

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE DINÂMICA DE TORRES DE ENERGIA EÓLICA**

**CYRIO FLEREMOSCH DELLEZZOPOLLES JUNIOR**

**ORIENTADOR: JOSÉ LUIS VITAL DE BRITO  
CO – ORIENTADOR: ZENÓN JOSÉ GUZMÁN NUÑEZ DEL PRADO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM – 006 A/11  
BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO – 2011**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**ANÁLISE DINÂMICA DE TORRES DE ENERGIA EÓLICA**

**CYRIO FLEREMOSCH DELLEZZOPOLLES JUNIOR**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADA POR:**



---

**Prof. José Luis Vital de Brito, DSc (PECC-UnB)**  
**(Orientador)**



---

**Profa. Graciela Nora Dóz de Carvalho, Dr Ing (PECC-UnB)**  
**(Examinadora Interna)**



---

**Prof. Frederico Martins Alves da Silva, DSc (GECON-UFG)**  
**(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, 9 DE DEZEMBRO DE 2011**

## FICHA CATALOGRÁFICA

DELLEZZOPOLLES JR, CYRIO FLEREMOSCH

Análise Dinâmica de Torres De Energia Eólica [Distrito Federal] 2011.

297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2011). Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Torres

2. Análise não-linear

3. Galerkin

4. Energia Eólica

I. ENC/FT/UnB

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DELLEZZOPOLLES JR., C. F. (2011). Análise Dinâmica de Torres De Energia Eólica. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, p.83.

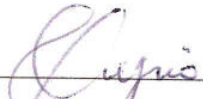
## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Cyrio Fleremosch Dellezzopolles Junior.

TÍTULO: ANÁLISE DINÂMICA DE TORRES DE ENERGIA EÓLICA.

**GRAU: Mestre ANO: 2011**

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

  
\_\_\_\_\_  
Cyrio Fleremosch Dellezzopolles Junior  
SQS 210, bloco D – Ap 505, Asa Sul.  
70.273-040 Brasília – DF – Brasil.

## AGRADECIMENTOS

À Universidade de Brasília, instituição federal pública e gratuita, pela qualidade dos serviços prestados e a oportunidade de figurar em seu corpo Discente junto ao Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil - PECC.

Ao corpo Docente do PECC, cuja dedicação e seriedade aos trabalhos desenvolvidos são exemplos que sempre levarei comigo. Em especial, agradeço aos amigos e orientadores, professores José Luis Vital de Brito e Zenón José Guzmán Nuñez Del Prado por todo o apoio, ajuda e, principalmente, pela paciência que tiveram comigo. À Sra. Eva Veloso por todo o apoio dado a mim e aos alunos do PECC pela dedicação e o exemplo de amor ao trabalho.

Ao CNPq que, através de seu programa de capacitação, permitiu minha saída para o cumprimento de parte das atividades do curso. Em especial, agradeço aos colegas Cimei Borges Teixeira e Hugo Sergio Ungaretti pela compreensão e apoio.

Aos “confrades” da sala 16, Iuri, Ramom, Uruba, e todos os colegas do PECC pelo companheirismo e ajuda nas dificuldades. À amiga Nathalia Coelho Pereira pela ajuda com as figuras das torres eólicas. Ao Sr. Ronaldo dos Santos Custódio pelo envio de seu livro. Ao professor Olavo Leopoldino da Silva Filho pelas dicas sobre o funcionamento do software Maple.

À minha família, minha mãe, minha irmã, minhas tias e tios, primos, em especial meu primo Tércio pela ajuda na compra do computador. À minha Renata, pelo carinho e compreensão durante toda a caminhada.

Ao amigo Thomas Mailleux pela ajuda na resolução dos problemas computacionais e a companhia nos almoços. À todos os amigos que sempre estiveram ao meu lado, em especial, Ricardo dos Reis Teixeira Marinho, Marcos Pufal, Fernanda São Sabbas Tavares.

À minha mãe e a memória de minha avó  
Derly Rodrigues dos Santos

## **RESUMO**

### **ANÁLISE DINÂMICA DE TORRES DE ENERGIA EÓLICA**

**Autor: Cyrio Fleremosch Dellezzopolles Junior**

**Orientador: José Luis Vital de Brito**

**Co-orientador: Zenón José Guzmán Nuñez Del Prado**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, dezembro de 2011**

Neste trabalho estuda-se o comportamento dinâmico de torres de aerogeradores utilizando-se a teoria de Euler-Bernoulli com acoplamento torre-aerogerador. O corpo da torre é considerado uma estrutura metálica uniforme, como uma viga engastada, de secção circular cujo momento de inércia é constante. O aerogerador, composto pelas pás da turbina, rotor e nascele, é considerado como uma massa conectada à extremidade da torre e sujeita a carregamentos dinâmicos. A análise não-linear é feita levando-se em conta o acoplamento da torre eólica e do aerogerador. Deduziu-se uma equação não-linear para modelar o comportamento da torre eólica baseada no método variacional de Hamilton onde se aplicaram carregamentos periódicos na extremidade da torre eólica. É mostrada a variação dos modos normais de vibração com a massa associada ao aerogerador. A equação diferencial parcial não-linear obtida foi transformada em um sistema de equações de segunda ordem no tempo através do método de discretização de Galerkin. As equações obtidas na solução do sistema dinâmico torre-aerogerador são utilizadas para estudar a resposta dinâmica do sistema quando submetido à cargas periódicas. Baseando-se nestas respostas mostra-se o papel da variação de cada parâmetro da equação na resposta não-linear e linear da torre eólica.

## **ABSTRACT**

### **WIND TOWERS DYNAMIC ANALISYS**

**Author: Cyrio Fleremosch Dellezzopolles Junior**

**Supervisor: José Luis Vital de Brito**

**Supervisor: Zenón José Guzmán Nuñez Del Prado**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, December of 2011**

In this paper we study the dynamic behaviour of wind turbine towers using the Euler-Bernoulli theory of coupled tower-turbine. The body of the tower is considered a uniform metallic structure, such as an embedded beam of circular cross section whose moment of inertia is constant. The wind turbine, comprising the turbine blades, rotor and nacelle, is regarded as a mass attached to the end of the tower and subject to dynamic loading. The nonlinear analysis is performed taking into account the coupling of wind tower and turbine. It was deduced a nonlinear equation to model the behaviour of the wind tower based on Hamilton's variational method where periodic loads are applied at the end of the wind tower. It is shown the variation of the normal modes of vibration associated with the mass of the turbine. The partial differential nonlinear equation obtained was transformed into a system of second order in time equations by the Galerkin discretization method. The equations obtained in the solution of the dynamic system, wind turbine tower are used to study the dynamic response of the system when subjected to periodic loads. Based on these responses one shows the role of variation of each parameter of the equation in the nonlinear and linear response of wind tower.

## SUMÁRIO

<b>1- INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1- MOTIVAÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>1.2- OBJETIVOS.....</b>	<b>4</b>
<b>1.3- METODOLOGIA .....</b>	<b>4</b>
<b>1.4- ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....</b>	<b>4</b>
<b>2- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>6</b>
<b>2.1- HISTÓRIA DO DESENVOLVIMENTO DOS AEROGERADORES.....</b>	<b>6</b>
<b>2.2- DESCRIÇÃO DOS AEROGERADORES .....</b>	<b>10</b>
<b>3- FORMULAÇÃO MATEMÁTICA .....</b>	<b>17</b>
<b>3.1- DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DO MOVIMENTO.....</b>	<b>17</b>
<b>3.2- DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO LINEAR DO MOVIMENTO .....</b>	<b>36</b>
<b>3.3- DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DE GALERKIN .....</b>	<b>43</b>
<b>4- APLICAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>	<b>46</b>
<b>5- CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>56</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>57</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>63</b>
<b>APÊNDICE B .....</b>	<b>64</b>
<b>APÊNDICE C .....</b>	<b>65</b>
<b>APÊNDICE D .....</b>	<b>66</b>



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1-1 – Capacidade global instalada (em MW) nos anos de 2009 e 2010 na América Latina e Caribe (GWEC, 2010). Os dados de Outros na tabela referem-se a Peru e Cuba.....	3
Tabela 2-1 – Lista de protótipos de aerogeradores desenvolvidos na segunda metade do século XX.....	8
Tabela 3-1 – Valores para a constante “a” que correspondem às raízes da Equação (3-94), parâmetros de frequência, obtidas por cálculo numérico.....	41
Tabela 4-1 – Valores para as quatro primeiras autofrequências em função do valor de $\Gamma$ . .....	46
Tabela 4-2 – Valores para as três primeiras autofrequências calculados com vários números de modos normais, de 2 a 12 modos, na solução-teste. ....	47

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1 - Capacidade instalada global acumulada, de 1996 a 2009 Global Wind Energy Council (GWEC, 2010). .....	1
Figura 1-2 - Os 10 maiores produtores e seus investimentos na capacidade instalada em 2009 (GWEC, 2010). .....	2
Figura 2-1 – À esquerda, foto de moinhos no verão siberiano de 1912, (Prokudin-Gorskii, 1912). À direita, cata-vento utilizado para bombeamento de água em salineiras no Brasil e seu dispositivo de segurança, pá à direita do rotor. ....	7
Figura 2-2 – Turbina ELSAM em Tjaereborg, Dinamarca. ....	9
Figura 2-3 – Protótipos americanos, o aerogerador de Putnam (Carl Wilcox, 1941) e os aerogeradores MOD 0 (Martin Brown, 1975) e MOD 1 (NASA, 1979). ....	9
Figura 2-4 - À esquerda: aerogerador HAWT e seus principais componentes. À direita, gerador Darrieus, exemplo de aerogerador VAWT. ....	10
Figura 2-5 – Esquema de pá de turbina e sua interação com o vento.....	11
Figura 3-1 – Sistema de coordenadas adotado, em vermelho, e relações entre a configuração indeformada e deformada para dois pontos, P e Q, na torre. ...	18
Figura 3-2 – Desenho esquemático da torre com os vetores normais unitário e tangente à linha central da torre e seu ângulo com a direção vertical, $\theta$ . ....	21
Figura 3-3 – O gráfico mostra a variação medida na potência produzida pelo gerador, na nacele, devido à posição das pás em uma volta do rotor.....	32
Figura 3-4 – À esquerda, perfil da velocidade do vento incidente no aerogerador e sua alteração depois da passagem pela turbina, vistas lateral e superior (Custódio, 2009). ....	33
Figura 3-5 – Os gráficos acima representam as funções de forma para os três primeiros modos normais. ....	42
Figura 4-1 – Variação dos valores obtidos para o parâmetro de frequência para diversos valores de $\Gamma$ , para todas as curvas $\gamma = 0$ . ....	48
Figura 4-2 – Gráfico mostrando a evolução dos valores da frequência fundamental em função da variação do valor absoluto de $\gamma$ para alguns valores de $\Gamma$ . ....	49
Figura 4-3 – Resposta para a vibração livre do primeiro modo, à direita, espaço de fase para a equação não-linear do movimento para $\tau = 3500$ . ....	50

Figura 4-4 – Oscilação com carregamento concentrado na extremidade da torre. Acima, à esquerda, espaço de fase para $0 < \tau < 500$ . Acima, à direita, espaço de fase para $400 < \tau < 500$ .....	51
Figura 4-5 – Carga gradual aplicada em cinco tipos de torres. O eixo vertical mostra a resposta das diferentes configurações de parâmetro de torre ao carregamento aplicado.....	53
Figura 4-6 – Carga súbita aplicada em três torres distintas. O eixo vertical mostra a resposta das diferentes configurações de parâmetro de torre ao carregamento aplicado.....	53
Figura 4-7 – Carga gradual aplicada a torre com parâmetro $\Gamma = 0.5$ e $\gamma = 0.3$ . O eixo vertical mostra a resposta ao carregamento aplicado. ....	54
Figura 4-8 – Resposta de duas torres distintas à variação da velocidade de rotação (adimensional) do rotor dos aerogeradores. ....	55

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	:área varrida em uma rotação da turbina.
$A_1$	:amplitude de vibração da torre.
$a$	:parâmetro de frequência.
$a_n$	:fator de indução da turbina eólica.
$C_t$	: coeficiente de empuxo adimensional.
$c$	:coeficiente de amortecimento da torre eólica.
$d$	:diâmetro médio da torre eólica.
$E$	:módulo de elasticidade.
$e$	:espessura da parede da torre eólica.
$f_a$	:força de arrasto devido a ação do vento na torre eólica.
$f_C$	:amortecimento adimensional.
$f_D$	: carregamento adimensional total induzido pelo vento na torre.
$F_C$	:amortecimento.
$F_D$	:carregamento total induzido pelo vento na torre.
$F_{DN}$	:carregamento do vento na nacele.
$F_{DT}$	:carregamento do vento torre eólica.
$g$	:aceleração da gravidade.
$I$	:momento de inércia da secção reta da torre.
$L$	:comprimento da torre eólica.
$\mathcal{L}$	:função Lagrangeano do sistema mecânico.
$m$	:massa da nacele.
$m$	:densidade linear de massa da torre eólica.
$\vec{N}$	:vetor normal unitário à curvatura $\kappa$ .
$\mathcal{O}(n)$	:ordem de grandeza de valor $n$ .
$P$	:distribuição linear da força peso da secção transversal da torre.
$p$	:expoente da lei potencial de variação de $S_2$
$q(\tau)$	:função do parâmetro adimensional de tempo na solução numérica dos sistemas de equações lineares e não-lineares.
$\vec{r}$	:vetor posição de um ponto qualquer ao longo da linha central da torre eólica
$S$	:posição ao longo da linha central da torre, configuração deformada.
$S_0$	:posição ao longo da linha central da torre, configuração indeformada.

$\mathcal{T}$	:energia cinética do sistema.
$\vec{T}$	:vetor tangente unitário à curvatura $\kappa$ .
$t$	:tempo em segundos.
$T_n$	:empuxo no rotor da turbina.
$u_P$	:deslocamento vertical do ponto P da torre.
$u_Q$	:deslocamento vertical do ponto Q da torre.
$V(\xi, \tau)$	:solução da equação adimensional linear para a torre no método de separação de variáveis.
$\vec{V}$	:vetor velocidade de um ponto da linha central da torre eólica.
$V_n$	:velocidade incidente do vento na nacele na altura do rotor da turbina.
$\mathcal{V}$	:energia potencial do sistema.
$\mathcal{V}_e$	:energia potencial elástica do sistema.
$\mathcal{V}_g$	:energia potencial gravitacional do sistema.
$v_P$	:deslocamento horizontal do ponto P da torre.
$v_Q$	:deslocamento horizontal do ponto Q da torre.
$\mathcal{W}$	:trabalho de forças não conservativas no sistema.
$X$	:variável de coordenada na direção do eixo $\hat{i}$ , configuração indeformada.
$x$	:variável de coordenada na direção do eixo $\hat{i}$ , configuração deformada.
$X_P$	:posição do ponto P da torre na direção do eixo $x$ , configuração indeformada.
$X_Q$	:posição do ponto Q da torre na direção do eixo $x$ , configuração indeformada.
$x_P$	:posição do ponto P da torre na direção do eixo $x$ , configuração deformada.
$x_Q$	:posição do ponto Q da torre na direção do eixo $x$ , configuração deformada.
$Y$	:variável de coordenada na direção do eixo $\hat{j}$ , configuração indeformada.
$Y(\tau)$	:função adimensional do parâmetro de tempo no método de separação de variáveis.
$y$	:variável de coordenada na direção do eixo $\hat{j}$ , configuração deformada.
$Y_P$	:posição do ponto P da torre na direção do eixo $y$ , configuração indeformada.
$Y_Q$	:posição do ponto Q da torre na direção do eixo $y$ , configuração indeformada.
$y_P$	:posição do ponto P da torre na direção do eixo $y$ , configuração deformada.
$y_Q$	:posição do ponto Q da torre na direção do eixo $y$ , configuração deformada.
$\delta$	:operador variacional ou, conforme o caso, função delta de Dirac.
$\varepsilon$	:deformação da torre ao longo de linha central da torre eólica.

$\phi(\xi)$	:função adimensional do parâmetro de comprimento no método de separação de variáveis.
$\mu$	:amplitude do cosseno no carregamento da torre eólica.
$\gamma$	: coeficiente adimensional da equação de movimento que relaciona a inércia e a rigidez da torre eólica.
$\Gamma$	:coeficiente adimensional da equação de movimento que representa a razão entre a massa da nacela e a massa da torre.
$\eta$	:deslocamento transversal adimensional da torre eólica.
$\kappa$	:curvatura da torre eólica.
$\theta$	:ângulo entre o vetor tangente à curvatura da linha central e o eixo horizontal.
$\rho$	:densidade do ar
$\tau$	:coeficiente adimensional de tempo.
$\Omega$	:frequência de rotação da turbina eólica em Hertz.
$\omega_0$	:parâmetro de frequência adimensional.
$\omega_r$	:frequência adimensional.
$\xi$	:comprimento adimensional da torre eólica.
$\psi$	:função de comparação no método de Galerkin
$\sigma$	:constante definida para o cálculo de $\phi(\xi)$

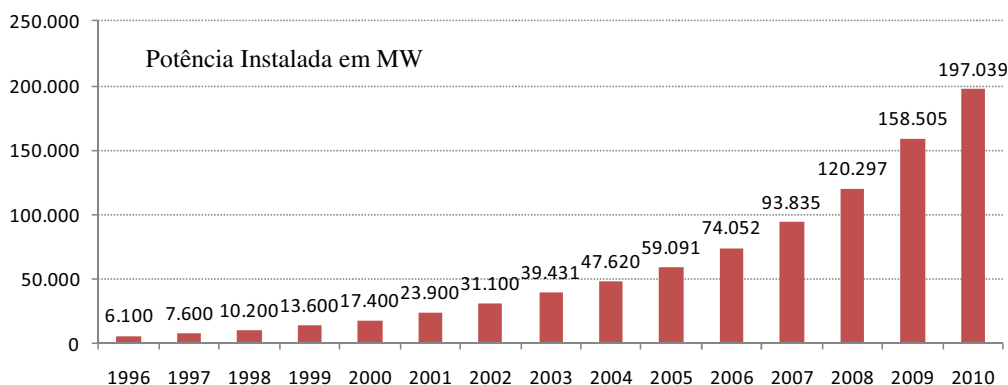
## NOMENCLATURA E ABREVIACOES

BEM	:Método do Momento do Elemento de P.
CFD	:Computer Fluid Dynamics
CRESESB	:Centro de Referência para Energia Solar e Eólica Sérgio de Salvo Brito
CMW	:Turbina de Classe Megawatt
DQM	:Differential Quadrature Method
DWEA	:Danish Wind Industry Association
DS	:Dynamic Stall Model
EWEA	:European Wind Energy Association
GWEC	:Global Wind Energy Council
HAWT	:Horizontal Axis Wind Turbine
MDOF	:Multi-degree-of-freedom
MEF	:Método dos Elementos Finitos
offshore	:estrutura construída no mar, ao longo da costa.
VAWT	:Vertical Axis Wind Turbine.
yawing	:movimento de torção da torre no plano paralelo  base.
downwind	:aerogerador que recebe o vento incidente primeiro pela torre e nacele.
upwind	:aerogerador que recebe o vento incidente primeiro pela turbina.

# 1-INTRODUÇÃO

## 1.1- MOTIVAÇÃO

A busca por soluções que mantenham o modo de vida na sociedade atual de forma ambientalmente sustentável é hoje uma obsessão mundial. A conscientização do aquecimento global como problemática real e atual é o motor das iniciativas que buscam a utilização de fontes renováveis de energia e a busca por novas opções de geração de energia elétrica “limpa”. Várias iniciativas de aproveitamento da energia eólica são concretizadas ao redor do mundo, principalmente na Europa, Estados Unidos da América e China, onde os investimentos em fontes renováveis de energia são expressivos se comparados ao investido em escala global. A Figura 1-1 mostra o avanço do investimento mundial na capacidade instalada para o aproveitamento de energia eólica. Em 2009 os investimentos em energia eólica, pela primeira vez superaram os investimentos feitos em produção de energia elétrica proveniente da queima de combustíveis fósseis (GWEC, 2010).



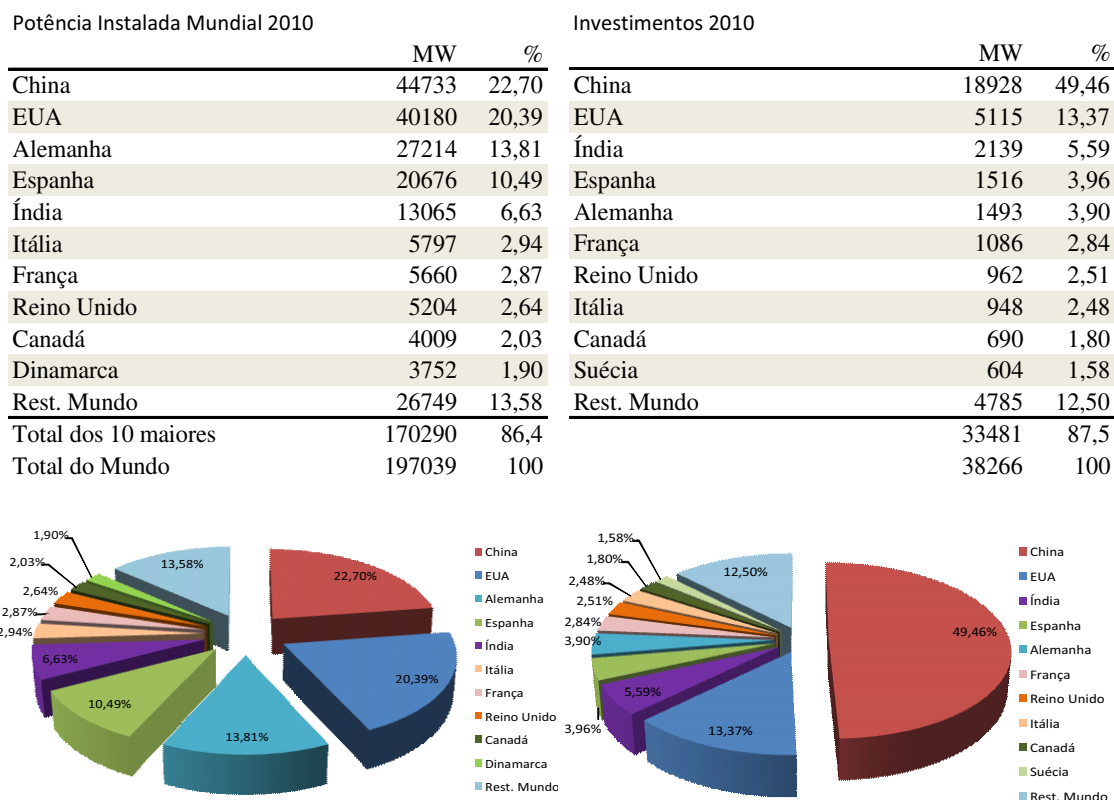
**Figura 1-1 - Capacidade instalada global acumulada, de 1996 a 2009 Global Wind Energy Council (GWEC, 2010).**

A iniciativa europeia na exploração dos recursos eólicos é antiga e se concentra na independência energética e integração de vários setores da sociedade para a execução de novos empreendimentos. A Europa não só se beneficia do aproveitamento eólico do continente, mas também vende equipamentos e tem uma indústria forte no setor, a exemplo da Dinamarca que estima ter movimentado 10% do mercado mundial de fabricação de



turbinas em 2009, apesar da crise mundial iniciada em 2008 (DWIA, 2010). A comunidade europeia tem ampliado sua participação na venda de equipamentos no mercado internacional, dado o elevado aquecimento do setor (EWEA, 2009), que emprega 192.000 pessoas nas mais diversas atividades do setor produtivo (EWEA, 2010).

Nos últimos 10 anos a China quadruplicou o seu investimento na geração de energia eólica, concentrando esforços no desenvolvimento de turbinas de Classe Megawatt (CMW), na ampliação de seus parques eólicos e na resolução de problemas de integração de sua matriz energética (Li Junfeng, 2007). Desde de o ano de 2008 a China é o país que mais investe em energia eólica no mundo. No ano de 2010 os recursos aplicados no aumento da potência instalada superaram 49% do investimento mundial total, Figura 1-2. Em 2010 a China se tornou o maior produtor mundial de energia eólica, alcançando a marca de 22,7% da capacidade instalada para geração de energia elétrica, seguidos de perto pelos EUA, com 20,39% da potência instalada mundial.



**Figura 1-2 - Os 10 maiores produtores e seus investimentos na capacidade instalada em 2009 (GWEC, 2010).**

No Brasil, embora haja divergências, a maioria dos estudos sobre o potencial eólico brasileiro indica o valor aproximado de 60.000 MW (Agência Nacional de Energia Elétrica, 2008), não considerando o elevado potencial de aproveitamento energético *offshore*. No âmbito nacional, foi publicado pelo Centro de Referência para Energia Solar e Eólica o Atlas do Potencial Eólico Brasileiro (CRESESB, 2001), fornecendo dados importantes sobre o regime eólico nacional. Não foi encontrado trabalho que avalie os investimentos nacionais e o seu retorno alinhado às necessidades específicas para a realidade brasileira, que levariam ao melhor aproveitamento do potencial eólico nacional.

O investimento brasileiro no setor deu um salto no ano de 2009 e a participação da energia eólica na matriz energética do país segue a proporção do restante do mundo. O Brasil ocupa o primeiro lugar em potência instalada na América Latina superando em quase duas vezes o segundo colocado, o México, Tabela 1-1.

**Tabela 1-1 – Capacidade global instalada (em MW) nos anos de 2009 e 2010 na América Latina e Caribe (GWEC, 2010). Os dados de Outros na tabela referem-se a Peru e Cuba.**

		Final de 2009	Novas em 2010	Total em 2010
América Latina e Caribe	Brasil	606	326	932
	México	202	316	518
	Chile	168	4	172
	Costa Rica	123	0	123
	Caribe	91	8	99
	Argentina	34	27	61
	Outros	83	23	106
	<b>Total</b>	<b>1307</b>	<b>704</b>	<b>2011</b>

Desde 2001 a potência instalada para a produção de energia elétrica a partir do vento quase duplica a cada três anos no mundo, Figura 1-1. A relevância da energia eólica no contexto do investimento mundial em novas fontes de energia e o fato do grupo de Dinâmica e Controle Estrutural da Universidade de Brasília ter experiência na análise dinâmica de torres de transmissão elétrica motivaram a elaboração do presente estudo.

## **1.2– OBJETIVOS**

Este trabalho tem como objetivo estudar a resposta dinâmica de torres de aerogeradores utilizando-se uma equação não-linear construída segundo a teoria de Euler-Bernoulli, com acoplamento torre-aerogerador, desenvolvida aplicando-se o princípio variacional de Hamilton. Objetiva-se ainda avaliar a resposta das torres eólicas, modeladas como descrito acima, frente ao carregamento aerodinâmico típico destes dispositivos comparando com o modelo linear do movimento.

## **1.3– METODOLOGIA**

A formulação da equação não-linear aplicada por Païdoussis (1974) ao problema de tubos condutores de fluido e a sua solução pelo método de Galerkin desenvolvida por Semler et al. (1994) serão adaptadas para a descrição da torre eólica. Aplica-se a formulação não-linear de vigas baseadas no princípio variacional de Hamilton para a construção de uma equação para o movimento da torre eólica. A mesma será estudada quando submetida ao carregamento na torre devido ao vento e às cargas dinâmicas do aerogerador aplicadas na nacele. Todos os carregamentos serão acoplados à equação não-linear obtida.

As equações diferenciais parciais não-lineares serão transformadas em um sistema de equações de segunda ordem no tempo através do método de discretização de Galerkin utilizando-se como solução de partida as equações para o movimento linear, e juntamente com os métodos numéricos, será analisada a resposta da torre eólica submetida ao carregamento aplicado.

## **1.4– ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

No capítulo 1 apresenta-se o tema em seu contexto atual no mundo, a produção de energia elétrica. São apresentados os dados sobre a utilização da energia eólica fornecidos pelas entidades mais representativas do setor no mundo.

O capítulo 2 traz uma descrição sucinta do que é uma torre eólica, bem como um resumo do que foi feito para modelar o comportamento destas torres, como começou a ser descrito

o problema e seu desenvolvimento até então. É feita uma breve explanação dos fenômenos mais comuns que ocorrem na dinâmica de torres eólicas.

O capítulo 3 apresenta a formulação matemática do problema. É deduzida uma equação não-linear adimensional para o movimento da torre e são especificadas as condições de contorno para uma torre metálica de seção circular. É apresentada a solução da equação diferencial estudada pelo método de Galerkin e o papel de cada termo da solução na resposta discreta.

O capítulo 4 mostra a resposta dinâmica da torre eólica em função de alguns carregamentos típicos de torres eólicas abordados neste trabalho. Por fim, o capítulo 5 conclui o trabalho com algumas recomendações.

O apêndice A mostra a relação entre a deformação da torre eólica ao longo de seu eixo central e os sistemas de coordenadas utilizados neste trabalho.

No apêndice B é mostrada a dedução de expressões para a curvatura da linha central da torre eólica, estas equações são fundamentais na dedução da equação não-linear do movimento.

O apêndice C mostra o desenvolvimento da Equação de Euler-Lagrange para alguns funcionais de interesse na dedução da equação não-linear do movimento baseada no método variacional de Hamilton.

O apêndice D traz o desenvolvimento de Galerkin para a equação não-linear deduzida. Cada parcela da equação foi generalizada para  $n$  modos normais de maneira a exemplificar como as parcelas da equação não-linear foram desenvolvidas computacionalmente.

## **2- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1- HISTÓRIA DO DESENVOLVIMENTO DOS AEROGERADORES**

Os primeiros registros de moinhos de vento referem-se aos dispositivos de eixos verticais afegãos que existiram por volta de 1700 A.C. e foram utilizados na moenda de grãos. Aparatos de eixo horizontal utilizados para o mesmo fim são citados em documentos persas, tibetanos e chineses de 1000 A.C. (Ackermann, 2002). Por influência das Cruzadas a configuração de eixo horizontal se espalhou pelo Oriente Médio, Mediterrâneo e Europa, por volta do século XII, e influenciou o desenho dos aparatos portugueses, holandeses e dinamarqueses que hoje figuram em cartões postais mundo afora.

Entre os séculos XII e XIX a performance dos moinhos foi melhorada continuamente. Em 1800 aproximadamente 20000 moinhos estavam em operação somente na França e 90% da energia mecânica utilizada na indústria holandesa vinha do vento (Ackermann, 2002). Os moinhos de vento, que eram vistos do sul até o extremo norte da Europa, Figura 2-1, foram introduzidos nos Estados Unidos da América por colonizadores europeus onde ficaram muito populares no bombeamento de água de poços.

A “rosa dos ventos”, comumente chamada de cata-vento, foi a primeira turbina eólica fabricada no mundo. Este moinho de múltiplas pás foi desenvolvido nos Estados Unidos da América entre 1850-1860 por Daniel Halladay, um dos primeiros fabricantes. O cata-vento americano possuía um dispositivo mecânico, uma grande pá paralela ao plano da turbina, cuja função era girar a turbina sobre seu eixo vertical de maneira a proteger o aparelho em situações onde a força do vento poderia danificar as pás da turbina. No Brasil, é muito comum ver este modelo de turbina nas salineiras de Cabo Frio onde eram utilizadas para bombear água, Figura 2-1.

Os primeiros experimentos em uma turbina eólica com a finalidade de gerar eletricidade foram conduzidos pelo Físico, Meteorologista e Professor de nível médio dinamarquês, Poul la Cour. Seu trabalho no estudo da aerodinâmica das pás da turbina foi revolucionário para a época e resultou em dois modelos de turbina financiados pelo governo dinamarquês, o primeiro em 1891 e o segundo em 1897 (Ackermann, 2002). Os aparatos de la Cour eram

muito parecidos com moinhos de vento, as turbinas foram montadas sobre um prédio de dois andares.

O precursor dos aerogeradores modernos surgiu na Dinamarca em 1941, construído pela empresa F.L. Smidth, e utilizava aerofólios no lugar de pás de arrasto, além de possuir controle de velocidade do rotor pela variação do perfil das pás da turbina. A motivação dinamarquesa foi resultado da escassez de energia devido a segunda grande guerra. Na mesma época surgiu nos Estados Unidos da América uma enorme turbina, com 53 metros de diâmetro de rotor, projetada por uma equipe de engenheiros coordenados por Palmer Putnam sob encomenda de uma empresa fabricante de geradores hidrelétricos. A turbina americana era baseada em uma filosofia diferente de funcionamento, onde o rotor vertical recebia o vento por trás da torre e o controle de velocidade do rotor se dava pela variação do ângulo de ataque das pás da turbina, cuja velocidade de funcionamento era considerada elevada (Ackermann, 2002).



**Figura 2-1 – À esquerda, foto de moinhos no verão siberiano de 1912, (Prokudin-Gorskii, 1912). À direita, cata-vento utilizado para bombeamento de água em salineiras no Brasil e seu dispositivo de segurança, pá à direita do rotor.**

Depois da segunda grande guerra a matriz energética mundial baseou-se no petróleo e o desenvolvimento privado de aerogeradores restringiu-se a iniciativas individuais que culminaram nas empresas que produziam aparelhos de pequeno porte. A grande maioria destas empresas foi impulsionada pelas políticas de investimento público em energias

renováveis que resultaram da crise do petróleo, no final da década de 70. Mais de 30 anos depois, o investimento aplicado na construção de alguns protótipos de aerogeradores financiados com recursos estatais e privados deu continuidade aos estudos que levaram aos atuais padrões de projeto dos aerogeradores comerciais modernos com mais de 1MW de capacidade. As empresas européias e americanas fomentadas na década de 70, somadas às indianas e chinesas, formam a infraestrutura da atual indústria mundial de aerogeradores.

A Tabela 2-1 mostra uma listagem dos protótipos de turbina e algumas de suas características. A motivação para a construção destes protótipos veio da necessidade de testar modelos que agregassem confiabilidade e segurança aos aerogeradores comerciais. No início da década de 1980, a potência da turbina de vento típica era inferior a 100 kW. No final dos anos 1980 e início de 1990, a potência da turbina aumentou de 100 para 500 kW. Além disso, em meados da década de 1990, a potência típica variou de 750 a 1000 kW. No fim dos anos 1990, a potência da turbina tinha ido até 2500kW (Joselin Herbert et al., 2007). Em 2008, as maiores turbinas que estavam disponíveis no mercado tinham entre 3,6 MW e de 5MW. Em 2009, a Noruega anunciou a construção da maior turbina no mundo com uma capacidade de 10MW, confirmando a tendência de desenvolvimento de turbinas com capacidade superior a 3 MW (Michalak; Zimny, 2011).

**Tabela 2-1 – Lista de protótipos de aerogeradores desenvolvidos na segunda metade do século XX.**

Aerogerador	País	Diametro da Turbina	Velocidade (rpm)	Número de pás	Potência (kW)	Período
GEDSER	Dinamarca	24	30	3	200	1957-1967
NASA/DOE MOD-0	EUA	38,1	40	2	100	1974-1988
NASA/DOE MOD-0A	EUA	38,1	-	2	200	1977-1979
NIBE A	Dinamarca	40	34	3	630	1979
NASA/DOE MOD-1	EUA	61	-	2	2000	1979-1981
Maglarp	Suécia	78	25	2	3000	1981-1992
Näsudden	Suécia	75	25	2	2000	1982
NASA/DOE WTS-4	EUA	78,2	-	2	4000	1982-1994
ELSAM	Dinamarca	61	-	3	2000	1989-2001
Aeolus II	Alemanha	75	-	2	3000	1992
Näsudden II	Suécia	80	14/21	2	3000	1993

Assim, com o aumento da potência, e, por conseguinte, do diâmetro dos rotores produzidos em escala nos últimos 30 anos houve a necessidade de aperfeiçoar os métodos de análise e simulação dos componentes dos aerogeradores. Os protótipos não comerciais figuraram

como verdadeiras bancadas de testes. Da simples simulação estática à análise dinâmica baseada na resposta aeroelástica da turbina, rotor, nacele e torre, as ferramentas de cálculo, ou seja, os pacotes numéricos para cálculo dos esforços nas estruturas tiveram que ser aperfeiçoados para levar em conta cada vez mais as especificidades aplicadas ao comportamento e fenomenologia de aerogeradores cada vez maiores (Hansen et al., 2006).



**Figura 2-2 – Turbina ELSAM em Tjaereborg, Dinamarca.**



**Figura 2-3 – Protótipos americanos, o aerogerador de Putnam (Carl Wilcox, 1941) e os aerogeradores MOD 0 (Martin Brown, 1975) e MOD 1 (NASA, 1979).**

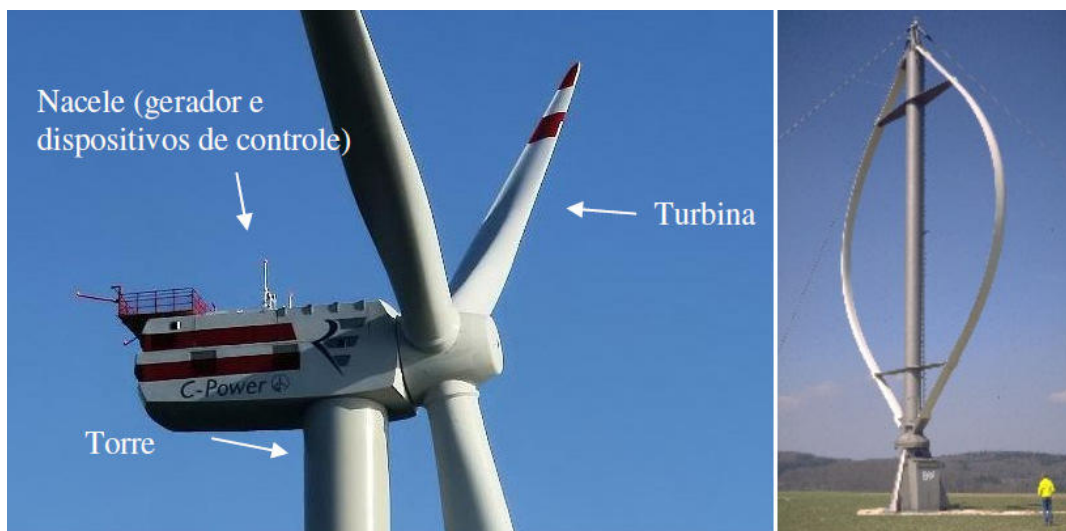
As torres utilizadas nos protótipos citados na Tabela 2-1 foram construídas em sua grande maioria em concreto, treliça metálica ou tubos metálicos. A turbina ELSAM em



Tjaereborg, Dinamarca, possuía uma torre de 60 metros de altura e foi construída em concreto (Ahlström, 2005), Figura 2-2. Na Figura 2-3 podem ser vistas as torres de treliça metálica dos protótipos americanos da NASA, MOD-0 e MOD-1. Nos aerogeradores comerciais modernos as torres são, em sua grande maioria, metálicas tubulares.

## 2.2- DESCRIÇÃO DOS AEROGERADORES

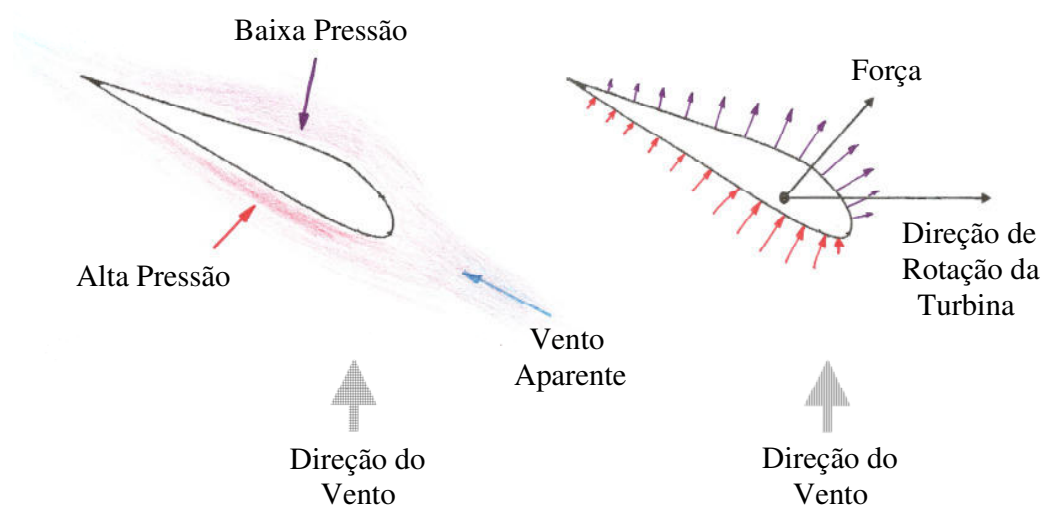
Aerogeradores são equipamentos cuja função é a conversão da energia cinética do vento em energia elétrica. Basicamente pode ser dividido em turbina, sistemas de controle, gerador e torre, conforme Figura 2-4.



**Figura 2-4 - À esquerda: aerogerador HAWT e seus principais componentes. À direita, gerador Darrieus, exemplo de aerogerador VAWT.**

As turbinas podem ser classificadas quanto à maneira com que interagem com o vento e também quanto à disposição do eixo para o qual é transmitido o movimento mecânico. São dois tipos de interação das pás: por arraste ou sustentação (Ackermann, 2002). No primeiro, as pás da turbina são empurradas pelo vento incidente, a exemplo do que acontece com os anemômetros. Nas turbinas de arraste a velocidade das pás nunca é maior que a do vento sendo este um fator limitante para sua eficiência. No segundo tipo de interação, as pás da turbinas têm o formato de um aerofólio onde o vento trabalha empurrando as pás, como nas turbinas de arraste, mas o fluxo de ar pelas pás também faz surgir uma força de sustentação que aumenta a eficiência da turbina (Ackermann, 2002;

Custódio, 2009). Na Figura 2-5 pode-se observar, em desenho esquemático, o fluxo aparente do vento em relação à pá mostrando as regiões de alta e baixa pressão formadas. À direita pode ser visto a resultante das forças aerodinâmicas sobre a pá.



**Figura 2-5 – Esquema de pá de turbina e sua interação com o vento.**

Quanto à disposição do eixo as turbinas podem ser de eixo vertical, Vertical Axis Wind Turbine – VAWT, ou de eixo horizontal, Horizontal Axis Wind Turbine - HAWT. São exemplos de turbinas de eixo vertical, Darrieus, Savonius e Giromill. A vantagem da turbina de eixo vertical é que a disposição facilita a operação de manutenção, visto que a instalação do gerador fica junto ao solo e não há a necessidade de dispositivos direcionais. Como desvantagem, a VAWT tem tamanho limitado pelo momento gerado no suporte do dispositivo, inviabilizando seu uso em projetos de grande porte (Custódio, 2009), Figura 2-4.

O número de pás das turbinas comerciais do tipo HAWT pode variar de uma a quatro pás. Quanto maior é o número de pás, menor é a velocidade de rotação e maior o torque sobre o eixo do rotor, por esta razão os cata-ventos são tão eficientes no bombeamento de água de poços (Ackermann, 2002; Custódio, 2009). Turbinas com três pás emitem menos ruídos sonoros que turbinas com duas pás em virtude de possuírem menor velocidade de giro do rotor, o que constitui característica importante se instaladas em regiões urbanas (Ackermann, 2002).

A nacelle do aerogerador abriga os dispositivos e sistemas de controle, o gerador, o freio de estacionamento da turbina e as caixas de transmissão mecânica e elétrica. Este último pode situar-se também na base da torre eólica. O tipo de gerador depende de características de instalação do aerogerador, se sozinho ou componente de parque eólico, do tipo de aplicação e do tipo rede onde será instalado o aerogerador ou parque eólico (Custódio, 2009). O gerador e os sistemas de apoio também interagem com a turbina, cuja rotação é contida pelo freio para que não passe da velocidade limite de trabalho do dispositivo gerador.

As turbinas do tipo HAWT são as que têm o maior aproveitamento de energia do vento (Ackermann, 2002). Este tipo de turbina também é a mais utilizada nos projetos modernos de aerogeradores de classe Megawatt, mas necessita ser posicionada a uma altura compatível com as características do local onde está sendo instalada para o melhor aproveitamento do vento (Ackermann, 2002). A torre é o componente cuja função principal é posicionar a turbina na melhor altura de trabalho, onde o desempenho do aerogerador é otimizado (Custódio, 2009). As torres podem ser de dois tipos: tubular cilíndrica, cônica ou treliçada. As torres cônicas podem apresentar-se em concreto ou aço.

As turbinas HAWT são estruturas extremamente dinâmicas sujeitas a distribuições complexas de cargas aerodinâmicas (Hansen et al., 2006). As torres que suportam estas turbinas eólicas estão submetidas à ação do comportamento dinâmico do aerogerador e do vento. Há efeito de outros tipos de carregamento resultantes do meio no qual o sistema é montado, exemplo das estruturas *offshore*, onde a ação das ondas do mar é relevante. Portanto é o vento a causa primeira de todos os esforços dinâmicos. As pás da turbina interagem com o ar, cujo comportamento turbulento tipifica um carregamento estocástico. Devido a este fato, inicialmente, o tratamento dispensado ao estudo das pás do rotor de aerogeradores, na década de 70, valeu-se do estudo do comportamento dinâmico das pás de helicópteros (Pereira, 1993). O desenvolvimento de aerofólios para a aplicação específica em HAWT começou em 1984. Novos aerofólios foram desenvolvidos para atender as demandas específicas da turbina de aerogeradores. Isso resultou em uma maior eficiência de captura de energia, assim as pás da turbina, com perfis específicos para as turbinas de vento, ao invés dos aeronáuticos, aumentaram em 20% a eficiência dos rotores (Joselin Herbert et al., 2007).

Os fenômenos oscilatórios e restrições da rede elétrica, no controle da frequência da rede, por exemplo, também recebem tratamento, ou modelagem, específico (Hansen et al., 2006). O subsistema composto pela turbina e todos os componentes abrigados pela nacelle aplicam esforços sobre a torre que os sustenta e, por fim, o movimento desta última altera a resposta daquele subsistema (Hansen et al., 2006).

Como parte do processo de projeto, uma turbina eólica deve ser analisada para carregamentos aerodinâmicos, gravitacionais, inerciais e operacionais que irão experimentar durante sua vida útil. Os modelos aeroelásticos que descrevem a resposta do sistema podem ser divididos em uma parte aerodinâmica, para determinação das cargas do vento, e outra parte estrutural que dá o comportamento dinâmico da estrutura. Vários modelos matemáticos foram desenvolvidos para o cálculo destas cargas estruturais. Uma breve referência a esses modelos matemáticos será apresentada a seguir, bem como alguns estudos considerados relevantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Païdoussis e Issid (1974) fez uma extensa revisão das equações não lineares de movimento baseadas na teoria de vigas de Euler-Bernoulli aplicadas ao problema de dutos flexíveis conduzindo fluidos.

Shaw e Pierre (1994) desenvolveu uma metodologia diferenciada para a solução de sistemas descritos por equações diferenciais parciais não-lineares aplicáveis a sistemas bidimensionais, exemplos foram apresentados para o caso de vigas em balanço e os resultados comparados com as soluções dos problemas lineares. Semler et al. (1994) deduziram, pelo método variacional e newtoniano, uma equação não-linear de movimento baseadas na teoria de vigas de Euler-Bernoulli aplicadas ao problema de dutos flexíveis em balanço.

Kitagawa et al (1997) estudaram a resposta de uma torre cilíndrica, com uma de suas extremidades engastada, em túnel de vento e concluíram que a taxa de amortecimento da torre sofre alterações em regime turbulento.

Païdoussis e Semler (1998) estudaram teórica e experimentalmente o comportamento de dutos de rigidez não desprezíveis, com massas anexadas a suas extremidades, conduzindo

fluidos em movimento planar. Foi desenvolvida também uma metodologia específica para a solução da equação não-linear do sistema.

Negm e Maalawi (2000) estudaram uma estratégia de otimização para o projeto de uma torre eólica para um aerogerador de 100 kW (NASA MOD-0). O movimento da torre e da nacele foram considerados separadamente na análise que resultou em importantes modificações de projeto.

Thiringer e Dahlberg (2001) mediram as oscilações de potência geradas por uma torre com rotor de três pás operando sob diferentes condições de vento e turbulência e verificaram que há grandes variações de potência quando a torre oscila no plano perpendicular ao solo e à direção do vento.

Bazeos (2002) estudou o comportamento da torre metálica de um protótipo de aerogerador de 450 kW sob condições de carregamento sísmico. A torre foi modelada utilizando-se o Método dos Elementos Finitos – MEF, e evidenciou-se a presença de cargas críticas no modelo. Lavassas (2003) analisou comportamento de uma torre tubular metálica de 44 metros de altura de um aerogerador de 1 MW, utilizando o MEF, onde foram aplicados carregamentos do vento, sísmico e gravitacional. Foram verificadas características críticas relativas à fadiga e a cargas sísmicas, muito comuns em algumas regiões da Europa.

Sarkar e Païdoussis (2004) propuseram uma solução discreta para a equação diferencial parcial não-linear aplicada aos dutos com fluido em escoamento baseada no método de Galerkin, onde as soluções teste são as soluções para viga em balanço segundo a teoria de Euler-Bernoulli.

Murtagh e al. (2005) estudaram a resposta dinâmica no domínio do tempo da torre eólica acoplada à turbina, em um modelo de vários graus de liberdade (Multi-degree-of-freedom – MDOF), e constataram que a interação entre os dois componentes amplifica a resposta da ponta da torre.

Maalawi (2007) desenvolveu uma formulação matemática para o estudo da torção em torres cilíndricas – *yawing*. O modelo desenvolvido considerou a interação entre torre,

nacele e turbina e resultou em tabelas para previsão de falhas baseadas nas frequências dos modos normais dos componentes do aerogerador.

Uys et al. (2007) propuseram uma função de minimização baseada no custo econômico de torres metálicas cilíndricas de seção circular e encontraram um formato ideal levemente cônico que deve levar em consideração os requisitos aplicáveis a estruturas delgadas.

Lanzafame e Messina (2007) propuseram um modelo matemático baseado no Método do Momento do Elemento de Pá (*Blade Element Momentum* – BEM), modificado e obtiveram a melhoria da previsão do aproveitamento de energia das pás do aerogerador.

Mahmoodi (2008) analisou a vibração de uma barra em balanço excitada por atuador externo com um modelo viscoelástico com amortecimento de Kevin-Voigt. Os resultados mostraram que o aumento da amplitude da excitação ou a diminuição da taxa de amortecimento podem causar um decréscimo da frequência não-linear de ressonância.

Chen et al. (2009) analisaram o acoplamento pá-torre do aerogerador utilizando MEF e a superposição modal com equações lineares. Foi verificada discrepância da ordem de 300% nos resultados das análises de resposta da torre segundo as duas formulações, acoplada e desacoplada.

Gebhardt et al. (2010) desenvolveram uma ferramenta computacional baseada em métodos de análise da aerodinâmica para o estudo do fluxo não-linear e não estacionário do vento através da turbina e suas alterações devido a presença da torre e os efeitos da mesma na eficiência do aerogerador.

Wang et al. (2010) estudaram a rigidez das torres de aerogeradores modernos utilizando a teoria de cascas em um modelo linear baseado em MEF para descrever o comportamento dinâmico devido ao acoplamento pás-torre de uma turbina elólica.

Kessentini et al. (2010) investigaram os efeitos da mudança na orientação das pás flexíveis de uma turbina HAWT na vibração do aerogerador. O problema de autovalores é resolvido pelo método da quadratura diferencial (*Differential Quadrature Method* – DQM). Verificou-se que o acoplamento pá-torre, para pequenas vibrações da torre, induz

expressiva resposta nas pás do aerogerador, embora as modificações na orientação das pás não tenham afetado o comportamento dinâmico do aerogerador.

Daí et al. (2011) propuseram uma nova formulação para o cálculo do carregamento utilizando-se o modelo do Método do Momento do Elemento de Pá (BEM) modificado associado ao Modelo de *Stall* Dinâmico (*Dynamic Stall Model – DS*) semi-empírico em perfis de pá padronizados. Foi considerada a interação da torre com as pás da turbina, bem como a rotação das pás em torno de seu eixo. Os resultados foram comparados com os obtidos na literatura para o método baseado em Dinâmica dos Fluidos Computacional (*Computer Fluid Dynamics – CFD*) mostrando boa concordância e baixo custo computacional. Li et al. (2011) verificaram como se dá o incremento da resposta da torre com o aumento da velocidade do vento. O método da superposição modal foi utilizado para simular o carregamento do vento ao longo do tempo, o carregamento nas pás foi modelado pelo método BEM e aplicado na extremidade da torre.

### **3– FORMULAÇÃO MATEMÁTICA**

#### **3.1– DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DO MOVIMENTO**

A análise dinâmica da torre partiu do estudo da equação de viga para o movimento bidimensional de uma estrutura cilíndrica homogênea, com distribuição de massa constante ao longo de seu comprimento. Basicamente, assumiu-se que o diâmetro da secção reta da torre é pequeno se comparado com seu comprimento, de forma que a teoria de Euler-Bernoulli seja válida, que o movimento da secção reta da torre é planar, que as deformações por cisalhamento e rotacionais são desprezíveis, que não há deformação da linha central da torre, e por fim, que apesar de grandes deflexões serem possíveis, estas implicam em pequenas deformações. Iniciou-se pela montagem das equações diferenciais que descrevem o movimento da torre segundo a teoria de Euler – Bernoulli.

Primeiramente serão apresentados dois conceitos básicos: sistema de coordenadas e inextensibilidade. Em seguida, será deduzida uma equação não-linear aplicando-se o princípio variacional de Hamilton ao problema do movimento da torre eólica livre de ações externas.

Dois sistemas podem ser utilizados na descrição da torre segundo a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, via coordenadas eulerianas ou lagrangeanas. É fundamental estabelecer a diferença entre os dois para a montagem da equação do movimento da torre.

O conceito de inextensibilidade refere-se à deformação da linha central da torre eólica, que pode ser considerada inextensível, ou seja, com deformação nula. Esta condição deve ser representada segundo os sistemas de coordenadas utilizados.

A descrição do sistema mecânico em estudo é feita via coordenadas eulerianas ou lagrangeanas. As primeiras referem-se à configuração da estrutura deformada, enquanto as últimas à configuração indeformada da torre. Considerando a torre eólica como uma barra contínua, na descrição euleriana, as deflexões de cada ponto da torre podem ser representadas por suas coordenadas no espaço. Na descrição lagrangeana o movimento é representado pelo deslocamento dos pontos a partir de sua posição no espaço no instante de



tempo inicial ( $t=0$ ), nesta dissertação esta posição coincide com o eixo vertical no espaço, chamada configuração indeformada. A Figura 3-1 mostra a relação entre as configurações indeformada e deformada da torre descritas pela Equação (3-1) e Equação (3-2).

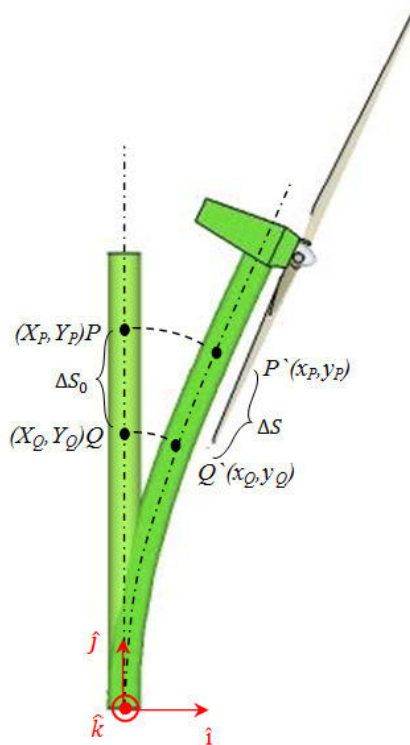
$$\Delta X = X_P - X_Q \quad \Delta x = x_P - x_Q \quad (3-1)$$

$$\Delta Y = Y_P - Y_Q \quad \Delta y = y_P - y_Q \quad (3-2)$$

A deflexão da torre também pode ser definida como o deslocamento dos pontos ao longo de sua linha central a partir do ponto de equilíbrio, conforme a Equação (3-3) e a Equação (3-4).

$$u_P = x_P - X_P \quad u_Q = x_Q - X_Q \quad (3-3)$$

$$v_P = y_P - Y_P \quad v_Q = y_Q - Y_Q \quad (3-4)$$



**Figura 3-1 – Sistema de coordenadas adotado, em vermelho, e relações entre a configuração indeformada e deformada para dois pontos, P e Q, na torre.**

O conceito de inextensibilidade se justifica pela configuração das cargas utilizadas na descrição do problema. Embora haja carregamento axial devido à nacele, para pequenos deslocamentos da torre, não há influência destas deformações no comportamento dinâmico, isto é, o comprimento da linha central da torre permanece inalterado enquanto a torre oscila. Neste trabalho considera-se que as deformações ao longo do eixo central da torre não sofrem alterações. Assim, verifica-se o exposto na Equação (3-5) e na Equação (3-6).

$$(\Delta S_0)^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 \quad (3-5)$$

$$X_P = X_Q \rightarrow \Delta X = 0 \quad (3-6)$$

Substituindo-se a Equação (3-6) na Equação (3-5) chegamos à Equação (3-7) que nos mostra o comprimento da torre na configuração indeformada.

$$(\Delta S_0)^2 = (\Delta Y)^2 \quad (3-7)$$

O comprimento da torre na configuração deformada é representado pela Equação (3-8)

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad (3-8)$$

A diferença entre o comprimento da torre nas configurações deformada e indeformada pode então ser determinado pela diferença entre as Equações (3-8) e (3-7).

$$(\Delta S)^2 - (\Delta S_0)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (\Delta Y)^2 = \left[ \left( \frac{\Delta x}{\Delta Y} \right)^2 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta Y} \right)^2 - 1 \right] (\Delta Y)^2 \quad (3-9)$$

Como as dimensões ao longo do eixo central da torre não sofrem alterações com a deformação da torre então é válida a Equação (3-10).

$$(\Delta S)^2 = (\Delta S_0)^2 \quad (3-10)$$

Aplicando a Equação (3-10) na Equação (3-9) chegamos à Equação (3-11), esta última será doravante denominada condição de inextensibilidade.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2 = 1 \quad (3-11)$$

A Equação (3-11) também pode ser escrita em função do deslocamento dos pontos que representam a seção reta da torre ao longo de seu comprimento. Considerando as Equações (3-3) e (3-4), para um ponto ao longo do eixo central da torre, e substituindo as Equações (3-12) e (3-13) na Equação (3-11), chega-se à Equação (3-14).

$$u = x - X \rightarrow \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial x}{\partial Y} - \frac{\partial X}{\partial Y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial x}{\partial Y} \quad (3-12)$$

$$v = y - Y \rightarrow \frac{\partial v}{\partial Y} = \frac{\partial y}{\partial Y} - 1 \rightarrow \frac{\partial Y}{\partial X} = 0 \rightarrow \frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\partial v}{\partial X} + 1 \quad (3-13)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Y} + 1\right)^2 = 1 \quad (3-14)$$

A Equação (3-14) é a condição de inextensibilidade em função do deslocamento de um ponto ao longo da seção reta da torre.

Embora apenas o conceito de inextensibilidade seja utilizado neste trabalho, uma relação entre a deformação da torre ao longo de seu eixo central e os sistemas de coordenadas utilizados nas Equações (3-11) e (3-14) é apresentada no Apêndice A.

Na descrição desenvolvida nesta dissertação não são considerados os efeitos de inércia por rotação e deformação por cisalhamento da seção reta da torre eólica.

Uma expressão para a curvatura da torre,  $\kappa$ , é importante porque será utilizada no desenvolvimento da equação do movimento da torre pelo método variacional. Dependendo da escolha do sistema de coordenadas e da aplicação, ou não, da condição de não-

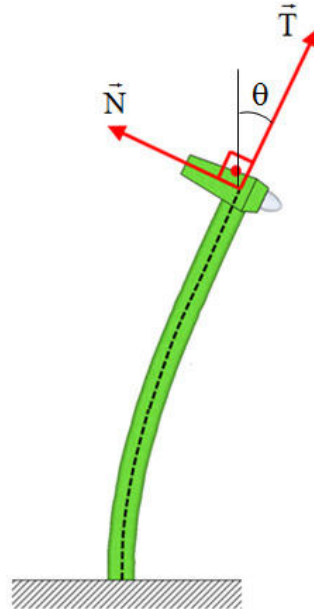
deformação da linha central da torre, a curvatura  $\kappa$  pode mudar. Considera-se o ângulo  $\theta$  formado pela reta paralela ao eixo vertical e o vetor tangente à linha central, conforme o esquema da Figura 3-2. Para uma torre eólica que oscile no plano da Figura 3-1 a curvatura pode ser escrita como indicado na Equação (3-15).

$$\kappa = \frac{\partial\theta}{\partial S} \quad (3-15)$$

Tendo como referência a Figura 3-2 e a Equação A-06 do Apêndice A,  $\theta$  pode ser definido pelas Equações (3-16) e (3-17).

$$\cos\theta = \frac{\partial x/\partial Y}{1 + \varepsilon} \quad (3-16)$$

$$\text{sen}\theta = \frac{\partial y/\partial Y}{1 + \varepsilon} \quad (3-17)$$



**Figura 3-2 – Desenho esquemático da torre com os vetores normais unitário e tangente à linha central da torre e seu ângulo com a direção vertical,  $\theta$ .**

A Equação (3-15) pode ser reescrita em função da coordenada Y, Equação (3-18).

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial S} = \frac{1}{1 + \epsilon} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (3-18)$$

A variação do ângulo  $\theta$  com a variável  $Y$  na Equação (3-18) pode ser apresentada com o auxílio das Equações (3-16) e (3-17).

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left[ \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial^2 y}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial Y^2} \frac{\partial y}{\partial Y} \right] / (1 + \epsilon)^2 \quad (3-19)$$

Aplicando o princípio da inextensibilidade, ou seja,  $\epsilon=0$ , à Equação (3-19) chega-se à Equação (3-20) assumindo que  $\Delta S = \Delta Y$ .

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \theta}{\partial S} = \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial^2 y}{\partial S^2} - \frac{\partial y}{\partial S} \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \quad (3-20)$$

Com o auxílio da Equação (3-21), assumindo mais uma vez que  $\Delta S = \Delta Y$ , encontra-se uma expressão para a curvatura da torre, Equação (3-23).

$$\left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial S} \right)^2 = 1 \quad (3-21)$$

$$\frac{\partial y}{\partial S} = \sqrt{1 - \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2} \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial S^2} = - \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - (\partial x / \partial S)^2}} \quad (3-22)$$

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{-\partial^2 x / \partial S^2}{\sqrt{1 - (\partial x / \partial S)^2}} \quad (3-23)$$

Na teoria de deformações infinitesimais, base da análise linear, a distinção entre deformações eulerianas e lagrangeanas desaparece, no entanto tal distinção deve ser feita quando o objetivo é descrever um sistema mecânico não-linear. Utilizando como referência a Figura 3-2, pode-se escrever uma expressão para a curvatura partindo de qualquer uma

das fórmulas de Frenet, que relacionam os vetores normal, tangente e bi-normal unitários da linha central da secção reta da torre eólica, a exemplo da Equação (3–24).

$$\frac{d\vec{T}}{dS} = \kappa\vec{N} \quad (3-24)$$

Podem-se escrever, então, expressões para a curvatura levando-se em conta a ortogonalidade entre vetores tangente e normal à curvatura no sistema de coordenadas desejado. A dedução de algumas equações equivalentes para a curvatura é apresentada no Apêndice B.

A expressão a ser utilizada para a curvatura depende da descrição utilizada para o sistema físico em estudo. Esta expressão é fundamental na dedução das equações do movimento, já que estas últimas são inferidas pelo método da energia, baseado no princípio variacional de Hamilton, conforme a Equação (3–25).

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} \mathcal{L} dt + \int_{t_2}^{t_1} \delta W dt = 0 \quad (3-25)$$

A função  $\mathcal{L}$  é chamada Lagrangeano do sistema, que aqui será a diferença entre a energia cinética,  $\mathcal{T}$ , e a potencial,  $\mathcal{V}$ , do sistema considerado, ou seja, da torre e do aerogerador. Leva-se em conta, numa primeira abordagem, que só há forças conservativas e o sistema formado é monogênico, a segunda parcela da Equação (3–25) é nula. Sendo assim, a expressão tradicional para o Lagrangeano pode ser utilizada, Equação (3–26).

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} \quad (3-26)$$

Devem-se fazer algumas considerações sobre a ordem de grandeza dos termos a serem calculados na Equação (3–26). Para amplos deslocamentos laterais da torre eólica devem ser considerados termos de ordem superior à linear. Devido à simetria do sistema estudado, as equações resultantes da manipulação devem ser de ordem ímpar,  $\mathcal{O}(3)$ , mas o princípio variacional utilizado para obtenção da equação do movimento exige uma ordem de grandeza acima da mesma, ou seja,  $\mathcal{O}(4)$  no integrando da Equação (3–25).

Utilizando como referência, a origem do sistema de coordenadas, o ponto central da secção reta da torre em sua base, conforme mostrado em vermelho na Figura 3-1, as seguintes relações são válidas para o cálculo da posição, velocidade e aceleração dos pontos da linha central da torre, cujas secções retas são paralelas ao plano horizontal da torre eólica, Equações (3–27), (3–28), (3–29) e (3–30).

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (3-27)$$

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial t} \hat{j} \quad (3-28)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \hat{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \hat{j} \quad (3-29)$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} \quad (3-30)$$

Aplicando o operador variacional à parcela referente à energia cinética da Equação (3–26), e valendo-se da Equação (3–30) para o cálculo da velocidade do elemento da torre chegam-se às Equações (3–31), (3–32) e (3–33).

$$\mathcal{T} = \int_0^L \frac{m}{2} |\vec{V}|^2 dS \quad (3-31)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T} dt = \left(\frac{m}{2}\right) \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \right] dS dt \quad (3-32)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T} dt = \left(\frac{m}{2}\right) \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 dS dt + \left(\frac{m}{2}\right) \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dS dt \quad (3-33)$$

Aplica-se o operador variacional às componentes da velocidade nas equações acima. Para que a integral da Equação (3–33) se anule a variação do integrando deve obedecer à equação de Lagrange. O Apêndice C traz a forma da equação de Lagrange para dois tipos de funções. Chega-se ao seguinte resultado para a energia cinética, Equação (3–34).

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L m \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \delta x dS dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L m \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \delta y dS dt \quad (3-34)$$

A energia potencial pode ser dividida em duas parcelas, uma gravitacional e outra elástica, Equação (3–35).

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_g + \mathcal{V}_e \quad (3-35)$$

A energia potencial pode ser calculada tomando-se a definição usual, Equação (3–36)

$$\mathcal{V}_g = -(mg) \int_0^L y dS \quad (3-36)$$

A variação da energia potencial gravitacional é dada na Equação (3–37).

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{V}_g dt = -mg \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta y dS dt \quad (3-37)$$

É muito importante a definição da energia potencial elástica. Ela deve ter uma ordem de grandeza compatível com o que foi discutido anteriormente, ou seja,  $\mathcal{O}(4)$ . É assumido que a deformação no elemento de torre é pequena, mesmo que o deslocamento da seção reta da torre seja grande. A Equação (3–38), utilizada por Semler (1994), é um resultado da Mecânica dos Sólidos não-linear, a não-linearidade da equação do movimento vem do desenvolvimento da energia potencial elástica com a curvatura calculada pela expansão em série de Taylor da Equação (3–23).



$$V_e = (E/2) \int_0^L [A\varepsilon^2 + I(1 + \varepsilon)^2 \kappa^2] dS \quad (3-38)$$

Considerando a condição de inextensibilidade,  $\varepsilon = 0$ , caso em que a linha central da torre não sofre deformações, chega-se à Equação (3-39)

$$V_e = (EI/2) \int_0^L [\kappa^2] dS \quad (3-39)$$

A Equação (3-23) é substituída na Equação (3-39) e posteriormente será aplicado o operador variacional. Antes de proceder à aplicação do operador variacional às parcelas das energias mostradas nas Equações (3-39), (3-36) e (3-33) é conveniente estabelecer uma relação entre as variações  $\delta x$  e  $\delta y$ . Aplicando o operador variacional à condição de inextensibilidade, Equação (3-21), chega-se à Equação (3-40).

$$\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right) \delta\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial S}\right) \delta\left(\frac{\partial y}{\partial S}\right) = 0 \quad (3-40)$$

Isolando-se a variação da derivada de  $x$  com relação a  $S$  e aplicando-se a condição de inextensibilidade ao denominador, desenvolvido em expansão de Taylor, chega-se às Equações (3-41) e (3-42).

$$\delta\left(\frac{\partial y}{\partial S}\right) = -\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial S}\right)} \delta\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right) = 0 \quad (3-41)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2}} \cong 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2 + \mathcal{O}(4) \quad (3-42)$$

Substituindo a Equação (3-42) na Equação (3-41) chega-se à Equação (3-43)

$$\delta\left(\frac{\partial y}{\partial S}\right) = \frac{-\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)\delta\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2}} = -\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2\right]\delta\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right) + \mathcal{O}(4) \quad (3-43)$$

Integrando o lado direito da Equação (3-43) por partes, Equação (3-44), e notando que  $\delta x=0$  em  $s=0$ , chega-se a uma relação entre as variações  $\delta x$  e  $\delta y$ , conforme a Equação (3-45).

$$\delta y = -\int_0^S \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)\delta\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^3\delta\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right) \right] dS \quad (3-44)$$

$$\delta y = -\left[ \left(\frac{\partial x}{\partial S}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^3 \right] \delta x + \int_0^S \left[ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial S^2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2\left(\frac{\partial^2 x}{\partial S^2}\right) \right] \delta x dS + \mathcal{O}(4) \quad (3-45)$$

A relação descrita pela Equação (3-46) será de grande valia no uso das equações que surgirão com a utilização da Equação (3-45).

$$\int_0^L g(s) \left( \int_0^S f(s) \delta x dS \right) dS = \int_0^L \left( \int_s^L g(s) dS \right) f(s) \delta x dS \quad (3-46)$$

Aplica-se o operador variacional na expressão da energia potencial elástica, Equação (3-47).

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{V}_e dt = (EI/2) \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta[\kappa^2] dS dt \quad (3-47)$$

Antes de substituir a Equação (3-23) na Equação (3-47) é necessário expandir o denominador da curvatura em série de Taylor, conforme Equação (3-48), até a ordem de grandeza desejada para os termos da energia potencial elástica.

$$\kappa^2 = \frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial S^2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2} \cong \left(\frac{\partial^2 x}{\partial S^2}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2\right] + \mathcal{O}(4) \quad (3-48)$$

Substituindo a curvatura expandida na expressão da energia potencial elástica, Equação (3-49)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} V_e dt = (EI/2) \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \left[ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial S^2}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2\right) \right] dS dt + \mathcal{O}(5) \quad (3-49)$$

Aplicando o operador variacional ao integrando da Equação (3-49) chega-se à Equação (3-50).

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} V_e dt = EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L & \left[ \frac{\partial^2}{\partial S^2} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} + \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 \right) \right] \delta x dS dt - \\ & - EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \frac{\partial}{\partial S} \left( \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right)^2 \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \right) \right] \delta x dS dt + \mathcal{O}(5) \end{aligned} \quad (3-50)$$

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} V_e dt = EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L & \left[ \left( \frac{\partial^4 x}{\partial S^4} \right) + 4 \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \left( \frac{\partial^3 x}{\partial S^3} \right) + \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right)^3 \right] \delta x dS dt \\ & + EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^4 x}{\partial S^4} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 \right] \delta x dS dt + \mathcal{O}(5) \end{aligned} \quad (3-51)$$

Calculando-se as derivadas e reagrupando os termos chegamos à expressão final para a energia potencial elástica, Equação (3-51).

De posse da expressão para variação da energia potencial gravitacional, Equação (3-37), substitui-se o  $\delta y$  encontrado na Equação (3-45).

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} V_g dt = mg \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^3 \right] \delta x dS dt - \\ - mg \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (L-S) \left[ \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \right] \delta x dS dt + \mathcal{O}(5) \end{aligned} \quad (3-52)$$

Com auxílio da relação apresentada na Equação (3-46), chega-se à expressão final para a variação da energia potencial gravitacional, Equação (3-52).

O procedimento do cálculo variacional aplicado à energia cinética envolve manipulações adicionais que relacionam a variável  $y$  com  $x$  e suas derivadas. Da condição de inextensibilidade, Equação (3-21), isolamos a parte referente à variável  $y$  e expandimos a parte direita em uma série de Taylor, Equação (3-53).

$$\left( \frac{\partial y}{\partial S} \right) = \sqrt{1 - \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2} \cong 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \mathcal{O}(4) \quad (3-53)$$

$$y = \int_0^S \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 \right) dS \quad (3-54)$$

Derivando duas vezes o integrando da Equação (3-54) com relação ao tempo chegamos à Equação (3-55).

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \int_0^S - \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial S} \right) \right] dS \quad (3-55)$$

Substituindo as Equações (3-45) e (3-55) na Equação (3-34), utilizando a relação dada pela Equação (3-46), após algumas manipulações, chegamos a uma equação final para a variação da energia cinética, Equação (3-56). É importante salientar que há necessidade de tomar cuidado para não reter termos iguais ou superiores a  $\mathcal{O}(5)$ .

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F} dt = & - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ m \int_0^L \left( \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \int_0^S \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial S} \right) \right] dS \right) \right\} dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ m \int_0^L \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \left( \int_S^L \int_0^S \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial S} \right) \right] dS \right) \delta x dS \right\} dt - \quad (3-56) \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L m \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \delta x dS dt + \mathcal{O}(5)
\end{aligned}$$

$$\int_{t_2}^{t_1} \delta \mathcal{W}' dt = 0 \quad (3-57)$$

O desenvolvimento da Equação (3-25) foi feito para um sistema conservativo, onde é válida a Equação (3-57), ou seja, não está sendo computado o amortecimento e carregamento externo, o que será comentado logo adiante.

O amortecimento nas equações de viga é resultado da absorção de energia mecânica da estrutura durante a resposta dinâmica da mesma (Clough, 1975). O tipo de amortecimento utilizado neste trabalho representa a resistência ao movimento transversal, sendo proporcional à velocidade da secção reta da torre eólica, e é representado pela força  $F_C$ , Equação (3-58), devendo ser adicionado com sinal positivo do lado esquerdo na equação do movimento, conforme será mostrado adiante.

$$F_C = c \frac{\partial x}{\partial t} \quad (3-58)$$

A passagem do vento pela turbina, torre e nacele é a causa do movimento experimentado pelo aerogerador. O carregamento do vento nas pás da turbina e na torre é complexo, dá origem a vários fenômenos dinâmicos e depende de um modelo teórico para a resposta aerodinâmica das pás da turbina. Separou-se a interação do vento com a torre e turbina para compor um carregamento simplificado para o aerogerador,  $F_D$ . Na Equação (3-59) dividiu-se a ação do vento em duas partes,  $F_{DN}$ , devida à nacele e  $F_{DT}$ , devida à torre.

$$F_D = F_{DN} + F_{DT} \quad (3-59)$$

O vento incidente nas pás da turbina gera uma força de arrasto chamada de empuxo (Custódio, 2009) que pode ser calculada pela Equação (3-60). Esta equação vem do método do momento do elemento de pá (BEM) e é a maneira simplificada de se calcular o empuxo que é associado à densidade do ar,  $\rho$ , à velocidade do vento incidente na altura do rotor,  $V_n$ , a área varrida pela turbina,  $A$ , e o fator de indução,  $a_n$ , fornecido pelos fabricantes de turbinas. O fator de indução representa a perda da velocidade do vento ao passar pela turbina.

$$T_n = 2a_n\rho V_n^2(1 - a_n)A \quad (3-60)$$

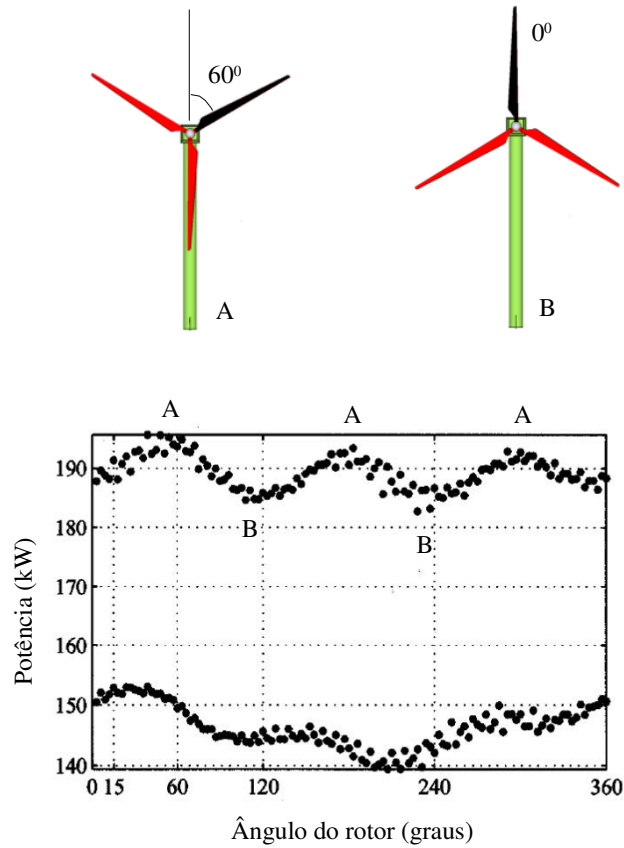
Alternativamente, a Equação (3-61) pode ser utilizada no caso do fator de indução não estar disponível, sendo o valor do coeficiente de empuxo adimensional,  $C_t$ , na maioria da vezes, igual a 0,6 para a velocidade nominal da maioria das turbinas modernas, independente do diâmetro.

$$T_n = \frac{1}{2}\rho V_n^2 C_t A \quad (3-61)$$

O posicionamento das pás na rotação em torno do eixo também faz aparecer uma oscilação no empuxo experimentado pela torre. A Figura 3-3 mostra as oscilações na potência gerada por uma turbina de três pás com vento quase constante, parte superior, e sob o fluxo turbulento da esteira de outra turbina, em uma volta do rotor (Thiringer; Dahlberg, 2001). No desenho esquemático, logo acima, mostra-se a posição das pás da turbina no ciclo mostrado no gráfico. A variação medida na potência produzida pelo gerador causa uma oscilação no valor do empuxo, da ordem de 5% do valor da potência medida, com frequência proporcional ao número de pás, conforme mostrado por Thiringer e Dahlberg (2001).

A Equação (3-62) representa o carregamento proposto para a nacele devido à ação do vento na turbina. O valor de  $\mu$  se refere à amplitude da oscilação da carga na nacele. Na ausência de um modelo para a ação do vento nas pás da turbina,  $T_n$  pode ser calculado com o uso das Equações (3-60) ou (3-61). A função delta de Dirac limita a ação do carregamento ao ponto de aplicação, a extremidade da torre.

$$F_{DN} = T_n \delta(S - L) [(1 + \mu \cos(3\Omega t))] \quad (3-62)$$



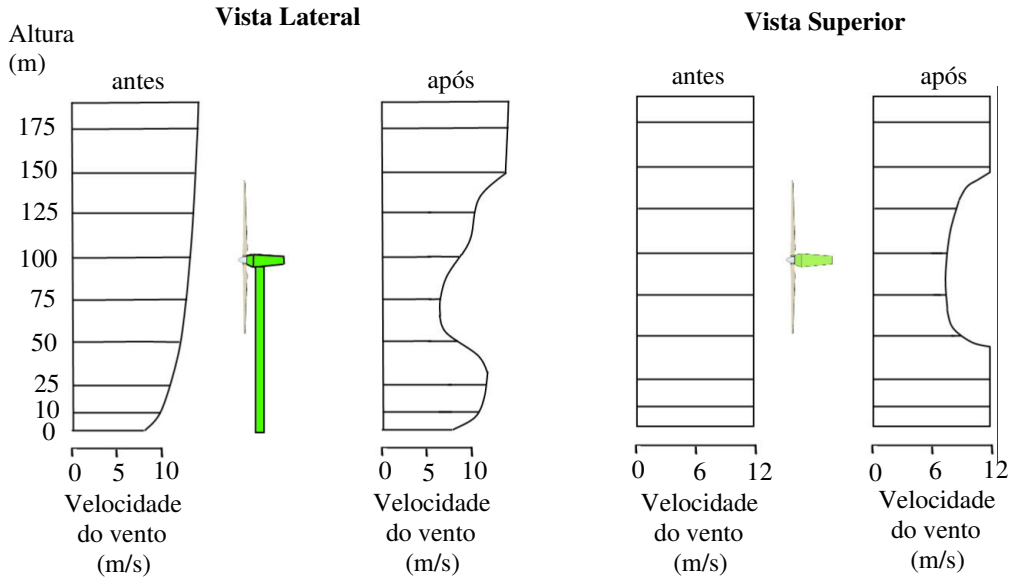
**Figura 3-3 – O gráfico mostra a variação medida na potência produzida pelo gerador, na nacela, devido à posição das pás em uma volta do rotor.**

O aerogerador retira parte da energia cinética do vento incidente e a transforma em energia elétrica, com isso, o perfil da velocidade do vento fica alterado após a passagem do mesmo. Supondo um carregamento oriundo de vento com velocidade constante, o perfil de velocidade varia com a altura, antes e após a passagem pela turbina, Figura 3-4, e deve ser considerado no cálculo da força exercida pelo vento incidente na torre. A força de arrasto na secção reta da torre varia com a altura  $Y$ , considerou-se uma densidade linear de carga  $f(Y)$ , Equação (3-63), para representar esta variação.

$$df_a = f(Y)dY \quad (3-63)$$

A força de arrasto devido à ação somente do vento na torre é então simplificada, Equação (3-64).

$$F_{DT} = \int_0^h df_a \quad (3-64)$$



**Figura 3-4 – À esquerda, perfil da velocidade do vento incidente no aerogerador e sua alteração depois da passagem pela turbina, vistas lateral e superior (Custódio, 2009).**

Agrupando os termos referentes às energias cinética e potencial, Equações (3-51), (3-52) e (3-56), após algumas simplificações, adicionando-se o amortecimento e o carregamento devido ao vento, chega-se à equação dimensional para o movimento da torre, Equação (3-65).

$$\begin{aligned} & m \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \int_0^S \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial S} \right) \right] dS - m \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \int_S^L \int_0^S \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial S} \right) \right] dS dS + m \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) + (EI) \left[ \left( \frac{\partial^4 x}{\partial S^4} \right) + 4 \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \left( \frac{\partial^3 x}{\partial S^3} \right) + \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right)^3 \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial^4 x}{\partial S^4} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 \right] + mg \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^3 \right] - mg(L-S) \left[ \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \right] + F_C - F_D = 0 \end{aligned} \quad (3-65)$$



Os termos da primeira linha da Equação (3–65) se referem à deformação dos elementos da torre em função da energia cinética do deslocamento lateral da torre. Na segunda linha pode-se identificar o termo de inércia e os termos da deformação elástica do elemento. Por fim, os dois últimos termos estão ligados à parcela de deformação devida à força do peso próprio atuante na torre seguidos pelo amortecimento e o carregamento devido ao vento.

Para o cálculo da carga,  $F_D$ , os valores de  $T_n$  e  $F_{DT}$  são computados, utilizando-se as Equações (3–61) e (3–64), e posteriormente são substituídos, respectivamente, nas Equações (3–62) e (3–59).

É importante notar que na Equação (3–65) não há variação do momento de inércia ao longo da torre, ou seja, a rigidez à flexão é constante na torre cilíndrica. A massa no topo da torre pode ser adicionada à análise utilizando-se o procedimento descrito em Sarkar e Païdoussis (2004), através do uso da função delta de Dirac. A Equação (3–65) tem dimensão de força por unidade de comprimento, assim, primeiramente multiplica-se toda a expressão por  $L$ , depois se introduz a massa da nacela com a função delta de Dirac, conforme Equação. Em seguida divide-se toda a expressão por  $L$  para chegar-se à Equação (3–66).

$$\begin{aligned}
& m \left( 1 + \frac{m\delta(S-L)}{mL} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \int_0^S \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial S} \right) \right] dS - m \left( 1 + \frac{m\delta(S-L)}{mL} \right) \\
& \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \int_S^L \int_0^S \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial S} \right) \right] dS dS + m \left( 1 + \frac{m\delta(S-L)}{mL} \right) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) + \\
& + (EI) \left[ \left( \frac{\partial^4 x}{\partial S^4} \right) + 4 \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \left( \frac{\partial^3 x}{\partial S^3} \right) + \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right)^3 + \left( \frac{\partial^4 x}{\partial S^4} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 \right] + m \left( 1 + \frac{m\delta(S-L)}{mL} \right) g \\
& \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^3 \right] - m \left( 1 + \frac{m\delta(S-L)}{mL} \right) g(L-S) \left[ \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \right] + F_C - F_D = 0
\end{aligned}
\tag{3–66}$$

A Equação (3–66) pode ser escrita em termos de variáveis adimensionais, considerando a Equação (3–67). A versão adimensional é conveniente, pois evita problemas numéricos no cálculo computacional. Na Equação (3–67)  $\eta$  e  $\xi$  são os deslocamentos adimensionais,

enquanto que  $\tau$  representa a variável temporal em sua versão adimensional. A variável adimensional  $\Gamma$  é a razão entre as massas da nacelle e da torre e  $\gamma$  expressa a relação entre a inércia da torre e sua rigidez.

$$\eta = \frac{x}{L} \quad \xi = \frac{S}{L} \quad \tau = \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2} \quad \Gamma = \frac{M}{mL} \quad \gamma = \frac{m}{EI} L^3 g \quad f_C = \frac{L^2}{EI} F_C \quad f_D = \frac{L^2}{EI} F_D \quad (3-67)$$

A Equação (3-68) é a formulação adimensional da Equação (3-65), com  $f_C$  e  $f_D$  o amortecimento e o carregamento adimensionais respectivamente.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial \xi} [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \int_0^\xi \left( \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tau^2 \partial \xi} \right) d\xi - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \int_\xi^1 [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \\ & \int_0^\xi \left( \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tau^2 \partial \xi} \right) d\xi d\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] - \frac{1}{2} \gamma [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^3 + \\ & - \gamma [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + 4 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right)^3 + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 - \\ & + \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \int_\xi^1 [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] d\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \left[ \frac{3}{2} \int_\xi^1 \gamma [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] d\xi \right] + f_C - f_D = 0 \end{aligned} \quad (3-68)$$

Na Equação (3-67) o parâmetro  $\gamma$  inclui a aceleração da gravidade que, segundo os eixos coordenados adotados, deve possuir valor negativo. De maneira a preservar o sinal positivo no respectivo parâmetro, mudou-se o sinal dos termos relacionados a este parâmetro na Equação (3-68). Em seguida procede-se à dedução da equação linear para o movimento da torre.

### 3.2– DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO LINEAR DO MOVIMENTO

Todo o desenvolvimento relacionado com o princípio de Hamilton e as relações para as coordenadas lagrangeanas, eulerianas e o conceito de inextensibilidade continuam válidos para o desenvolvimento linear, ou seja, das Equações (3–1) a (3–30).

O desenvolvimento da Equação (3–25) foi feito para um sistema conservativo que traduz a inexistência de forças dissipativas, portanto continua válida a Equação (3–57). O procedimento envolvendo manipulações que relacionam a variável  $x$  com  $y$  e suas derivadas também continua válido, exceto pelo fato de que a ordem de grandeza dos termos envolvidos na Equação (3–26) deve ser revista, mantendo-se os termos lineares apenas.

Os deslocamentos laterais da torre eólica devem ser considerados pequenos se comparados ao comprimento da torre, assim, termos de ordem superior à linear devem ser desprezados. As equações resultantes da manipulação devem ser de ordem ímpar,  $\mathcal{O}(1)$ , mas o princípio variacional utilizado para obtenção da equação do movimento exige uma ordem de grandeza acima da mesma, ou seja,  $\mathcal{O}(2)$ , no integrando da Equação (3–25).

A expressão para a energia cinética, Equação (3–31), não muda, bem como, sua variação calculada pela Equação (3–34), mas devido à observação quanto à ordem de grandeza dos elementos o resultado possui um número menor de termos do que foi encontrado anteriormente.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{V}_g dt = mg \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) - (L-S) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \right] \delta x dS dt + \mathcal{O}(3) \quad (3-69)$$

A variação da energia potencial gravitacional é mostrada na Equação (3–69). A parcela gravitacional da energia potencial não sofreu alterações, mas a energia potencial elástica muda para refletir o caráter linear das deformações nos elementos. É assumido que a deformação no elemento de torre é pequena e os deslocamentos da seção reta da torre também são pequenos. Não aparece a curvatura,  $\kappa$ , no desenvolvimento. As Equações (3–70) e (3–71) refletem as alterações comentadas.

$$V_e = (EI/2) \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right)^2 \right] dS \quad (3-70)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} V_e dt = EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^4 x}{\partial S^4} \right) \right] \delta x dS dt + \mathcal{O}(3) \quad (3-71)$$

O cálculo das parcelas referentes à energia cinética e potencial gravitacional não serão feitos novamente, pois o procedimento é idêntico ao desenvolvido no início deste capítulo, observadas a ordem de grandeza dos termos.

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ (EI) \left( \frac{\partial^4 x}{\partial S^4} \right) + mg \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) - mg(L-S) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) + m \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \right] \delta x dS dt = 0 \quad (3-72)$$

Aplicando o operador variacional ao Lagrangeano se obtém a Equação (3-72). Após algumas simplificações e a posterior adição da massa da nacela, chega-se à equação dimensional linear para o movimento da torre, Equação (3-73).

$$\begin{aligned} & (EI) \left( \frac{\partial^4 x}{\partial S^4} \right) + m \left( 1 + \frac{m\delta(S-L)}{mL} \right) g \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right) - m \left( 1 + \frac{m\delta(S-L)}{mL} \right) g(L-S) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) + \\ & + m \left( 1 + \frac{m\delta(S-L)}{mL} \right) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3-73)$$

A Equação (3-73) foi deduzida por Païdoussis e Issid (1974). O primeiro termo representa a rigidez à flexão, os dois termos centrais vêm do trabalho da força peso e o último é o termo de inércia do movimento transversal da torre eólica, sem amortecimento e carregamento.

No caso de não se considerar a variação da energia potencial devida à força gravitacional, os termos centrais da Equação (3-73) desaparecem, resultando na Equação (3-74). Adicionalmente, pode-se considerar a rigidez variável. Para o caso de torres eólicas

cônicas, preserva-se a dependência do momento de inércia,  $I$ , com a variável  $S$  no desenvolvimento da energia cinética. A Equação (3-75) traduz esta modificação.

$$(EI) \frac{\partial^4 x}{\partial S^4} + m \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (3-74)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial S^2} \left( (EI) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) \right) + m \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (3-75)$$

Adicionando o termo referente ao amortecimento e usando a função delta de Dirac para a inserir a massa correspondente à nacele na Equação (3-74), chega-se à Equação (3-76).

$$(EI) \frac{\partial^4 x}{\partial S^4} + m \left( 1 + \frac{m\delta(S-L)}{mL} \right) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (3-76)$$

As Equações (3-74) e (3-76) podem ser escritas na forma adimensional utilizando-se a mudança de coordenadas mostradas na Equação (3-77).

$$\eta = \frac{x}{L} \quad \xi = \frac{S}{L} \quad \tau = \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2} \frac{t}{L} \quad \Gamma = \frac{m}{mL} \quad (3-77)$$

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3-78)$$

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3-79)$$

A Equação (3-78) tem solução analítica e é importante para a estratégia de solução da equação não-linear. A Equação (3-75) também pode ser escrita na forma adimensional utilizando-se a mudança de coordenadas da Equação (3-80). A Equação (3-81) possui o termo referente ao momento de inércia da secção reta da torre variável.

$$\eta = \frac{x}{L} \quad \xi = \frac{S}{L} \quad \tau = \left( \frac{E}{m(x)L} \right)^{1/2} t \quad \Gamma = \frac{M}{mL} \quad I(\xi) = \frac{I(x)}{L^4} \quad (3-80)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \left( I(\xi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) + [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3-81)$$

A versão adimensional da Equação (3-73) é obtida fazendo-se as mudanças de coordenadas mostradas na Equação (3-82) tendo como resultado a Equação (3-83), sem considerações sobre o amortecimento e o carregamento.

$$\eta = \frac{x}{L} \quad \xi = \frac{S}{L} \quad \tau = \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2} \quad \Gamma = \frac{M}{mL} \quad \gamma = \frac{m}{EI} L^3 g \quad (3-82)$$

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} - \gamma [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \gamma (1 - \xi) [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3-83)$$

A solução da Equação (3-78), para vibração livre de uma torre cônica sem massa da nacele, é obtida pelo método de separação de variáveis, onde a solução proposta, Equação (3-84), é a multiplicação de duas funções, uma dependente do parâmetro adimensional de tempo,  $\tau$ , e outra da variável adimensional para o comprimento da torre,  $\xi$ . Substituindo a solução proposta na Equação (3-78) e isolando os termos conforme a Equação (3-85) pode-se calcular os valores possíveis de  $\omega_0$  que satisfaçam as Equações (3-86) e (3-87).

$$\eta(\xi, \tau) = \phi(\xi) Y(\tau) \quad (3-84)$$

$$\frac{\left( \frac{\partial^4 \phi(\xi)}{\partial \xi^4} \right)}{(\phi(\xi))} = - \frac{\left( \frac{\partial^2 Y(\tau)}{\partial \tau^2} \right)}{(Y(\tau))} = \omega_0^2 \quad (3-85)$$

$$\frac{\partial^4 \phi(\xi)}{\partial \xi^4} - \omega_0^2 \phi(\xi) = 0 \quad (3-86)$$

$$\frac{\partial^2 Y(\tau)}{\partial \tau^2} + \omega_0^2 Y(\tau) = 0 \quad (3-87)$$

As soluções para as Equações diferenciais (3-86) e (3-87) são, respectivamente, as Equações (3-88) e (3-89).

$$Y(\tau) = \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{\partial Y(0)}{\partial \tau} \right) \text{sen}(\omega_0 \tau) + Y(0) \text{cos}(\omega_0 \tau) \quad (3-88)$$

$$\phi(\xi) = A_1 \text{sen}(a\xi) + A_2 \text{cos}(a\xi) + A_3 \text{senh}(a\xi) + A_4 \text{cosh}(a\xi) \quad (3-89)$$

Com a relação entre a constante adimensional “a” e  $\omega_0$  dada pela Equação (3-90).

$$\omega_0 = a^2 \quad (3-90)$$

As condições de contorno têm suas respectivas versões adimensionais nas Equações (3-91) e (3-92).

$$\frac{\partial \phi(0)}{\partial \xi} = \phi(0) = 0 \quad (3-91)$$

$$\frac{\partial^3 \phi(1)}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^2 \phi(1)}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3-92)$$

Aplicando as condições de contorno à solução encontrada via separação de variáveis monta-se um sistema de equações com apenas duas das quatro constantes de  $\phi(\xi)$ .

$$\begin{bmatrix} (\text{sen}(a) + \text{senh}(a)) & (\text{cos}(a) + \text{cosh}(a)) \\ (\text{cos}(a) + \text{cosh}(a)) & (\text{senh}(a) - \text{sen}(a)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3-93)$$

Resolvendo-se o sistema da Equação (3-93) para  $A_1$  e  $A_2$ , ou seja, igualando o determinante da matriz à esquerda a zero, chega-se à equação transcendental abaixo.

$$1 + \cos(a) \cosh(a) = 0 \quad (3-94)$$

Os primeiros doze valores para as raízes da Equação (3-94) foram obtidos numericamente e encontram-se na Tabela 3-1.

**Tabela 3-1 – Valores para a constante “a” que correspondem às raízes da Equação (3-94), parâmetros de frequência, obtidas por cálculo numérico.**

Modo	a	$a^2 = \omega_0$
1	1,875104068711961166445308	3,51601526850015
2	4,694091132974174576436392	22,0344915646667
3	7,854757438237612564861009	61,6972144135491
4	10,99554073487546699066735	120,9019160523040
5	14,13716839104647058091705	199,8595301168010
6	17,27875953208823633354393	298,5555309677290
7	20,42035225104125099441581	416,9907860566030
8	23,56194490180644350152025	555,1652475557610
9	26,70353755551829880544548	713,0789179789710
10	29,84513020910281726378873	890,7317971983000
11	32,98672286269283844616831	1088,1238852201000
12	36,12831551628262183428116	1305,2551820440700

Os valores de “a” correspondem às “autofrequências” da Equação (3-78) e como são adimensionais serão denominados doravante parâmetros de frequência. A Equação (3-95) define a forma e a constante  $A_1$  a amplitude da vibração da torre.

$$\phi(\xi) = A_1 [\text{sen}(a\xi) - \sinh(a\xi) + \sigma(\cosh(a\xi) - \cos(a\xi))] \quad (3-95)$$

A constante  $\sigma$  é definida na Equação (3-96).

$$\sigma = -\frac{\text{sen}(a) + \sinh(a)}{\cosh(a) + \cos(a)} \quad (3-96)$$

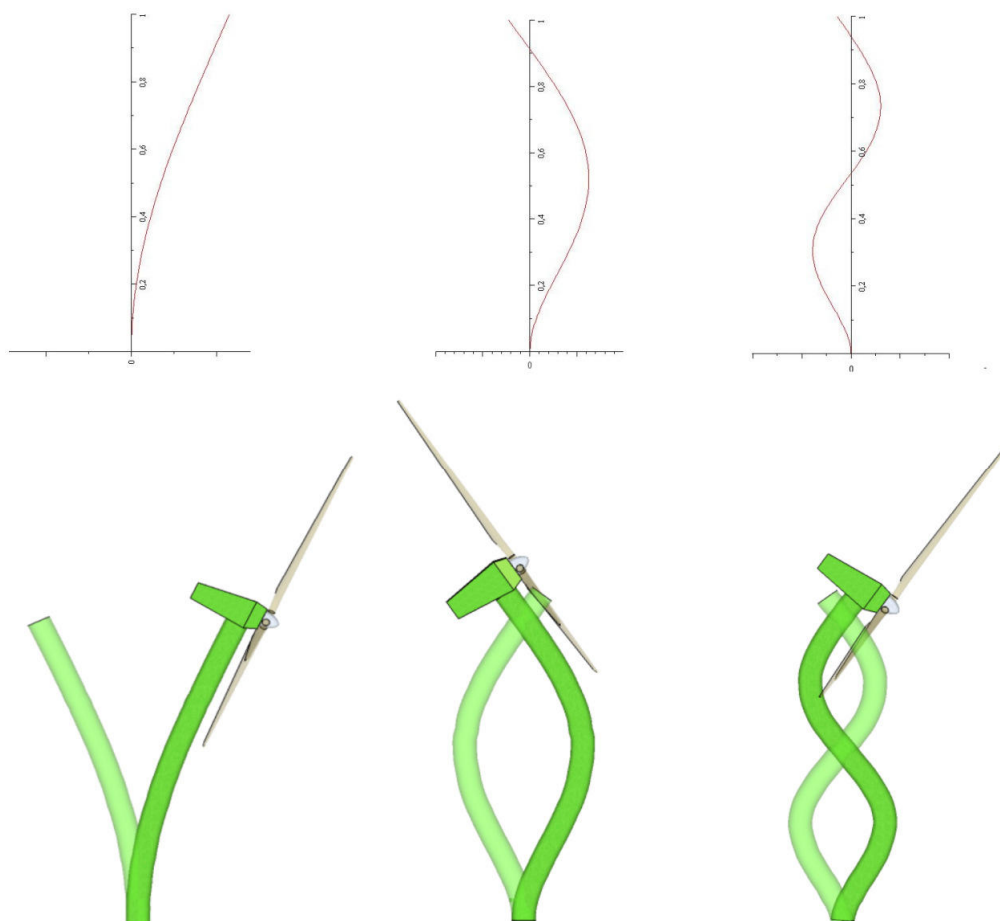
A Figura 3-5 ilustra os autovetores, funções de forma, para os primeiros três modos normais calculados com a Equação (3-95). Nesta Figura a amplitude das vibrações foi escolhida arbitrariamente para facilitar a visualização da vibração livre. Os desenhos logo



abaixo indicam como seria o movimento da torre para cada modo. É importante notar que apesar de terem sido utilizados desenhos de torre para exemplificar o movimento livre, as equações calculadas não levaram em consideração a massa na extremidade da nacele.

$$\omega_r = \omega_0 \left( \frac{EI}{mL^4} \right)^{1/2} \quad (3-97)$$

Para converter os valores encontrados do parâmetro de frequência para um valor dimensional basta multiplicar a rigidez e a massa, como na Equação (3-97), onde  $\omega_r$  é a frequência dimensional.



**Figura 3-5 – Os gráficos acima representam as funções de forma para os três primeiros modos normais.**

### 3.3– DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DE GALERKIN

De maneira geral, são três as abordagens para a solução da equação diferencial não-linear mostrada neste trabalho (Païdoussis, 1998). A primeira consiste em tentar simplificar o problema para então resolvê-lo com métodos numéricos; a segunda resume-se em procurar diretamente a solução numérica para o problema; e por fim, utilizar o método de Galerkin.

Embora a Equação (3–78) tenha solução analítica, em alguns casos, quando as condições de contorno podem ser formuladas, não é possível resolver a equação diferencial. Em outros casos, embora seja possível resolver a equação diferencial não há como atender a condição de contorno formulada. Pode-se então utilizar uma solução aproximada para o problema de valor de contorno, ou problema de autovalor (Meirovitch, 1967).

Há várias formas de se obter soluções aproximadas para problemas de autovalores e todas consistem em descrever um sistema contínuo por meio de outro com  $n$  de graus de liberdade finitos, ou seja, discretizar o sistema. O número de graus escolhidos define a precisão desejada para a resposta procurada.

Podem-se classificar os métodos de aproximação em dois grupos. No primeiro, assume-se a solução na forma de uma série finita de funções conhecidas, multiplicadas por coeficientes desconhecidos. No segundo grupo, assumem-se funções desconhecidas ponderando outras conhecidas, todas obedecendo às condições de contorno do problema estudado.

No método de Galerkin assume-se uma solução para o problema de autovalores na forma de uma série de  $n$  funções de comparação, todas satisfazendo as condições de contorno de um problema similar. Em geral, quando a solução para o problema similar é substituída na equação de interesse, a série não vai satisfazer a equação diferencial desejada, ou seja, um erro surgirá em decorrência da substituição das funções. Por fim, os coeficientes da função de peso (ou as próprias funções, se obtidas numericamente) são escolhidos de modo que a integral sobre o erro dê zero como resultado (Meirovitch, 1967).

Para achar uma solução aproximada supõe-se uma solução teste que atenda às condições de contorno para a torre eólica. Esta função pode ser composta pelas autofunções da

Equação (3–78) multiplicadas por outras que dêem a evolução temporal adimensional, Equação (3–98). Neste caso as funções  $\psi_i(\xi)$  do sistema serão as funções de comparação, variando de 1 a n, onde o número n corresponde aos modos normais utilizados que satisfazem as condições de contorno geométricas e naturais (forças e momentos).

$$\eta(\xi, \tau) \cong \psi_1(\xi)q_1(\tau) + \dots + \psi_n(\xi)q_n(\tau) \quad (3-98)$$

Por exemplo, quando a Equação (3–98) é substituída do lado esquerdo da Equação (3–79) o resultado, em geral, não será igual à zero, mas igual à uma função erro denominada aqui de R. O método de Galerkin requer que a integração de R multiplicada pelas autofunções, que são naturalmente ortogonais, Equação (3–99), seja igual à zero, como mostrado na Equação (3–100).

$$\int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi = \delta_{ij} \quad (3-99)$$

$$\int_0^1 R \psi_i d\xi = \int_0^1 R_1 \psi_i d\xi + \dots + \int_0^1 R_n \psi_i d\xi = 0 \quad (3-100)$$

Como exemplo, utilizando dois modos normais na Equação (3–98) e a massa da nacela como sendo um quarto da massa total da torre, ou seja,  $\Gamma = 1/4$  encontram-se, depois de organizados os termos, as Equações (3–101) e (3–102).

$$1,5 \left( \frac{\partial^2 q_1(\tau)}{\partial \tau^2} \right) + (-0,5) \left( \frac{\partial^2 q_2(\tau)}{\partial \tau^2} \right) + 12,4 q_1(\tau) + 2,3 \times 10^{-3} q_2(\tau) = 0 \quad (3-101)$$

$$(-0,5) \left( \frac{\partial^2 q_1(\tau)}{\partial \tau^2} \right) + 1,5 \left( \frac{\partial^2 q_2(\tau)}{\partial \tau^2} \right) + 485,5 q_2(\tau) + 6,1 \times 10^{-6} q_1(\tau) = 0 \quad (3-102)$$

Substituindo a solução para  $\tau$  da Equação (3–88) com a derivada primeira de  $Y(0)$  igual a zero e fazendo  $A_1$  e  $A_2$  os coeficientes dos cossenos nas Equações (3–101) e (3–102), forma-se o sistema das Equações (3–103) e (3–104).

$$(-1,5\omega^2 + 12,36)A_1 + (-0,5\omega^2 - 2,3 \times 10^{-3})A_2 = 0 \quad (3-103)$$

$$(0,5\omega^2 - 6,1 \times 10^{-6})A_1 + (-1,5\omega^2 + 485,5)A_2 = 0 \quad (3-104)$$

Isolando-se os coeficientes e montando-se um sistema matricial de equações chega-se à Equação (3-105).

$$\begin{bmatrix} (-1,5\omega^2 + 12,36) & (-0,5\omega^2 - 2,3 \times 10^{-3}) \\ (0,5\omega^2 - 6,1 \times 10^{-6}) & (-1,5\omega^2 + 485,5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3-105)$$

O sistema da Equação (3-105) tem solução não trivial para os valores de  $\omega$  que anulam o determinante de sua respectiva matriz. Calculando-se este determinante chega-se então aos valores para os dois primeiros parâmetros de frequência, Equação (3-106). O acréscimo da massa na extremidade da torre eólica causa a redução da frequência de vibração da torre, se comparados com os valores para o primeiro e segundo modo,  $\omega_0$ , da Tabela 3-1.

$$\omega_1 = 2,87 \quad \omega_2 = 19,11 \quad (3-106)$$

Com os valores de frequência da Equação (3-106) pode-se então encontrar um par de autovetores ortogonais para o sistema. O procedimento descrito para a solução das Equações (3-101) e (3-102) torna-se bastante complexo para equações não-lineares, ou com a adição de amortecimento e carregamentos mais complexos, mesmo assim é possível achar a resposta do sistema no tempo através de métodos numéricos, como no método de Runge-Kutta, por exemplo. Cunha e Prado (2009) elaboraram uma estratégia que consiste em primeiramente substituir a solução-teste de Galerkin nas integrais da equação não-linear desenvolvendo, em seguida, a forma geral da solução de cada uma delas para posterior integração numérica, Apêndice D. Este procedimento simplifica muito o cálculo numérico das integrais. No Apêndice D apresenta-se ainda um programa escrito para o software Maple que faz a montagem e cálculo das integrais segundo a estratégia de Cunha e Prado (2009) para a solução do problema pelo método de discretização de Galerkin sem carregamento e amortecimento.

## 4- APLICAÇÕES NUMÉRICAS

As Equações (3–68) e (3–83) foram discretizadas pelo método de Galerkin, e os sistemas de equações lineares e não-lineares foram montados e resolvidos com auxílio do software de computação simbólica Maple. O método numérico de Runge-Kutta foi aplicado para encontrar a solução das equações linear e não-linear desenvolvidas no Capítulo 3 no domínio do tempo.

Primeiramente calculou-se a resposta para a vibração livre para alguns parâmetros de torre utilizando-se os quatro primeiros modos normais obtidos pela solução analítica da Equação (3–78). A tabela Tabela 4-1 mostra os resultados obtidos para a frequência adimensional da torre com o valor da constante  $\Gamma$  na Equação (3–79) variando entre os usualmente encontrados para torres eólicas. Exceto pelo valor nulo, deixado na tabela apenas para comparação com o valor obtido pela solução analítica da Equação (3–78), encontrado na Tabela 3-1, todos os outros valores da Tabela 4-1 são aproximações da frequência para os parâmetros  $\Gamma$  listados na primeira coluna.

**Tabela 4-1 – Valores para as quatro primeiras autofreqüências em função do valor de  $\Gamma$ .**

$\Gamma$	Frequência Fundamental	Frequência Modo 2	Frequência Modo 3	Frequência Modo 4
0,00	3,516015269	22,03449156	61,69721441	120,90191610
0,05	3,351970129	21,08550492	59,24754055	116,63638120
0,10	3,208320785	20,37008800	57,64993213	114,32646710
0,15	3,081269882	19,81326984	56,53475676	112,88591690
0,20	2,967916822	19,36837250	55,71537419	111,90408640
0,25	2,866009638	19,00512397	55,08922079	111,19286380
0,30	2,773773609	18,70314432	54,59578312	110,65430910
0,35	2,689790935	18,44825580	54,19723181	110,23253260
0,40	2,612914852	18,23031069	53,86877458	109,89336130
0,45	2,542207333	18,04186426	53,59351699	109,61474410
0,50	2,476893212	17,87733610	53,35956450	109,38182360

Analisando a Tabela 4-1 verifica-se que a frequência dos modos tende a diminuir quanto maior o valor do parâmetro  $\Gamma$ , ou seja, quanto maior a massa da nacela quando comparada à da torre.

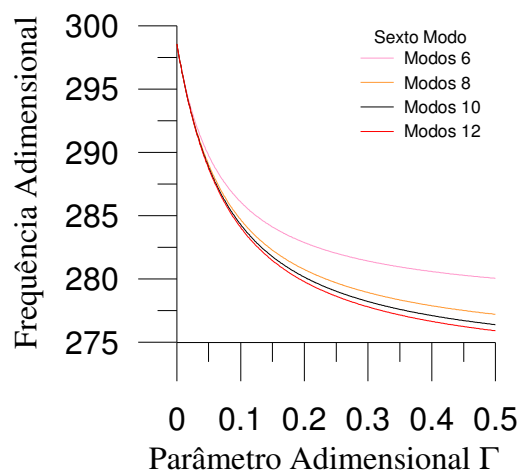
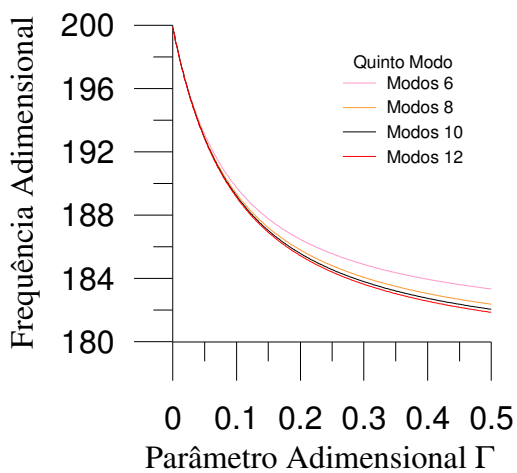
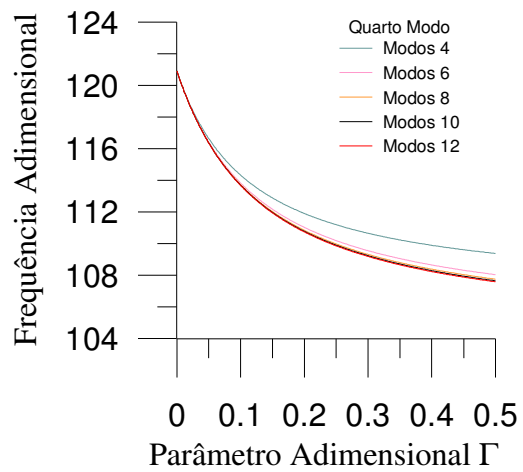
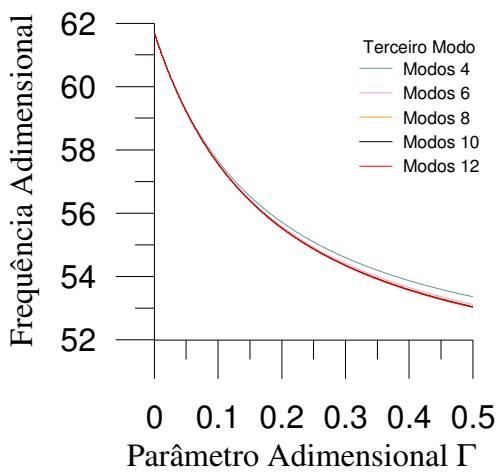
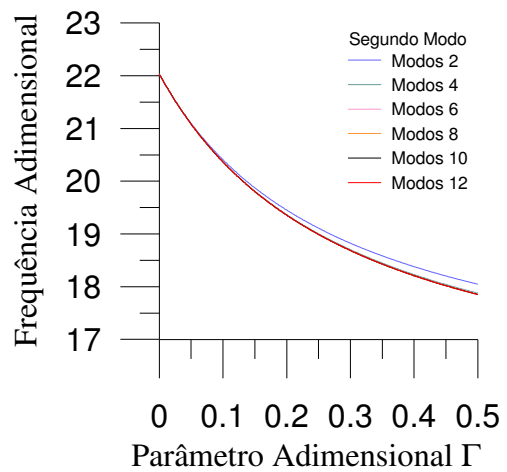
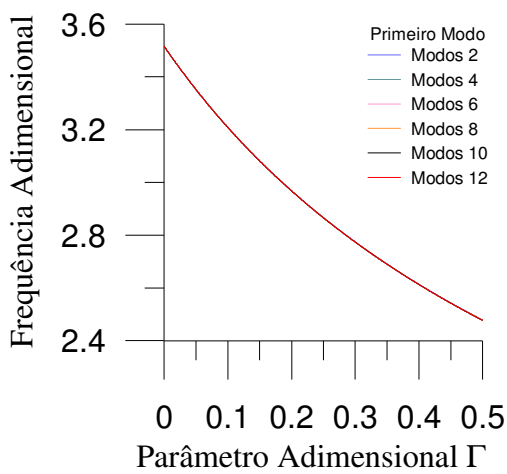
A Tabela 4-2 lista o valor obtido para o parâmetro de frequência adimensional, com  $\Gamma = 0,25$  e  $\gamma = 0$  na Equação (3-83), para vários números de modos normais utilizados na solução-teste no método de Galerkin. Verificou-se a convergência dos valores procurados para as três primeiras autofrequências, utilizando-se o método de Galerkin na Equação (3-83), com o aumento do número de modos normais da solução-teste indicados na primeira coluna da tabela. As autofrequências para quatro modos normais na solução-teste coincidem com os valores verificados na Tabela 4-1.

**Tabela 4-2 – Valores para as três primeiras autofrequências calculados com vários números de modos normais, de 2 a 12 modos, na solução-teste.**

Gama=0,25						
Modos Normais na Solução	Frequência Fundamental	Diferença entre valores	Frequência 2 Modo	Diferença entre valores	Frequência 3 Modo	Diferença entre valores
2	2,866668726		19,11002608			
4	2,866009638	0,0006591	19,00512397	0,1049021	55,08922079	
6	2,865937550	0,0000721	18,99421868	0,0109053	54,92421851	0,1650023
8	2,865919663	0,0000179	18,99152029	0,0026984	54,88443478	0,0397837
10	2,865913247	0,0000064	18,99055261	0,0009677	54,87021906	0,0142157
12	2,865909282	0,0000040	18,98995466	0,0005980	54,86143648	0,0087826

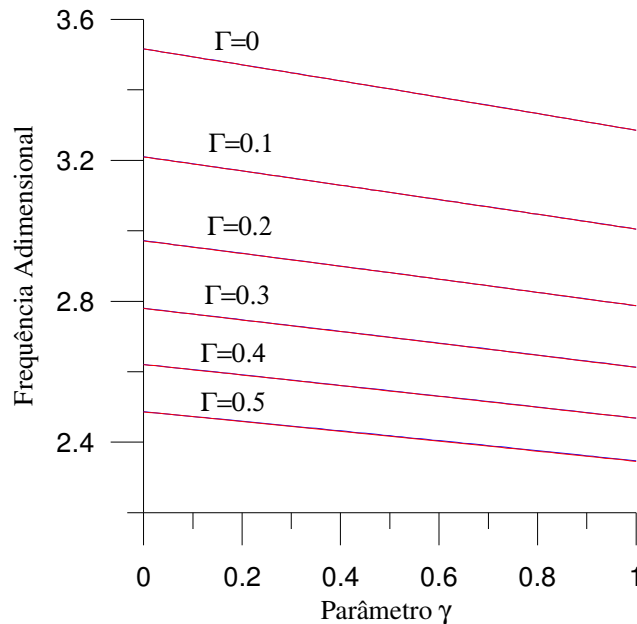
As colunas intituladas “Diferença entre valores”, sempre à direita das colunas de frequência na Tabela 4-2, indicam a diferença entre um valor da frequência na coluna imediatamente à esquerda e outro valor de frequência logo acima do mesmo, calculado com um número menor de modos na solução-teste de Galerkin. Conforme a quantidade de modos normais utilizados na solução-teste aumenta a autofrequência calculada difere cada vez menos de sua antecessora. Para o modo fundamental, a utilização de quatro modos normais na solução-teste apresenta valor de frequência que difere do valor calculado com doze modos normais em quantia de ordem inferior à 0,001 unidades de frequência. Assim, no caso de investigações que levem em consideração a resposta do primeiro modo normal para avaliações subseqüentes, é suficiente a utilização de apenas 4 modos normais de vibração na solução-teste do método de Galerkin.

Os gráficos da Figura 4-1 mostram como a convergência para os valores dos parâmetros de frequência são impactados pelo valor de  $\Gamma$ . Para valores deste parâmetro maiores que 0,1 há uma dependência maior do número de modos normais utilizado na solução-teste, principalmente no cálculo de autofrequências de maior ordem. Para todas as curvas encontradas na Figura 4-1 o valor adotado para  $\gamma$  foi zero.



**Figura 4-1 – Variação dos valores obtidos para o parâmetro de frequência para diversos valores de  $\Gamma$ , para todas as curvas  $\gamma = 0$ .**

A Figura 4-2 mostra a variação da frequência fundamental pelo valor do parâmetro  $\gamma$  para vários valores de  $\Gamma$ . Utilizando-se quatro modos normais na solução-teste de Galerkin, estudou-se a variação da frequência fundamental para valores fixos de  $\Gamma$ , nas Equações (3-68) e (3-83), frente à variação de  $\gamma$ . O parâmetro  $\Gamma$  dá a relação entre as massas da torre da nacela, enquanto que  $\gamma$  relaciona o a inércia da torre com sua rigidez.



**Figura 4-2 – Gráfico mostrando a evolução dos valores da frequência fundamental em função da variação do valor absoluto de  $\gamma$  para alguns valores de  $\Gamma$ .**

A curva referente à  $\Gamma = 0$  na Figura 4-2 não está ligada a qualquer caso concreto de torres eólicas, no entanto, foi colocada no gráfico para ter-se uma idéia da evolução da frequência natural até o valor de interesse prático subsequente,  $\Gamma = 0,1$ , bem como, para fins de avaliação do comportamento da resposta não-linear, que apresentou discrepâncias imperceptíveis no gráfico para a faixa dos valores de  $\Gamma$  e  $\gamma$  investigados.

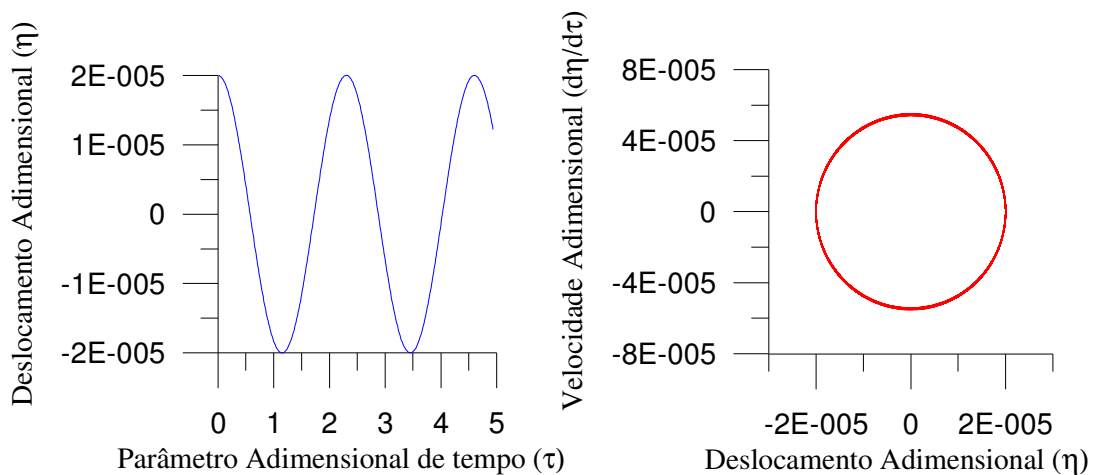
Na Figura 4-2, nota-se que a variação nos valores de  $\Gamma$  implica em grande alteração da frequência fundamental se comparada às mesmas variações de  $\gamma$ . A faixa de valores escolhida para traçar as curvas da Figura 4-2 extrapola em aproximadamente vinte por cento os valores destes parâmetros para os casos de interesse prático. Os maiores valores encontrados, na realidade, para  $\Gamma$  e  $\gamma$  chegam a 0.4, aproximadamente.



As curvas da Figura 4-1 e Figura 4-2 foram traçadas levando-se em consideração a resposta da oscilação livre da torre no tempo, sem amortecimento e sem a ação de carregamento. As respostas lineares e não-lineares, retiradas das Equações (3-68) e (3-83), foram bastante similares. Para pequenos valores do parâmetro  $\gamma$  as respostas linear e não-linear são idênticas.

Na Figura 4-3, compara-se a resposta para o movimento livre de uma torre com parâmetros  $\Gamma = \gamma = 0,3$  no seu modo fundamental em cinco unidades adimensionais de tempo, a resposta não-linear acompanha a linear. À direita, na mesma figura, mostra-se o espaço de fase para a resposta não-linear em 3500 unidades adimensionais de tempo.

Na solução dos sistemas originados pela discretização das Equações (3-68) e (3-83), embora o carregamento esteja acoplado à equação do movimento, não foi utilizado um modelo que retratasse a ação do vento nas pás do rotor.



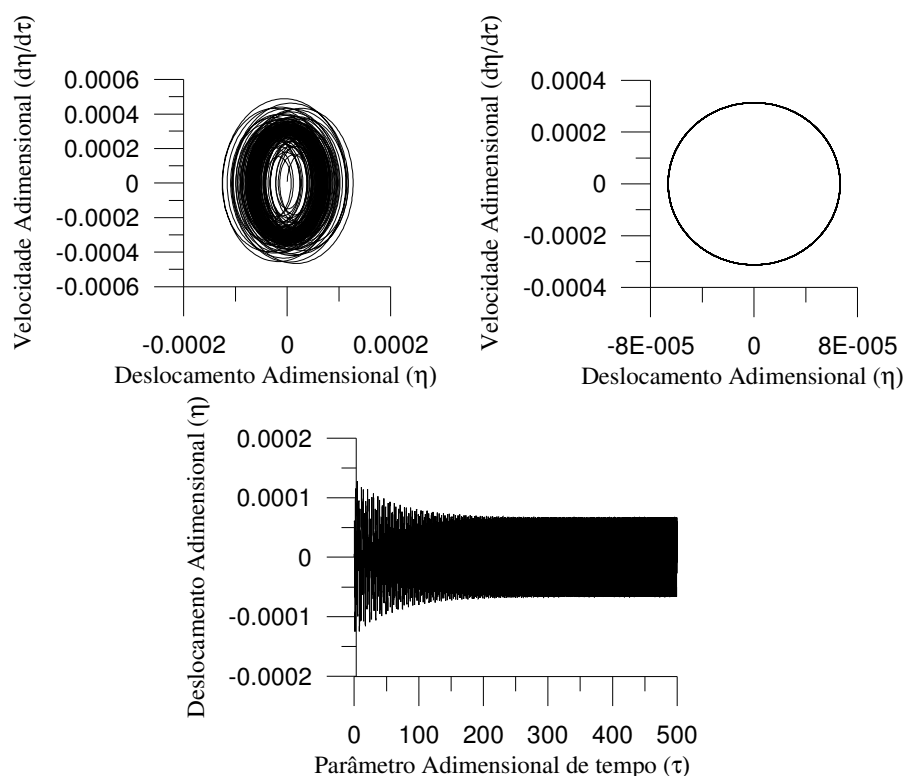
**Figura 4-3 – Resposta para a vibração livre do primeiro modo, à direita, espaço de fase para a equação não-linear do movimento para  $\tau = 3500$ .**

Utilizando a Equação (3-67) como referência,  $f_D$ , o carregamento adimensional é dependente do quadrado do comprimento da torre considerada e de sua rigidez. No caso de torres metálicas, em aço, de seção circular, a rigidez no denominador representa a multiplicação da carga da torre por um fator da ordem de  $10^{-9} \text{ (Nm}^2\text{)}^{-1}$ . A ordem de grandeza do carregamento do vento à velocidade máxima de funcionamento da turbina para uma torre eólica de cem metros ( $10^2 \text{ m}$ ) de altura é de  $10^5 \text{ N}$ . Assim, para efeitos de

cálculo, considerou-se a ação de uma força adimensional oscilante na extremidade da torre cujos valores adimensionais devem variar entre zero e 0,02 unidade adimensional de carga, considerado o valor máximo de interesse prático.

A Figura 4-4 mostra a resposta de uma torre cujo  $\Gamma = \gamma = 0,3$  em movimento amortecido com as condições iniciais de repouso na configuração indeformada.

Amortecimento e carregamento também foram adicionados aos modelos linear e não-linear e suas respostas comparadas. O amortecimento é o proposto na Equação (3-58), aplicado da mesma forma nas Equações (3-68) e (3-83), e seu valor é de 5%.



**Figura 4-4 – Oscilação com carregamento concentrado na extremidade da torre. Acima, à esquerda, espaço de fase para  $0 < \tau < 500$ . Acima, à direita, espaço de fase para  $400 < \tau < 500$ .**

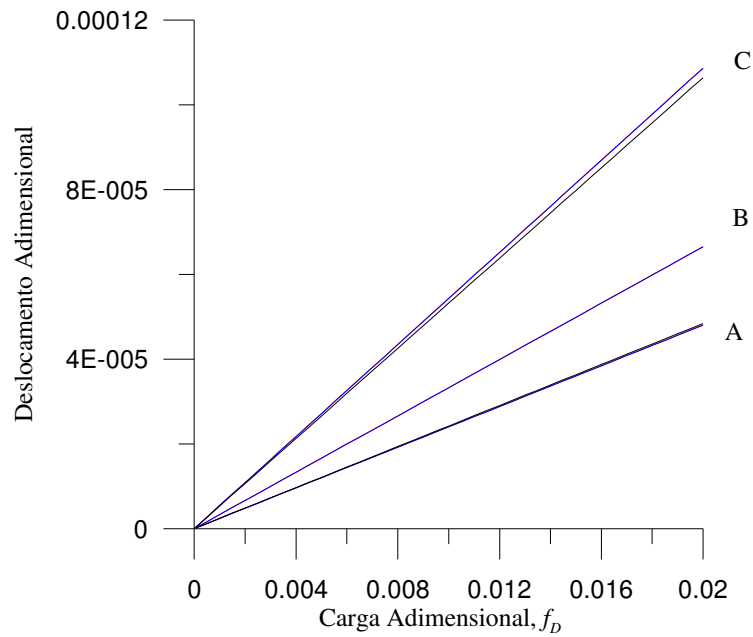
Para a medição da amplitude deste tipo de sistema, amortecido e excitado com carga externa de frequência definida, utilizou-se um ponto de máximo a 500 unidades de tempo da origem. A resposta ilustrada na Figura 4-4 representa a resposta obtida pela equação

linear, bem como, pela não-linear para os valores de amortecimento já comentado e carga adimensional igual a 0,02.

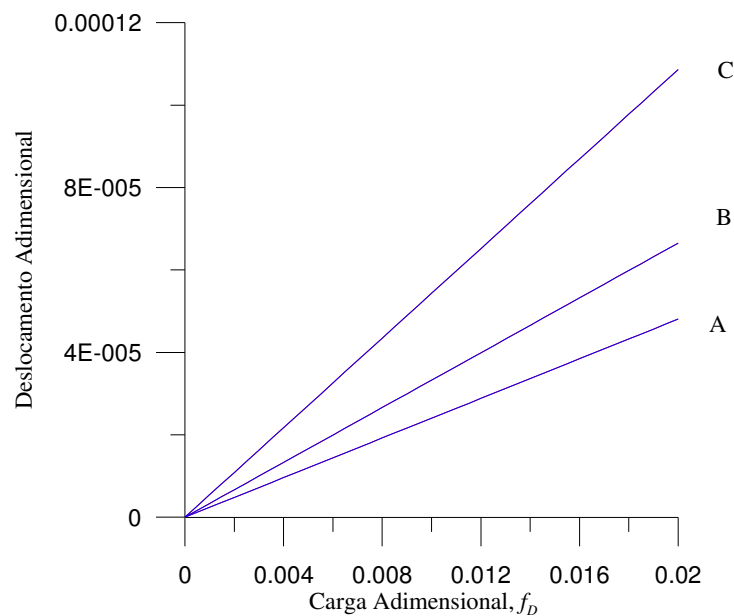
Aplicaram-se dois tipos de carregamento aos diferentes parâmetros de torre estudados. Verificou-se a evolução da resposta da amplitude do deslocamento da ponta da torre devido ao acréscimo linear no valor do carregamento. Verificou-se ainda a resposta do sistema à aplicação de carregamento súbito e sucessivo às condições iniciais do passo de carga anterior, sempre aplicada a seus pontos de amplitude máximas. Todos os pontos de resposta referem-se à extremidade da torre, onde fica sua nacele.

A Figura 4-5 mostra a variação da amplitude da resposta a cinco diferentes combinações de valores para os parâmetros de torre. No ponto A, em azul, apresentam-se as respostas de uma torre com parâmetros  $\Gamma=0,1$  e  $\gamma=0,1$ ; em preto, no mesmo ponto apresentam-se as respostas de outra combinação de parâmetros de torre com  $\Gamma=0,1$  e  $\gamma=0,3$ ; no ponto C, duas retas quase não são distinguíveis para as respostas de duas combinações de parâmetros, a primeira de  $\Gamma=0,5$  e  $\gamma=0,5$ , e a segunda com  $\Gamma=0,5$  e  $\gamma=0,3$ ; no ponto B, mostra-se a reta com a resposta para os parâmetros  $\Gamma=0,3$  e  $\gamma=0,3$ , todas as respostas foram analisadas comparando-se as respostas obtidas pelas Equações (3-68) e (3-83). Não foram percebidas diferenças nas respostas lineares e não-lineares em todas as combinações de parâmetros de torre analisadas para a faixa de carregamento mostrada na Figura 4-5.

A Figura 4-6 mostra a variação da amplitude das respostas lineares e não-lineares de três combinações de parâmetros de torre distintas submetidas ao passo de carga de aumento gradual, linear, com aplicação súbita. No ponto A, em azul, apresentam-se as respostas para o parâmetro  $\Gamma=0,1$  e  $\gamma=0,1$ ; no ponto B, apresentam-se as respostas de uma torre com  $\Gamma=0,3$  e  $\gamma=0,3$ ; no ponto C, mostram-se as retas com as respostas dos parâmetros  $\Gamma=0,5$  e  $\gamma=0,5$ , todas as respostas foram analisadas comparando-se com o obtido pelas Equações (3-68) e (3-83). Os resultados obtidos são aproximadamente os mesmos retratados na Figura 4-5. Não foram percebidas diferenças nas respostas lineares e não-lineares em todas as combinações de parâmetro de torre analisadas.



**Figura 4-5 – Carga gradual aplicada em cinco tipos de torres. O eixo vertical mostra a resposta das diferentes configurações de parâmetro de torre ao carregamento aplicado.**

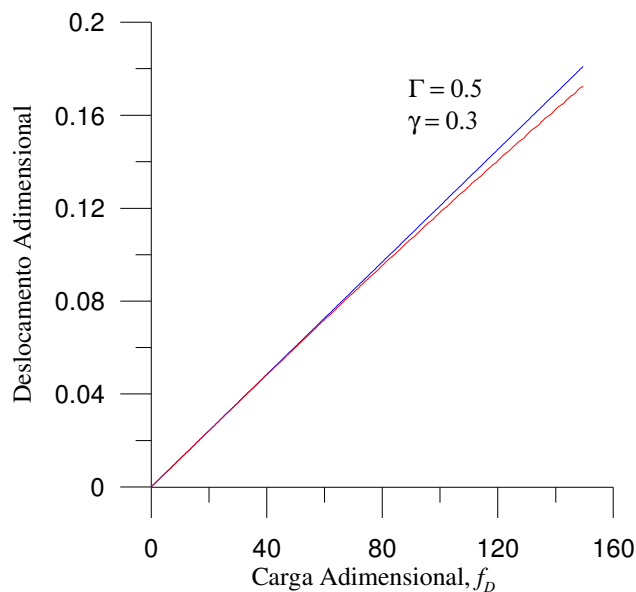


**Figura 4-6 – Carga súbita aplicada em três torres distintas. O eixo vertical mostra a resposta das diferentes configurações de parâmetro de torre ao carregamento aplicado.**

A fim de avaliar para qual valor de carga as respostas linear e não-linear são distintas, aplicou-se um carregamento com acréscimos lineares até o valor de cento e sessenta

unidades de carga adimensional a uma torre com parâmetros  $\Gamma=0,5$  e  $\gamma= 0,3$  e calculou-se a evolução da amplitude do deslocamento da extremidade da torre, Figura 4-7. A resposta não-linear, em vermelho, acompanha a linear, na cor azul, até o valor aproximado de 40 unidades de carga, quando então se verifica que a resposta não-linear começa a dar resultados para a amplitude ligeiramente inferiores à linear. Para uma torre eólica de 100 metros de altura com os mesmos parâmetros utilizados no gráfico da Figura 4-7, tal amplitude corresponderia a deslocamentos da ordem de, aproximadamente, 10 metros do ponto máximo ao mínimo no movimento oscilatório, o que não é aceitável no dispositivo real.

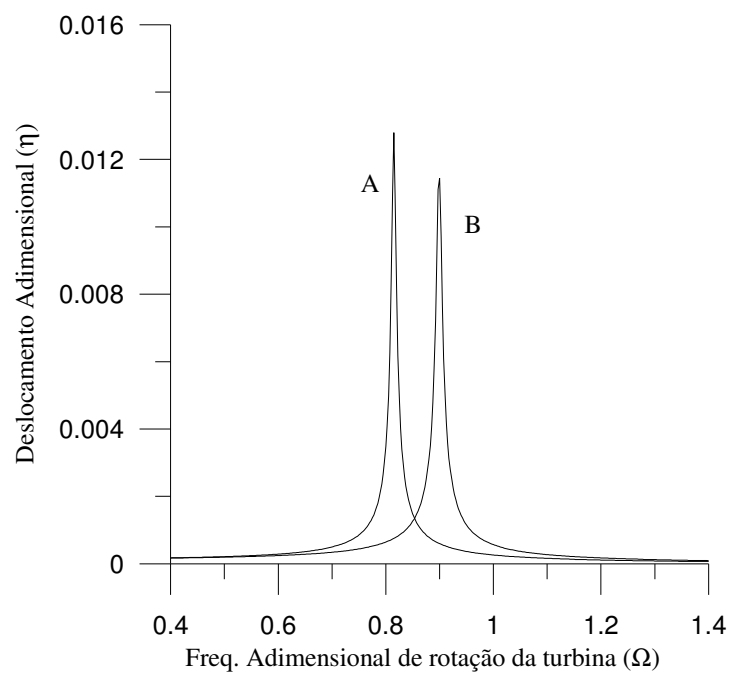
Uma variável de interesse no estudo de torres eólicas é a frequência de rotação do rotor do aerogerador,  $\Omega$ . Esta frequência varia durante todo o ciclo de funcionamento do aparelho devido à variação da velocidade do vento. A frequência de rotação também é a responsável pelas oscilações em seu carregamento devido ao gradiente de velocidade do vento, cuja velocidade varia com a altura de medição à partir do solo.



**Figura 4-7 – Carga gradual aplicada a torre com parâmetro  $\Gamma = 0,5$  e  $\gamma = 0,3$ . O eixo vertical mostra a resposta ao carregamento aplicado.**

A Figura 4-8 apresenta a resposta no deslocamento adimensional de duas combinações de parâmetros de torre devido à variação na velocidade de rotação do eixo da turbina eólica. A torre representada pelo ponto A tem  $\Gamma = 0,5$  e  $\gamma = 0,3$  tem seu pico de ressonância à

aproximadamente um terço do valor para a freqüência fundamental da torre conforme mostrado na Tabela 4-1. O valor se justifica devido ao fato de que a cada passagem das pás em frente à torre, o carregamento devido ao vento atinge um máximo. Como a turbina possui três pás, em uma rotação do eixo há três picos de máximo de carga, conforme explicado no capítulo 3. O mesmo pode-se dizer da configuração de parâmetros de torre referente ao ponto B,  $\Gamma = 0,3$  e  $\gamma = 0,5$ , que apresenta seu pico de ressonância à aproximadamente um terço do valor da freqüência fundamental, segundo os dados da Tabela 4-1.



**Figura 4-8 – Resposta de duas torres distintas à variação da velocidade de rotação (adimensional) do rotor dos aerogeradores.**

O gráfico da Figura 4-8 foi baseado na resposta das Equações (3-68) e (3-83) para o movimento não-linear e linear em ambas as configurações de parâmetros, A e B. Estas respostas são iguais para o caso linear e não-linear.

## 5- CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Formulou-se uma equação não-linear do movimento para estudar o comportamento dinâmico de torres de aerogeradores utilizando-se a teoria de Euler-Bernoulli com acoplamento torre-aerogerador baseada no princípio variacional de Hamilton.

A equação não-linear para o movimento da torre apresentou resultados muito próximos dos encontrados com a formulação linear da torre, seja na descrição o movimento livre da torre eólica, bem como, para o movimento da torre eólica submetida aos carregamentos aplicados na nacele, o que sugere que a formulação linear é suficiente para descrever os fenômenos relacionados a estas torres.

Foi verificado que a resposta dinâmica linear e não-linear diferem quando valores significativos para o deslocamento são atingidos, estes valores não tem correspondente no funcionamento do dispositivo real.

O acoplamento do amortecimento à termos não lineares poderia ser investigado, o que permitiria verificar se o amortecimento leva a alguma variação na resposta do movimento da torre se comparada à formulação linear.

Sugere-se que seja agregado um modelo de carregamento que descreva a resposta das pás da turbina sob a ação do vento. As características geométricas das pás precisam ser agregadas ao modelo para uma melhor avaliação da resposta não-linear da torre. Para a discussão dos fenômenos mais comuns às torres eólicas como os efeitos da variação do momento angular no rotor da turbina é necessário considerar o estudo do movimento além do plano estudado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACKERMANN, T. An overview of wind energy-status 2002. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 6, n. 1-2, p. 67-127. doi: 10.1016/S1364-0321(02)00008-4, 2002.

Agência Nacional de Energia Elétrica. **Atlas de Energia Elétrica do Brasil**. 3rd ed. Aneel. Retrieved January 18, 2011, from [http://www.aneel.gov.br/visualizar\\_texto.cfm?idtxt=1687](http://www.aneel.gov.br/visualizar_texto.cfm?idtxt=1687), 2008.

AHLSTRÖM, A. **Aeroelastic Simulation of Wind Turbine Dynamics**. Stockholm, Sweden: Royal Institute of Technology, 2005.

BAZEOS, N. Static, seismic and stability analyses of a prototype wind turbine steel tower. **Engineering Structures**, v. 24, n. 8, p. 1015-1025. doi: 10.1016/S0141-0296(02)00021-4, 2002.

CARL WILCOX. **Wind\_turbine\_1941.jpg (JPEG Image, 334×500 pixels)**. Retrieved July 23, 2011, from [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/50/Wind\\_turbine\\_1941.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/50/Wind_turbine_1941.jpg), 1941.

CHEN, X. LI, J.; CHEN, J. Wind-induced response analysis of a wind turbine tower including the blade-tower coupling effect. **Journal of Zhejiang University-Science A**, v. 10, n. 11, p. 1573–1580, 2009.

CLOUGH, R. **Dynamics of structures**. New York: McGraw-Hill, 1975.

CRESESB. **ATLAS DO POTENCIAL EÓLICO BRASILEIRO**. Centro de Referência para Energia Solar e Eólica Sérgio de Salvo Brito - CRESESB. Retrieved October 16, 2010, from [http://www.cresesb.cepel.br/index.php?link=/atlas\\_eolico\\_brasil/atlas.htm](http://www.cresesb.cepel.br/index.php?link=/atlas_eolico_brasil/atlas.htm), 2001.



CUNHA, J. R.; PRADO, Z. J. G. N. Vibrações em Tubulações Induzidas por Fluidos. Relatório Técnico de Projeto – Iniciação Científica. Universidade Federal de Goiás – Escola de Engenharia Civil. UFG. 2009.

CUSTÓDIO, R. DOS S. **Energia Eólica para produção de Energia Elétrica**. Rio de Janeiro: Centrais Elétricas Brasileiras -Eletrobrás, 2009.

DAI, J. C. HU, Y. P. LIU, D. S.; LONG, X. Aerodynamic loads calculation and analysis for large scale wind turbine based on combining BEM modified theory with dynamic stall model. **Renewable Energy**, v. 36, n. 3, p. 1095-1104. doi: 16/j.renene.2010.08.024, 2011.

DWIA. Danish Wind Industry Association -DWIA. Annual Statistics 2010. . Retrieved October 16, 2010, from <http://www.windpower.org/en/knowledge/publications.html>, 2010.

EWEA. European Wind Energy Association - EWEA. Pure Power - Wind energy targets for 2020 and 2030. . Retrieved October 16, 2010, from <http://www.ewea.org/>, 2009.

EWEA. European Wind Energy Association - EWEA. Wind Energy Factsheets 2010. . Retrieved October 16, 2010, from <http://www.ewea.org/>, 2010.

GEBHARDT, C. G. PREIDIKMAN, S.; MASSA, J. C. Numerical simulations of the aerodynamic behavior of large horizontal-axis wind turbines. **International Journal of Hydrogen Energy**, v. 35, n. 11, p. 6005-6011. doi: 10.1016/j.ijhydene.2009.12.089, 2010.

GWEC. Global Wind Energy Council - GWEC. Global Wind 2009 Report. . Retrieved October 16, 2010, from <http://www.gwec.net/>, 2009.

HANSEN, M. O. L. SORENSEN, J. N. VOUTSINAS, S. SORENSEN, N.; MADSEN, H. A. State of the art in wind turbine aerodynamics and aeroelasticity. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 42, n. 4, p. 285–330, 2006.

JOSELIN HERBERT, G. M. INIYAN, S. SREEVALSAN, E.; RAJAPANDIAN, S. A review of wind energy technologies. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 11, n. 6, p. 1117-1145. doi: doi: 10.1016/j.rser.2005.08.004, 2007.

LI JUNFENG. **China Wind Power Report 2007 - Greenpeace East Asia**. Retrieved January 17, 2011, from <http://www.greenpeace.org/eastasia/press/reports/wind-power-report>, 2007.

KESSENTINI, S. CHOURA, S. NAJAR, F.; FRANCKEK, M. A. Modeling and Dynamics of a Horizontal Axis Wind Turbine. **Journal of Vibration and Control**, v. 16, n. 13, p. 2001 -2021. doi: 10.1177/1077546309350189, 2010.

KITAGAWA, T. WAKAHARA, T. FUJINO, Y.; KIMURA, K. An experimental study on vortex-induced vibration of a circular cylinder tower at a high wind speed. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 69, p. 731–744, 1997.

LANZAFAME, R.; MESSINA, M. Fluid dynamics wind turbine design: Critical analysis, optimization and application of BEM theory. **Renewable Energy**, v. 32, n. 14, p. 2291-2305. doi: 10.1016/j.renene.2006.12.010, 2007.

LAVASSAS, I. Analysis and design of the prototype of a steel 1-MW wind turbine tower. **Engineering Structures**, v. 25, n. 8, p. 1097-1106. doi: 10.1016/S0141-0296(03)00059-2, 2003.

LI, JING; CHEN, JIANYUN; CHEN, XIAOBO. Aerodynamic response analysis of wind turbines. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 25, n. 1, p. 89-95. doi: 10.1007/s12206-010-0909-z, 2011.

MAALAWI, K. Y. A model for yawing dynamic optimization of a wind turbine structure. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 49, n. 10, p. 1130–1138, 2007.

MAHMOODI, S. An experimental investigation of nonlinear vibration and frequency response analysis of cantilever viscoelastic beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 311, n. 3-5, p. 1409-1419. doi: 10.1016/j.jsv.2007.09.027, 2008.

MARTIN BROWN. **NASA\_MOD-0\_Plum\_Brook\_OH\_1975\_03490L.jpg (JPEG Image, 360×450 pixels) - Scaled (0%)**. Retrieved July 23, 2011, from

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7a/NASA\\_MOD-0\\_Plum\\_Brook\\_OH\\_1975\\_03490L.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7a/NASA_MOD-0_Plum_Brook_OH_1975_03490L.jpg), 1975.

MEIROVITCH, L. **Analytical methods in vibrations**. New York N.Y.: Macmillan, 1967.

MICHALAK, P.; ZIMNY, J. Wind energy development in the world, Europe and Poland from 1995 to 2009; current status and future perspectives. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 15, n. 5, p. 2330-2341. doi: doi: 10.1016/j.rser.2011.02.008, 2011.

MURTAGH, P. BASU, B.; BRODERICK, B. Along-wind response of a wind turbine tower with blade coupling subjected to rotationally sampled wind loading. **Engineering Structures**, v. 27, n. 8, p. 1209-1219. doi: 10.1016/j.engstruct.2005.03.004, 2005.

NASA. **NASA\_Mod\_1\_wind\_turbine.jpg (JPEG Image, 1347×1044 pixels)**. Retrieved July 23, 2011, from [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/NASA\\_Mod\\_1\\_wind\\_turbine.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/NASA_Mod_1_wind_turbine.jpg), 1979.

NEGM, H. M.; MAALAWI, K. Y. Structural design optimization of wind turbine towers. **Computers and Structures**, v. 74, n. 6, p. 649–666, 2000.

PAÏDOUSSIS, M. **Fluid-structure interactions**. San Diego, CA :: Academic Press., 1998.

PAÏDOUSSIS, M. P.; SEMLER, C. Non-linear dynamics of a fluid-conveying cantilevered pipe with a small mass attached at the free end. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 33, n. 1, p. 15-32. doi: doi: DOI: 10.1016/S0020-7462(97)00002-4, 1998.

PAÏDOUSSIS, M. P.; ISSID, N. T. Dynamic stability of pipes conveying fluid. **Journal of Sound and Vibration**, v. 33, n. 3, p. 267-294. doi: doi: DOI: 10.1016/S0022-460X(74)80002-7, 1974.

PEREIRA, A. DE L. **Análise aeroelástica de turbinas de eixo horizontal**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1993.

PROKUDIN-GORSKIĬ, S. M. Mel'nitsy (V Īalutorovskom uiezdĭe Tobol'skoĭ gub. . still image, . Retrieved July 23, 2011, from <http://www.loc.gov/pictures/collection/prok/item/prk2000002370>, 1912.

SARKAR, A.; PAĪDOUSSIS, M. P. A cantilever conveying fluid: coherent modes versus beam modes. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 39, n. 3, p. 467-481. doi: DOI: 10.1016/S0020-7462(02)00213-5, 2004.

SEMLER, C. LI, G. X.; PAĪDOUSSIS, M. P. The Non-linear Equations of Motion of Pipes Conveying Fluid. **Journal of Sound and Vibration**, v. 169, n. 5, p. 577-599. doi: DOI: 10.1006/jsvi.1994.1035, 1994.

SHAW, S. W.; PIERRE, C. Normal Modes of Vibration for Non-Linear Continuous Systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 169, n. 3, p. 319-347. doi: DOI: 10.1006/jsvi.1994.1021, 1994.

THIRINGER, T.; DAHLBERG, J.-A. Periodic pulsations from a three-bladed wind turbine. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, v. 16, n. 2, p. 128-133. doi: 10.1109/60.921463, 2001.

UYS, P. FARKAS, J. JARMAI, K.; VANTONDER, F. Optimisation of a steel tower for a wind turbine structure. **Engineering Structures**, v. 29, n. 7, p. 1337-1342. doi: 10.1016/j.engstruct.2006.08.011, 2007.

WANG, J. QIN, D.; LIM, T. C. Dynamic analysis of horizontal axis wind turbine by thin-walled beam theory. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 17, p. 3565-3586. doi: 10.1016/j.jsv.2010.03.011, 2010.

## APÊNDICES

## A – RELAÇÃO ENTRE A DEFORMAÇÃO DA TORRE AO LONGO DE SEU EIXO CENTRAL E OS SISTEMAS DE COORDENADAS UTILIZADOS

Pode-se relacionar a deformação da linha central da torre com os sistemas de coordenadas utilizados nas Equações (3-11) e (3-14).

$$\varepsilon = \frac{\delta S - \delta S_0}{\delta S_0} = \frac{\delta S}{\delta S_0} - 1 = \frac{\delta S}{\delta Y} - 1 \quad (\text{A-01})$$

$$\varepsilon + 1 = \frac{\delta S}{\delta Y} \quad (\text{A-02})$$

$$(\delta S)^2 - (\delta S_0)^2 = (\delta S_0)^2 \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial S_0} \right)^2 - 1 \right] = (\delta Y)^2 \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial Y} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{A-03})$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial S_0} \right)^2 - 1 = \left( \frac{\partial Y}{\delta S_0} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial Y} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{A-04})$$

$$(\varepsilon + 1)^2 - 1 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial Y} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{A-05})$$

$$\varepsilon + 1 = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial Y} \right)^2} \quad (\text{A-06})$$

Utilizando como referência o deslocamento dos pontos da secção reta da torre chega-se também à Equação (A-07).

$$\varepsilon + 1 = \sqrt{\left( \frac{\partial v}{\partial Y} + 1 \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2} \quad (\text{A-07})$$

## B – DEDUÇÃO DA CURVATURA DA LINHA CENTRAL DA TORRE EÓLICA

Tomando por base a Figura 3-2, e devido ao fato de  $\vec{T}$  ser um vetor unitário pode-se escrevê-lo na forma da Equação (B-01).

$$\vec{T} = \text{sen}\theta\hat{i} + \text{cos}\theta\hat{j} \quad (\text{B-01})$$

Assim, se  $g(x)$  e  $h(x)$  são funções auxiliares da equação vetorial que liga os pontos da linha central da torre, Equação (B-02), o vetor tangente unitário em um ponto P qualquer desta curva pode ser representado pela Equação (B-03).

$$\vec{r} = g(x)\hat{i} + h(x)\hat{j} \quad (\text{B-02})$$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/dX}{|d\vec{r}/dX|} = \frac{g'(x)}{\sqrt{g'(x)^2 + h'(x)^2}}\hat{i} + \frac{h'(x)}{\sqrt{g'(x)^2 + h'(x)^2}}\hat{j} \quad (\text{B-03})$$

Desenvolve-se o cosseno e o seno do ângulo de curvatura com respeito à direção X para o caso geral, ou seja, computando a deformação da torre, Equação (B-04). Seguem-se as Equações (B-05) e (B-06).

$$\epsilon + 1 = \sqrt{g'(x)^2 + h'(x)^2} \quad (\text{B-04})$$

$$\text{sen}\theta = \frac{g'(x)}{\sqrt{g'(x)^2 + h'(x)^2}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial Y}}{1 + \epsilon} \quad (\text{B-05})$$

$$\text{cos}\theta = \frac{h'(x)}{\sqrt{g'(x)^2 + h'(x)^2}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial Y}}{1 + \epsilon} \quad (\text{B-06})$$

Considerando  $\vec{N}$  o vetor normal unitário perpendicular a  $\vec{T}$ , por indução, chega-se a Equação (B-07).

$$\vec{N} = -\text{sen}\theta\hat{i} + \text{cos}\theta\hat{j} = \frac{-g'(x)}{\sqrt{g'(x)^2 + h'(x)^2}}\hat{i} + \frac{h'(x)}{\sqrt{g'(x)^2 + h'(x)^2}}\hat{j} \quad (\text{B-07})$$

Substituem-se as Equações (B-03) e (B-07) na Equação (B-08), que relaciona a curvatura aos vetores tangente e normal, Equação (B-09).

$$\frac{d\vec{T}}{dS} = \kappa\vec{N} \rightarrow \kappa = \frac{d\vec{T}}{dX} \frac{dX}{dS} \vec{N} = \frac{1}{1+\epsilon} \frac{d\vec{T}}{dX} \vec{N} \quad (\text{B-08})$$

$$\kappa = \frac{g'(x)h''(x) - g''(x)h'(x)}{\left\{ [g'(x)]^2 + [h'(x)]^2 \right\}^{3/2}} \quad (\text{B-09})$$

Com auxílio das Equações (B-04) a (B-06) chega-se a uma à expressão para a curvatura da linha central da torre eólica, Equação (B-10).

$$\kappa = \frac{1}{(1+\epsilon)^3} \left[ \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial^2 y}{\partial Y^2} - \frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial^2 x}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{B-10})$$

É possível fazer o mesmo desenvolvimento para o deslocamento dos pontos da linha central da torre, bastando para isso substituir as Equações (B-05) e (B-06) pelas Equações (B-11) e (B-12), com isso chega-se à Equação (B-13).

$$\text{sen}\theta = \frac{1 + \frac{\partial u}{\partial X}}{1 + \epsilon} = \frac{g'(x)}{\sqrt{g'(x)^2 + h'(x)^2}} \quad (\text{B-11})$$

$$\text{cos}\theta = \frac{\frac{\partial v}{\partial X}}{1 + \epsilon} = \frac{h'(x)}{\sqrt{g'(x)^2 + h'(x)^2}} \quad (\text{B-12})$$



$$\kappa = \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} - \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{B-13})$$

Lembrando a definição de curvatura, Equação (B-14), por indução chega-se às Equações (B-15) e (B-16).

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial S} = \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial S} = \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (\text{B-14})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \left[ \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial^2 y}{\partial X^2} - \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} \right] \quad (\text{B-15})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) - \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right] \quad (\text{B-16})$$

Aplicando o princípio da inextensibilidade, ou seja,  $\varepsilon=0$ , às Equações (B-15) e (B-16) e assumindo que a  $\Delta S = \Delta X$  chegam-se às Equações (B-17) e (B-18)

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial S} = \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial^2 y}{\partial S^2} - \frac{\partial y}{\partial S} \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \quad (\text{B-17})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial S} = \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial S} \right) - \frac{\partial v}{\partial S} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \quad (\text{B-18})$$

Substituindo as Equações (B-19) e (B-20) na Equação (B-9) e considerando o princípio de inextensibilidade chega-se às expressões para a curvatura mostradas no capítulo 3, respectivamente às Equações (B-21) e (B-22).

$$\vec{r} = x(S)\hat{i} + y(S)\hat{j} \quad (\text{B-19})$$

$$\vec{r} = x(y)\hat{i} + y(S)\hat{j} \quad (\text{B-20})$$

$$\kappa = \frac{-\partial^2 x / \partial S^2}{\sqrt{1 - (\partial x / \partial S)^2}} \quad (\text{B-21})$$

$$\kappa = \frac{\partial^2 x / \partial y^2}{\left[1 + (\partial x / \partial y)^2\right]^{3/2}} \quad (\text{B-22})$$

## C – EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE PARA O OPERADOR VARIACIONAL

O cálculo variacional objetiva investigar os máximos e mínimos dos chamados funcionais e se assemelha à obtenção de máximos e mínimos de funções. A seguir apresenta-se a forma da Equação de Euler-Lagrange para alguns funcionais de interesse utilizados neste trabalho.

Seja o funcional representado pela integral da Equação (C-1).

$$J(I) = \int_A^B I(f, f_x, x) dx \quad (C-1)$$

A condição necessária para que o funcional acima definido no intervalo de A a B, com valores finitos em seus extremos e que satisfazem as condições de contorno, alcance seu valor extremo na função  $f(x)$  é que esta função verifique a equação de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial I}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial I}{\partial f_x} \right) = 0 \quad (C-2)$$

Outro funcional de interesse para o cálculo da energia cinética é o da Equação (C-3).

$$J(I) = \int_A^B I(f, f_x, f_{xx}, x) dx \quad (C-3)$$

A equação de Euler-Lagrange para este funcional tem a forma dada pela Equação (C-4).

$$\frac{\partial I}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial I}{\partial f_x} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial I}{\partial f_{xx}} \right) = 0 \quad (C-4)$$

## D – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR PELO MÉTODO DE GALERKIN

A equação (D-1) é a equação diferencial não linear para a torre cujos termos devem ser integrados separadamente no método de Galerkin.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] - \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \int_{\xi}^1 [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] d\xi + \gamma [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} - \\
 & - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \left[ \frac{3}{2} \int_{\xi}^1 \gamma [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] d\xi \right] + \frac{1}{2} \gamma [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^3 + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 + 4 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + \\
 & + \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right)^3 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \int_0^{\xi} \left( \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tau^2 \partial \xi} \right) d\xi - \\
 & - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \int_{\xi}^1 [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \int_0^{\xi} \left( \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tau^2 \partial \xi} \right) d\xi d\xi \tag{D-1}
 \end{aligned}$$

Solução-teste para o método de Galerkin com n modos normais:

$$\eta(\xi, \tau) = \psi_1(\xi) q_1(\tau) + \dots + \psi_n(\xi) q_n(\tau) \tag{D-2}$$

$$\int_0^1 R \psi_i d\xi = \int_0^1 R_1 \psi_i d\xi + \dots + \int_0^1 R_n \psi_i d\xi = 0 \quad \text{com } i=1, \dots, n \tag{D-3}$$

Primeiro Termo da equação diferencial não-linear (D-1):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \tag{D-4}$$

Como exemplo, substituímos a solução no primeiro termo utilizando o número de modos igual a 2 (n=2):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] = \psi_1 \frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2} + \psi_2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial \tau^2} + \Gamma \delta(\xi - 1) \left[ \psi_1 \frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2} + \psi_2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial \tau^2} \right] = R_I \quad (D-5)$$

$$\int_0^1 R \psi_1 d\xi = \int_0^1 \left( \psi_1 \frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2} \psi_1 + \psi_2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial \tau^2} \psi_1 + \Gamma \delta(\xi - 1) \left[ \psi_1 \frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2} + \psi_2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial \tau^2} \right] \psi_1 \right) d\xi = 0 \quad (D-6)$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2} \underbrace{\int_0^1 \psi_1^2 d\xi}_{=1} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial \tau^2} \underbrace{\int_0^1 \psi_2 \psi_1 d\xi}_{=0} + \Gamma \left[ \frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2} \underbrace{\int_0^1 \delta(\xi - 1) \psi_1^2 d\xi}_{=0} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial \tau^2} \underbrace{\int_0^1 \delta(\xi - 1) \psi_2 \psi_1 d\xi}_{=0} \right] = 0 \quad (D-7)$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2} \left( 1 + \Gamma \int_0^1 \delta(\xi - 1) \psi_1^2 d\xi \right) = 0 \quad (D-8)$$

De maneira geral, para a integral da função Delta de Dirac em um intervalo aberto de  $a$  até  $b$  temos as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \delta(\xi - c) &= 0 & \text{se } \xi \neq c \\ \int_a^b \delta(\xi - c) d\xi &= 1 & \text{se } a < c < b \end{aligned} \quad (D-9)$$

Valendo-se da primeira propriedade, no contexto da integração, podemos escrever que,

$$\psi_i(\xi) \psi_i(\xi) \delta(\xi - 1) = \psi_i(1) \psi_i(1) \quad \text{se } \xi = 1 \quad (D-10)$$

Logo, considerando A-9 extensível ao intervalo fechado, segue que

$$\int_0^1 \delta(\xi - 1) \psi_i(\xi) \psi_i(\xi) d\xi = \psi_i(1) \psi_i(1) \int_0^1 \delta(\xi - 1) d\xi = \psi_i(1) \psi_i(1) \quad (D-11)$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2} [1 + \Gamma \psi_1^2] = 0 \quad (D-12)$$

O mesmo desenvolvimento é válido para  $\psi_2$ ,

$$\int_0^1 R_1 \psi_2 d\xi = \frac{\partial^2 q_2}{\partial \tau^2} [1 + \Gamma \psi_2^2] = 0 \quad (D-13)$$

Generalizando o resultado para n modos normais na solução-teste de Galerkin:

$$\int_0^1 R_1 \psi_i d\xi = \frac{\partial^2 q_i}{\partial \tau^2} [1 + \Gamma \psi_i^2] = 0 \quad \text{para } i=1, \dots, n \quad (D-14)$$

Segundo termo da equação diferencial não-linear,

$$-\gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \int_{\xi}^1 [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] d\xi \quad (D-13)$$

Procedemos ao desenvolvimento substituindo a solução-teste no segundo termo utilizando o número de modos igual a 2 ( $n=2$ ) como exemplo:

$$-\gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \int_{\xi}^1 [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] d\xi = -\gamma \left( q_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + q_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi^2} \right) \int_{\xi}^1 [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] d\xi = R_{II} \quad (D-14)$$

$$\int_{\xi}^1 d\xi = (1 - \xi) \quad (D-15)$$

$$\int_{\xi}^1 \Gamma \delta(\xi - 1) d\xi = \Gamma \int_{\xi}^1 \delta(\xi - 1) d\xi = \Gamma H(\xi - 1) = 0 \quad (D-16)$$

Onde  $H(\xi-1)$  é a função Heaviside definida como na Equação (D-17).

$$\frac{dH(\xi - 1)}{d\xi} = \delta(\xi - 1) \quad H(\xi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \leq 1 \\ 1 & \text{se } \xi > 1 \end{cases} \quad (D-17)$$

Portanto,

$$-\gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \int_{\xi}^1 [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] d\xi = \gamma(\xi - 1) \left[ q_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + q_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi^2} \right] = R_{II} \quad (D-18)$$

Generalizando o resultado para n modos normais na solução-teste de Galerkin:

$$\int_0^1 R_{II} \psi_i d\xi = \gamma \sum_{k=1}^n q_k \int_0^1 (\xi - 1) \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} \psi_i d\xi = 0 \quad \text{para } i=1, \dots, n \quad (D-19)$$

Terceiro termo da equação diferencial não-linear

$$\gamma [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \quad (D-20)$$

Substituímos a solução no terceiro termo utilizando, como exemplo, o número de modos igual a 2 (n=2):

$$\gamma [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \left( q_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} \right) = R_{III} \quad (D-21)$$

Generalizando para n modos normais,

$$R_{III} = \gamma \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} + \gamma \Gamma \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \delta(\xi - 1) \quad (D-22)$$

$$\int_0^1 R_{III} \psi_i d\xi = \gamma \sum_{k=1}^n q_k \int_0^1 \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \psi_i d\xi + \gamma \Gamma \sum_{k=1}^n q_k \int_0^1 \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \psi_i \delta(\xi - 1) d\xi \quad (D-23)$$

com  $i=1, \dots, n$ .

A segunda parcela da Equação (D-23) se anula para quaisquer valores de  $i$  e  $k$  na equação, sendo assim,

$$\int_0^1 R_{III} \psi_i d\xi = \gamma \sum_{k=1}^n q_k \int_0^1 \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \psi_i d\xi \quad \text{para } i=1, \dots, n \quad (D-24)$$

Quarto termo da equação diferencial não-linear

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} \quad (D-25)$$

Substituindo a solução-teste do método de Galerkin para  $n$  modos normais,

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} = q_1 \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial \xi^4} + \dots + q_n \frac{\partial^4 \psi_n}{\partial \xi^4} = R_{IV} \quad (D-26)$$

Portanto, para o quarto termo ficamos com a expressão da Equação (D-27).

$$\int_0^1 R_{IV} \psi_i d\xi = \sum_{k=1}^n q_k \int_0^1 \frac{\partial^4 \psi_k}{\partial \xi^4} \psi_i d\xi \quad \text{para } i=1, \dots, n \quad (D-27)$$

Quinto termo da equação diferencial não-linear

$$-\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \left[ \frac{3}{2} \int_{\xi}^1 \gamma [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] d\xi \right] \quad (D-28)$$

Separando a integral em duas partes,

$$\underbrace{-\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \left[ \frac{3}{2} \gamma (1 - \xi) \right]}_{\text{Parte I}} - \underbrace{\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \left[ \frac{3}{2} \int_{\xi}^1 \gamma \Gamma \delta(\xi - 1) d\xi \right]}_{\text{Parte II}} = R_V \quad (D-29)$$



$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = q_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \dots + q_n \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \xi^2} = \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} \quad (D-30)$$

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 = \left( q_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \dots + q_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} \right)^2 = \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi} \sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \quad (D-31)$$

Substituindo as Equações (D-30) e (D-31) na Equação (D-29) e desenvolvendo a parte I,

$$-\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \left[ \frac{3}{2} \gamma (1-\xi) \right] = -\frac{3}{2} \gamma (1-\xi) \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} q_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi} q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \quad (D-32)$$

Substituindo as Equações (D-30) e (D-31) na Equação (D-29) e desenvolvendo a parte II,

$$-\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \left[ \frac{3}{2} \int_{\xi}^1 \gamma \Gamma \delta(\xi-1) d\xi \right] = -\frac{3}{2} \gamma \Gamma \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} q_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi} q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \quad (D-33)$$

Somando as Equações (D-32) e (D-33) chegamos ao resultado para a integração do quinto termo.

$$\int_0^1 R_{\psi_i} d\xi = \frac{3}{2} \gamma \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_k q_\alpha q_j \int_0^1 (\xi-1) \psi_i \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi$$

para  $i=1, \dots, n$  (D-34)

$$-\frac{3}{2} \gamma \Gamma \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_k q_\alpha q_j \int_0^1 \psi_i \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi$$

Sexto termo da equação diferencial não-linear,

$$\frac{1}{2} \gamma [1 + \Gamma \delta(\xi-1)] \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^3 \quad (D-35)$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)^3 = \left(q_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \dots + q_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi}\right)^3 = \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi} \sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \quad (\text{D-36})$$

Segundo procedimento análogo ao utilizado no quinto termo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 R_{VI} \psi_i d\xi &= \frac{1}{2} \gamma \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_k q_\alpha q_j \int_0^1 \psi_i \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi \\ &+ \frac{1}{2} \gamma \Gamma \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_k q_\alpha q_j \psi_i(1) \frac{\partial \psi_k(1)}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_\alpha(1)}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j(1)}{\partial \xi} \end{aligned} \quad \text{para } i=1, \dots, n \quad (\text{D-37})$$

Sétimo termo da equação diferencial não-linear

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)^2 \quad (\text{D-38})$$

Substituindo as Equações (D-26) e (D-31) na Equação (D-38),

$$\int_0^1 R_{VII} \psi_i d\xi = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_k q_\alpha q_j \int_0^1 \psi_i \frac{\partial \psi_k^4}{\partial \xi^4} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi \quad \text{para } i=1, \dots, n \quad (\text{D-39})$$

Oitavo termo da equação diferencial não-linear

$$4 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \quad (\text{D-40})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = q_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \dots + q_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} = \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi} \quad (\text{D-41})$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = q_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \dots + q_n \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \xi^2} = \sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} \quad (\text{D-42})$$

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = q_1 \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \xi^3} + \dots + q_n \frac{\partial^3 \psi_n}{\partial \xi^3} = \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial^3 \psi_k}{\partial \xi^3} \quad (\text{D-43})$$

Substituindo as Equações (D-41), (D-42) e (D-43) na Equação (D-40),

$$\int_0^1 R_{\text{VIII}} \psi_i d\xi = 4 \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_k q_\alpha q_j \int_0^1 \psi_i \frac{\partial^4 \psi_k}{\partial \xi^4} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi} d\xi \quad \text{para } i=1, \dots, n \quad (\text{D-44})$$

Nono termo da equação diferencial não-linear

$$\left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right)^3 \quad (\text{D-45})$$

$$\left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right)^3 = \left( q_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \dots + q_n \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \xi^2} \right)^3 = \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial \xi^2} \sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} \quad (\text{D-46})$$

Substituindo a Equação (D-46) na Equação (D-45),

$$\int_0^1 R_{\text{IX}} \psi_i d\xi = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_k q_\alpha q_j \int_0^1 \psi_i \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial \xi^2} d\xi \quad \text{para } i=1, \dots, n \quad (\text{D-47})$$

Décimo termo da equação diferencial não-linear,

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \int_0^\xi \left( \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tau^2 \partial \xi} \right) d\xi \quad (\text{D-48})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau}\right)^2 = \left(\frac{\partial q_1}{\partial \tau} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \dots + \frac{\partial q_n}{\partial \tau} \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi}\right)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial \tau} \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \frac{\partial q_j}{\partial \tau} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \quad (\text{D-49})$$

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi \partial \tau^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \dots + \frac{\partial^2 q_n}{\partial \tau^2} \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 q_j}{\partial \tau^2} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \quad (\text{D-50})$$

Substituindo as Equações (D-41), (D-49) e (D-50) na Equação (D-48) e observando que neste caso a parcela referente à função delta de Dirac se anula,

$$\begin{aligned} \int_0^1 R_X \Psi_i d\xi &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_{\alpha} \frac{\partial q_k}{\partial \tau} \frac{\partial q_j}{\partial \tau} \int_0^1 \psi_i \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial \xi} \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi d\xi \\ &+ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_{\alpha} q_j \frac{\partial^2 q_k}{\partial \tau^2} \int_0^1 \psi_i \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial \xi} \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi d\xi \end{aligned} \quad \text{para } i=1, \dots, n \quad (\text{D-51})$$

Décimo primeiro termo da equação diferencial não-linear

$$-\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \int_{\xi}^1 [1 + \Gamma \delta(\xi - 1)] \int_0^{\xi} \left( \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tau^2 \partial \xi} \right) d\xi d\xi \quad (\text{D-52})$$

Seguindo procedimento análogo ao utilizado no décimo termo e substituindo as Equações (D-41), (D-49) e (D-50) na Equação (D-52),

$$\begin{aligned} \int_0^1 R_{XI} \Psi_i d\xi &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_{\alpha} \frac{\partial q_k}{\partial \tau} \frac{\partial q_j}{\partial \tau} \int_0^1 \psi_i \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial \xi} \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d^2 \xi d\xi \\ &+ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_{\alpha} q_j \frac{\partial^2 q_k}{\partial \tau^2} \int_0^1 \psi_i \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial \xi} \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d^2 \xi d\xi \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{D-53})$$

No texto abaixo encontra-se os comandos utilizados no software Maple para o cálculo das integrais do método de Galerkin.

```
> restart: with(linalg): with(student):
>
> Digits:=25:
>
PROCEDIMENTO GALERKIN
>
> NModos:=4: # Número de modos aplicados na solução-teste de Galerkin
> lambda1:=1.87510406871196116644530824108:
> lambda2:=4.69409113297417457643639177802:
> lambda3:=7.85475743823761256486100858276:
> lambda4:=10.9955407348754669906673491079:
> lambda5:=14.1371683910464705809170468126:
> lambda6:=17.2787595320882363335439284144:
> lambda7:=20.4203522510412509944158119479:
> lambda8:=23.5619449018064435015202532402:
> lambda9:=26.7035375555182988054454787381:
> lambda10:=29.8451302091028172637887309074:
> lambda11:=32.9867228626928384461683141839:
> lambda12:=36.1283155162826218342811622046:
> lambda13:=39.2699081698724154984160165143:
> lambda14:=42.4115008234622087184836957674:
>
> for r from 1 to NModos do
>   sigmallr:=(sinh(lambdallr)- sin(lambdallr))/(cosh(lambdallr)+cos(lambdallr)):
>   phillr:=cosh(lambdallr*xi)-cos(lambdallr*xi)-sigmallr*(sinh(lambdallr*xi)-
>   sin(lambdallr*xi)): od:
>
> #INTEGRAIS INVARIANTES POR GAMMAO E GAMINHA
>
> for i from 1 to NModos do
>   for j from 1 to NModos do
```

```

>
Temp:=evalf(qllj(tau)*(Int(philli(xi)*diff(phillj(xi),xi$4),xi=0..1,digits=25,method=_NoMultiple,epsilon=0.5e-6))):
> Eqlli:=Eqlli+Temp:
> Temp:=0:
> end do:
> end do:
> Temp:=0:
> for i from 1 to NModos do
> for l from 1 to NModos do
> for j from 1 to NModos do
> for k from 1 to NModos do
>
Temp:=evalf(qlll(tau)*qllj(tau)*qllk(tau)*(Int(philli(xi)*diff(philll(xi),xi)*diff(phillj(xi),xi)*diff(phillk(xi),xi$4),xi=0..1,digits=25,method=_NoMultiple,epsilon=0.5e-6))):
> Eqlli:=Eqlli+Temp:
> Temp:=0:
>
Temp:=evalf(qlll(tau)*qllj(tau)*qllk(tau)*(Int(philli(xi)*diff(philll(xi),xi)*diff(phillj(xi),xi$2)*diff(phillk(xi),xi$3),xi=0..1,digits=25,method=_NoMultiple,epsilon=0.5e-6))):
> Eqlli:=Eqlli+4*Temp:
> Temp:=0:
>
Temp:=evalf(qlll(tau)*qllj(tau)*qllk(tau)*(Int(philli(xi)*diff(philll(xi),xi$2)*diff(phillj(xi),xi$2)*diff(phillk(xi),xi$2),xi=0..1,digits=25,method=_NoMultiple,epsilon=0.5e-6))):
> Eqlli:=Eqlli+Temp:
> Temp:=0:
> end do:
> end do:
> end do:
> end do:
> Temp:=0: f:=0: g:=0: h:=0:
> for i from 1 to NModos do
> for l from 1 to NModos do

```

```

> for j from 1 to NModos do
>   for k from 1 to NModos do
>     f:=diff(phillj,xi)*diff(phillk,xi):
>     g:=int(f,xi=0..xi):
>     h:=int(g,xi=xi..1):
>
Temp:=Temp+qlll(tau)*diff(qllj(tau),tau)*diff(qllk(tau),tau)*evalf(Int(g*philli*diff(philll,xi)
,xi=0..1,digits=25,method=_NoMultiple, epsilon=0.5e-6)):
>   Eqlli:=Eqlli+Temp:
>   Temp:=0:
>
Temp:=Temp+qlll(tau)*qllj(tau)*diff(qllk(tau),tau$2)*evalf(Int(g*philli*diff(philll,xi),xi=0..
1,digits=25,method=_NoMultiple, epsilon=0.5e-6)):
>   Eqlli:=Eqlli+Temp:
>   Temp:=0:
>
Temp:=Temp+qlll(tau)*diff(qllj(tau),tau)*diff(qllk(tau),tau)*evalf(Int(h*philli*diff(philll,xi
$2),xi=0..1,digits=25,method=_NoMultiple, epsilon=0.5e-6)):
>   Eqlli:=Eqlli+Temp:
>   Temp:=0:
>
Temp:=Temp+qlll(tau)*qllj(tau)*diff(qllk(tau),tau$2)*evalf(Int(h*philli*diff(philll,xi$2),xi=
0..1,digits=25,method=_NoMultiple, epsilon=0.5e-6)):
>   Eqlli:=Eqlli+Temp:
>   Temp:=0:
> end do:
> end do:
> end do:
> end do:
> #Eq1;Eq2;
>
>
> GAMA:=0.5:
>

```

```

> #RECUPERA A PARTE INVARIANTE DA EQUAÇÃO
> for i from 1 to NModos do
> Eqlli:=TempEqlli:
> end do:
>
> #INTEGRAL DEPENDENTES SO DE GAMMAO
> Temp:=0:
> for i from 1 to NModos do
> Temp:=diff(qli(tau),tau$2)*(1+GAMA*int(philli(xi)*philli(xi)*Dirac(xi-1),xi=0..1)):
> Eqlli:=Eqlli+Temp:
> end do:
>
> #INTEGRAIS DEPENDENTES DE GAMINHA
>
> gama:=-0.3:
>
> #RECUPERA A PARTE DEPENDENTE SO DE GAMMAO
> for i from 1 to NModos do
> Eqlli:=Temp2Eqlli:
> end do:
>
> #INTEGRAIS DEPENDENTES DE GAMINHA E DE GAMMAO
> Temp:=0:Temp2:=0:
> Temp2:=evalf(GAMA*int(Dirac(xi-1),xi=xi..1)):
> for i from 1 to NModos do
> for j from 1 to NModos do
>
Temp:=evalf(qlj(tau)*(Int((xi-1-
Temp2)*philli(xi)*diff(philj(xi),xi$2),xi=0..1,digits=25,method=_NoMultiple,epsilon=0.5e
-6)))):
> Eqlli:=Eqlli+gama*Temp:
> Temp:=0:
>
Temp:=evalf(qlj(tau)*(Int(philli(xi)*diff(philj(xi),xi),xi=0..1,digits=25,method=_NoMulti
ple,epsilon=0.5e-6)))):

```



```

> Eqlli:=Eqlli+gama*Temp:
> Temp:=0:
> end do:
> end do:
> Temp:=0:Temp2:=0:Temp3=0:
> Temp3:=evalf(int(Dirac(xi-1),xi=xi..1)):
> for i from 1 to NModos do
> for l from 1 to NModos do
> for j from 1 to NModos do
> for k from 1 to NModos do
>
Temp:=evalf(qlll(tau)*qllj(tau)*qllk(tau)*(Int((xi-
1)*philli(xi)*diff(philll(xi),xi)*diff(phillj(xi),xi)*diff(phillk(xi),xi$2),xi=0..1,digits=25,method=_NoMultiple,epsilon=0.5e-6)):
>
Temp2:=evalf(qlll(tau)*qllj(tau)*qllk(tau)*(Int(Temp3*philli(xi)*diff(philll(xi),xi)*diff(phillj(xi),xi)*diff(phillk(xi),xi$2),xi=0..1,digits=25,method=_NoMultiple,epsilon=0.5e-6)):
> Eqlli:=Eqlli+(gama*3/2)*Temp-(gama*GAMA*3/2)*Temp2:
> Temp:=0:Temp2:=0:
>
Temp:=evalf(qlll(tau)*qllj(tau)*qllk(tau)*(Int(philli(xi)*diff(philll(xi),xi)*diff(phillj(xi),xi)*diff(phillk(xi),xi),xi=0..1,digits=25,method=_NoMultiple,epsilon=0.5e-6)):
> ll:=diff(philll,xi):
> jj:=diff(phillj,xi):
> kk:=diff(phillk,xi):
> xi:=1:
> Temp2:=evalf(qlll(tau)*qllj(tau)*qllk(tau)*philli(xi)*ll*jj*kk):
> unassign('xi'):
> Eqlli:=Eqlli+(gama/2)*Temp+(gama*GAMA/2)*Temp2:
> Temp:=0:Temp2:=0:
> end do:
> end do:
> end do:
> end do:
>

```

```

> #TERMO DO AMORTECIMENTO
>
> Temp:=0:
> for i from 1 to NModos do
> Temp:=amort*diff(qlli(tau),tau):
> Eqlli:=Eqlli+Temp:
> Temp:=0:
> end do:
>
> #APLICA O CARREGAMENTO NA EXTREMIDADE DA TORRE
>
> f:=0.01: # Valor do carregamento adimensional
>
> Temp:=0:
> for i from 1 to NModos do
>Temp:=evalf((f*0.05*cos(3*omega*tau))*Int(philli(xi),xi=0..1,digits=25,method=_NoMultiple,epsilon=0.5e-6)):
> Eqlli:=Eqlli-Temp:
> Temp:=0:
> end do:
>
> #Solução pelo método de Runge-Kutta.
> dsys:={seq(Eqlli,i=1..NModos)}:
> init := {seq(qlli(0)=0.003,i=1..NModos), seq(D(qlli)(0)=0.0,i=1..NModos)}:
> dsol:=dsolve(dsys union init, numeric, method=rkf45, maxfun=0,output=listprocedure):
> dsol(1):

```