Gravidade Teleparalela tem como objeto fundamental um campo de tetradas $h_a = h_a^\mu \partial_\mu$ que é uma base linear que relaciona a métrica g à métrica do espaço interno $\eta = \eta_{ab} dx^a dx^b$ por $\eta_{ab} = g_{\mu\nu} h_a^\mu h_b^\nu$. Com o intuito de descrever a

gravitação diante da nulidade do tensor de curvatura, deve-se impor que esse campo seja transportado paralelamente, isto é,

$$\nabla_{\nu} h^a{}_{\mu} \equiv \partial_{\nu} h^a{}_{\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} h^a{}_{\rho} = 0. \quad (2.1)$$

A conexão que satisfaz tal condição é a chamada conexão de Weitzenböck, definida por:

$$\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} \equiv h_a{}^{\rho} \partial_{\mu} h^a{}_{\nu}, \quad (2.2)$$

cujos tensor de torção associado é

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

É direto ver que o tensor de curvatura associado à conexão de Weitzenböck é nulo. Há uma classe de lagrangianos quadráticos na torção que descreve a Gravidade Teleparalela [23, 24, 25, 26, 27, 28]:

$$\mathcal{L} = \alpha [A T^{\rho}{}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}{}_{\rho} + B T^{\rho}{}_{\mu\nu} T^{\nu\mu}{}_{\rho} + C T_{\rho\mu}{}^{\rho} T^{\nu\mu}{}_{\nu}]. \quad (2.4)$$

Nessa descrição, os parâmetros A, B e C devem ser ajustados de acordo com as condições físicas de contorno, com o intuito de reproduzir corretamente os experimentos gravitacionais. A constante α pode ser determinada impondo uma consistência com a teoria de Newton da gravitação no limite de campo fraco. Fazendo isso obtemos $\alpha = \frac{h}{2k^2}$, com $h = \det(h^a{}_{\mu})$ e $k \equiv \frac{8\pi G}{c^4}$ ¹. Se impusermos agora que essa teoria seja equivalente à RG, os parâmetros A, B e C devem satisfazer [3]:

$$\begin{aligned} 2A + B + C &= 0, \\ C &= -1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Essa família representa uma teoria gravitacional viável e empiricamente indistinguível da RG. Há, no entanto, outra escolha interessante que requer [3]:

$$2A - B = 0. \quad (2.6)$$

¹ G é a constante universal gravitacional

Esse requerimento nos levará, como veremos, a um lagrangiano igual ao lagrangiano de Einstein-Hilbert a menos de um termo de divergência. Só há um conjunto de parâmetros que satisfaça as condições colocadas anteriormente,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \\ B &= \frac{1}{2} \\ C &= -1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ao substituirmos tais parâmetros, juntamente com a constante α , no lagrangiano (2.4) ganhamos

$$\mathcal{L} = \frac{h}{2k^2} \left[\frac{1}{4} T^\rho{}_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^\rho{}_{\mu\nu} T^{\nu\mu}{}_\rho - T_{\rho\mu}{}^\rho T^{\nu\mu}{}_\nu \right]. \quad (2.8)$$

Esse é o lagrangiano que define o chamado Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral ou Formulação Teleparalela da Relatividade Geral.

2.1.2 Versões lagrangianas

A densidade lagrangiana (2.8) pode ser reescrita em uma forma mais elegante para ganharmos:

$$\mathcal{L} = \frac{h}{8k^2} \left[\frac{1}{4} T^a{}_{\mu\nu} T^b{}_{\rho\lambda} N_{ab}{}^{\mu\rho,\nu\lambda} \right], \quad (2.9)$$

com $N_{ab}{}^{\mu\rho,\nu\lambda}$ sendo o tensor responsável por todas as contrações de índices possíveis, dado por [13]:

$$\begin{aligned} N_{ab}{}^{\mu\rho,\nu\lambda} &= \frac{1}{2} \eta_{ab} [g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho}] + \frac{1}{2} h_a{}^\rho [h_b{}^\mu g^{\nu\lambda} - h_b{}^\nu g^{\mu\lambda}] \\ &- \frac{1}{2} h_a{}^\lambda [h_b{}^\mu g^{\nu\rho} - h_b{}^\nu g^{\mu\rho}] + h_a{}^\mu [h_b{}^\lambda g^{\nu\rho} - h_b{}^\rho g^{\mu\lambda}] \\ &- h_a{}^\nu [h_b{}^\lambda g^{\mu\rho} - h_b{}^\rho g^{\mu\lambda}]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Outra forma de escrever a densidade lagrangiana (2.8), e que talvez seja a mais frutífera de todas é [29]:

$$\mathcal{L}_G = \frac{h}{4k^2} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu}, \quad (2.11)$$

onde

$$S^{\rho\mu\nu} = -S^{\rho\nu\mu} \equiv \frac{1}{2} [K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu} T^{\theta\mu}{}_{\theta} + g^{\rho\mu} T^{\theta\nu}{}_{\theta}] \quad (2.12)$$

é o chamado superpotencial, e $K^{\mu\nu\rho}$ é o tensor de contorção dado por

$$K^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} T^{\nu\mu\rho} + \frac{1}{2} T^{\rho\mu\nu} - \frac{1}{2} T^{\mu\nu\rho}. \quad (2.13)$$

2.1.3 Equações de campo e equivalência com a RG

A total equivalência entre a RG e o ETRG dá-se no contexto das equações de movimento oriundas dos lagrangianos (2.8) e Einstein-Hilbert,

$$\mathcal{L}_{RG} = -\frac{\sqrt{-g}}{2k^2} R_{RG}, \quad (2.14)$$

sendo R_{RG} o escalar de curvatura associado à conexão de Levi-Civita

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_{\nu} g_{\alpha\rho} + \partial_{\rho} g_{\nu\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\nu\rho}). \quad (2.15)$$

É possível mostrar que [13]:

$$\mathcal{L}_{RG} = \mathcal{L} + \partial_{\mu} \left(\frac{2h}{k^2} T^{\nu\mu}{}_{\nu} \right), \quad (2.16)$$

de onde conclui-se que as equações dinâmicas são idênticas, uma vez que o termo de divergência pode ser desconsiderado na integração da densidade lagrangiana.

As equações de Euler-Lagrange podem então ser obtidas:

$$\partial_{\sigma} (h S_a{}^{\rho\sigma}) - k^2 (h j_a{}^{\rho}) = 0 \quad (2.17)$$

sendo $j_a{}^{\rho}$ uma "fonte de vácuo" do campo gravitacional dada por:

$$j_a{}^{\rho} \equiv \frac{\partial L}{\partial h^a{}_{\rho}} = \frac{h_a{}^{\lambda}}{k^2} \left[T^c{}_{\mu\lambda} S_c{}^{\mu\rho} - \frac{1}{4} \delta_{\lambda}{}^{\rho} T^c{}_{\mu\nu} S_c{}^{\mu\nu} \right]. \quad (2.18)$$

2.2 Teorias de Calibre

Teorias invariantes sob transformações em um espaço interno permitiram grandes progressos na descrição das partículas elementares, prevendo, por exemplo,

uma série de propriedades intrínsecas das partículas. Algo a ser notado nessas teorias é a possibilidade de geometrizar-las² [32]; sendo a principal teoria do campo gravitacional uma teoria essencialmente geométrica, fica clara a relação entre elas. No entanto, nossa principal motivação vai no sentido contrário, descrever a gravitação como uma teoria de calibre.

2.2.1 Simetrias e Leis de Conservação

Teorias físicas geralmente possuem um certo número de invariâncias. Uma invariância é global, por exemplo, se é possível efetuar uma transformação infinitesimal sobre seu campo fundamental

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi \quad (2.19)$$

de forma que essa transformação mantenha a ação invariante e seja a mesma em todos os pontos do espaço-tempo. Sempre que uma teoria possui invariâncias vale o seguinte teorema (teorema de Noether): cada grupo de transformações contínuas que alteram a densidade lagrangiana no máximo por uma quadridivergência corresponde a uma lei de conservação e reciprocamente.

Para os casos de simetrias internas, consideremos um conjunto de n campos ϕ_i ($i = 1, \dots, n$). Um grupo G de m transformações infinitesimais atua em ϕ da seguinte forma:

$$\delta\phi = i\epsilon^a \Omega_a \phi \quad (2.20)$$

com $a = 1, 2, \dots, m$ e Ω_a sendo um conjunto de m matrizes geradoras de transformação. Os geradores Ω_a formam uma representação do grupo,

$$[\Omega_a, \Omega_b] = if_{ab}{}^c \Omega_c. \quad (2.21)$$

Se a ação $S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ é deixada invariante pelas transformações acima, então

$$\delta S = 0 = \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta\phi)$$

²É possível, por exemplo, interpretar o tensor intensidade de campo como uma curvatura.

$$= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi + \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right]. \quad (2.22)$$

Identificando a primeira parte da equação como as equações de Euler-Lagrange, obtemos

$$\int d^4x i \epsilon^a \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Omega_a \phi \right] = 0. \quad (2.23)$$

Portanto, se definirmos as densidades de correntes

$$J_a^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Omega_a \phi, \quad (2.24)$$

elas serão conservadas, isto é

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0. \quad (2.25)$$

A existência de correntes conservadas implica na existência de cargas conservadas. Sejam, por hipótese Q_a cargas definidas por:

$$Q_a \equiv \int d^3x J_a^0(x_\mu), \quad (2.26)$$

então

$$\begin{aligned} \frac{dQ_a}{dt} &= \int d^3x \partial_0 J_a^0 \\ &= \int d^3x \left(\partial_\mu J_a^\mu - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a \right) \\ &= - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

As cargas conservadas (2.53) são chamadas de *cargas de Noether*.

Ao quantizarmos a teoria usando quantização canônica, as cargas tornam-se operadores que obedecem às seguintes relações de comutação

$$[Q_a, Q_b] = i f_{ab}{}^c Q_c, \quad (2.28)$$

isto é, as cargas são uma representação do grupo de transformações do espaço interno. O número de cargas independentes é igual ao número de geradores do grupo.

Para o caso de simetrias do espaço-tempo temos dois casos mais importantes, translações e transformações de Lorentz. Consideremos uma translação infinitesimal

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}. \quad (2.29)$$

Então

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \mathcal{L}(x^{\mu} + \epsilon^{\mu}) - \mathcal{L}(x^{\mu}) = \epsilon^{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\mu}}, \quad (2.30)$$

e \mathcal{L}' conduz às mesmas equações de movimento que \mathcal{L} , uma vez que diferem apenas por uma quadridivergência. Sendo a ação S invariante por translações,

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta\mathcal{L} = 0 &= \int d^4x \sum_r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} \delta\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_r)} \delta(\partial_{\mu}\varphi_r) \right] \\ &= \int d^4x \partial_{\mu} \left[\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_r)} \epsilon^{\nu} \partial_{\nu}\varphi_r \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Igualando (2.57) e (2.58) e usando o fato de que ϵ^{μ} é arbitrário obtemos

$$\int d^4x \partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.32)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor densidade de momento-energia definido por

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_r)} \partial^{\nu}\varphi_r, \quad (2.33)$$

o qual pode ser usado para definir as quantidades conservadas

$$P^{\mu} \equiv \int d^3x T^{0\mu}. \quad (2.34)$$

Sendo $T^{00} = \mathcal{H}$, onde \mathcal{H} é a densidade hamiltoniana, vemos que P^{μ} é o quadri-vetor momento. Concluimos então que a invariância por translações conduz à conservação do quadri-momento.

Consideremos agora as transformações de Lorentz infinitesimais

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (2.35)$$

Essa transformação é acompanhada por uma transformação dos campos na forma

$$\varphi'_r(x') = S_{rs}(\omega) \varphi_s(x). \quad (2.36)$$

Para os casos de campos escalares e espinoriais, S_{rs} vale [33]

$$S_{rs} = \delta_{rs} \quad (2.37)$$

e

$$S_{rs} = \delta_{rs} + \frac{1}{8} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]_{rs} \omega^{\mu\nu} \quad (2.38)$$

respectivamente ³. Temos então

$$\begin{aligned} \delta\varphi_r(x) &= S_{rs}(\omega)\varphi_s(x) - \varphi_r(x) \\ &= -\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} [(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha)\delta_{rs} + \Sigma_{rs}^{\alpha\beta}] \varphi_s \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde definimos

$$S_{rs}(\omega) \equiv \delta_{rs} - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} [(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha)\delta_{rs} + \Sigma_{rs}^{\alpha\beta}]. \quad (2.40)$$

Então

$$\int d^4x \delta\mathcal{L} = 0 = - \int d^4x \omega^{\alpha\beta} x_\alpha \partial_\beta \mathcal{L} = \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} \delta\varphi_r \right] \quad (2.41)$$

de onde obtemos

$$\int d^4x \partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0, \quad (2.42)$$

com

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} \Sigma_{rs}^{\alpha\beta} \varphi_s. \quad (2.43)$$

O momento angular conservado é dado por:

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x M^{0\alpha\beta} = \int d^3x \left[x^\alpha T^{0\beta} - x^\beta T^{0\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi_r)} \Sigma_{rs}^{\alpha\beta} \varphi_s \right]. \quad (2.44)$$

2.2.2 Invariância de Calibre

Nas transformações consideradas até agora, o parâmetro ϵ^a era constante. Vejamos agora teorias nas quais o lagrangiano seja invariante por

$$\delta\phi = i\epsilon^a(x)\Omega_a\phi, \quad (2.45)$$

³Os objetos γ_μ e γ_ν são matrizes que dependem do campo espinorial.

ou seja, o parâmetro da transformação é agora uma função do ponto do espaço-tempo. Tais teorias são denominadas Teorias de Calibre.

Exigirmos invariância local implica no surgimento de um campo de calibre. Vejamos como exemplo o caso do campo espinorial descrito pelo lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (2.46)$$

sendo γ^μ as matrizes de Dirac e $\bar{\psi} = \psi^\tau\gamma^0$ o adjunto de Dirac. Ao exigirmos invariância por

$$\begin{aligned} \delta\psi &= i\alpha(x)\psi \\ \delta\bar{\psi} &= -i\alpha(x)\bar{\psi}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

temos:

$$\delta\mathcal{L} = -i\alpha(x)\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)[\alpha(x)\psi] - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x). \quad (2.48)$$

Portanto o lagrangiano perde a invariância; a derivada $\partial_\mu\psi$ não se transforma como ψ . Aqui deve ser introduzido o conceito de derivada covariante D_μ de forma que sob uma transformação de calibre local, como a colocada acima, se transforme como os campos, ou seja

$$\delta D_\mu\psi = i\alpha(x)D_\mu\psi. \quad (2.49)$$

Para o campo espinorial anterior em interação com o campo eletromagnético, D_μ é dado por

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (2.50)$$

O potencial eletromagnético surge então como um campo compensador. Sua transformação dá-se exatamente de forma a compensar o termo proporcional de $\partial_\mu\alpha$ em $\delta\mathcal{L}$,

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (2.51)$$

A introdução do potencial A_μ força a introdução de novos termos no lagrangiano. A única combinação quadrática nas primeiras derivadas de A_μ , que é invariante sob

(2.78) é o tensor de Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.52)$$

Termos de massa do tipo $A^\mu A_\mu$ não são invariantes, implicando na ausência de massa para os potenciais A_μ . Portanto, o lagrangiano total

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (2.53)$$

é invariante sob as transformações de fase locais (2.74) e (2.78), ou transformações de calibre de primeiro e segundo gênero respectivamente. Ele descreve a interação entre elétrons e fótons.

As transformações (2.74), para cada ponto x , são análogas a uma rotação no espaço dos ψ ; espaço este que assume um caráter de espaço interno. A liberdade de escolha de base dentro desse espaço reflete-se na conservação da carga elétrica.

Todos os passos dados até agora podem ser repetidos quando o grupo de transformações não é abeliano. Seja então o lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi, \quad (2.54)$$

onde Ψ é um vetor coluna em um espaço vetorial de dimensão n , no qual atua uma representação do grupo não abeliano G :

$$\delta\Psi = i\epsilon^a(x)\Omega_a\Psi \quad (2.55)$$

onde Ω_a são as matrizes geradoras que obedecem as seguintes relações de comutação

$$[\Omega_a, \Omega_b] = if_{ab}{}^c\Omega_c, \quad (2.56)$$

sendo f^{abc} os coeficientes de estrutura de G . Para tornar o lagrangiano (2.81) invariante sob a ação das transformações (2.82) introduzimos a derivada covariante

$$D_\mu\Psi = (\partial_\mu + igA^a{}_\mu\Omega_a)\Psi, \quad (2.57)$$

onde A^a_μ são potenciais análogos a A_μ do eletromagnetismo e g é a constante de acoplamento ⁴. A lei de transformação de A^a_μ é obtida exigindo que $D_\mu\Psi$ transforme-se como Ψ . Calculemos então a variação de $D_\mu\Psi$:

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu\Psi) &= \partial_\mu(\delta\Psi) + igA^a_\mu\Omega_a(\delta A^a_\mu\Omega_a)\Psi \\ &= i\epsilon^a\Omega_a\partial_\mu\Psi + i\partial_\mu\epsilon^a\Omega_a\Psi - gA^a_\mu\Omega_a\epsilon^b\Omega_b\Psi + ig\delta A^a_\mu\Omega_a\Psi.\end{aligned}\quad (2.58)$$

Queremos que

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu\Psi) &= i\epsilon^a\Omega_a D_\mu\Psi \\ &= i\epsilon^a\Omega_a\partial_\mu\Psi - g\epsilon^a\Omega_a A^b_\mu\Omega_b\Psi.\end{aligned}\quad (2.59)$$

Comparando as duas últimas expressões, obtemos

$$\delta A^a_\mu = -f^{bca}\epsilon_b A_{c\mu} - \frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon^a.\quad (2.60)$$

Note que no caso abeliano (2.87) se reduz a (2.78).

A não-comutatividade da derivada covariante nos dá

$$[D_\mu, D_\nu]\Psi = igF^a_{\mu\nu}\Omega_a\Psi,\quad (2.61)$$

sendo $F^a_{\mu\nu}$ definido por

$$F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^{bca}A_{b\mu}A_{c\nu},\quad (2.62)$$

e transforma-se de forma covariante sob as transformações de calibre (2.87)

$$\delta F^a_{\mu\nu} = -f^{bca}\epsilon_b F_{c\mu\nu}.\quad (2.63)$$

Podemos então generalizar o lagrangiano de Maxwell,

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu},\quad (2.64)$$

⁴A constante de acoplamento está intimamente associada à carga da teoria em questão. No caso do Eletromagnetismo, por exemplo, teríamos como constante de acoplamento a raiz quadrada da constante de estrutura fina: $\sqrt{\alpha}$; $\alpha = \frac{e^2}{2\epsilon_0\hbar c}$.

e mostrar sua invariância sob (2.87). Concluimos então que o lagrangino total invariante de calibre é

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (2.65)$$

Um termo de massa para os potenciais de calibre teria a forma $-\frac{1}{2}m^2 A_\mu^a A^{a\mu}$, no entanto, as transformações (2.89) não o deixam invariante. Assim como os fótons, tais potenciais de calibre também não têm massa.

2.2.3 Teoria de calibre para o grupo das translações

Para o caso de teorias de calibre genuínas, como as que foram vistas anteriormente, as transformações de primeiro gênero são representadas pela ação do grupo de simetria em um dado campo fonte. Para o caso da gravitação, no entanto, a ação do grupo dá-se diretamente na base x^b que define o espaço interno, e não em um campo fonte definido nesse espaço ⁵. A seguir, serão vistos dois exemplos que ilustram essa observação. É importante notar que nessa abordagem, um determinado grupo de simetria para o espaço interno é proposto *a priori*, e na sequência é construída a teoria. Esse trabalho tem um objetivo exatamente contrário; dado um Lagrangiano, qual o grupo de simetria do espaço interno.

Em uma teoria de calibre para o grupo das translações, o campo fundamental é o potencial de calibre $A_\mu = A_\mu(x^\nu)$, assumindo valores na álgebra de Lie desse grupo:

$$A_\mu = A_\mu^a P_a, \quad (2.66)$$

com $P_a = \partial_a$ sendo os geradores de translações infinitesimais, que satisfazem:

$$[P_a, P_b] = 0. \quad (2.67)$$

⁵É claro que para os casos nos quais haja um campo fonte, além do próprio campo gravitacional, o grupo irá atuar também nesse campo.

A transformação de calibre é definida como uma transformação local das coordenadas no espaço interno

$$x'^a = x^a + \epsilon^a, \quad (2.68)$$

na qual $\epsilon^a \equiv \epsilon^a(x^\mu)$ são os parâmetros infinitesimais da transformação. Em termos de P_a , podemos reescrever a transformação na forma

$$\delta x^a = \epsilon^b P_b x^a = \epsilon^a. \quad (2.69)$$

Consideremos agora um campo fonte qualquer $\psi = \psi(x^\mu, x^a)$. Sua transformação de calibre infinitesimal é dada por:

$$\delta\psi = -\epsilon^a \partial_a \psi, \quad (2.70)$$

na qual $\delta\psi$ significa uma mudança funcional no mesmo ponto x^μ . Convém destacar que os geradores de translação podem atuar no argumento de qualquer campo fonte, implicando na universalidade da gravitação. Usando a definição geral de derivada covariante [1]

$$D_\mu = \partial_\mu + A^a{}_\mu \frac{\partial}{\partial \epsilon^a}, \quad (2.71)$$

a derivada covariante translacional de ψ é:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A^a{}_\mu \partial_a \psi. \quad (2.72)$$

Equivalentemente, podemos escrever [14]

$$D_\mu \psi = h^a{}_\mu \partial_a \psi, \quad (2.73)$$

onde

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + A^a{}_\mu = D_\mu x^a \quad (2.74)$$

é um campo de tetradas não trivial, isto é, anolônimo ⁶. Tal campo, como dito anteriormente, é uma base linear que relaciona a métrica g à métrica do espaço interno por $\eta_{ab} = g_{\mu\nu} h_a{}^\mu h_b{}^\nu$. Na teoria de calibre para o grupo de Poincaré, como

⁶Os membros da base h^a , que definem o espaço interno, não comutam.

será visto logo adiante, não é possível reescrever a derivada covariante (2.25) na forma (2.26), uma vez que não é possível definir um campo de tetradas como em (2.27) que englobe tanto as componentes do potencial de calibre translacional quanto a conexão de spin associada ao potencial de Lorentz.

O tensor intensidade do campo de calibre é obtido através da relação de comutação da derivada covariante

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = F^a{}_{\mu\nu} P_a \psi, \quad (2.75)$$

de onde obtemos

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu = \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu. \quad (2.76)$$

Da covariância de $D_\mu \psi$, obtemos a transformação de calibre para os potenciais

$$A'^a{}_\mu = A^a{}_\mu - \partial_\mu \epsilon^a. \quad (2.77)$$

Usando as transformações (2.21) e (2.30), vemos que a tetrada é invariante de calibre

$$h'^a{}_\mu = h^a{}_\mu. \quad (2.78)$$

Consequentemente, $F^a{}_{\mu\nu}$ também é invariante sob essa transformação de calibre. Multiplicando a equação (2.29) por $h_a{}^\rho$, obtemos:

$$h_a{}^\rho F^a{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu - h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu, \quad (2.79)$$

que nos permite definir a conexão

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu \quad (2.80)$$

chamada conexão de Weitzenböck, que será a conexão relevante para essa descrição da gravitação. De posse da conexão, é possível notar que a intensidade de campo é apenas a torção escrita na base tetrada,

$$F^a{}_{\mu\nu} = h^a{}_\rho T^\rho{}_{\mu\nu}. \quad (2.81)$$

A construção da teoria a partir daqui é análoga à que foi feita nas seções anteriores, e levará a uma teoria totalmente equivalente à RG.

A construção de uma teoria de calibre para um grupo qualquer poderia ser feita, em princípio, sem qualquer relação com a interação gravitacional. A principal motivação para utilizar tal teoria para descrever a gravitação está associada com a fonte do campo gravitacional: energia-momento. Como é conhecido do teorema de Noether [30], essas quantidades são conservadas desde que o sistema físico seja invariante sob translações no espaço-tempo. Seria então natural esperar que o campo gravitacional fosse representado por uma teoria de calibre para o grupo de translação. Isto é semelhante ao que se passa no eletromagnetismo, cuja fonte, a 4-corrente elétrica, é conservada devido à invariância da teoria sob transformações do grupo unitário $U(1)$, o grupo de calibre da teoria de Maxwell.

Como último comentário, vale ressaltar que na teoria de calibre para o grupo das translações, o campo de tetradas $h^a{}_\mu$ e o potencial de calibre $A^a{}_\mu$ às vezes se confundem, uma vez que diferem apenas por um termo trivial $\delta^a{}_\mu$; ou seja, o campo fundamental pode, em determinadas situações, ser interpretado como o próprio campo de tetradas. Tal peculiaridade não ocorrerá na teoria de calibre para o grupo de Poincaré, na qual os objetos fundamentais são sempre os potenciais $A^a{}_\mu$ e $A^{ab}{}_\mu$.

2.2.4 Teoria de calibre para o grupo de Poincaré

A principal motivação em se utilizar uma teoria de calibre para o grupo de Poincaré na descrição da interação gravitacional reside no princípio da equivalência. Este estabelece que a RG seja invariante sob transformações locais de Poincaré. Em vez de pensar na simetria local de Poincaré como derivada do princípio da equivalência, a idéia é pensar de forma exatamente contrária, como acontece nas teorias de calibre.

Em uma teoria de calibre para o grupo de Poincaré, o campo fundamental é

o potencial de calibre $A_\mu = A_\mu(x^\nu)$, assumindo valores na álgebra de Lie do grupo:

$$A_\mu = A^a{}_\mu P_a + A^{ab}{}_\mu M_{ab}, \quad (2.82)$$

com $P_a = \partial_a$ e $M_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a + \Sigma_{ab}$ sendo os geradores infinitesimais de translações e transformações de Lorentz respectivamente, e Σ_{ab} sendo a parte espinorial do momento angular. A álgebra de Poincaré é satisfeita pelos geradores:

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= 0, \\ [P_a, M_{bc}] &= \eta_{ac} P_b - \eta_{ab} P_c, \\ [M_{ab}, M_{cd}] &= \eta_{bd} M_{ac} - \eta_{bc} M_{ad} + \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{ad} M_{bc}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

A transformação de calibre é definida como uma transformação local das coordenadas no espaço interno

$$x'^a = x^a + \xi^a, \quad (2.84)$$

na qual $\xi^a = \xi^a(x^\mu) \equiv \epsilon^a + \omega^a{}_b x^b$ são os parâmetros infinitesimais da transformação. Em termos de P_a e M_{ab} , podemos reescrever a transformação na forma

$$\delta x^a = \epsilon^b P_b x^a + \omega^c{}_d M_c{}^d x^a = \xi^a. \quad (2.85)$$

Consideremos agora um campo fonte qualquer $\psi = \psi(x^\mu, x^a)$. Sua transformação de calibre infinitesimal é dada por:

$$\delta \psi = \epsilon^a \partial_a \psi + \omega^a{}_b (x_a \partial^b - x^b \partial_a + \Sigma_a{}^b) \psi, \quad (2.86)$$

na qual $\delta \psi$ significa uma mudança funcional no mesmo ponto x^μ . Podemos agora escrever a derivada covariante de ψ

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A^a{}_\mu \partial_a \psi + \frac{1}{2} A^{ab}{}_\mu (x_a \partial_b - x_b \partial_a + \Sigma_{ab}) \psi. \quad (2.87)$$

Nesse ponto, a descrição começa a diferenciar-se completamente da descrição para o grupo das translações. Não é possível, por exemplo, reescrever a derivada covariante do campo fonte ψ na forma (2.26); no entanto, podemos escrever

$$D_\mu \psi = h^a{}_\mu \partial_a \psi + \frac{1}{2} A^{ab}{}_\mu (x_a \partial_b - x_b \partial_a + \Sigma_{ab}) \psi. \quad (2.88)$$

Tal derivada covariante pode ser usada no cálculo do tensor intensidade de campo (curvatura) da teoria; esse objeto, por sua vez, nos permitirá definir a conexão associada. Como vimos, no caso translacional a conexão associada à geometria do espaço-tempo é a conexão de Weitzenböck $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu$, cujo tensor de curvatura é identicamente nulo, mantendo apenas a torção diferente de zero, que por sua vez está associada ao tensor intensidade de campo daquela descrição. No caso atual, a conexão terá uma estrutura mais geral e terá tanto curvatura quanto torção diferentes de zero. Vejamos

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = F^a{}_{\mu\nu} P_a \psi + F^{ab}{}_{\mu\nu} M_{ab} \psi, \quad (2.89)$$

de onde obtemos

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu = \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu \quad (2.90)$$

e

$$F^{ab}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{ab}{}_\nu - \partial_\nu A^{ab}{}_\mu + A^a{}_{c\mu} A^{cb}{}_\nu - A^a{}_{c\nu} A^{cb}{}_\mu \quad (2.91)$$

as intensidades de campo translacional e de Lorentz respectivamente.

Há vários lagrangianos possíveis para a teoria de calibre de Poincaré, e sua forma determinará a dinâmica do campo gravitacional. Para que as equações de movimento sejam no máximo de segunda ordem nas derivadas de campo, o lagrangiano pode ser, no máximo, quadrático nos tensores de curvatura e torção [31]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= b(-\alpha R + \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_R + \lambda), \\ \mathcal{L}_T &\equiv a(AT_{\mu\nu\rho}T^{\mu\nu\rho} + BT_{\mu\nu\rho}T^{\nu\mu\rho} + CT_\mu T^\mu), \\ \mathcal{L}_R &\equiv b_1 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + b_2 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\rho\sigma\mu\nu} + b_3 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + b_4 R_{\mu\nu} R^{\nu\mu} + b_5 R^2 \\ &\quad + b_6 (\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma})^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde α , A , B , C e b_i são parâmetros livres, λ é a constante cosmológica e $a = 1/2k$ (k é a constante gravitacional de Einstein). Daqui é possível reproduzir casos particulares, como a teoria de Einstein-Cartan ($\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_R = 0$), a teoria teleparalela ($\mathcal{L}_R = \alpha = R = 0$) e a RG ($\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_R = T = 0$).

2.3 Sistemas Hamiltonianos Vinculados

A inclusão dessa seção faz-se necessária, uma vez que uma simples transformada de Legendre do lagrangiano do ETRG não é suficiente para obter sua versão hamiltoniana. Isso deve-se ao fato da teoria apresentar vínculos que relacionam as coordenadas e os momentos, limitando o espaço de fase disponível. Como desejamos obter a versão hamiltoniana da teoria, devemos primeiramente aprender um pouco mais sobre o formalismo desenvolvido por Dirac para tratar esses sistemas [2, 34, 35].

2.3.1 O formalismo

A forma padrão para passarmos da descrição lagrangiana para a hamiltoniana é através de uma transformada de Legendre:

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t), \quad (2.93)$$

sendo q_i e \dot{q}_i as coordenadas e as velocidades generalizadas respectivamente, e

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.94)$$

o momento conjugado a q . Existem casos para os quais a transformação $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$ não é inversível, ou seja, o jacobiano da transformação, dado por

$$J = \det \left| \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| \quad (2.95)$$

é igual a zero. O fato da transformada de Legendre não ser inversível significa que as variáveis q_i e p_i não são todas independentes, o que implica na existência de vínculos entre elas, limitando o espaço de fase disponível. Nesses casos, as equações de movimento não podem ser obtidas diretamente da diferenciação de (2.93), sendo necessário introduzir uma extensão do formalismo.

Seja então um sistema, cujo lagrangiano é tal que existam N condições de vínculo entre as variáveis canônicas, dadas por:

$$\Phi_m = (q, p, t) \approx 0, \quad (2.96)$$

com $m = 1, \dots, N$. O sinal \approx representa igualdade fraca, significando que a relação de vínculo não vale, necessariamente, dentro dos parênteses de Poisson ⁷. Tais vínculos, por decorrerem diretamente da definição de momento, são chamados de vínculos primários.

A forma usual para se obter as equações de movimento de um sistema hamiltoniano é através do cálculo do diferencial de (2.93), porém, em decorrência das relações de vínculo (2.96), as variações dq_i e dp_i não são independentes. O método dos multiplicadores de Lagrange deve ser utilizado nesse caso, levando a:

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \sum_{m=1}^N u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_i} \right) dq_i + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \sum_{m=1}^N u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_i} \right) dp_i \right] + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_{m=1}^N u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right) dt = \sum_{i=1}^n \left[\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0. \quad (2.97)$$

Aqui, os u_m representam os multiplicadores de Lagrange. É possível agora obter as seguintes equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \sum_{m=1}^N u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_i} \approx \left\{ q_i, \mathcal{H} + \sum_{m=1}^N u_m \Phi_m \right\}, \quad (2.98)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \sum_{m=1}^N u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_i} \approx \left\{ p_i, \mathcal{H} - \sum_{m=1}^N u_m \Phi_m \right\}. \quad (2.99)$$

As equações de movimento (2.98) e (2.99) devem ser tais que as condições de vínculo (2.96) sejam satisfeitas durante toda a evolução temporal, de modo que,

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial t} = \left\{ \Phi_l, \mathcal{H} + \sum_{m=1}^N u_m \Phi_m \right\} = \{ \Phi_l, \mathcal{H} \} + \sum_{m=1}^N u_m \{ \Phi_l, \Phi_m \} \approx 0. \quad (2.100)$$

Existem quatro possibilidades diferentes para cada uma dessas equações:

1. Podemos chegar a uma inconsistência do tipo $1 = 0$, o que significa que o lagrangiano de partida não descreve de maneira consistente um sistema real.
2. A equação é automaticamente satisfeita, nada de novo sendo acrescentado.

⁷A igualdade só é válida na sub-variedade definida pelo vínculo.

3. $\{\Phi_l, \Phi_m\} \neq 0$. Obtemos uma equação envolvendo alguns dos coeficientes u_m , o que permite determinar um deles em função dos demais.
4. As condições de consistência geram novas relações entre as variáveis canônicas, ou seja, novos vínculos: $\chi(q, p) \approx 0$ denominados de vínculos secundários.

As novas condições de vínculos devem satisfazer $\dot{\chi} \approx 0$, levando novamente nas possibilidades (1) - (4). Repete-se esse procedimento até que mais nenhuma condição de vínculo seja gerada. Sejam então, por suposição, M condições de vínculos secundárias:

$$\chi_r(q, p) \approx 0; \quad (2.101)$$

com $r = 1, \dots, M$. Dentre os vínculos, podem existir alguns que possuam parêntese de Poisson fracamente nulo com todos os vínculos da teoria, que serão denominados vínculos de primeira classe. Já aqueles que possuam pelo menos um parêntese de Poisson diferente de zero serão chamados de vínculos de segunda classe. A existência de vínculos de primeira classe indica que a teoria considerada possui invariância de calibre. Os motivos que levam a essa afirmação ficarão claros a seguir.

Com o objetivo de obter um número máximo de K e $N + M - K$ vínculos de primeira e segunda classe, respectivamente, fazemos combinações lineares de todos os vínculos:

$$\Theta_\alpha(q, p) \approx 0; \quad (2.102)$$

com $\alpha = 1, \dots, K$, e

$$\Theta_\alpha(q, p) \approx 0; \quad (2.103)$$

com $\alpha = K + 1, \dots, N + M$. As combinações devem ser feitas de maneira tal que as funções Θ_α sejam linearmente independentes, ou seja,

$$\Phi_m = \sum_{\alpha=1}^{N+M} c_{m\alpha} \Theta_\alpha, \quad (2.104)$$

e portanto

$$\sum_m u_m \Phi_m = \sum_{\alpha=1}^{N+M} v_\alpha \Theta_\alpha; \quad (2.105)$$

com $v_\alpha = \sum_m u_m c_{m\alpha}$. A evolução para uma função dinâmica qualquer pode ser obtida através de seu diferencial total,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.106)$$

A substituição de (2.105) em (2.98) e (2.99), e estas em (2.106) leva a:

$$\frac{df}{dt} \approx \left\{ f, \mathcal{H} + \sum_{\alpha=1}^{N+M} v_\alpha \Theta_\alpha \right\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.107)$$

Usando as condições de consistência para os vínculos Θ_α obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\dot{\Theta}_\alpha \approx \{ \Theta_\alpha, \mathcal{H} \} + \sum_{\beta=1}^K \{ \Theta_\alpha, \Theta_\beta \} v_\beta + \sum_{\beta=K+1}^{N+M} \{ \Theta_\alpha, \Theta_\beta \} v_\beta \approx 0. \quad (2.108)$$

A matriz $|\{ \Theta_\alpha, \Theta_\beta \}|$, para $\alpha, \beta = K + 1, \dots, N + M$ é inversível; caso contrário seu determinante seria nulo, o que implicaria na existência de um novo vínculo de primeira classe, o que não é possível por construção. Como toda matriz anti-simétrica de dimensão ímpar tem determinante nulo, concluímos que o número de vínculos de segunda classe é par. Denotando a inversa de $|\{ \Theta_\alpha, \Theta_\beta \}|$ por $C_{\alpha\beta}$, obtemos de (2.108):

$$v_\alpha \approx - \sum_{\beta=K+1}^{N+M} C_{\alpha\beta} \{ \Theta_\beta, \mathcal{H}_{tot} \}; \quad (2.109)$$

com $\alpha = K + 1, \dots, N + M$, e o hamiltoniano total é definido por

$$\mathcal{H}_{tot} \equiv \mathcal{H} + \sum_{\beta=1}^K v_\beta \Theta_\beta. \quad (2.110)$$

A equação (2.109) determina alguns dos multiplicadores v_α , $\alpha = 1, \dots, K$ (os multiplicadores originais são obtidos de (2.105)), em função dos demais, que permanecem como funções arbitrárias no sistema. Substituindo (2.109) em (2.107) obtemos finalmente a equação de evolução para uma função dinâmica $f(q, p)$:

$$\frac{df}{dt} \approx \{ f, \mathcal{H}_{tot} \} - \sum_{\alpha, \beta=K+1}^{N+M} \{ f, \Theta_\alpha \} C_{\alpha\beta} \{ \Theta_\beta, \mathcal{H}_{tot} \} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.111)$$

Definindo o parêntese de Dirac entre duas funções dinâmicas f e g por

$$\{f, g\}_D \equiv \{f, g\} - \sum_{\alpha, \beta=K+1}^{N+M} \{f, \Theta_\alpha\} C_{\alpha\beta} \{\Theta_\beta, g\}, \quad (2.112)$$

(2.111) pode ser reescrita na forma

$$\frac{df}{dt} \approx \{f, \mathcal{H}_{tot}\}_D, \quad (2.113)$$

de maneira que o parêntese de Dirac agora, substitui o parêntese de Poisson nas equações de movimento.

É possível agora analisar com mais detalhes a relação entre os vínculos e as condições de calibre. Quando existem vínculos de primeira classe, permanecem nas equações funções arbitrárias através do hamiltoniano total \mathcal{H}_{tot} em (2.110), havendo, portanto, graus de liberdade adicionais. Qualquer conjunto de valores para q e p em um determinado instante, que possa evoluir a partir de um estado inicial, deve corresponder ao mesmo estado físico nesse instante. Sejam particulares valores para q 's e p 's no instante $t = 0$, vejamos como eles estarão após um breve intervalo de tempo δt . Para uma variável dinâmica qualquer f , com valor inicial f_0 , seu valor em um instante δt é

$$\begin{aligned} f(\delta t) &= f_0 + \dot{f}\delta t, \\ &= f_0 + \{f, \mathcal{H}_{tot}\} \delta t, \\ &= f_0 + \delta t (\{f, \mathcal{H}\} + v_\beta \{f, \Theta_\beta\}). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Os coeficientes v são completamente arbitrários. Tomemos um valor diferente, v' , para esses coeficientes. Isso daria um valor diferente para $f(\delta t)$, sendo a diferença dada por:

$$\nabla f(\delta t) = \delta t (v_\beta - v'_\beta) \{f, \Theta_\beta\}, \quad (2.115)$$

que podemos reescrever como

$$\nabla f(\delta t) = \epsilon_\beta \{f, \Theta_\beta\}, \quad (2.116)$$

onde

$$\epsilon_\beta = \delta t (v_\beta - v'_\beta) \quad (2.117)$$

é um número pequeno (devido ao coeficiente δt) e arbitrário (devido ao fato dos $v's$ e $v''s$ serem arbitrários). Podemos mudar todas as nossas variáveis canônicas de acordo com (2.116) e as novas variáveis descreverão o mesmo estado. Essa mudança nas variáveis consiste em aplicar uma transformação de contato infinitesimal (transformação de calibre), gerada pela função $\epsilon_\beta \Theta_\beta$. Concluímos então que os $\Theta'_\beta s$ são funções geradoras de transformações de calibre, que mudam os $q's$ e os $p's$, mas não afetam o estado físico do sistema.

Uma maneira de determinar os multiplicadores arbitrários consiste em introduzir, de maneira *ad hoc*, K condições de vínculo adicionais:

$$\Psi_\alpha \approx 0; \quad (2.118)$$

com $\alpha = 1, \dots, K$, tais que os vínculos de primeira classe, em conjunto com estes vínculos agora introduzidos e os de segunda classe, passem a ser todos de segunda classe. A escolha dos vínculos adicionais deve ser feita de tal maneira que eles sejam coerentes com a dinâmica e não gerem novas condições de vínculo, ou seja, que $\dot{\Psi}_\alpha \approx 0$.

Para finalizar, vejamos a relação fundamental da quantização canônica usual a partir do formalismo de Dirac, feita através da relação entre (2.113) e a equação de Heisenberg da mecânica quântica:

$$\{f, g\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [f, g], \quad (2.119)$$

na qual o parêntese de Dirac entre f e g é dado por (2.112), e apresenta as seguintes propriedades:

$$\{f, g\}_D = -\{g, f\}_D, \quad (2.120)$$

$$\{f, gh\}_D = \{f, g\}_D h + g \{f, h\}_D, \quad (2.121)$$

$$\{\Theta_\alpha, f\}_D = 0, \quad (2.122)$$

$$\{f, g\}_D \approx \{f, g\}, \quad (2.123)$$

$$\{h, \{f, g\}_D\}_D \approx \{h, \{f, g\}\}. \quad (2.124)$$

Acrescenta-se ainda a identidade de Jacobi

$$\{\{f, g\}_D, h\}_D + \{\{h, f\}_D, g\}_D + \{\{g, h\}_D, f\}_D = 0. \quad (2.125)$$

Para o caso de sistemas contínuos, com infinitos graus de liberdade, a principal diferença com relação ao que foi feito até agora é que as variáveis são campos, de forma que deve-se tomar cuidado no cálculo dos momentos e dos parênteses de Poisson, uma vez que as derivadas parciais são substituídas pelas derivadas funcionais.

2.3.2 O Eletromagnetismo

A título de exemplo, apliquemos todo o ferramental obtido até aqui ao Eletromagnetismo de Maxwell, cuja densidade lagrangiana sem fontes é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.126)$$

com

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.127)$$

sendo o tensor intensidade de campo e A_μ o quadripotencial eletromagnético. O momento canonicamente conjugado ao potencial A^μ é

$$\Pi_\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}^\mu} = -F_{0\mu}, \quad (2.128)$$

de onde é possível concluir que $F_{0i} = E_i$, e portanto, Π_i está relacionado ao campo elétrico da teoria. Sendo $F_{\mu\nu}$ definido de forma anti-simétrica, ele não tem dependência nas velocidades \dot{A}^0 , de forma que Π_0 é identicamente nulo; daqui definimos o único vínculo primário da teoria:

$$\Phi \equiv \Pi_0 \approx 0. \quad (2.129)$$

De fato, há um vínculo para cada ponto x^i do espaço, no entanto, por simplicidade conta-se apenas um vínculo. A densidade hamiltoniana canônica tem a forma

$$\mathcal{H}_c = \Pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \Pi_i \Pi^i - A^0 \partial^i \Pi_i, \quad (2.130)$$

e portanto não depende das velocidades; segue que a densidade hamiltoniana total é dada por

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + u\Phi, \quad (2.131)$$

com u sendo um multiplicador de Lagrange. Da condição de consistência para o vínculo primário é possível encontrar o vínculo secundário associado ⁸,

$$\chi = \dot{\Pi}_0 = \{\Pi_0, \mathcal{H}_T\} = \partial^i \Pi_i \approx 0, \quad (2.132)$$

do qual não surgem vínculos adicionais

$$\dot{\chi} = 0. \quad (2.133)$$

Ambos os vínculos são de primeira classe,

$$\{\Pi_0, \partial^i \Pi_i\} = 0, \quad (2.134)$$

e portanto atuam como geradores de transformação de calibre:

$$\begin{aligned} \delta A^\mu(x) &= \int d^3x' [\epsilon_1(x') \{A^\mu(x), \Phi(x)\} + \epsilon_2(x') \{A^\mu(x), \chi(x)\}] \\ &= \delta_0^\mu \epsilon_1 + \delta_i^\mu \partial^i \epsilon_2. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Analisando a expressão anterior, nota-se que ela é uma generalização das transformações usuais

$$\delta A^\mu = \partial^\mu \epsilon. \quad (2.136)$$

De fato, introduzindo a hipótese $\epsilon_1 = \partial^0 \epsilon_2$ é possível chegar em (2.136) a partir de (2.135). A introdução da relação anterior é garantida pela arbitrariedade dos parâmetros.

⁸De forma análoga, poderíamos ter calculado $\delta\mathcal{H}_c/\delta A^0$. Isso será feito para encontrarmos os vínculos secundários associados ao ETRG.

Uma análise da expressão para os parênteses de Dirac (2.112), permite-nos concluir que tais parênteses só se tornam relevantes para os casos nos quais a teoria apresente vínculos de segunda classe. De fato, esse é o caso de qualquer teoria que apresente vínculos de primeira classe e se queira quantizar. Para efetuar o processo de quantização, antes de mais nada, deve-se fixar um calibre; como foi visto, isso é feito introduzindo um novo conjunto de vínculos de segunda classe. Por exemplo, no caso do Eletromagnetismo podemos escolher os calibres

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= A^0 \approx 0, \\ \Psi_2 &= \partial_i A^i \approx 0,\end{aligned}\tag{2.137}$$

$$\Psi = \partial_\mu A^\mu \approx 0,\tag{2.138}$$

de Coulomb ou de Lorenz respectivamente. Independente da escolha de calibração é possível através dela encontrar uma equação diferencial (ou conjunto de equações) cuja solução mostrará como é a dependência do parâmetro de transformação de calibre nas variáveis de espaço-tempo. No caso do exemplo anterior, se escolhermos o calibre de Lorenz ganhamos a equação de onda

$$\partial_\mu \partial^\mu \epsilon = 0,\tag{2.139}$$

cuja solução mais geral é, obviamente, oscilatória. Isso está em acordo com a compactividade do grupo $U(1)$; a amplitude de $\epsilon(x^\mu)$ é modulada. No capítulo 3 faremos uma análise análoga para o caso da Gravitação.

2.3.3 A Gravitação descrita pelo ETRG

A formulação usual da gravitação clássica é a RG. Esta, por sua vez, tem como descrição hamiltoniana padrão a formulação ADM [36], que consiste basicamente em decompor o chamado espaço-tempo em espaço+tempo. Nesse modelo, dada uma métrica $g_{\mu\nu}$ projeta-se um campo vetorial t^μ em folhas Σ_t para obter [21]

$$N = -g_{\mu\nu} t^\mu n^\nu = (n^\mu \nabla_\mu t)^{-1}\tag{2.140}$$

e

$$N^\mu = g'^{\nu\mu} t_\nu, \quad (2.141)$$

a função *Lapse* (normal a Σ_t) e o vetor *Shift* (tangente a Σ_t) respectivamente, sendo n^μ normal a Σ_t e $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ a métrica espacial induzida em Σ_t . A figura 2.1 ilustra essas definições.

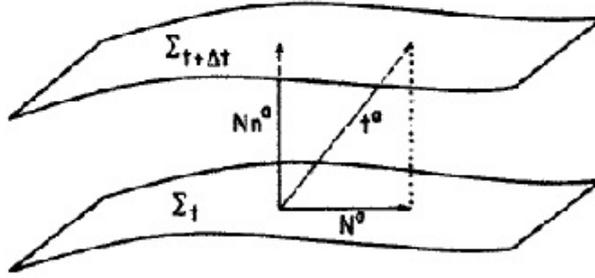


Figura 2.1: Diagrama do espaço-tempo ilustrando a definição da função *Lapse* N e do vetor *Shift* N^μ . Na figura, os índices gregos foram trocados por índices latinos.

O lagrangiano ADM não tem dependência em \dot{N} e \dot{N}_μ , mas apenas em $\dot{g}'_{\mu\nu}$, de forma que os momentos associados $\Pi_N = \Pi_{N_\mu} = 0$ definem os vínculos primários da teoria. As equações de vínculos secundários surgem da variação do hamiltoniano em função de N e N_μ . A soma dessas últimas às equações advindas da variação do hamiltoniano em função de $g'_{\mu\nu}$ e $\Pi_{g'_{\mu\nu}}$ são totalmente equivalentes às equações de Einstein. Como já dissemos, a presença de vínculos na formulação hamiltoniana indica que não isolamos os verdadeiros graus de liberdade dinâmicos na escolha do espaço de configuração. O fato é que é possível eliminar o vínculo associado ao vetor *Shift* N_μ através da "ampliação" do espaço de configuração ⁹, no entanto, o vínculo associado à função *Lapse* N permanece. Esse vínculo pode ser interpretado como sendo uma consequência da arbitrariedade de calibre envolvida na escolha de como "fatiar" o espaço-tempo em espaço+tempo. Ao introduzir no

⁹O novo espaço é obtido através das transformações geradas pelo vínculo associado ao vetor *Shift*.

lagrangiano uma "função tempo", que define a escolha de hiper-superfícies Σ_t com relação à Σ , e tratar essa função como variável dinâmica, o vínculo é introduzido; e não parece possível contorná-lo. Ou seja, parece impossível encontrar um espaço de configuração para a RG, tal que apenas verdadeiros graus de liberdade dinâmicos estejam presentes no seu espaço de fase. Tal vínculo parece ser uma característica inevitável da formulação hamiltoniana da RG.

De particular interesse para o nosso trabalho é a descrição hamiltoniana do ETRG. Apliquemos então o algoritmo de Dirac, juntamente com alguns truques extras, a essa teoria ¹⁰. Antes de mais nada, simplifiquemos a densidade lagrangiana (2.11), tornado-a linear antes de prosseguir. Essa linearização é feita às custas da introdução de campos auxiliares $\phi_{abc} = -\phi_{acb}$ que serão, mais tarde, relacionados à torção. Temos então:

$$\mathcal{L} = kh\Lambda^{abc} (\phi_{abc} - 2T_{abc}), \quad (2.142)$$

onde $T_{abc} = h_b^\mu h_c^\nu T_{a\mu\nu}$, Λ^{abc} é definido por

$$\Lambda^{abc} = \frac{1}{4} (\phi^{abc} + \phi^{bac} - \phi^{cab}) + \frac{1}{2} (\eta^{ac}\phi^b - \eta^{ab}\phi^c), \quad (2.143)$$

e $\phi_b = \phi^a_{ab}$.

As equações de Euler-Lagrange associadas a ϕ^{abc} levam a $\phi_{abc} = T_{abc}$, que pode ser dividida em duas equações:

$$\phi_{a0k} = T_{a0k} = \partial_0 h_{ak} - \partial_k h_{a0} \quad (2.144)$$

e

$$\phi_{aik} = T_{aik} = \partial_i h_{ak} - \partial_k h_{ai}. \quad (2.145)$$

Usando as decomposições anteriores, podemos reescrever a densidade lagrangiana como segue

$$\mathcal{L}(h, \phi) = -4kh\Lambda^{a0k}\partial_0 h_{ak} + 4kh\Lambda^{a0k}\partial_k h_{a0} - 2kh\Lambda^{aij}T_{aij} + kh\Lambda^{abc}\phi_{abc}, \quad (2.146)$$

¹⁰Nessa descrição seguiremos a referência [37], de forma que, por conveniência, adotaremos as constantes como são usadas naquele trabalho.

onde $\Lambda^{a0k} = \Lambda^{abc} h_b^0 h_c^k$ e $\Lambda^{aij} = \Lambda^{abc} h_b^i h_c^j$. Os momentos canonicamente conjugados à h_{ak} são dados por

$$\Pi^{ak} = -4kh\Lambda^{a0k}. \quad (2.147)$$

É possível usar a expressão anterior e reescrever novamente a densidade lagrangeana como segue,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \Pi^{ak} \partial_0 h_{ak} - \Pi^{ak} \partial_k h_{a0} - 2kh\Lambda^{aij} T_{aij} + kh\Lambda^{abc} \phi_{abc} \\ &= \Pi^{ak} \partial_0 h_{ak} - \Pi^{ak} \partial_k h_{a0} - kh\Lambda^{aij} (2T_{aij} - \phi_{aij}) + 2kh\Lambda^{a0k} \phi_{a0k}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

O último termo do lado direito da equação anterior pode ser escrito como

$$2kh\Lambda^{a0k} \phi_{a0k} = -\frac{1}{2} \Pi^{ak} \phi_{a0k}. \quad (2.149)$$

A identificação $\phi_{aij} = T_{aij}$, feita anteriormente, permite-nos escrever

$$\begin{aligned} -kh\Lambda^{aij} (2T_{aij} - \phi_{aij}) &= -kh\Lambda^{aij} T_{aij} \\ &= -kh \left(\frac{1}{4} g^{im} g^{nj} T^a_{mn} T_{aij} + \frac{1}{2} g^{nj} T^i_{mn} T^m_{ij} - g^{ik} T^j_{ji} T^n_{nk} \right) \\ &+ kh \left(-\frac{1}{2} g^{0i} g^{jk} \phi^a_{0k} T_{aij} - \frac{1}{2} g^{jk} \phi^i_{0k} T^0_{ij} + \frac{1}{2} g^{0j} \phi^i_{0k} T^k_{ij} \right. \\ &\left. - g^{0k} \phi^j_{0j} T^i_{ik} + g^{ik} \phi^0_{0i} T^j_{jk} \right). \end{aligned} \quad (2.150)$$

Os últimos cinco termos da equação anterior podem ser reescritos como segue:

$$-\frac{1}{2} kh \phi_{a0k} [g^{0i} g^{kj} T^a_{ij} - h^{ai} (g^{0j} T^k_{ij} - g^{kj} T^0_{ij}) + 2 (h^{ak} g^{0i} - h^{a0} g^{ki}) T^j_{ji}]. \quad (2.151)$$

Assim, a densidade lagrangiana ganha a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} (h_{ak}, \Pi^{ak}, h_{a0}, \phi_{a0k}) &= \Pi^{ak} \partial_0 h_{ak} + h_{a0} \partial_k \Pi^{ak} - \partial_k (h_{a0} \Pi^{ak}) \\ &- kh \left(\frac{1}{4} g^{im} g^{nj} T^a_{mn} T_{aij} + \frac{1}{2} g^{nj} T^i_{mn} T^m_{ij} - g^{ik} T^j_{ji} T^n_{nk} \right) \\ &- \frac{1}{2} \phi^{a0k} [\Pi^{ak} + kh [g^{0i} g^{kj} T^a_{ij} - h^{ai} (g^{0j} T^k_{ij} - g^{kj} T^0_{ij}) \\ &+ 2 (h^{ak} g^{0i} - h^{a0} g^{ki}) T^j_{ji}]]. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Resta agora, escrever as componentes restantes dos campos auxiliares, ϕ_{a0k} , em termos dos momentos Π^{ak} .

Consideremos a expressão para os momentos, escrita de forma expandida

$$\begin{aligned}\Pi^{ak} &= kh[g^{00}(-g^{kj}\phi^a_{0j} - h^{aj}\phi^k_{0j} + 2h^{ak}\phi^j_{0j}) + g^{0k}(g^{0j}\phi^a_{0j} + h^{aj}\phi^0_{0j}) \\ &+ h^{a0}(g^{0j}\phi^k_{0j} + g^{kj}\phi^0_{0j}) - 2(h^{a0}g^{0k}\phi^j_{0j} + h^{ak}g^{0j}\phi^0_{0j}) - g^{0i}g^{kj}T^a_{ij} \\ &+ h^{ai}(g^{0j}T^k_{ij} - g^{kj}T^0_{ij}) - 2(g^{0i}h^{ak} - g^{ik}h^{a0})T^j_{ji}].\end{aligned}\quad (2.153)$$

Denotando as partes simétrica e anti-simétrica por (...) e [...] respectivamente, é possível decompor Π^{ak} como segue

$$\Pi^{ak} = h^a{}_i\Pi^{(ik)} + h^a{}_i\Pi^{[ik]} + h^a{}_0\Pi^{0k},\quad (2.154)$$

onde

$$\begin{aligned}\Pi^{(ik)} &= kh[g^{00}(-g^{kj}\phi^i_{0j} - g^{ij}\phi^k_{0j} + 2g^{ik}\phi^j_{0j}) + g^{0k}(g^{0j}\phi^i_{0j} + g^{ij}\phi^0_{0j} - g^{0i}\phi^j_{0j}) \\ &+ g^{0i}(g^{0j}\phi^k_{0j} + g^{kj}\phi^0_{0j} - g^{0k}\phi^j_{0j}) - 2g^{ik}g^{0j}\phi^0_{0j} + \Delta^{ik}],\end{aligned}\quad (2.155)$$

com

$$\Delta^{ik} = -g^{0m}(g^{kj}T^i_{mj} + g^{ij}T^k_{mj} - 2g^{ik}T^j_{mj}) - (g^{km}g^{0i} + g^{im}g^{0k})T^j_{mj},\quad (2.156)$$

$$\Pi^{[ik]} = kh[-g^{im}g^{kj}T^0_{mj} + (g^{im}g^{0k} - g^{km}g^{0i})T^j_{mj}],\quad (2.157)$$

$$\Pi^{0k} = -2kh(g^{kj}g^{0i}T^0_{ij} - g^{0k}g^{0i}T^j_{ij} + g^{00}g^{ik}T^j_{ij}).\quad (2.158)$$

O ponto chave dessa análise é que apenas as componentes simétricas $\Pi^{(ij)}$ dependem dos termos ϕ_{a0k} que contém as "velocidades". Com o intuito de encontrar quais componentes de ϕ_{a0k} podem ser invertidas em termos dos momentos, decomparamos ϕ_{a0k} , com a ajuda de novos campos auxiliares, como segue

$$\phi^a{}_{0j} = h^{ai}\psi_{ij} + h^{ai}\sigma_{ij} + h^{a0}\lambda_j,\quad (2.159)$$

onde $\psi_{ij} = \frac{1}{2}(\phi_{i0j} + \phi_{j0i})$, $\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\phi_{i0j} - \phi_{j0i})$, $\lambda_j = \phi_{00j}$ e $\phi_{\mu 0j} = h^a{}_{\mu}\phi_{a0j}$. Substituindo então essa decomposição de $\phi^a{}_{0j}$ em $\Pi^{(ik)}$, ganhamos:

$$\Pi^{(ik)} = kh(P^{ik} + \Delta^{ik}),\quad (2.160)$$

com P^{ik} , que possui dependência apenas em ψ_{ij} , sendo definido como

$$\begin{aligned} P^{ik} &= -2g^{00} (g^{im}g^{kj}\psi_{mj} - g^{ik}\psi) + 2 (g^{0i}g^{km}g^{0j} + g^{0k}g^{im}g^{0j}) \psi_{mj} \\ &\quad - 2 (g^{ik}g^{0m}g^{0j}\psi_{mj} + g^{0i}g^{0k}\psi), \end{aligned} \quad (2.161)$$

onde $\psi = g^{mn}\psi_{mn}$.

É possível agora, inverter ψ_{mj} em termos de P^{ik} para obter

$$\psi_{mj} = -\frac{1}{2g^{00}} \left(g_{im}g_{kj}P^{ik} - \frac{1}{2}g_{mj}P \right), \quad (2.162)$$

onde $P = g_{ik}P^{ik}$.

Fazendo uso de (2.153), (2.159) e (2.162) podemos reescrever as duas últimas linhas da densidade lagrangiana (2.152) em termos de variáveis canônicas, ou seja,

$$-\frac{1}{2}\phi_{a0k} \Pi^{ak} + kh [g^{0i}g^{kj}T^a_{ij} - h^{ai} (g^{0j}T^k_{ij} - g^{kj}T^0_{ij}) + 2 (h^{ak}g^{0i} - h^{a0}g^{ki}) T^j_{ji}] \quad (2.163)$$

pode ser escrito na forma

$$\frac{1}{4g^{00}}kh \left(g_{ik}g_{jl}P^{ij}P^{kl} - \frac{1}{2}P^2 \right). \quad (2.164)$$

Assim, finalmente podemos obter a densidade hamiltoniana canônica,

$$\begin{aligned} H_0 &= \Pi^{ak}\partial_0 h_{ak} - L \\ &= -h_{a0}\partial_k \Pi^{ak} - \frac{1}{4g^{00}}kh \left(g_{ik}g_{jl}P^{ij}P^{kl} - \frac{1}{2}P^2 \right) \\ &\quad + kh \left(\frac{1}{4}g^{im}g^{nj}T^a_{mn}T_{aij} + \frac{1}{2}g^{nj}T^i_{mn}T^m_{ij} - g^{ik}T^j_{ji}T^n_{nk} \right). \end{aligned} \quad (2.165)$$

Para encontrar a densidade hamiltoniana total, precisamos primeiro identificar os vínculos primários da descrição. Nesse caso, eles são dados pelas expressões (2.157) e (2.158):

$$\Gamma^{ik} = -\Gamma^{ki} = \Pi^{[ik]} - kh[-g^{im}g^{kj}T^0_{mj} + (g^{im}g^{0k} - g^{km}g^{0i})T^j_{mj}] \quad (2.166)$$

e

$$\Gamma^k = \Pi^{0k} + 2kh(g^{kj}g^{0i}T^0_{ij} - g^{0k}g^{0i}T^j_{ij} + g^{00}g^{ik}T^j_{ij}); \quad (2.167)$$

além das componentes Π^{a0} dos momentos, que anulam-se identicamente. Temos então

$$H = H_0 + \alpha_{ik}\Gamma^{ik} + \beta_k\Gamma^k + \gamma_a\Pi^{a0} = H_0 + \alpha_{ik}\Gamma^{ik} + \beta_k\Gamma^k + \partial_k(h_{a0}\Pi^{ak}), \quad (2.168)$$

onde α_{ik} , β_k e γ_a são multiplicadores de Lagrange.

Para obter os vínculos secundários, devemos exigir que cada um dos vínculos primários sejam consistentes, ou seja, seus parênteses de Poisson com o hamiltoniano total devem anular-se identicamente. Alternativamente, devemos variar o hamiltoniano total com relação à variável do espaço de configuração responsável pelo surgimento do vínculo, nesse caso, h_{a0} :

$$\chi^a \equiv \frac{\delta H}{\delta h_{a0}} = 0. \quad (2.169)$$

Após um longo cálculo, chega-se na expressão final para os vínculos secundários,

$$\chi_c = h_c^0 \mathcal{H}_0 + h_c^i F_i, \quad (2.170)$$

onde

$$F_i = h_{ai}\partial_k\Pi^{ak} - \Pi^{ak}T_{aki} + \Gamma^m T_{0mi} + \Gamma^{lm}T_{lmi} + \frac{1}{2g^{00}}(g_{ik}g_{jl}P^{kl} - \frac{1}{2}P)\Gamma^j \quad (2.171)$$

e \mathcal{H}_0 é o próprio hamiltoniano canônico.

Todos os vínculos são de primeira classe [37], de forma que serão geradores de transformações de calibre. A discussão desse ponto em diante foi exatamente um dos trabalhos desenvolvidos por nós, e será deixada para o próximo capítulo.

Capítulo 3

Análise do Espaço Interno associado ao ETRG

Até aqui, introduzimos a teoria gravitacional a ser usada no trabalho, discutimos um pouco acerca dos fundamentos das teorias de calibre, e introduzimos ainda o formalismo para tratar sistemas hamiltonianos vinculados.

Nesse capítulo, utilizando o conteúdo desenvolvido anteriormente, tentaremos explorar de forma mais profunda o espaço interno associado ao ETRG. Como veremos, ao atuar sobre as componentes do campo de tetradas, os vínculos de primeira classe geram transformações que generalizam aquelas do Eletromagnetismo, com algumas peculiaridades que serão vistas a seguir. Além disso, analisando a forma das transformações locais do espaço físico - cinemática do espaço interno - veremos que sua estrutura pode generalizar as transformações de Poincaré [17, 18].

3.1 Momentos canonicamente conjugados às componentes do campo de tetradas

Na subseção 2.3.3, através da introdução de alguns novos campos, encontramos uma descrição hamiltoniana consistente para o ETRG. Nessa descrição foi

possível, por exemplo, identificar todos os vínculos da teoria. Vejamos agora os motivos pelos quais foi necessário seguir aquele procedimento, ou seja, porque não poderíamos simplesmente seguir o algoritmo padrão de uma transformada de Legendre.

Como vimos no Capítulo 2, a densidade lagrangiana associada ao ETRG pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{h}{8k^2} \left[\frac{1}{4} T^a{}_{\mu\nu} T^b{}_{\rho\lambda} N_{ab}{}^{\nu\rho,\nu\lambda} \right], \quad (3.1)$$

ou ainda,

$$\mathcal{L} = \frac{h}{4k^2} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Como esperaríamos, essas são densidades lagrangianas quadráticas no tensor intensidade de campo ¹.

Primeiramente, definamos os momentos canonicamente conjugados às componentes $h_c{}^\sigma$ do campo de tetradas, usando a densidade lagrangiana (3.1):

$$\Pi_c{}^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 h_c{}^\sigma)} = \frac{h}{8k^2} C_{cb}{}^{\rho\sigma\lambda} T^b{}_{\rho\lambda}, \quad (3.3)$$

com

$$C_{cb}{}^{\rho\sigma\lambda} \equiv [N_{cb}{}^{0\rho,\sigma\lambda} - N_{cb}{}^{\sigma\rho,0\lambda} + N_{bc}{}^{\rho0,\lambda\sigma} - N_{bc}{}^{\rho\sigma,\lambda0}]. \quad (3.4)$$

Repetindo o cálculo para os momentos usando como ponto de partida a densidade lagrangiana (3.2), obtemos:

$$\Pi_c{}^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 h_c{}^\sigma)} = -\frac{h}{k^2} S_c{}^{\sigma 0}. \quad (3.5)$$

Usando então as definições (2.10), (2.12) e (3.4), vemos que as expressões (3.3) e (3.5) para os momentos são totalmente equivalentes. O fato do superpotencial $S^{a\mu\nu} = h^a{}_\rho S^{\rho\mu\nu}$ aparecer explicitamente na expressão da densidade lagrangiana (3.2) a torna mais útil que a definição (3.1).

¹Torção escrita na base tetrada $T^a{}_{\mu\nu} = h^a{}_\rho T^\rho{}_{\mu\nu} = \partial_\nu h^a{}_\mu - \partial_\mu h^a{}_\nu$.

Aproveitando a oportunidade, podemos abrir um parêntese e usar a definição anterior do momento, para corroborar as recentes definições para os campos gravitoelétrico e gravitomagnético no contexto do ETRG [38]:

$$\begin{aligned} E_a^i &\equiv S_a^{0i}, \\ \epsilon^{ijk} B_{ak} &\equiv S_a^{ij}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Comparando a definição (3.6) para os campos gravitoelétricos com a expressão (3.5) para o momentos, vemos que:

$$\Pi_c^i = \frac{\hbar}{k^2} E_c^i. \quad (3.7)$$

Esse resultado mostra claramente, que tais definições para os campos levam a um resultado completamente análogo ao que ocorre com as teorias de Yang-Mills e o Eletromagnetismo, nas quais os momentos são também diretamente relacionados aos campos elétricos daquelas teorias. A principal diferença aqui é que os campos são relacionados ao superpotencial $S^{a\mu\nu}$, enquanto nas teorias de Yang-Mills e Eletromagnetismo são relacionados ao tensor intensidade de campo, $E_a^i = F_a^{0i}$ e $E^i = F^{0i}$, respectivamente. Essa diferença é justificada pelo fato da gravitação, diferentemente das demais interações, apresentar uma propriedade especial, soldagem [39]. Essa propriedade é uma consequência da existência de um campo de tetradas h^a_μ , que atua como um *link* entre o *bundle* - espaço interno - e a variedade base - espaço físico - de forma que índices de álgebra podem ser transformados em índices de espaço-tempo, implicando em uma densidade lagrangiana com mais de um termo quadrático no tensor intensidade de campo. Voltaremos à questão do gravitoeletromagnetismo no capítulo 4.

A sequência usual a partir daqui seria isolar os termos de velocidade $\partial_0 h^c_\sigma$ e obter a versão hamiltoniana do ETRG, mas isso não pode ser feito de uma forma simples. Essa dificuldade é uma consequência do fato dos momentos estarem relacionados ao superpotencial e não à intensidade de campo. Matematicamente, isso se expressa da seguinte forma: da expressão (3.5) é possível mostrar, após um longo

mas direto cálculo, que ²

$$\begin{aligned} \Pi_c^i + O\left(h^c_i, \vec{\nabla} h^c_i\right) &= \left[\frac{1}{2} (h_c^0 h_a^0 g^{ij} + g_{ac} g^{ij} g^{00} + h_c^j h_a^i g^{00} - h_c^0 h_a^i g^{0j}) \right. \\ &\quad \left. - h_c^0 h_a^0 g^{ij} - h_c^i h_a^j g^{00} + h_c^i h_a^0 g^{0j} \right] \partial_0 h^a_j. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Esse conjunto de equações pode ser reescrito como:

$$P_c^i = K_{ca}^{ij} \partial_0 h^a_j, \quad (3.9)$$

onde definimos os objetos

$$P_c^i \equiv \Pi_c^i + O\left(h^c_i, \vec{\nabla} h^c_i\right) \quad (3.10)$$

e

$$\begin{aligned} K_{ca}^{ij} &\equiv \frac{1}{2} (h_c^0 h_a^0 g^{ij} + g_{ac} g^{ij} g^{00} + h_c^j h_a^i g^{00} - h_c^0 h_a^i g^{0j}) \\ &\quad - h_c^0 h_a^0 g^{ij} - h_c^i h_a^j g^{00} + h_c^i h_a^0 g^{0j}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Concluimos então que

$$\partial_0 h^a_j = (K^{-1})^{ca}{}_{ij} P_c^i, \quad (3.12)$$

ou seja, encontrar um conjunto de soluções para os sistema (3.8) é equivalente a encontrar a inversa $(K^{-1})^{ca}{}_{ij}$; tal tarefa parece inviável mesmo que usemos manipuladores algébricos. Para contornar esse problema podemos, por exemplo, seguir o procedimento indicado na subseção 2.3.3.

3.2 Vínculos como geradores de transformação de calibre

Motivados pela teoria de Yang-Mills e pelo Eletromagnetismo, onde os vínculos secundários são diretamente relacionados à lei de Gauss, podemos também fazer tal associação para o caso da gravitação descrita pelo ETRG, com o intuito de dispor de uma via alternativa para obter os vínculos da teoria ³. Antes de ir adiante,

²O objeto $O\left(h^c_i, \vec{\nabla} h^c_i\right)$ são termos que dependem apenas de h^c_i e derivadas espaciais de h^c_i .

³A lei de Gauss associada ao ETRG foi obtida em [38], e será apresentada logo a seguir.

notemos que a expressão para os momentos (3.5) nos leva diretamente aos vínculos primários do ETRG

$$\Phi_c = \Pi_c^0 = -\frac{\hbar}{k^2} S_c^{00} = 0. \quad (3.13)$$

Para testar se a lei de Gauss realmente representa os vínculos secundários calculamos a condição de consistência para os vínculos primários ⁴:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_c}{dt} &\approx \{\Phi_c, \mathcal{H}_0\} \\ &\approx \frac{\delta\Phi_c^0}{\delta h^{a\rho}} \frac{\delta\mathcal{H}_0}{\delta\Pi_a^\rho} - \frac{\delta\Phi_c^0}{\delta\Pi_a^\rho} \frac{\delta\mathcal{H}_0}{\delta h^{a\rho}} \\ &\approx -\frac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial h^{c_0}} + \partial_\lambda \frac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial(\partial_\lambda h^{c_0})} \\ &\approx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h^{c_0}} + \partial_0\Pi_c^0 - \partial_\lambda \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda h^{c_0})} \\ &\approx \chi_c. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Aqui, χ_c é a lei de Gauss da gravitação dada por:

$$\chi_a = \partial_i(hS_a^{0i}) - k^2(hj_a^0) = k^2\partial_i(\Pi_a^i) - k^2(hj_a^0) = \partial_i(hE_a^i) - k^2(hj_a^0) = 0, \quad (3.15)$$

com

$$j_a^\rho = \frac{\partial L}{\partial h^{a\rho}} = \frac{\hbar}{k^2} \left[T^c{}_{\mu\lambda} S_c^{\mu\rho} - \frac{1}{4} \delta_\lambda{}^\rho T^c{}_{\mu\nu} S_c^{\mu\nu} \right] \quad (3.16)$$

assumindo o papel de uma "fonte de vácuo". Ou, em uma forma que deixe claro o caráter não-linear da gravitação,

$$\begin{aligned} \chi_a &= \partial_i(hE_a^i) + k^2 h [H^{bc}{}_{aij} E_b^i E_c^j + T^{bc}{}_{anij} \varepsilon^{jnk} E_c^i B_b^k + g_{ri} h^c{}_j \varepsilon^{jrk} (E_c^i B_a^k \\ &- 1/2 E_a^i B_c^k) + J^c{}_{ij} E_c^i E_a^j + K^{bc}{}_{arijn} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{nrt} B_c^k B_b^t] = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde os objetos $H^{bc}{}_{aij}$, $T^{bc}{}_{anij}$, $J^c{}_{ij}$ e $K^{bc}{}_{arijn}$ são combinações de termos de tetradas ⁵. A expressão (3.17) justifica a interpretação de j_a^ρ como uma fonte de vácuo. Além disso, j_a^ρ é o tensor momento-energia do campo gravitacional [40].

⁴A densidade hamiltoniana canônica é dada por $\mathcal{H}_0 = \Pi_c^i \partial_0 h^c{}_i - \mathcal{L}$.

⁵Veja Ref. [38] para as expressões completas.

Como foi visto na subseção 2.1.3, a total equivalência entre a RG e o ETRG dá-se no contexto das equações de movimento derivadas dos lagrangianos (3.2) e de Einstein-Hilbert,

$$\mathcal{L}_{RG} = -\frac{\sqrt{-g}}{2k^2} R_{RG}. \quad (3.18)$$

É possível mostrar que [13]:

$$\mathcal{L}_{RG} = \mathcal{L}_{ETRG} + \partial_\mu \left(\frac{2h}{k^2} T^{\nu\mu}{}_\nu \right), \quad (3.19)$$

sendo \mathcal{L}_{ETRG} a densidade lagrangiana do ETRG como apresentada em (3.2). Embora o termo de divergência na expressão anterior não contribua com a dinâmica, representada pelas equações de Euler-Lagrange, poderíamos pensar que esse termo pudesse ter alguma relevância na formulação hamiltoniana. Esse não é o caso. Considere:

$$\mathcal{L} = \frac{h}{4k^2} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + \partial_\mu \left(\frac{2h}{k^2} T^{\nu\mu}{}_\nu \right), \quad (3.20)$$

então

$$\Pi_c^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 h_c^\sigma)} = -\frac{h}{k^2} S_c^{\sigma 0} + f(h_c^\sigma, \partial^i h_c^\sigma). \quad (3.21)$$

Da densidade lagrangiana (3.20) pode-se notar que novamente não há dependência em $\partial_0 h^a{}_0$, de forma que $\Pi_c^0 \equiv \Phi_c$ permanecem como vínculos primários. Continuando:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_c}{dt} &= \{\Phi_c, \mathcal{H}_0\} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &= \chi_c. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Podemos então concluir que o uso da densidade lagrangiana (3.2) é suficiente, não havendo informação perdida no termo de divergência em (3.20).

Olhando atentamente a expressão para os vínculos secundários (lei de Gauss) é possível notar que a mesma possui uma dependência explícita nas velocidades, e como foi dito anteriormente, isolar tais termos em função dos momentos não é uma tarefa trivial. Um método para obter tais vínculos foi desenvolvido em [37] e reproduzido no capítulo 2. Temos:

$$\chi_c = h_c^0 \mathcal{H}_0 + h_c^i F_i, \quad (3.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= -h_{a0} \partial_k \Pi^{ak} - \frac{kh}{4g^{00}} (g_{ik} g_{jl} P^{ij} P^{kl} - \frac{1}{2} P^2) \\ &+ kh \left(\frac{1}{4} g^{im} g^{nj} T^a_{mn} T_{aij} + \frac{1}{2} g^{nj} T^i_{mn} T^m_{ij} - g^{ik} T^j_{ji} T^n_{nk} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

e

$$F_i = h_{ai} \partial_k \Pi^{ak} - \Pi^{ak} T_{aki} + \Gamma^m T_{0mi} + \Gamma^{lm} T_{lmi} + \frac{1}{2g^{00}} (g_{ik} g_{jl} P^{kl} - \frac{1}{2} P) \Gamma^j. \quad (3.25)$$

Além disso, foram definidos os objetos:

$$\begin{aligned} P^{ik} &= \frac{1}{2kh} (h_c^i \Pi^{ck} + h_c^k \Pi^{ci}) + g^{0m} (g^{kj} T^i_{mj} + g^{ij} T^k_{mj} - 2g^{ik} T^j_{mj}) \\ &+ (g^{km} g^{0i} + g^{im} g^{0k}) T^j_{mj}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\Gamma^{ik} = \frac{1}{2} (h_c^i \Pi^{ck} - h_c^k \Pi^{ci}) - kh [-g^{im} g^{kj} T^0_{mj} + (g^{im} g^{0k} - g^{km} g^{0i}) T^j_{mj}] \quad (3.27)$$

e

$$\Gamma^k = \Pi^{0k} + 2kh (g^{kj} g^{0i} T^0_{ij} - g^{0k} g^{0i} T^j_{ij} + g^{00} g^{ik} T^j_{ij}). \quad (3.28)$$

O teste de classe para os vínculos mostra que todos eles são de primeira classe [37]. Seguindo o algoritmo de Dirac [2], calculemos então as transformações que não modificam o estado físico do sistema - transformações de calibre - geradas pelos vínculos:

$$\begin{aligned} \delta h^b_{\rho}(x) &= \int d^3 x' [\varepsilon_1^a(x') \{h^b_{\rho}(x), \Phi_a(x)\} + \varepsilon_2^a(x') \{h^b_{\rho}(x), \chi_a(x)\}] \\ &= \int d^3 x' \varepsilon_1^a(x') \left(\frac{\delta h^b_{\rho}(x)}{\delta h^c_{\beta}(x')} \frac{\delta \Phi_a(x)}{\delta \Pi_c^{\beta}(x')} - \frac{\delta h^b_{\rho}(x)}{\delta \Pi_c^{\beta}(x')} \frac{\delta \Phi_a(x)}{\delta h^c_{\beta}(x')} \right) \\ &+ \int d^3 x' \varepsilon_2^a(x') \left(\frac{\delta h^b_{\rho}(x)}{\delta h^c_{\beta}(x')} \frac{\delta \chi_a(x)}{\delta \Pi_c^{\beta}(x')} - \frac{\delta h^b_{\rho}(x)}{\delta \Pi_c^{\beta}(x')} \frac{\delta \chi_a(x)}{\delta h^c_{\beta}(x')} \right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

que resulta em

$$\delta h^b{}_\rho = \delta_\rho^0 \varepsilon_1^b + \nabla_\rho \varepsilon_2^b, \quad (3.30)$$

com

$$\nabla_\rho \varepsilon_2^b \equiv \delta_\rho^i \partial_i \varepsilon_2^b + \omega^b{}_{a\rho} \varepsilon_2^a \quad (3.31)$$

e

$$\begin{aligned} \omega^b{}_{a\rho} \equiv & -\frac{1}{g^{00}} \delta_\rho^i h_a{}^0 h^b{}_i g^{0\mu} T^j{}_{j\mu} - \frac{1}{2g^{00}} \delta_\rho^i h_a{}^0 h^{b0} T^0{}_{0i} + \frac{3}{2g^{00}} \delta_\rho^i g^{0b} h_{ai} g^{0\mu} T^j{}_{j\mu} \\ & + \frac{1}{2g^{00}} \delta_\rho^i h^{b0} h_{ai} g^{0\mu} T^j{}_{j\mu} + \frac{1}{2g^{00}} \delta_\rho^i h_a{}^0 g^{0b} T^0{}_{0i} + \frac{3}{2} \delta_\rho^i h^b{}_\mu h_a{}^\nu T^\mu{}_{i\nu} \\ & + \delta_\rho^i g^{0b} g_{0\mu} h_a{}^\nu T^\mu{}_{i\nu} - \frac{1}{2} \delta_\rho^i g_{i\mu} h^{b\nu} h_a{}^\alpha T^\mu{}_{\nu\alpha} + \frac{1}{2} \delta_\rho^i h_{ai} h^{b\mu} T^0{}_{0\mu} \\ & - \delta_\rho^i h^b{}_i h_a{}^\mu T^0{}_{0\mu} + \frac{1}{2} \delta_\rho^i \delta_a^b T^0{}_{0i} \end{aligned} \quad (3.32)$$

assumindo papéis de derivada covariante e conexão, respectivamente. A conexão que aparece na definição (3.32) não é uma conexão de spin usual, como esperaríamos para o caso de uma derivada covariante atuando em um objeto com índice interno. A razão para isso deve estar relacionada ao fato de estarmos lidando com uma teoria na qual índices de espaço interno podem ser levados em índices de espaço-tempo ⁶. Continuando, podemos escrever:

$$\delta h^b{}_0 = \varepsilon_1^b \quad (3.33)$$

e

$$\delta h^b{}_i = \nabla_i \varepsilon_2^b, \quad (3.34)$$

o que torna possível afirmar que não há uma isotropia no espaço físico com relação às transformações de calibre, ou seja, dado um campo gravitacional arbitrário, oriundo de uma transformação de calibre no espaço interno, as componentes de espaço físico da tetrada - campo gravitacional - reagem de forma diferente nas componentes espacial e temporal. Além disso, para o caso assintoticamente plano, no qual o índice

⁶Mais adiante veremos que essa característica está intimamente associada à universalidade da gravitação.

de álgebra é fixado, chegamos a transformações análogas às (2.137) do Eletromagnetismo,

$$\delta h_0 = \varepsilon_1, \quad (3.35)$$

e

$$\delta h_i = \partial_i \varepsilon_2. \quad (3.36)$$

Isso é similar ao que foi mostrado na ref. [38], na qual, no limite de campo fraco, equações de Maxwell gravitacionais mostram-se análogas às do Eletromagnetismo. Aqui vemos que essa analogia é também válida em um contexto mais fundamental.

Podemos ir adiante e reescrever (3.30) como segue:

$$\delta h^b{}_\rho = \delta_\rho^0 \varepsilon_1^b + \delta_\rho^i \partial_i \varepsilon_2^b + \omega^b{}_{a\rho} \varepsilon_2^a. \quad (3.37)$$

Introduzindo agora a seguinte relação ⁷ entre os parâmetros ε_1^b e ε_2^b

$$\varepsilon_1^b = \partial_0 \varepsilon_2^b, \quad (3.38)$$

temos:

$$\delta h^b{}_\rho = \partial_\rho \varepsilon_2^b + \omega^b{}_{a\rho} \varepsilon_2^a. \quad (3.39)$$

O subíndice 2 pode agora ser ignorado,

$$\delta h^b{}_\rho = \partial_\rho \varepsilon^b + \omega^b{}_{a\rho} \varepsilon^a \equiv \nabla'_\rho \varepsilon^b. \quad (3.40)$$

As transformações acima permitem uma analogia direta com as transformações de calibre obtidas na teoria de Yang-Mills.

É importante ressaltar que a afirmação acerca da anisotropia do espaço físico feita anteriormente continua válida, uma vez que as transformações nas quais a afirmação foi baseada não levavam em consideração a hipótese que relaciona os dois parâmetros de transformação.

⁷Algo semelhante foi feito para o Eletromagnetismo no capítulo 2.

3.3 Transformações locais: cinemática do espaço-interno

As transformações (3.40) viabilizam uma análise fundamental para a compreensão da cinemática do espaço interno (grupo de simetria de calibre do espaço físico). Temos

$$\delta h^b{}_\rho = \partial_\rho \varepsilon^b + \omega^b{}_{a\rho} \varepsilon^a \quad (3.41)$$

e motivados pela propriedade de soldagem [39], podemos decompor $h^b{}_\rho$ da seguinte forma:

$$h^b{}_\rho = \delta^b{}_\rho + A^b{}_\rho + A_a{}^b{}_\rho x^a + \dots \quad (3.42)$$

Ainda que não haja potenciais de calibre (gravitação), a parte trivial $\delta^b{}_\rho$ permanece presente "ligando" os espaços físico e interno. Mesmo não estando certos do que representariam outros potenciais, além dos já bem conhecidos $A^b{}_\rho$ e $A_a{}^b{}_\rho$ ⁸, mantivemos aberta a possibilidade de que eles existam. De posse dessa decomposição é possível escrever

$$\delta h^b{}_\rho = h^{b'}{}_\rho - h^b{}_\rho = \delta^{b'}{}_\rho - \delta^b{}_\rho + \delta(A^b{}_\rho) + \delta(A_a{}^b{}_\rho x^a) + \dots, \quad (3.43)$$

ou ainda, utilizando (3.40)

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho} (x^{b'} - x^b) = \partial_\rho \varepsilon^b + \omega^b{}_{a\rho} \varepsilon^a - \delta A^b{}_\rho - \delta(A_a{}^b{}_\rho x^a) - \dots \quad (3.44)$$

A partir desse ponto é possível, através de uma integração em x^ρ , obter a seguinte expressão para as transformações do espaço interno:

$$\delta x^b = \epsilon^b + C^b - F^b - \varpi^b{}_a x^a - \dots \quad (3.45)$$

com

$$\epsilon^b \equiv \int \partial_\rho (\varepsilon^b) dx^\rho,$$

⁸Componentes do potencial de calibre associadas com os setores translacional e de Lorentz, que emergem como campos compensadores que garantem a invariância do lagrangiano sob as transformações de calibre de primeiro gênero.

$$\begin{aligned}
C^b &\equiv \int \omega^b_{a\rho} \varepsilon^a dx^\rho, \\
F^b &\equiv \int \delta A^b_\rho dx^\rho, \\
\varpi^b_a x^a &\equiv \int \delta (A^b_a x^a) dx^\rho.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Ou ainda, rearranjando termos:

$$\delta x^b = \epsilon'^b + \varpi'^b_a x^a + \dots \tag{3.47}$$

Aqui, $\epsilon'^b \equiv \epsilon^b + C^b - F^b$ absorve alguns termos definidos em (3.46), tornando-se um parâmetro geral de translação, e o sinal negativo de ϖ^b_a foi absorvido por ϖ'^b_a . Nesse caso, assumindo que a última integral em (3.46) resulta nas transformações de Lorentz usuais, temos claramente uma generalização das transformações de Poincaré

$$\delta x^b = \epsilon^b + \varpi^b_a x^a; \tag{3.48}$$

no entanto, essa generalização existe apenas para casos nos quais incluímos potenciais além dos usuais A^b_ρ e A^{ab}_ρ , os quais implicariam na existência de outros graus de liberdade associados com esses potenciais. Para o caso no qual a última integral em (3.46) não resulta nas transformações de Lorentz, temos uma generalização ainda que não tenhamos incluído outros potenciais. Além disso, as transformações (3.47) podem variar tanto em forma quanto em escala; as duas primeiras integrais em (3.46) dependem de $\varepsilon(x^\mu)$, e portanto têm resultados distintos para cada um dos índices possíveis para esse parâmetro, físico ou interno.

Das expressões (3.46) e (3.47) é possível notar que para o caso no qual h^b_ρ é decomposto apenas como $\delta^b_\rho + A^b_\rho$, todas as matrizes de "rotação" ϖ^b_a são zero, assim:

$$\delta x^b = \epsilon^b, \tag{3.49}$$

que é exatamente uma translação no espaço interno. Isso está em total acordo com a literatura de teorias de calibre para o grupo das translações [13], na qual o objeto fundamental é o potencial A^b_ρ .

Independentemente de quais sejam as soluções das integrais (3.46)⁹, parece razoável pensar que seus resultados terão a forma (3.47), uma vez que, através dela podemos obter tanto Poincaré quanto Translações, dependendo de como decomposmos as componentes $h^b{}_\rho$ do campo de tetradas.

3.4 Dependência do parâmetro de transformação de calibre nas variáveis de espaço-tempo

Em teorias de calibre genuínas é possível usar um calibre arbitrário para encontrar uma equação ou conjunto de equações diferenciais para o parâmetro de transformação de calibre. Para o caso do ETRG, no entanto, encontrar um calibre similar ao de Lorenz, por exemplo, não é uma tarefa fácil, e o que podemos fazer é usar equações que sejam válidas por construção. Considere a condição de paralelismo absoluto [13]:

$$D_\nu h^b{}_\rho = \partial_\nu h^b{}_\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha h^b{}_\alpha = 0. \quad (3.50)$$

Se substituirmos as transformações (3.40) nessa equação, obtemos:

$$D_\nu \nabla'_\rho \varepsilon^b = 0, \quad (3.51)$$

na qual ∇'_ρ é o operador definido em (3.40) e D_ν é a derivada covariante usual usada em (3.50). Resolver esse conjunto de equações diferenciais de uma forma geral é uma tarefa difícil. Mas podemos extrair informações interessantes considerando o limite assintoticamente plano, no qual a equação se reduz a:

$$\partial_\nu \partial_\rho \varepsilon^b = 0. \quad (3.52)$$

A forma simplificada (3.52) torna possível afirmar que o espaço tem uma estrutura interna isotrópica, isto é, a solução das equações (3.52) tem a mesma forma para

⁹As soluções dependem de formas específicas dos campos para serem calculadas.

cada índice b . A equação pode ser reescrita como segue:

$$\partial_\nu \partial_\rho \varepsilon = 0. \quad (3.53)$$

ou ainda, podemos contrair a equação com a métrica para obter uma equação de onda

$$\partial^\rho \partial_\rho \varepsilon = 0. \quad (3.54)$$

Obviamente, a solução desta equação é uma onda plana. Dessa forma, no limite assintoticamente plano, a analogia com o Eletromagnetismo é completada. É importante ressaltar que no Eletromagnetismo o parâmetro de transformação tem uma interpretação clara: uma fase que calibra a função de onda ¹⁰ do campo fonte no espaço interno. No caso da gravitação, mesmo no limite assintoticamente plano, essa interpretação é perdida, uma vez que temos quatro parâmetros em (3.52).

3.5 Universalidade via abordagem de calibre

Sob a ótica das teorias de calibre, como foi visto na segunda seção do capítulo 2, os campos de calibre "surgem" como campos compensadores que garantem a invariância do lagrangiano sob a ação de um determinado grupo de transformação que atue no campo fonte (transformações de calibre de primeiro gênero) [1]. Pensando dessa forma, a análise de um lagrangiano sem fontes seria meramente um exercício acadêmico, não tendo muito respaldo físico; a única forma de "gerar" o campo é através da atuação do grupo de simetria do espaço interno (variação do campo fonte). Para o caso da gravitação, no entanto, a afirmação anterior não é necessariamente verdadeira, uma vez que o lagrangiano livre conduz a equações de campo que contém um termo de "fonte de vácuo"¹¹; em outras palavras, a gravitação é não-linear. Ao tentar fazer um exercício mental, e visualizar a geração dos campos de calibre, nos deparamos com um problema no caso da gravitação. Seja uma fonte

¹⁰Fazendo uso do termo quântico.

¹¹As equações de Maxwell gravitacionais possibilitam uma análise detalhada dessa questão [38].

qualquer de gravitação, definida em um espaço interno; ao atuar com o grupo de simetria desse espaço, surge de forma compensatória uma distorção ¹² no espaço físico, que manifesta-se através do campo gravitacional. Esse campo, por sua vez, possuindo energia diferente de zero deveria também gerar uma nova distorção no espaço físico (efeito de segunda ordem), porém, estando o campo definido no espaço físico, como poderia reiniciar o ciclo? É necessário que o campo gravitacional interfira, localmente, no espaço interno, para que este gere, por sua vez, uma nova perturbação no espaço físico (campo de segunda ordem); esse processo se repete indefinidamente. A figura 3.1 ilustra um pouco do que foi dito.

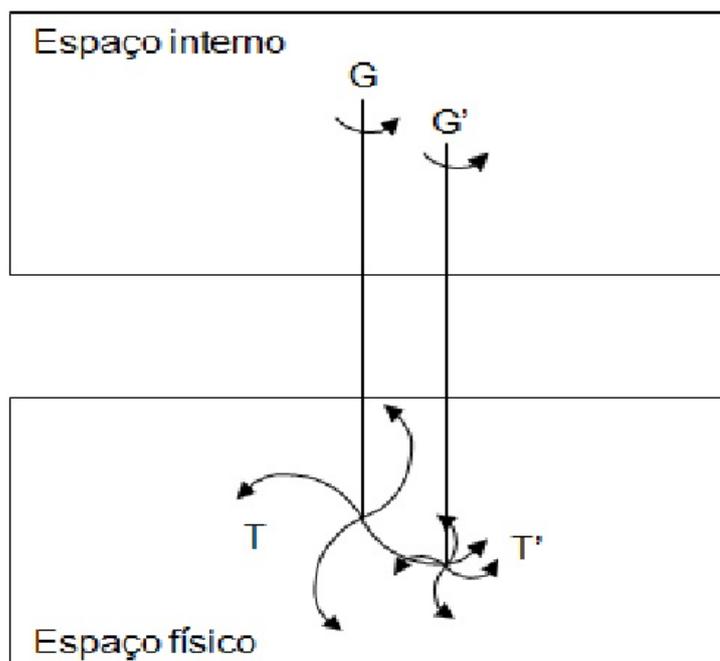


Figura 3.1: Distorções de primeira e segunda ordens T e T' , representando as intensidades de campo geradas pela atuação dos grupos G e G' .

Olhando as transformações de calibre de primeiro e segundo gênero é possível inferir como se dá o processo. Temos, após uma transformação de calibre no espaço

¹²Tensão, fazendo uma analogia com um tecido.

interno,

$$x^b \rightarrow x^{b'} = x^b + \delta x^b = x^b + \epsilon'^b + \varpi'^b{}_a x^a + \dots, \quad (3.55)$$

consequentemente, o espaço físico responde com o surgimento de $h^b{}_\rho$. Este, por sua vez, varia com ϵ^b de acordo com

$$\delta h^b{}_\rho = \nabla'_\rho \epsilon^b = \partial_\rho \epsilon^b + \omega^b{}_{a\rho} \epsilon^a. \quad (3.56)$$

A conexão $\omega^b{}_{a\rho}$ pode ser dividida em duas partes; a primeira leva índices de álgebra novamente a índices de álgebra, como acontece na teoria de Yang-Mills. A segunda, por sua vez, leva índices de álgebra a índices de espaço físico:

$$\omega^b{}_{a\rho} \epsilon^a = (\dots_\rho) \delta^b{}_a \epsilon^a + [(\dots^b{}_\rho) h_a{}^0 + (\dots^b) h_{a\rho} + (\dots^b{}_{\rho\nu}) h_a{}^\nu] \epsilon^a, \quad (3.57)$$

ou ainda

$$\omega^b{}_{a\rho} \epsilon^a = (\dots_\rho) \epsilon^b + [(\dots^b{}_\rho) \epsilon^0 + (\dots^b) \epsilon_\rho + (\dots^b{}_{\rho\nu}) \epsilon^\nu]. \quad (3.58)$$

A primeira parte é análoga à conexão de Yang-Mills. A segunda, no entanto, permite que ϵ , agora com índice de espaço físico, calibre objetos definidos nesse espaço. Observe que não se trata apenas de uma consequência das transformações de calibre serem locais, digo, o efeito da localidade das transformações de primeiro gênero é exatamente "forçar" o surgimento do campo. No entanto, não garante que esse campo gere novas transformações; estas, surgem como consequência dos parâmetros ϵ'^b terem a possibilidade de serem escritos como algo do tipo ϵ'^μ . Além disso, a forma das transformações (3.57) não é fixa, ela varia com x^μ ; as duas primeiras integrais em (3.46) dependem de ϵ , e portanto têm resultados distintos para cada um dos índices possíveis para esse parâmetro, físico ou interno.

Outra questão chave é que para o caso de teorias de calibre como o Eletromagnetismo, por exemplo, as transformações de primeiro gênero são representadas pela ação do grupo de simetria em um dado campo fonte. Para o caso da gravitação, no entanto, a ação do grupo dá-se diretamente na base x^b que define o espaço interno,

e não em um campo fonte definido nesse espaço ¹³. Isso permite-nos conjecturar que a fonte de gravidade deve estar associada à existência de seu próprio espaço interno, e não a fontes nele definidas, como acontece com as demais interações.

Por fim, vale lembrar que sendo válido o princípio da equivalência, ou equivalentemente a universalidade da queda livre, sobraria pouco espaço para a questão da simetria do espaço interno. De fato, sendo a gravitação universal, seu grupo de simetria do espaço interno deveria atuar em qualquer campo que tenha energia diferente de zero, garantindo assim seu acoplamento a esse campo. Porém, o próprio conceito usual de simetria de calibre rejeita essa idéia, ou seja, o grupo de calibre atua apenas em campos com propriedades específicas ¹⁴ e conseqüentemente definidas em um espaço especial, chamado espaço interno. Uma maneira de contornar essa questão é assumir que o espaço interno da gravitação seja o próprio espaço físico em "escala local", de tal forma que pensar em um grupo de simetria para esse espaço passe agora a ser o mesmo que pensar em uma cinemática para o espaço físico. Essa cinemática é dada pelo conjunto de transformações (3.47), que pode generalizar as transformações usuais da relatividade especial. Por razões óbvias, essa alternativa só é válida caso a gravitação seja, de fato, universal.

A figura 3.2 ilustra como ficaria a estrutura de fibrado das interações fundamentais no cenário descrito ao longo dessa seção.

Observe que o cenário pintado por essa figura é completamente diferente de uma simples extrapolação da gravitação para o contexto das teorias de calibre. Tal extrapolação implicaria em um cenário como ilustrado pela figura 3.3.

No entanto, como já vimos, existem razões suficientes para desconsiderar esse segundo cenário.

¹³É claro que para os casos nos quais haja um campo fonte, além do próprio campo gravitacional, o grupo irá atuar também nesse campo.

¹⁴Tais como as correntes de calibre J_a^μ .

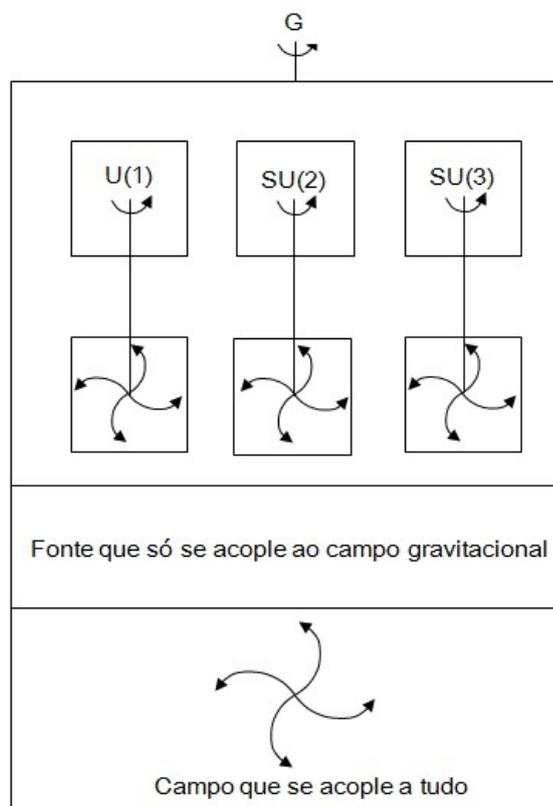


Figura 3.2: Espaço físico em escala local.

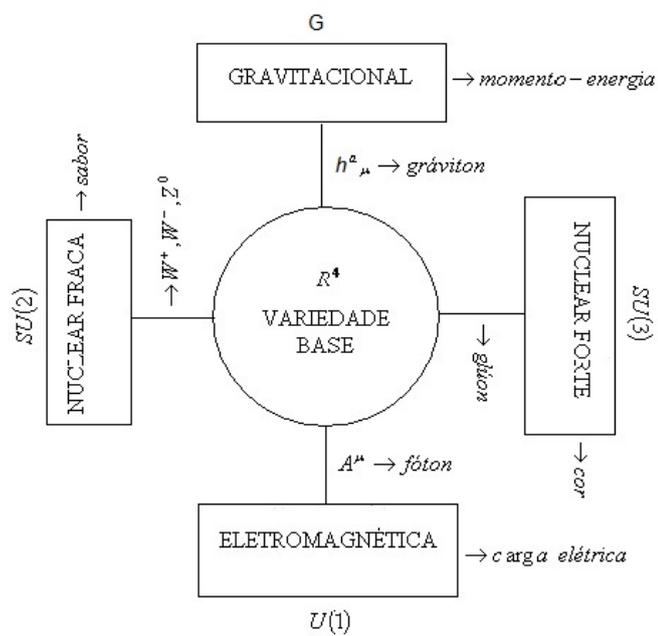


Figura 3.3: Representação de uma estrutura de fibrado para as quatro interações fundamentais.

Capítulo 4

Gravitoeletromagnetismo

Como visto até agora, salvas algumas peculiaridades, o ETRG pode perfeitamente ser descrito como uma teoria de calibre ¹. Dessa forma, como nas demais teorias de calibre, seria natural querer decompor o campo gravitacional em componentes gravitoelétricas e gravitomagnéticas. Uma possível definição para esses campos foi proposta pelo grupo [38].

Ainda na seção 2.1, foi dito que existem algumas descrições diferentes da Gravidade Teleparalela, e até mesmo interpretações distintas dentro de uma mesma descrição. Até esse ponto do texto, mantive-mo-nos atados à interpretação na qual os índices de álgebra podiam ser sempre relacionados a índices de um espaço interno, ou de calibre. Nesta parte do trabalho, esses índices representam também a base de um referencial ideal - local - que observa um determinado fenômeno.

Nesse capítulo estudamos, especificamente, o efeito de referenciais sobre a forma dos campos gravitoeletromagnéticos (GEM). Em um primeiro caso, comparamos os campos GEM obtidos para um referencial em repouso no espaço-tempo de Minkowski e outro em queda livre no espaço-tempo de Schwarzschild [19]. Na segunda parte, analisamos os efeitos de *boosts* sobre os campos GEM [20].

No contexto do ETRG, a intensidade de campo $F^a_{\mu\nu}$ pode ser associada ao tensor de torção, de tal forma que podemos usá-la para definir nossos campos. No

¹Independentemente de qual seja o grupo de simetria.

entanto, o superpotencial $S^a{}_{\mu\nu}$, definido no capítulo 2, assume o papel da intensidade de campo nas equações de campo, de maneira similar ao que ocorre nas equações eletromagnéticas. Dessa forma, inspirados no Eletromagnetismo, foram definidos os campos gravitoeletrico (GE) e gravitomagnético (GM) em termos das componentes do superpotencial [38]. O campo GE é definido por

$$S_a{}^{0i} \equiv E_a{}^i, \quad (4.1)$$

e o campo GM é definido como segue

$$S_a{}^{ij} \equiv \epsilon^{ijk} B_{ak}. \quad (4.2)$$

Essas definições foram testadas no trabalho citado acima, e passaram em alguns testes importantes [38]. Além disso, como foi visto no capítulo 3, essas definições permitem uma relação direta entre as componentes do campo gravitoeletrico e do momento canonicamente conjugado às componentes do campo de tetrada, o que reforça ainda mais sua validade. O cálculo desses campos em configurações específicas nos permitirão entender melhor o papel dos observadores na gravitação.

4.1 O papel dos observadores na medição do campo gravitoeletromagnético teleparalelo em diferentes geometrias

O estudo da gravitação através dos campos GEM pode trazer algum novo *insight* [41]. Para dar um exemplo contemporâneo, a interpretação de objetos recentemente definidos pela literatura, como as linhas *vortex* e *tendex* [42], pode ser facilitada se usarmos os campos para descrevê-las ². Recentemente, no regime linear da gravitação, tivemos uma nova confirmação da existência dos campos GEM, através do experimento *Gravit Probe B* [43]. É importante salientar que todos os cálculos para os campos GEM, no contexto do ETRG, que serão feitos aqui são

²Esta possibilidade está ainda sob investigação.

exatos e podem ser aplicados, por exemplo, para tratar campos intensos, como formação de jatos em buracos negros supermassivos.

Na literatura encontramos vários estudos que ocupam-se do estudo dos campos GEM estacionários devido ao fato de que a similaridade entre as equações de campo da teoria eletromagnética e a da gravitação é conseguida nesse contexto [44]. Há ainda alguns trabalhos que lidam com o GEM dependente do tempo e a questão da lei de Faraday no contexto da RG [45].

Por outro lado, com o advento da mecânica relativística, os princípios da relatividade foram estendidos ao Eletromagnetismo para analisar o comportamento dos campos elétrico e magnético em relação a diferentes referenciais inerciais. Assim como na Eletrodinâmica, esperamos que na Gravitação os campos GEM propostos assumam diferentes expressões dependendo de como a fonte é observada, ou seja, diferentes observadores notam diferentes campos GEM. Dessa forma, é natural querer estudar as consequências físicas desses diferentes campos sobre o próprio observador.

De acordo com [46] podemos interpretar os graus de liberdade extras do campo de tetradas como uma escolha de sistema de referência. Dois conjuntos de campos de tetrada podem representar o mesmo espaço tempo, embora sejam fisicamente diferentes. Ou seja, além de ser o objeto fundamental da teoria, podemos interpretá-la como um observador ideal no espaço-tempo. Essa sutileza não está presente na descrição métrica da Gravitação.

No que segue, no contexto do ETRG, discutimos a questão de como diferentes observadores sentem os campos GEM. Para dois diferentes observadores, analisaremos o comportamento do campos GEM para os espaços-tempo de Schwarzschild e Minkowski. Primeiro, consideraremos um observador caindo livremente no buraco negro de Schwarzschild, ou seja, um observador que cai radialmente no buraco negro devido a sua força gravitacional, então consideraremos um segundo observador, mas desta vez, o observador está parado no espaço-tempo de Minkowski. Como esperado, devido ao princípio da equivalência, concluímos nessa abordagem que os observadores são indistinguíveis do ponto de vista dinâmico, isto é, sendo nula a

força de Lorentz gravitacional [14] sentida por cada um deles, eles seguem a mesma trajetória. Além disso, suas energias foram calculadas, sendo zero em ambos os casos. É interessante entender como esses resultados ocorreram, uma vez que, como será visto logo adiante, encontramos componentes GEM diferentes de zero.

4.1.1 Queda livre no espaço-tempo de Schwarzschild

Nessa seção, analisamos os campos GEM obtidos para um observador em queda livre no espaço-tempo de Schwarzschild. Inicialmente, consideramos a métrica de Schwarzschild que pode ser escrita como

$$ds^2 = -\alpha^{-2}dt^2 + \alpha^2dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.3)$$

com

$$\alpha^{-2} = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (4.4)$$

Um observador que se move radialmente em queda livre devido a atração do buraco negro de Schwarzschild deve ter uma 4-velocidade com a forma [47]

$$u^\nu = \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2}, -\left(\frac{2m}{r}\right)^{1/2}, 0, 0 \right]. \quad (4.5)$$

Um conjunto de campo de tetradas que satisfaz à condição anterior é dado por [46]

$$h_{a\mu} = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha^2\beta & 0 & 0 \\ \beta\sin\theta\cos\phi & \alpha^2\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \beta\sin\theta\sin\phi & \alpha^2\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \beta\cos\theta & \alpha^2\cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

onde β é definido por

$$\beta = \sqrt{\frac{2m}{r}}. \quad (4.7)$$

Através da expressão da torção escrita em termos do campo de tetradas

$$T^\sigma{}_{\mu\nu} = h_a{}^\sigma \partial_\mu h^a{}_\nu - h_a{}^\sigma \partial_\nu h^a{}_\mu, \quad (4.8)$$

calculamos as componentes de $T_{\sigma\mu\nu}$, das quais as não nulas são

$$\begin{aligned}
T_{001} &= -\beta\partial_r\beta, \\
T_{101} &= -\alpha^2\partial_r\beta, \\
T_{202} &= -r\beta, \\
T_{303} &= -r\beta\sin^2\theta, \\
T_{212} &= r(1-\alpha^2), \\
T_{313} &= r(1-\alpha^2)\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Com esses resultados podemos calcular o superpotencial que nos permitirá encontrar os campos GEM. Dessa forma, para obter os campos GE, precisamos das seguintes componentes de $S_b^{\mu\nu}$:

$$S_b^{0i} = \frac{1}{4} \left[h_b^k g^{00} g^{ij} T_{j0k} + h_b^k g^{00} g^{ij} T_{k0j} \right] + \frac{1}{2} \left[h_b^0 g^{ij} g^{lk} T_{kjl} - h_b^i g^{00} g^{kj} T_{j0k} \right]. \tag{4.10}$$

As componentes GE radiais são obtidas fazendo $i = 1$, isto é

$$S_b^{01} = E_b^1 = \frac{1}{2} \left[h_b^0 g^{11} g^{22} T_{212} + h_b^0 g^{11} g^{33} T_{313} - h_b^1 g^{00} g^{22} T_{202} - h_b^1 g^{00} g^{33} T_{303} \right]. \tag{4.11}$$

Para as componentes angulares θ fazemos $i = 2$ na expressão anterior (4.10) e encontramos

$$S_b^{02} = E_b^2 = -\frac{1}{2} \left[h_b^2 g^{00} g^{11} T_{101} + h_b^2 g^{00} g^{33} T_{303} \right]. \tag{4.12}$$

As componentes ϕ são obtidas fazendo $i = 3$

$$S_b^{03} = E_b^3 = -\frac{1}{2} \left[h_a^3 g^{00} g^{11} T_{101} + h_a^3 g^{00} g^{22} T_{202} \right]. \tag{4.13}$$

Consideremos agora o índice interno igual a zero na expressão anterior, isto é, $b = 0$:

$$\begin{aligned}
E_{(0)}^r &= 0, \\
E_{(0)}^\theta &= 0, \\
E_{(0)}^\phi &= 0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Em seguida calculamos as componentes espaciais para $b \neq 0$. Considerando (4.11) e atribuindo $b = 1, 2, 3$ obtemos

$$E_{(1)}^r = -\frac{\beta}{r} \sin \theta \cos \phi, \quad (4.15)$$

$$E_{(2)}^r = -\frac{\beta}{r} \sin \theta \sin \phi, \quad (4.16)$$

$$E_{(3)}^r = -\frac{\beta \cos \theta}{r}. \quad (4.17)$$

Da mesma forma, atribuindo os valores $b = 1, 2, 3$ em (4.12), obtemos

$$E_{(1)}^\theta = -\frac{\alpha^2 \beta}{4r^2} \cos \theta \cos \phi, \quad (4.18)$$

$$E_{(2)}^\theta = -\frac{\alpha^2 \beta}{4r^2} \cos \theta \sin \phi, \quad (4.19)$$

$$E_{(3)}^\theta = -\frac{\alpha^2 \beta}{4r^2} \sin \theta, \quad (4.20)$$

e finalmente, fazendo $b = 1, 2, 3$ em (4.13) obtemos

$$E_{(1)}^\phi = \frac{\alpha^2 \beta \sin \phi}{4r^2 \sin \theta}, \quad (4.21)$$

$$E_{(2)}^\phi = -\frac{\alpha^2 \beta \cos \phi}{4r^2 \sin \theta}, \quad (4.22)$$

$$E_{(3)}^\phi = 0. \quad (4.23)$$

Calculamos agora os campos GM para esta mesma configuração. Escrevendo o superpotencial em termos de torções,

$$\begin{aligned} S_b^{ij} &= \frac{1}{4} [h_a^0 g^{ik} g^{jm} (T_{mk0} + T_{0km} - T_{km0}) + h_a^n g^{ik} g^{jm} (T_{mkn} + T_{nkm} - T_{kmn})] \\ &+ \frac{1}{2} [-h_a^j g^{ik} (g^{nm} T_{mkn} - g^{00} T_{00k}) + h_a^i g^{jl} (g^{nm} T_{mln} - g^{00} T_{00l})], \end{aligned} \quad (4.24)$$

e usando a definição (4.2) com índice interno $b = 0$ na expressão anterior obtemos:

$$\begin{aligned} B_{(0)\phi} &= 0, \\ B_{(0)\theta} &= 0, \\ B_{(0)r} &= 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Na sequência, consideramos $b = 1, 2, 3$ para cada coordenada de espaço-tempo. Para a componente ϕ :

$$B_{(1)\phi} = \frac{m}{2r^3} \cos \theta \cos \phi, \quad (4.26)$$

$$B_{(2)\phi} = \frac{m}{2r^3} \cos \theta \sin \phi, \quad (4.27)$$

$$B_{(3)\phi} = -\frac{m}{2r^3} \sin \theta. \quad (4.28)$$

Para a componente θ :

$$B_{(1)\theta} = \frac{m}{2r^3} \frac{\sin \phi}{\sin \theta}, \quad (4.29)$$

$$B_{(2)\theta} = -\frac{m}{2r^3} \frac{\cos \phi}{\sin \theta}, \quad (4.30)$$

$$B_{(3)\theta} = 0. \quad (4.31)$$

Finalmente, as componentes radiais

$$B_{(1)r} = B_{(2)r} = B_{(3)r} = 0. \quad (4.32)$$

Por outro lado, se consideramos um observador estático no espaço-tempo de Minkowski e fazemos um cálculo similar, obtemos todos as componentes GEM iguais a zero. No entanto, assumindo a validade do princípio da equivalência, não deveríamos ser capazes de discernir entre os dois observadores, um deles caindo livremente no buraco negro de Schwarzschild, e o outro parado no espaço-tempo de Minkowski. Essa aparente inconsistência deve ser esclarecida investigando o papel das componentes não nulas $b = 1, 2, 3$ sobre a dinâmica.

De acordo com [48], no GEM linearizado a definição operacional ³ para os campos GEM deve estar em acordo com o princípio da equivalência, ou seja, para um observador não girante, e em queda livre, não existem forças gravitacionais e conseqüentemente os campos GEM são zero. Nossas definições estão em total acordo com essa colocação, uma vez que no limite de campo fraco

$$\frac{m}{r} \ll 1 \quad (4.33)$$

³Que permitem uma analogia direta com o Eletromagnetismo.

todos as componentes anteriores são zero. Além disso, mesmo no caso exato, mostramos que as componentes $b = 0$ também se anulam. Isso mostra que as definições operacionais devem estar relacionadas com as componentes $b = 0$, o que está de acordo com uma análise semelhante feita em [38].

Verifiquemos agora os efeitos das componentes dos campos GEM diferentes de zero na dinâmica dos observadores.

4.1.2 Força de Lorentz gravitacional

Como mencionado anteriormente, como consequência do princípio da equivalência, um observador representado por um campo de tetradas não girante e caindo livremente no espaço-tempo de Schwarzschild não deve ser capaz de distinguir - pelo menos do ponto de vista dinâmico - se está caindo livremente neste espaço-tempo ou em repouso com relação ao espaço-tempo de Minkowski. Uma maneira de resolver este problema é usar a equação que descreve o comportamento de partículas escalares na presença de gravitação: a força de Lorentz gravitacional [14]

$$h^a{}_{\mu} \frac{du_a}{ds} = F^a{}_{\mu\nu} u_a u^{\nu}, \quad (4.34)$$

na qual o lado direito da equação assume o papel de força, análoga à força de Lorentz do Eletromagnetismo. Alternativamente, esta equação pode ser reescrita como equação da geodésica no contexto da RG [14]. A partir dessa expressão, podemos calcular as consequências das componentes não nulas dos campos GEM obtidos anteriormente.

Uma vez que os campos GEM são definidos a partir do superpotencial $S^{b\rho\mu}$ é conveniente reescrever a equação acima em termos destas quantidades. Para isso, devemos primeiro reescrever o tensor intensidade de campo gravitacional em termos de superpotential, ou seja,

$$F^a{}_{\gamma\delta} = h^b{}_{\gamma} g_{\rho\delta} h^a{}_{\mu} S_b{}^{\mu\rho} - h^b{}_{\delta} g_{\nu\gamma} h^a{}_{\mu} S_b{}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^a{}_{\delta} g_{\nu\gamma} h^b{}_{\theta} S_b{}^{\theta\nu} + \frac{1}{2} h^a{}_{\gamma} g_{\rho\delta} h^b{}_{\theta} S_b{}^{\theta\rho}. \quad (4.35)$$

Assim, obtemos

$$h^{a\mu} \frac{du_a}{ds} = -h_b{}^\nu S^{b\rho\mu} u_\rho u_\nu - \frac{1}{2} h_{b\theta} (S^{b\mu\theta} u^\rho u_\rho - S^{b\nu\theta} u^\mu u_\nu). \quad (4.36)$$

Fazendo uso de (4.5) e dos campos GEM podemos calcular o lado direito da equação (4.36) para um observador em queda livre no espaço-tempo de Schwarzschild. Assim, obtemos um resultado nulo para todas as componentes da força de Lorentz, ou seja, os campos GEM não nulos, obtidos na seção anterior, são combinados de modo a eliminar a força sentida pelo observador, e, portanto, não alteram sua trajetória. O mesmo resultado é obtido quando consideramos um observador estático em relação ao espaço-tempo de Minkowski, uma vez que todos os campos GEM são nulos. Portanto, de certa forma, podemos dizer que as componentes do superpotencial com índice de espaço interno igual a zero representam a definição operacional dos campos GEM uma vez que, sendo iguais a zero, estas componentes já estavam em concordância com o princípio da equivalência.

4.1.3 Energia do campo gravitacional

Outra evidência física que nos permite enfrentar a questão das componentes não nulas para o caso do referencial em queda livre no espaço-tempo de Schwarzschild é a energia do campo gravitacional. Novamente, sendo válido o princípio da equivalência, não deveríamos ser capazes de discernir entre dois observadores, um em queda livre no buraco negro de Schwarzschild, e outro estático no espaço-tempo de Minkowski. Assim, sendo zero a energia do campo gravitacional associado à segunda situação, um resultado igual deveria ocorrer com a energia medida pelo observador na primeira situação. Podemos calcular a energia do campo gravitacional dada pelas componentes zero de (3.16), para os campos GEM obtidos para um observador representado pelo campo de tetradas (4.6), uma vez que eles são definidos a partir do superpotencial que aparece na definição do tensor energia-momento. Consideremos então

$$j_{(0)}^0 = h_{(0)}{}^\lambda (F^c{}_{i\lambda} S_c{}^{i0} - \frac{1}{4} \delta_\lambda^0 F^c{}_{\mu\nu} S_c{}^{\mu\nu}). \quad (4.37)$$

Substituindo (4.35) em (4.37) obtemos

$$\begin{aligned}
j_{(0)}^0 &= h_{(0)}^\lambda \left(h^b{}_i g_{\rho\lambda} h^c{}_\gamma S_b{}^{\gamma\rho} - h^b{}_\lambda g_{\rho i} h^c{}_\gamma S_b{}^{\gamma\rho} - \frac{1}{2} h^c{}_\lambda g_{\rho i} h^b{}_\gamma S_b{}^{\gamma\rho} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} h^c{}_i g_{\rho\lambda} h^b{}_\gamma S_b{}^{\gamma\rho} \right) S_c{}^{0i} + \frac{1}{4} h_{(0)}^0 \left(h^b{}_\mu g_{\rho\lambda} h^c{}_\gamma S_b{}^{\gamma\rho} - h^b{}_\lambda g_{\rho\mu} h^c{}_\gamma S_b{}^{\gamma\rho} \right. \\
&- \left. \frac{1}{2} h^c{}_\lambda g_{\rho\mu} h^c{}_\gamma S_b{}^{\gamma\rho} + \frac{1}{2} h^c{}_\mu g_{\rho\lambda} h^b{}_\gamma S_b{}^{\gamma\rho} \right) S_c{}^{\mu\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Usando as definições (4.1) e (4.2) podemos reescrever a expressão acima em termos de $E_a{}^i$ e $B_a{}^i$. Note que como ela é quadrática no superpotential, também é quadrática nos campos GEM. Após um cálculo longo, encontramos o seguinte resultado para a componente acima

$$j_{(0)}^0 = 0, \tag{4.39}$$

ou seja, a energia do campo gravitacional escrita em termos dos campos GEM é zero para um observador em queda livre no buraco negro de Schwarzschild. Embora existam componentes do campo GEM diferentes de zero, eles combinam-se de tal forma que não alteram o resultado esperado para a energia do campo gravitacional, de forma semelhante ao que aconteceu para o cálculo da força de Lorentz gravitacional. Como conseqüência, não é possível - pelo menos do ponto de vista dinâmico⁴ - para um observador local distinguir entre estar em queda livre no buraco negro de Schwarzschild ou em repouso no espaço-tempo de Minkowski.

Assim, a partir de (4.38) e (4.39), podemos definir uma "energia operacional" do campo gravitacional de uma forma completamente análoga à do Eletromagnetismo, a saber:

$$P = \int \left[(E_{(0)}{}^i)^2 + (B_{(0)i})^2 \right] d^3x. \tag{4.40}$$

É importante ressaltar que esta definição foi inferida com base apenas no caso de um referencial em queda livre em um buraco negro de Schwarzschild, estando a extensão de sua validade ainda sob investigação.

⁴Talvez as componentes $E_{(1,2,3)}{}^i$ e $B_{(1,2,3)k}$ tenham um sentido físico mensurável em um cenário semi-clássico e permitam uma diferenciação entre os referenciais. A análise desta questão está ainda sob investigação.

4.1.4 Considerações finais

Através do uso de campos GEM não é possível, para um observador local, distinguir entre estar em queda livre no buraco negro de Schwarzschild ou em repouso no espaço-tempo de Minkowski. Embora esta conclusão pareça ser natural, devido ao princípio da equivalência, verificou-se nesta abordagem que campos não nulos surgem no caso de queda livre. Uma possibilidade seria a de considerar apenas as componentes operacionais $b = 0$, já que elas são todas iguais a zero, e simplesmente descartar as outras componentes não nulas com índices internos espaciais. Então seria fácil postular a equivalência entre os referenciais. Mas estas componentes não nulas poderiam armazenar alguma informação importante que poderia violar a idéia central, digo, o princípio da equivalência.

Para investigar o papel das componentes dos campos GEM não nulas sobre dinâmica usamos a força de Lorentz gravitacional escrita em termos dos campos, e concluímos que suas contribuições anulam-se, resultando em uma força total, medida pelo observador em queda livre na geometria de Schwarzschild, nula; tendo o mesmo acontecido para um observador em repouso no espaço-tempo de Minkowski. Assim, nenhum experimento ideal que faça uso de efeitos dinâmicos do campo gravitacional será capaz de distinguir entre esses dois referências. Além disso, a fim de apoiar os resultados, mostramos que a energia do campo gravitacional medida pelo referencial em queda livre é zero, como esperado, se comparada com a energia do campo associada ao espaço-tempo plano. É importante salientar que todos os cálculos foram feitos usando os campos GEM e fora do limite do campo fraco, ou seja, os resultados obtidos são exatos e podem ser aplicados no tratamento de campos intensos como, por exemplo, formações de jatos buracos negros supermassivos.

4.2 O efeito de *boosts* na medição do campo gravitoeletromagnético na geometria de Schwarzschild

Analisaremos agora o efeito do movimento de um observador na direção \mathbf{x} em relação a uma geometria específica do espaço-tempo, ou seja, realizando um *boost* de Lorentz na direção \mathbf{x} . Por simplicidade, examinaremos a geometria de Schwarzschild. Consideremos inicialmente a métrica de Schwarzschild escrita em termos de coordenadas isotrópicas, isto é,

$$ds^2 = -A^2(dx^0)^2 + B^2(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.41)$$

com

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{(1 - m/2\rho)^2}{(1 + m/2\rho)^2}, \\ B^2 &= (1 + m/2\rho)^4, \end{aligned} \quad (4.42)$$

e $m = MG/c^2$. A variável ρ é dada em termos de r , $r = \rho(1 + m/2\rho)^2$, e as coordenadas x, y e z são definidas como $x = \rho \sin \theta \cos \phi$, $y = \rho \sin \theta \sin \phi$ e $z = \rho \cos \theta$.

Visto que nosso objetivo é analisar o comportamento dos campos GEM sob a óptica de um observador que se move na direção \mathbf{x} - *boost* na direção \mathbf{x} - em relação à métrica de Schwarzschild, devemos então trabalhar com essa métrica em coordenadas cartesianas;

$$ds^2 = -A^2(dx^0)^2 + B^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.43)$$

Neste ponto devemos escolher o campo de tetradas que representará nosso observador. De maneira totalmente análoga ao eletromagnetismo, um *boost* na direção \mathbf{x} no espaço-tempo plano pode ser escrito através do campo de tetradas

como

$$h^a{}_{\mu}(x^0, x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4.44)$$

onde $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ e $\beta = v/c$. Por outro lado, um *boost* na direção \mathbf{x} em relação ao buraco negro de Schwarzschild pode ser representado por

$$h^a{}_{\mu}(x^0, x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma A & -\beta\gamma B & 0 & 0 \\ -\beta\gamma A & \gamma B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

note que $h^a{}_{\mu}h_{a\nu} = g_{\mu\nu}$.

Os fatores A e B que aparecem na expressão acima são dados em coordenadas cartesianas por:

$$A = \frac{r - 2m + r\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}{r + r\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \quad (4.46)$$

e

$$B = \left(\frac{r + r\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}{r - m + r\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \right)^2, \quad (4.47)$$

respectivamente. Usando a tetrada acima, obtemos as seguintes componentes não nulas da torção:

$$T_{001} = \gamma^2 AB \partial_t \beta + A \partial_x A \quad (4.48)$$

$$T_{002} = A \partial_y A \quad (4.49)$$

$$T_{003} = A \partial_z A \quad (4.50)$$

$$T_{121} = B \partial_y B \quad (4.51)$$

$$T_{131} = B \partial_z B \quad (4.52)$$

$$T_{212} = B \partial_x B \quad (4.53)$$

$$T_{232} = B\partial_z B \quad (4.54)$$

$$T_{313} = B\partial_x B \quad (4.55)$$

$$T_{323} = B\partial_y B. \quad (4.56)$$

A partir do superpotencial (2.12), escrito em termos das torções, podemos calcular os campos GE para um referencial movendo-se em relação ao buraco negro de Schwarzschild. Quando consideramos $b = 0$ na definição dos campos GE, obtemos

$$\begin{aligned} E'_{(0)}{}^x &= \frac{\gamma}{AB^3} \partial_x B, \\ E'_{(0)}{}^y &= \frac{\gamma}{AB^3} \partial_y B, \\ E'_{(0)}{}^z &= \frac{\gamma}{AB^3} \partial_z B. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Consideremos agora as componentes GM obtidas a partir da definição (4.2).

Novamente, tomamos $b = 0$ e chegamos a:

$$\begin{aligned} B'_{(0)x} &= 0, \\ B'_{(0)y} &= \frac{\beta\gamma\partial_z(AB)}{2AB^4}, \\ B'_{(0)z} &= \frac{\beta\gamma\partial_y(AB)}{2AB^4}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Outras componentes do campo GE são obtidas quando fazemos $i = 1$ e $b = 1, 2, 3$, isto é:

$$\begin{aligned} E'_{(1)}{}^x &= \frac{\gamma\beta}{AB^3} \partial_x B, \\ E'_{(2)}{}^x &= 0, \\ E'_{(3)}{}^x &= 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Levando em consideração $i = 2$ e $i = 3$ em $S_a{}^{0i} = E_a{}^i$ extraímos as componentes GE y e z respectivamente

$$\begin{aligned} E'_{(1)}{}^y &= \frac{\gamma\beta}{AB^3} \partial_y B, \\ E'_{(2)}{}^y &= 0, \\ E'_{(3)}{}^y &= 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

e

$$\begin{aligned}
 E'_{(1)z} &= \frac{\gamma\beta}{AB^3} \partial_z B, \\
 E'_{(2)z} &= 0, \\
 E'_{(3)z} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.61}$$

Por fim calculemos as demais componentes GM. Para tal, devemos considerar $i = 2$ e $j = 3$ e assim obtermos as componentes x :

$$\begin{aligned}
 B'_{(1)x} &= 0, \\
 B'_{(2)x} &= \frac{\gamma\partial_z(AB)}{2AB^4}, \\
 B'_{(3)x} &= -\frac{\gamma\partial_y(AB)}{2AB^4}.
 \end{aligned}
 \tag{4.62}$$

Com $i = 1$ e $j = 3$ ganhamos as componentes y :

$$\begin{aligned}
 B'_{(1)y} &= -\frac{\gamma\partial_z(AB)}{2AB^4}, \\
 B'_{(2)y} &= 0, \\
 B'_{(3)y} &= \frac{1}{2AB^4} \left[\partial_x(AB) - B^2\gamma^2 \frac{d}{dt}\beta \right].
 \end{aligned}$$

E finalmente as componentes z :

$$\begin{aligned}
 B'_{(1)z} &= \frac{\gamma\partial_y(AB)}{2AB^4}, \\
 B'_{(2)z} &= -\frac{1}{2AB^4} \left[\partial_x(AB) - B^2\gamma^2 \frac{d}{dt}\beta \right], \\
 B'_{(3)z} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.63}$$

Uma comparação direta com o Eletromagnetismo pode ser feita quando consideramos o regime linear na Gravitação. Isso será feito na próxima subseção.

4.2.1 Regime de campo fraco

A fim de fazer um paralelo entre a Gravitação e Eletromagnetismo analisaremos o problema análogo em Eletrodinâmica, ou seja, o efeito de um *boost* para um

observador movendo-se em relação a uma carga elétrica em repouso. A configuração consiste em uma carga pontual em repouso na origem de um sistema de referência inercial (S). De forma geral, os campos eletromagnéticos em um referencial S' em movimento na direção \mathbf{x} são relacionados aos campos medidos em um referencial em repouso S por

$$\begin{aligned}
 E'_x &= E_x, \\
 E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), \\
 E'_z &= \gamma(E_z + vB_y), \\
 B'_x &= B_x, \\
 B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \\
 B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right).
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

É importante ressaltar que na situação descrita acima as componentes magnéticas serão nulas no referencial em repouso, o que nos leva a

$$\begin{aligned}
 E'_x &= E_x, \\
 E'_y &= \gamma E_y, \\
 E'_z &= \gamma E_z, \\
 B'_x &= 0, \\
 B'_y &= \frac{\beta\gamma}{c}E_z, \\
 B'_z &= -\frac{\beta\gamma}{c}E_y.
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Sabemos que a completa analogia entre Eletromagnetismo e Gravitação pode ser feita quando esta última é considerada no regime linear. Assim, vamos linearizar as componentes dos campos GEM obtidos anteriormente. Para tal, vamos considerar que:

$$\frac{m}{r} \ll 1. \tag{4.66}$$

Nesse regime obtemos as seguintes componentes GE:

$$E'_{(0)x} = \frac{\gamma m x}{r^3},$$

$$\begin{aligned} E'_{(0)}{}^y &= \frac{\gamma my}{r^3}, \\ E'_{(0)}{}^z &= \frac{\gamma mz}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Temos aqui um resultado interessante, isto é, no regime de campo fraco obtemos o campo GE Newtoniano aumentado por um fator γ devido ao movimento do observador com relação à fonte. Neste ponto, surge uma diferença interessante entre a Gravitação e o Eletromagnetismo; ao compararmos o resultado acima com as expressões obtidas a partir da teoria eletromagnética (4.65) vemos que a componente x acima apresenta o fator de Lorentz γ enquanto na mesma componente das equações (4.65) não existe tal fator. Como temos visto até agora [19, 38], considerando apenas a componente zero do índice de álgebra no regime de campo fraco, há uma total equivalência entre os campos eletromagnéticos e GEM. Dessa forma, o fator γ presente na primeira componente em (4.67) poderia representar um problema em nossa linha de trabalho; no entanto, sendo válido o princípio da equivalência, a massa m presente em (4.67) pode ser tomada como sendo a massa inercial. Como sabemos, a massa inercial não é um invariante de Lorentz e transforma-se de acordo com

$$m' = \gamma m. \quad (4.68)$$

De fato, a massa de repouso m_0 é o verdadeiro invariante de Lorentz. Como consequência, a responsabilidade do fator γ presente na componente x do caso gravitacional pode ser colocada no fato da massa presente na expressão do campo gravitoeletrico não ser apenas a massa de repouso.

De forma indireta há uma corroboração do princípio da equivalência, digo, para que seja possível uma associação entre os campos elétricos e GE (no limite de campo fraco)⁵ é necessário que justifique-se o fator γ substituindo-se m_g (massa gravitacional) por m_i (massa inercial).

Considerando agora o limite de campo fraco para as componentes GM com

⁵Lembrando que até onde sabemos não existe nenhum caso em que isso não seja possível.

índice de algebra, ou interno, igual a zero obtemos

$$\begin{aligned} B'_{(0)x} &= 0, \\ B'_{(0)y} &= \beta\gamma \frac{m^2 z}{4r^4}, \\ B'_{(0)z} &= \beta\gamma \frac{m^2 y}{4r^4}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

que podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} B'_{(0)x} &= 0, \\ B'_{(0)y} &= \beta\gamma \frac{m}{4r} E_{(0)}^z, \\ B'_{(0)z} &= \beta\gamma \frac{m}{4r} E_{(0)}^y, \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde $E_{(0)}^y$ e $E_{(0)}^z$ são as componentes do campo GE medidas a partir de um observador em repouso. Vemos uma completa concordância entre os resultados acima apresentados e as expressões (4.65), ou seja, a componente GM na direção do *boost* se anula e as demais são escritas em termos dos campos GE obtidos a partir de um observador em repouso.

Além disso, ao compararmos (4.65) com (4.70) vemos que o fator $\frac{1}{c}$, no contexto do *boost* da eletrodinâmica, é substituído por um fator $\frac{m}{r}$ no contexto de um *boost* no caso gravitacional. Ou seja, na teoria eletromagnética o campo magnético é menor que o campo elétrico por um fator de $\frac{1}{c}$. Por outro lado, no caso gravitacional o campo GM é $\frac{m}{r}$ vezes menor que o campo GE. É importante ressaltar que no regime considerado, a razão $\frac{m}{r}$ é tomada como $\ll 1$. A comparação entre os dois casos pode nos mostrar o limite para o fator m/r , isto é:

$$\frac{m}{r} \sim c^{-1}, \quad (4.71)$$

o que da uma idéia quantitativa do que possa ser considerado "campo fraco".

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Partindo do lagrangiano do ETRG contido na literatura, mostramos não ser possível obter uma formulação hamiltoniana para essa teoria seguindo simplesmente o procedimento padrão de uma transformada de Legendre. A principal razão dessa impossibilidade é o fato do momento estar associado ao superpotencial e não ao tensor intensidade de campo, sendo esse fato, por sua vez, uma consequência da propriedade de soldagem, que exige que o lagrangiano tenha mais de um termo quadrático na torção. Além disso, mostramos também que o termo de divergência necessário para garantir a igualdade entre as densidades lagrangianas do ETRG e Einstein-Hilbert não influencia o resultado final dos vínculos secundários.

Ao atuarmos com os vínculos de primeira classe sobre as componentes do campo de tetradas obtivemos, como transformações de calibre de segundo gênero, uma estrutura análoga às transformações de Yang-Mills, e que conseqüentemente, generaliza as transformações do Eletromagnetismo. O motivo dessas transformações serem análogas, e não iguais, às obtidas em Yang-Mills, deve-se ao fato da conexão de *spin* obtida para o caso do ETRG ser capaz de, além de levar índices de álgebra novamente em índices de álgebra, levá-los também a índices de espaço físico. Novamente, essa peculiaridade deve estar associada à propriedade de soldagem, que possibilita um intercâmbio entre objetos definidos nos espaços físico e interno. Além disso, mostramos não haver uma isotropia no espaço físico com relação às trans-

formações de calibre, ou seja, dada uma transformação de calibre no espaço interno, o espaço físico reage de forma diferente nas componentes espacial e temporal. Aliás, para o caso assintoticamente plano, no qual o índice de álgebra é fixado, chegamos a transformações análogas às do Eletromagnetismo. É importante ressaltar que essa analogia já havia sido obtida através das equações de Maxwell gravitacionais, no entanto, aqui, a analogia deu-se em um contexto mais fundamental: dos potenciais/tetradas.

Através das transformações de calibre de segundo gênero ¹, foi possível obter as transformações mais fundamentais, digo, de primeiro gênero ². Mostramos que havendo a possibilidade de decompor as componentes do campo de tetradas como uma parte trivial somada a algum potencial, além dos usuais potenciais translacional e de Lorentz, há também a possibilidade de que o grupo de simetria do espaço interno seja uma generalização do grupo de Poincaré. Ainda na análise das transformações do espaço interno, vimos que para o caso no qual a decomposição das componentes do campo de tetradas mencionada acima inclui apenas a parte trivial somada ao potencial translacional, recuperamos o grupo das translações. Isso está em total acordo com a literatura.

Ao substituímos as transformações de calibre de segundo gênero na condição de paralelismo absoluto, obtivemos um sistema de 48 equações diferenciais altamente acopladas, que a princípio não fomos capazes de resolver. Por sorte, para o caso assintoticamente plano, o sistema é substancialmente simplificado, permitindo inclusive afirmar que o espaço interno tem uma estrutura isotrópica, ou seja, as soluções são independentes do índice que caracteriza esse espaço. Esse novo sistema é facilmente resolvido, e sua solução permite-nos saber que a dependência dos parâmetros de transformação de calibre nas variáveis de espaço físico é periódica, exatamente como no Eletromagnetismo.

A conexão de *spin* presente em (3.32), e reescrita em (3.57) e (3.58), permite

¹Transformações sobre os campos, $\delta h^a{}_\mu$.

²Transformações sobre o campo fonte $\delta\psi$, ou sobre a base que define o espaço interno δx^a .

que índices de espaço interno sejam levados a índices de espaço físico, ou seja, os parâmetros de transformação de calibre podem ser definidos também na variedade base (espaço físico). Essa peculiaridade única da gravitação impossibilita que os parâmetros definidos em (3.40) sejam interpretados como fases de funções de onda definidas no espaço interno, estando essa peculiaridade relacionada à universalidade da gravitação, isto é, a universalidade permite que objetos sejam definidos tanto no espaço físico quanto no espaço interno. Em suma, dado um campo fonte ψ ³, $h^a{}_\mu$ pode ser qualquer $h^a{}_\mu + \delta h^a{}_\mu$, com $\delta h^a{}_\mu$ dado por (3.30) ou (3.40). Ao escolher uma calibração específica, através da introdução de novos vínculos de segunda classe, ψ e $h^a{}_\mu$ são também especificados, ou seja, todos os graus de liberdade foram agora transferidos para o espaço físico. Essa especificação, no entanto, não foi feita às custas da escolha de uma particular fase de uma função de onda definida no espaço interno, mas escolhendo parâmetros, ainda sem interpretação física bem definida, que podem ser definidos em ambos os espaços. Vale ainda ressaltar que sendo a gravitação universal, seu espaço interno deve ser o próprio espaço físico (em escala local), conseqüentemente, seu grupo de simetria do espaço interno é o próprio grupo cinemático do espaço físico. Esse grupo foi obtido, e está representado pelo conjunto de transformações (3.47).

Do ponto de vista astrofísico, uma singularidade gravitacional surge quando uma fonte energética é confinada a uma região do espaço suficientemente pequena. De um ponto de vista mais fundamental, singularidades do tipo raio Schwarzschild r_S existem independentemente do valor da massa, sendo necessário apenas que ela esteja confinada em uma região menor que r_S . Sob a óptica de teorias de calibre, a existência dessas singularidades pode ser explicada como uma consequência da "não-compactividade" do grupo de simetria do espaço interno⁴. Ao efetuar uma transformação de calibre de primeiro gênero é possível que o espaço físico, estando

³Da não-linearidade das equações de campo, sabemos que ψ pode estar associado ao próprio campo gravitacional. No entanto, como já foi dito, isso não impede que haja outras fontes.

⁴Essa característica pode ser vista em (3.47).

localmente acoplado ao espaço interno, tenha sua estrutura "tensionada" além do suportável. Como consequência, o tecido do espaço físico seria "rasgado", gerando assim uma singularidade. A figura 5.1 ilustra um pouco do que foi dito.

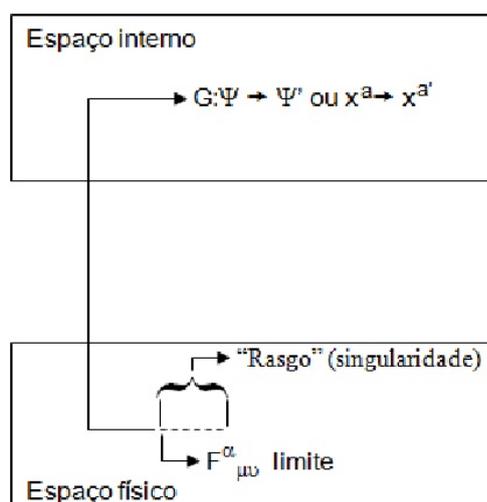


Figura 5.1: Representação de um "rasgo" no espaço físico, gerado a partir da ação do setor não-compacto do grupo de simetria do espaço interno.

Uma análise completa desta questão está ainda sob investigação, e é uma das perspectivas futuras para o nosso trabalho.

A decomposição do campo gravitacional nas partes GE e GM, motivada pela possibilidade de descrever a gravitação como uma teoria de calibre, juntamente com a dupla interpretação das componentes do campo de tetradas ⁵, permitiu-nos avançar na questão do Gravitoeletromagnetismo. Ao obtermos a relação (3.7), esperamos ter contribuído para corroborar as definições (3.6), uma vez que elas levam a uma relação entre os momentos e os campos GE totalmente análoga a que ocorre no Eletromagnetismo e na teoria de Yang-Mills. As definições (3.6) permitem reescrever a expressão para a força de Lorentz gravitacional em termos dos campos GE e GM, dando-nos uma via alternativa para obter o "arrasto" gravitomagnético

⁵Link entre os espaços físico e interno (formulação de calibre) e jacobiano relacionado referenciais (formulação de referencial ideal).

tão mencionado na literatura.

Através do uso dos campo GEM vimos que embora hajam componentes não nulas para os campos obtidos para o caso de um observador ideal em queda livre no buraco negro de Schwarzschild, seus efeitos dinâmicos, medidos através da força de Lorentz gravitacional, são nulos. Além disso, a energia do campo gravitacional medida por esse mesmo observador é nula. Esses resultados estão em total acordo com o princípio da equivalência. Vale lembrar que as componentes não nulas poderiam ser usadas em algum teste que violasse o princípio da equivalência. Essa questão está ainda sob investigação.

Quando estudamos os efeitos de *boosts* sobre os campos GEM fomos capazes de mais uma vez reafirmar tais definições. No limite de campo fraco, as componentes GEM com índice de álgebra igual a zero são novamente análogas às do campo eletromagnético quando medidas por um referencial sob efeito de um *boost* na direção \mathbf{x} . A comparação entre os dois casos permitiu ainda obter uma noção quantitativa do significado de "campo fraco", já que $m/r \sim 1/c$.

Finalmente, podemos citar como algumas das perspectivas futuras de continuação do trabalho: (i) Melhor compreensão da questão da relação entre a não-compactividade do grupo de simetria do espaço interno e a existência de singularidades gravitacionais. (ii) Procura por um calibre de Lorenz da gravitação, que seja capaz de desacoplar as leis de Gauss e Ampère gravitacionais. (iii) Análise alternativa do espaço interno associado à gravitação através da dependência do parâmetro de transformação de calibre nas variáveis de espaço-tempo ⁶. (iv) Análise mais profunda da universalidade da gravitação via abordagem de calibre. (v) Possível relação entre a dinâmica do grupo de simetria do espaço interno e graus de liberdade associados à passagem de ondas gravitacionais ("esticamento da regua" \leftrightarrow invariância conforme). (vi) Uso dos campos GEM no estudo de diversas configurações gravitacionais. Por exemplo, obter as componentes GM associadas ao campo gravitacional terrestre, para fins de comparação com os dados finais da *Gravity Probe*

⁶Solução geral de (3.51)

B. (vii) Relação entre as componentes GE não nulas, para o caso de queda livre em Schwarzschild, e efeitos termodinâmicos (Efeito Unruh). (viii) Estudo do acoplamento do campo gravitacional, descrito pelo ETRG, com os mais diversos campos da natureza, a fim de encontrar diferenças mensuráveis entre esses resultados e os obtidos via RG, possibilitando apontar qual descrição aproxima-se mais da natureza.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, "An Introduction to Geometrical Physics", World Scientific; Singapore, (1995).
- [2] Paul A. M. Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics", Dover Publications, INC; 1^a edition, 2001.
- [3] Milutin Blagojevic, "Gravitation and Gauge Symmetries", Institute of Physics Publishing (IoP), Bristol, 2002.
- [4] V.A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).
- [5] S.M. Carroll, G.B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [6] D. Colladay and V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998); S.R. Coleman and S.L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999).
- [7] H. Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, Phys. Rev. D **68**, 065030 (2003); Nucl. Phys. B - Supp. 127, **105** (2004).
- [8] A. Songaila and L.L. Cowie, Nature **398**, 667 (1999); P.C.W. Davies, T.M. Davies and C.H. Lineweaver Nature **418**, 602 (2002); A. Songaila and L.L. Cowie, Nature **428**, 132 (2004).

-
- [9] J.W. Moffat, *Int. J. Mod. Phys. D* **12**, 1279 (2003); O. Bertolami, Talk presented at the “*Decoherence, Information, Complexity and Entropy 2002*”, Piombino, Italy, September 2002. hep-ph/0301191.
- [10] S.R. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Rev. D* **59**, 116008 (1999); V.A. Kostelecký and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251304 (2001); *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002).
- [11] P. Laurent, D. Götz, P. Binetruy, S. Covino, A. Fernandez-Soto, *Phys. Rev. D* **83**, 121301(R) (2011).
- [12] K. Hayashi and T. Shirafuji, *Phys. Rev. D* **19**, 3524 (1979); K. Hayashi, *Phys. Lett. B* **69**, 441 (1977).
- [13] R. Aldrovandi and J.G. Pereira, “An Introduction to Teleparallel Gravity”, Institute of Theoretical Physics, UNESP, São Paulo, Brazil. “<http://www.ift.unesp.br/gcg/tele.pdf>”.
- [14] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, *Phys. Rev. D* **56**, 4689 (1997).
- [15] H. I. Arcos, V. C. de Andrade and J. G. Pereira, *Int. J. Mod. Phys. D* **13**, 807 (2004) [gr-qc/0403074].
- [16] R. Aldrovandi, J. G. Pereira and K. H. Vu, *Gen. Rel. Grav.* **36**, 101 (2004) [gr-qc/0304106].
- [17] L.R.A. Belo, E.P. Spaniol, J.A. de Deus and V.C. de Andrade; *Adv. Studies Theor. Phys.*, **6**, no. 7, 325 - 337 (2012).
- [18] L.R.A. Belo, E.P. Spaniol, J.A. de Deus and V.C. de Andrade; arXiv: 1109.0771v1 [gr-qc] (2011) (Submetido no Chinese Journal of Physics).
- [19] E.P. Spaniol, L.R.A. Belo, J.A. de Deus and V.C. de Andrade; arXiv: 1111.1908v1 [gr-qc] (2011) (Submetido no General Relativity and Gravitation).

-
- [20] E.P. Spaniol, L.R.A. Belo, J.A. de Deus and V.C. de Andrade. *Teleparallel Gravitomagnetism: the role of boosts in the Schwarzschild geometry*, (2012) (Em fase final de confecção).
- [21] Robert M. Wald, "General Relativity", University Of Chicago Press; first edition, (1984).
- [22] Charles W. Misner, Kip S. Thorne and John Archibald Wheeler, "Gravitation", W. H. Freeman; first edition edition, (1973).
- [23] C. Moller, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr. **1**, No. 10 (1961).
- [24] C. Pellegrini on J. Plebanski, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mot. Fys. Skr. **Z**, No. 2 (1962).
- [25] K. Hayashi and T. Nakano, Prog. Theor. Phys. **38**, 491 (1967).
- [26] K. Hayashi, Nuovo Cimento A **16**, 639 (1973).
- [27] K. Hayashi, Phys. Lett. B **69**, 441 (1977).
- [28] C. Moller, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr. **89**, No. 13 (1978).
- [29] J. W. Maluf, J. Math. Phys. **35**, 335 (1994).
- [30] N. P. Konopleva and V. N. Popov, Gauge Fields (Harwood, New York, 1980).
- [31] K. Hayashi and T. Shirafuji, Prog. Theor. Phys. **64** - 866, 883, 1435, 2222; **65** - 525; **66** - 318, 2258 (1980).
- [32] M. D. Maia, *Geometry of the Fundamental Interactions: On Riemann's Legacy to High Energy Physics and Cosmology*, Springer; 1st Edition, (2011).
- [33] Jorge Crispim Romão, *O Modelo Standard das Interações Electrofracas*, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal.
"http://porthos.ist.utl.pt/ftp/textos/fie.pdf".

-
- [34] Nivaldo A. Lemos, *Mecânica Analítica*, Livraria da Física; 2^a ed. (2007).
- [35] Tarcísio M. da R. Filho, *Mecânica Clássica*. Utilizado como livro texto no curso de Mecânica Clássica Avançada no IF/UnB, (2004).
- [36] Arnowitt, R. and Deser, S., Phys. Rev. **113**, 745 (1959); Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C., Phys. Rev. **116**, 1322 (1959); Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C., Phys. Rev. **117**, 1595 (1960); Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C., Phys. Rev. Lett. **4**, 375 (1960); Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C., Phys. Rev. **118**, 1100 (1960); Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C., Phys. Rev. **120**, 313 (1960); Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C., Phys. Rev. **120**, 321 (1960); Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C., Phys. Rev. **121**, 1556 (1961); Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C., Phys. Rev. **122**, 997 (1961).
- [37] J. W. Maluf and J. F. da Rocha-Neto, Phys. Rev. D **64**, 8 (2001).
- [38] Spaniol, E. P.; Andrade, V. C., International Journal of Modern Physics D **19**, 489 (2010).
- [39] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Interscience, New York, 2^a edition, 1996.
- [40] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, Phys. Rev. Lett. **84**, 4533 (2000).
- [41] B. Mashhoon *Int. J. Mod. Phys. D.* **14**, 12 (2005); Maxwell J.C. Phil. Trans. **155**, (1865) 492; G. Holzmuller, Z. Moth. Phys. **15**, 69 (1870); F. Tisserand, Compt. Rend. **75**, 760 (1872); **110**, 313 (1890); B. Mashhoon, F. W. Hehl, D. S. Theiss, GRG **16**, 8 (1984); I. Ciufolini and J. A. Wheeler, Gravitation and Inertia (Princeton University Press, Princeton, 1951).
- [42] R. Owen et al, Phys. Rev. Lett. **106**, 151101 (2011).
- [43] C. W. F. Everitt et al, Phys. Rev. Lett. **106**, 221101 (2011).

-
- [44] B. Mashhoon *Gravitoelectromagnetism: A Brief review* in Iorio, L. (Ed.), *Measuring Gravitomagnetism: A Challenging Enterprise*, (Nova Publishers, Hauppauge NY, 2007) pp. 29-39, arxiv:gr-qc/0311030. More references: *Phys.Lett.A* **292** 49 (2001); *Phys.Rev.D* **65** 064025 (2002); *Int.J.Mod.Phys.D* **14** 12 (2005).
- [45] D. Bini, C. Cherubini, C. Chicone and B. Mashhoon, *Class.Quant.Grav.* **25**, 225014 (2008).
- [46] J.W. Maluf, F.F. Faria and S.C. Ulhoa, *Classical and Quantum Gravity* **34**, 2743 (2007). F. H. Hehl, J. Lemke and E. W. Mielke, *Two Lectures on Fermions and Gravity in Geometry and Theoretical Physics*, edited by J. Debrus and A. C. Hirshfeld (Springer, Berlin Heidelberg, 1991).
- [47] J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einsteins General Relativity* p. 198 (Addison-Wesley, San Francisco, 2003).
- [48] C. Schmid, *Phys.Rev.D* **74**, 044031 (2006).