Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Polinômios Centrais

por

Claud Wagner Gonçalves Dias Júnior

Dissertação de Mestrado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Dimas José Gonçalves

Agradecimentos

Sou grato

Ao autor de toda a ciência pela divina guarnição.

Ao amor e a paz que minha esposa tem me ofertado.

Anjo da minha guarda
Louvado seja
Indo contigo
No seu caminho
Eu sempre esteja

Ao amigo Dimas José Gonçalves pela serenidade com que me orientou.

Aos conselhos de minha mãe.

Eu que por ti
Vim ao mundo
Abençoado pelo seu amor.

Resumo

Seja G a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $M_n(\mathbb{K})$ a álgebra das matrizes $n \times n$. O objetivo central desta dissertação é o estudo dos polinômios centrais das álgebras citadas.

Se $\mathbb{K}$ é infinito, descrevemos o conjunto $C(G)$ dos polinômios centrais de G, exibindo um conjunto gerador para ele como T-espaço. Mostramos que se $\text{char}(\mathbb{K}) > 2$, então $C(G)$ é T-espaço limite e se $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$, então $C(G)$ é finitamente gerado.

Com relação a álgebra matricial, se $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ e $n \geq 3$, então primeiro exibimos uma identidade polinomial essencialmente fraca. Com base nessa identidade e com base na Transformada de Razmyslov exibimos um polinômio central não trivial para $M_n(\mathbb{K})$ de grau $(n-1)^2 + 4$.

Abstract

Let G be the infinite dimensional Grassmann algebra over a field $\mathbb{K}$ and $M_n(\mathbb{K})$ the algebra of $n \times n$ matrices. The aim of this dissertation is to study the central polynomials of these algebras.

If $\mathbb{K}$ is infinite, then we describe the set $C(G)$ of the central polynomials for G, by exhibiting a generator set for it as a T-space. We show that if $\text{char}(\mathbb{K}) > 2$, then $C(G)$ is a limit T-space and if $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$, then $C(G)$ is finitely generated.

With respect to the matrix algebra, if $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ and $n \geq 3$, then we first exhibit an essentially weak polynomial identity. Based on this identity and on Razmyslov Transform we exhibit a nontrivial central polynomial for $M_n(\mathbb{K})$ of degree $(n-1)^2 + 4$.

Introdução

O assunto a ser tratado nesta dissertação é PI-álgebras, isto é, álgebras que satisfazem identidades polinomiais. Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio em variáveis não comutativas sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que f é uma *identidade polinomial* para uma álgebra A se f se anula sempre que substituímos as variáveis por elementos de A.

Se existe $f \neq 0$ nas condições acima, dizemos que A é uma *PI-álgebra*. São vários os exemplos de PI-álgebras, por exemplo, toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra. Outro exemplo são as álgebras de dimensão finita, sendo que nesta classe destaca-se $M_n(\mathbb{K})$ (álgebra das matrizes $n \times n$). Em 1950, os matemáticos Amitsur e Levitzki (em [1]) provaram que

$$\sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)} \quad \text{(polinômio standard)}$$

é uma identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$. Podemos nos perguntar: quais são todas as identidades polinomiais de $M_n(\mathbb{K})$? Embora esse seja um problema antigo, até hoje não sabemos a resposta para $n \geq 3$. Para $n = 2$ temos a descrição completa quando a característica do corpo é diferente de 2. Mais abaixo explicaremos melhor o assunto.

De um modo geral, quando nos perguntamos quais são todas as identidades polinomiais de uma álgebra A, surge o conceito de *T-ideal*. Denotando por $T(A)$ esse conjunto, temos que ele é um T-ideal, isto é, um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ fechado por endomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Aqui $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ é um conjunto infinito e $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é a álgebra associativa com unidade formada pelos polinômios nas variáveis não comutativas x_i's. Na verdade, J é um T-ideal se, e somente se, $J = T(A)$ para alguma álgebra A. Em [10] Kemer provou que sobre um corpo de característica 0, todo T-ideal é finitamente gerado. Para entender melhor a frase, vamos definir T-ideal gerado por um conjunto de polinômios S. Ele é o menor T-ideal que contém S. Pode-se mostrar que ele é o ideal gerado pelos elementos

$$f(g_1, \ldots, g_n),$$

onde $f \in S$ e $g_i \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ para todo i. Um caso particular do Teorema de Kemer é a álgebra de Grassmann G (de dimensão infinita). Foi provado em [13] e [14] que $T(G)$ é gerado pelo comutador triplo $[[x_1, x_2], x_3]$, onde por $[a, b]$ subentende-se $ab - ba$.

Com relação a álgebra de matrizes $M_2(\mathbb{K})$, temos os seguintes fatos: se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, então Razmyslov (em [17]) determinou um conjunto gerador para $T(M_2(\mathbb{K}))$ com 9 elementos. Posteriormente, Drensky (em [3]) exibiu um conjunto gerador com 2 elementos: o polinômio standard de grau 4 e o polinômio de Hall

$$[[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5],$$

onde por $a \circ b$ subentende-se $(ab + ba)/2$. Se $\mathbb{K}$ é infinito com $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p > 2$, então Koshlukov (em [11]) provou que os dois polinômios acima geram $T(M_2(\mathbb{K}))$ para $p \neq 3$ e 5. Em [12] Koshlukov e Colombo provaram que se $p = 5$ então os geradores de Drensky ainda determinam $T(M_2(\mathbb{K}))$ e para $p = 3$ é necessário mais um polinômio.

Um assunto paralelo ao de identidades polinomiais é o de polinômios centrais. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é dito ser *central* para uma álgebra A se $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$ (centro) para quaisquer $a_i \in A$. Denotando por $C(A)$ o conjunto desses polinômios, é claro que $T(A) \subset C(A)$. Portanto, as identidades polinomiais são chamadas polinômios centrais triviais. Um exemplo de polinômio central não trivial para G é o comutador $[x_1, x_2]$. O estudo dos polinômios centrais para a álgebra de Grassmann G foi feito em [2] pelos matemáticos Brandão, Krasilnikov, Koshlukov e Silva, onde uma descrição para $C(G)$ é dada quando o corpo é infinito de característica $\neq 2$. Se a característica do corpo é 2, então G é uma álgebra comutativa e, portanto, todo polinômio é central.

Para as matrizes $M_2(\mathbb{K})$ temos uma descrição completa dos polinômios centrais. Se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, então o resultado se deve a Okhitin (ver [15]). Para corpos infinitos de $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p > 2$ a descrição se deve a Koshlukov e Colombo (ver [12]).

Em 1956 Kaplansky [9] fez a seguinte pergunta: existe um polinômio central não trivial para as matrizes $M_n(\mathbb{K})$ para $n \geq 3$? Para $n = 2$ a resposta é simples, usando o teorema de Cayley-Hamilton, pode-se mostrar que $[x_1, x_2]^2$ é central não trivial. A resposta para a pergunta acima foi dada em 1972 e 1973 por Formanek [7] e Razmyslov [16]. É natural nos perguntar, qual é o grau mínimo de um polinômio central não trivial para $M_n(\mathbb{K})$? Vamos analisar o caso quando $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$. Para n igual a 1 ou 2 a resposta é n^2. Para $n = 3$ Drensky e Kasparian em [4] encontraram tal polinômio de grau 8 e esse é o grau mínimo. Não se sabe o grau mínimo para $n = 4$, mas Drensky em conjunto com Cattaneo encontraram um polinômio central não trivial de grau 13. Esse último resultado foi generalizado por Drensky em [5]. Ele construiu tais polinômios com grau $(n-1)^2 + 4$ para $n \geq 3$. Essa é a melhor cota superior até então.

O objetivo central desta dissertação é o estudo dos polinômios centrais para a álgebra de Grassmann G e para a álgebra matricial $M_n(\mathbb{K})$. No primeiro capítulo estudamos conceitos básicos da PI-teoria e alguns resultados relativos a "geradores " de T-ideal e T-espaço. No Capítulo 2 descrevemos o T-ideal das identidades da álgebra de Grassmann G e determinamos os geradores de $C(G)$, como T-espaço, quando $\mathbb{K}$ é infinito de característica $\neq 2$. No Capítulo 3 introduzimos o conceito *matrizes genéricas* e depois encontramos uma identidade polinomial essencialmente fraca para $M_n(\mathbb{K})$. A partir dela foi construído um polinômio central não trivial de grau $(n-1)^2+4$ para $M_n(\mathbb{K})$, quando $n \geq 3$ e $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$. Os artigos principais estudados e nos quais constam os resultados das Seções 2.2 e 3.2 são [2] e [5].

Sumário

1 Conceitos Preliminares **1**

1.1 Identidades polinomiais 1

1.2 T-ideal 5

1.3 T-espaço 8

1.4 Polinômios multi-homogêneos 13

1.5 Polinômios próprios 17

2 Álgebra de Grassmann G **22**

2.1 O T-ideal $T(G)$ 22

2.2 O T-espaço $C(G)$ 26

3 Álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{K})$ **43**

3.1 Matrizes genéricas 43

3.2 Um polinômio central para $M_n(\mathbb{K})$ 55

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

1.1 Identidades polinomiais

Nesta seção introduzimos o conceito de identidade polinomial e exibimos alguns exemplos de PI-álgebras. Ao longo da dissertação, $\mathbb{K}$ será um corpo e todos os espaços vetoriais, módulos e álgebras serão sobre $\mathbb{K}$. As álgebras consideradas serão todas associativas e com unidade. Assim, por comodidade usaremos apenas o termo álgebra.

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto infinito e enumerável. Definimos um monômio em X como sendo uma sequência finita

$$m = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$$

de elementos de X. Neste caso, dizemos que n é o comprimento (ou grau) de m.

Por definição de sequência, dois monômios $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ e $x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_t}$ são iguais se ambos têm o mesmo comprimento $(n = t)$ e se $i_1 = j_1, \ldots, i_n = j_n$.

O espaço vetorial com base formada pelo elemento $1 \in \mathbb{K}$ e por todos os monômios em X será denotado por $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Dizemos que 1 é um monômio de comprimento 0 e chamaremos os elementos em $\mathbb{K}\langle X\rangle$ de polinômios.

Consideremos sobre os monômios de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a operação " $\cdot$ " definida abaixo:

$$(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n})\cdot(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}.$$

Por linearidade podemos estender a operação de multiplicação para todo polinômio. Assim, $\mathbb{K}\langle X\rangle$ munido deste produto é uma álgebra associativa com unidade 1.

Sejam A uma álgebra e $h : X \longrightarrow A$ uma função. Afirmamos que existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi_h : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow A$ que quando restrito a X coincide com h. De fato, se denotamos $h(x_i) = a_i$, então φ_h age sobre um polinômio $f(x_1,\dots,x_n)$ da seguinte forma:

$$\varphi_h(f(x_1,\dots,x_n)) = f(a_1,\dots,a_n).$$

Por essa propriedade dizemos que $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é a álgebra associativa livre unitária, livremente gerada por X.

Definição 1.1.1. *Sejam $f(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ e A uma álgebra. Dizemos que $f(x_1,\dots,x_n)$ é uma identidade polinomial de A se*

$$f(a_1,\dots,a_n) = 0$$

para quaisquer $a_1,\dots,a_n \in A$. Se A satisfaz uma identidade polinomial $f(x_1,\dots,x_n) \neq 0$ em $\mathbb{K}\langle X\rangle$, dizemos que A é uma PI-álgebra.

Exemplo 1.1.2. *Se A for uma álgebra comutativa, então*

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$$

é uma identidade polinomial de A.

O polinômio acima é chamado comutador de comprimento 2 e é denotado por

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1.$$

De um modo geral, definimos o comutador $[x_1, \ldots, x_n]$ de comprimento n por indução:

$$[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

Um polinômio importante na área de PI-álgebra que merece uma atenção especial é o chamado **polinômio standard**:

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sign}\sigma) x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}.$$

Aqui, S_n representa o grupo simétrico de grau n e $(\mathrm{sign}\sigma)$ é o sinal da permutação $\sigma \in S_n$.

É fácil ver que se um monômio

$$x_{b_1} \ldots x_{b_{i-1}} x_{\mathbf{b_i}} x_{b_{i+1}} \ldots x_{b_{j-1}} x_{\mathbf{b_j}} x_{b_{j+1}} \ldots x_{b_n}$$

aparece em s_n com coeficiente ± 1 então

$$x_{b_1} \ldots x_{b_{i-1}} x_{\mathbf{b_j}} x_{b_{i+1}} \ldots x_{b_{j-1}} x_{\mathbf{b_i}} x_{b_{j+1}} \ldots x_{b_n}$$

aparece em s_n com coeficiente oposto ∓ 1. Assim,

$$s_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 0. \qquad (1.1)$$

Exemplo 1.1.3. *Toda álgebra A de dimensão finita é uma PI-álgebra. Se $\dim A < n$, então o polinômio standard de grau n é uma identidade para A.*

De fato, como o polinômio standard é multilinear, basta verificar que s_n se anula sobre os elementos da base de A. Seja $\{a_1, \ldots, a_z\}$ uma base de A, onde $z < n$. Temos por (1.1) que

$$s_n(a_{b_1}, \ldots, a_{b_n}) = 0$$

pois $a_{b_i} = a_{b_j}$ para alguns $i \neq j$.

Exemplo 1.1.4. *O polinômio de Hall*

$$f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$$

é uma identidade da álgebra das matrizes $M_2(\mathbb{K})$.

De fato, se $r \in M_2(\mathbb{K})$, então seu polinômio característico é dado por

$$p(x) = x^2 - \operatorname{tr}(r)x + \det(r).$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton segue que

$$r^2 - \operatorname{tr}(r)r + \det(r)e = 0,$$

onde e é a matriz identidade. Assim, se $\operatorname{tr}(r) = 0$, então r^2 é escalar. Logo, dados $r_1, r_2, r_3 \in M_2(\mathbb{K})$, temos $\operatorname{tr}([r_1, r_2]) = 0$ e, portanto,

$$f(r_1, r_2, r_3) = 0.$$

Consequentemente f é uma identidade polinomial para $M_2(\mathbb{K})$.

Uma álgebra importante e objeto de nosso estudo é a álgebra de Grassmann G. No Capítulo 2 faremos um estudo detalhado de G e provaremos que o polinômio

$$f = [x_1, x_2, x_3]$$

é uma identidade para tal álgebra.

De agora em diante usaremos a notação $T(A)$ para designar o conjunto de todas as identidades polinomiais de uma álgebra A. Usaremos também a notação $H(A)$ para denotar o conjunto de todos os homomorfismos (de álgebras) de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ em A.

Proposição 1.1.5. *Sejam $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ e A uma álgebra. Então $f \in T(A)$ se, e somente se, f pertence ao núcleo de todo homomorfismo $\varphi \in H(A)$.*

Demonstração. Suponha que $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ pertence ao núcleo de todo homomorfismo $\varphi \in H(A)$. Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, seja $\varphi \in H(A)$ um homomorfismo tal que $\varphi(x_1) = a_1, \ldots, \varphi(x_n) = a_n$. Então $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ e, portanto, $\varphi(f) = f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. A recíproca é trivial. $\square$

1.2 T-ideal

Nesta seção introduzimos o conceito de T-ideal e mostramos a equivalência entre tal conjunto e o conjunto das identidades polinomiais de uma determinada álgebra. Além disso, exibimos algumas propriedades de T-ideal que serão utilizadas ao longo do texto.

Definição 1.2.1. *Um ideal I de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é dito um T-ideal se*

$$\varphi(I) \subset I$$

para todo endomorfismo φ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$.

Proposição 1.2.2. *Seja I um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Então I é um T-ideal se, e somente se,*

$$f(g_1,\dots,g_n)\in I$$

para quaisquer $g_1,\dots,g_n\in\mathbb{K}\langle X\rangle$ e $f(x_1,\dots,x_n)\in I$.

Demonstração. Dados $g_1,\dots,g_n\in\mathbb{K}\langle X\rangle$ e $f\in I$, considere $\varphi\in\mathrm{End}(\mathbb{K}\langle X\rangle)$ tal que $\varphi(x_i)=g_i$ para todo i. O resultado é consequência direta da igualdade

$$\varphi(f(x_1,\dots,x_n))=f(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n))=f(g_1,\dots,g_n).$$

□

Antes do próximo resultado, relembramos que $T(A)$ é o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra A.

Proposição 1.2.3. *Se A é uma álgebra, então $T(A)$ é um T-ideal. Reciprocamente, se I é um T-ideal, então existe uma álgebra B tal que $T(B)=I$.*

Demonstração. Na primeira parte da proposição é claro que $T(A)$ é um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Seja $f(x_1,\dots,x_n)\in T(A)$ e $g_1,\dots,g_n\in\mathbb{K}\langle X\rangle$. Provaremos que

$$h(x_1,\dots,x_r)=f(g_1(x_1,\dots,x_r),\dots,g_n(x_1,\dots,x_r))\in T(A).$$

Se $a_1,\dots,a_r\in A$, então $g_i(a_1,\dots,a_r)\in A$ e, portanto, $h(a_1,\dots,a_r)=0$. Dessa forma, $f(g_1,\dots,g_n)\in T(A)$ e, pela Proposição 1.2.2, $T(A)$ é um T-ideal.

Na segunda parte da proposição, seja I um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Provaremos a igualdade $T(B)=I$, onde $B=\mathbb{K}\langle X\rangle/I$ é a álgebra quociente. Denote por

$\pi : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle X\rangle/I$ a projeção canônica e por $\overline{g}$ a imagem de um polinômio g, isto é, $\overline{g} = g + I$. Seja $f \in T(B)$. Pela Proposição 1.1.5 segue que $f \in \mathrm{Ker}(\pi) = I$. Portanto $T(B) \subset I$. Por outro lado, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n} \in B$, então

$$f(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n}) = \overline{f(g_1, \ldots, g_n)} = \overline{0}$$

pois $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$ pela proposição anterior. Logo $f \in T(B)$ e daí $I \subset T(B)$, o que conclui a demonstração. $\square$

Definição 1.2.4. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Dizemos que a intersecção de todos os T-ideais que contêm S é o T-ideal gerado por S.*

Denotamos por $\langle S\rangle^T$ o T-ideal gerado por S e chamamos a atenção do leitor para o fato que $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal que contém S.

Proposição 1.2.5. *Se S é um subconjunto de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, então $\langle S\rangle^T$ é o espaço vetorial gerado pelos elementos*

$$g_0 f(g_1, \ldots, g_n) g_{n+1}, \tag{1.2}$$

onde $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ e $g_0, \ldots, g_{n+1} \in \mathbb{K}\langle X\rangle$.

Demonstração. Seja W o espaço vetorial gerado pelos elementos em (1.2). Se $h \in W$, então

$$h = \sum_i \alpha_i g_0^{(i)} f_i(g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \ldots, g_{n_i}^{(i)}) g_{n_i+1}^{(i)},$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in S$ e $g_0^{(i)}, g_1^{(i)}, \ldots, g_{n_i+1}^{(i)} \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ para todo i. Pela Proposição 1.2.2 segue que

$$f_i(g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \ldots, g_{n_i}^{(i)}) \in \langle S\rangle^T$$

e, portanto, $h \in \langle S\rangle^T$. Logo, $W \subset \langle S\rangle^T$. Observe que W é um ideal e

$$\varphi(h) = \sum_i \alpha_i \varphi(g_0^{(i)}) f_i(\varphi(g_1^{(i)}), \ldots, \varphi(g_{n_i}^{(i)}))\varphi(g_{n_i+1}^{(i)}) \in W$$

para todo $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{K}\langle X\rangle)$. Assim, W é um T-ideal que contém S e portanto $\langle S\rangle^T \subset W$. □

Definição 1.2.6. *Sejam A uma álgebra e S um subconjunto de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Se $T(A) = \langle S\rangle^T$ dizemos que S é uma base para as identidades de A. Se um polinômio f pertence a $\langle S\rangle^T$ dizemos que f segue (ou é consequência) de S.*

Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito. Neste capítulo mostraremos que se A é uma álgebra comutativa então $T(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle^T$. Para isso usaremos o conceito de polinômio próprio que será visto na Seção 1.5. Outro resultado importante, que será mostrado no Capítulo 2, é a descrição das identidades polinomiais da álgebra de Grassmann G. Mostraremos que toda identidade de G segue do comutador triplo $[x_1, x_2, x_3]$.

1.3 T-espaço

Nesta seção introduzimos o conceito de T-espaço e exibimos algumas propriedades a respeito de tal conjunto. Também definimos o termo "polinômio central" para uma álgebra, preparando assim o leitor para os conceitos que aparecerão nos próximos dois capítulos.

Definição 1.3.1. *Um subespaço vetorial V de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é chamado T-espaço se*

$$\varphi(V) \subset V$$

para todo endomorfismo φ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$.

Proposição 1.3.2. *Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Então V é um T-espaço se, e somente se,*

$$f(g_1, \ldots, g_n) \in V$$

para quaisquer $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ e $f(x_1, \ldots, x_n) \in V$.

Demonstração. É análoga a da Proposição 1.2.2. $\square$

Exemplo 1.3.3. *Todo T-ideal é um T-espaço.*

Exemplo 1.3.4. *Seja W um subespaço de uma álgebra A. O conjunto V formado pelos polinômios $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ tais que*

$$f(a_1, \ldots, a_n) \in W$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$ é um T-espaço.

Observe que V é um subespaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Agora, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $g_i(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, onde $i = 1, \ldots, n$, provaremos que

$$h(x_1, \ldots, x_r) = f(g_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_r))$$

pertence a V. Dados $a_1, \ldots, a_r \in A$ temos que

$$h(a_1, \ldots, a_r) = f(g_1(a_1, \ldots, a_r), \ldots, g_n(a_1, \ldots, a_r)) \in W$$

pois $g_i(a_1, \ldots, a_r) \in A$ para todo i. Portanto, $h \in V$ e pela Proposição 1.3.2 segue que V é T-espaço.

Definição 1.3.5. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Dizemos que a intersecção de todos os T-espaços que contêm S é o T-espaço gerado por S.*

Denotamos por $\langle S\rangle^{TS}$ o T-espaço gerado por S e chamamos a atenção do leitor para o fato que $\langle S\rangle^{TS}$ é o menor T-espaço que contém S.

Proposição 1.3.6. *Se S é um subconjunto de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, então $\langle S\rangle^{TS}$ é o espaço vetorial gerado pelos elementos*

$$f(g_1, \ldots, g_n), \tag{1.3}$$

onde $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ e $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}\langle X\rangle$.

Demonstração. É análoga a demonstração da Proposição 1.2.5 $\square$

Observe que o elemento em (1.3) é exatamente igual a $\varphi(f)$ para algum endomorfismo φ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. De fato, definindo φ por

$$\varphi(x_i) = \begin{cases} g_i & se\ i \leq n \\ x_i & se\ i > n \end{cases}$$

segue o resultado. Dessa forma, se F é um polinômio no T-espaço gerado por S, então podemos escrever

$$F = \sum_i \alpha_i \varphi_i(f_i) \tag{1.4}$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $\varphi_i \in \mathrm{End}(\mathbb{K}\langle X\rangle)$ e $f_i \in S$ para todo i.

Corolário 1.3.7. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Se J é o T-ideal gerado por S, então J é o T-espaço gerado pelo conjunto*

$$\{x_{n+1} f(x_1, \ldots, x_n) x_{n+2} \ /\ f \in S\}.$$

Demonstração. A demonstração é consequência direta das Proposições 1.2.5 e 1.3.6. $\square$

A proposição anterior nos fornece uma maneira de a partir de um conjunto gerador de um T-ideal, construir um conjunto capaz de gerá-lo como T-espaço.

Proposição 1.3.8. *Sejam f_1 e f_2 polinômios de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ tais que as variáveis que aparecem em f_1 são distintas das que aparecem em f_2. Se $h_1 \in \langle f_1\rangle^{TS}$ e $h_2 \in \langle f_2\rangle^{TS}$, então $h_1h_2 \in \langle f_1f_2\rangle^{TS}$.*

Demonstração. Temos que $h_1 = \sum_i \alpha_i\varphi_i(f_1)$ e $h_2 = \sum_j \beta_j\psi_j(f_2)$, onde $\alpha_i,\ \beta_j \in \mathbb{K},\ \varphi_i, \psi_j \in \mathrm{End}(\mathbb{K}\langle X\rangle)$. Então

$$h_1h_2 = \Big(\sum_i \alpha_i\varphi_i(f_1)\Big)\Big(\sum_j \beta_j\psi_j(f_2)\Big) = \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j\varphi_i(f_1)\psi_j(f_2).$$

Suponha que $f_1 = f_1(x_{t_1}, \dots, x_{t_p})$ e $f_2 = f_2(x_{z_1}, \dots, x_{z_q})$, onde

$$\{x_{t_1}, \dots, x_{t_p}\} \cap \{x_{z_1}, \dots, x_{z_q}\} = \emptyset.$$

Para facilitar a notação, vamos escrever x_j e y_j nos lugares de x_{t_j} e x_{z_j} respectivamente, isto é, $f_1 = f_1(x_1, \dots, x_p)$ e $f_2 = f_2(y_1, \dots, y_q)$.

Sejam φ e ψ endomorfismos arbitrários de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ e seja ϕ o endomorfismo de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ definido por:

$$\phi(x_1) = \varphi(x_1), \dots, \phi(x_p) = \varphi(x_p), \phi(y_1) = \psi(y_1), \dots, \phi(y_q) = \psi(y_q).$$

Então

$$\varphi(f_1(x_1, \dots, x_p))\psi(f_2(y_1, \dots, y_q)) = f_1(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p))f_2(\psi(y_1), \dots, \psi(y_q))$$

$$= f_1(\phi(x_1), \dots, \phi(x_p))f_2(\phi(y_1), \dots, \phi(y_q)) = \phi(f_1)\phi(f_2) = \phi(f_1f_2).$$

Dessa forma, para cada par (i, j) podemos associar um endomorfismo $\phi_{(ij)}$ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ tal que $\phi_{(ij)}(f_1f_2) = \varphi_i(f_1)\psi_j(f_2)$. Assim $h_1h_2 = \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j\phi_{(ij)}(f_1f_2)$ e, portanto, h_1h_2 está no T-espaço gerado por f_1f_2. $\square$

Para finalizar a seção, iniciaremos o estudo dos polinômios centrais, ponto chave desta dissertação.

Definição 1.3.9. *Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é um polinômio central para uma álgebra A se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$$

para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Denotamos por $C(A)$ o conjunto dos polinômios centrais de uma álgebra A. Observe que toda identidade polinomial de A é um polinômio central para A. Assim, dizemos que as identidades são polinômios centrais triviais. Outro fato importante é que se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é um polinômio, então

$$f(x_1, \ldots, x_n) \in C(A) \Leftrightarrow [f(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}] \in T(A).$$

Exemplo 1.3.10. *O polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]^2$ é central para a álgebra das matrizes $M_2(\mathbb{K})$.*

De fato, pelo Exemplo 1.1.4 segue que $[f(x_1, x_2), x_3]$ é uma identidade para $M_2(\mathbb{K})$. Logo, f é um polinômio central.

Aqui chamamos a atenção do leitor para o seguinte fato: se A é uma álgebra, considerando $W = Z(A)$ no Exemplo 1.3.4, temos que $C(A)$ é um T-espaço. Além disso, observe que $C(A)$ é fechado para multiplicação, isto é, $C(A)$ é uma álgebra. Temos portanto que $C(A)$ é uma **T-álgebra**, ou seja, uma álgebra fechada por endomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$.

Podemos caracterizar $C(A)$ a partir da álgebra quociente $\mathbb{K}\langle X\rangle/T(A)$: f é polinômio central de A se, e somente se, $f + T(A)$ está no centro de $\mathbb{K}\langle X\rangle/T(A)$.

No Capítulo 2 daremos uma descrição dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann G (quando $\mathbb{K}$ é infinito) e no Capítulo 3 exibiremos alguns polinômios centrais para a álgebra $M_n(\mathbb{K})$ das matrizes $n \times n$.

1.4 Polinômios multi-homogêneos

Nesta seção classificaremos os polinômios segundo o número de ocorrências das suas variáveis. Além disso, mostraremos que dependendo do corpo, um T-ideal é gerado por seus elementos multi-homogêneos (corpo infinito) ou multilineares (corpo de característica 0).

Definição 1.4.1. *Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é homogêneo de grau b em x_i, se é uma combinação linear de monômios tais que: em cada monômio de f , a variável x_i aparece b vezes. Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é homogêneo de grau b_i em x_i , para todo $i = 1, \ldots, n$, dizemos que f é multi-homogêneo de multigrau $(b_1, \ldots, b_n)$. Um polinômio multi-homogêneo de multigrau $(1, \ldots, 1)$ é chamado multilinear de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.*

Por um abuso de linguagem, dizemos que os elementos de $\mathbb{K}$ não nulos são polinômios multilineares de grau 0.

Dado um polinômio f qualquer, usaremos a notação $f_{(b_1,\ldots,b_n)}$ para denotar a componente multi-homogênea de f de multigrau $(b_1, \ldots, b_n)$, isto é, $f_{(b_1,\ldots,b_n)}$ é a soma de todos os monômios de f com multigrau $(b_1, \ldots, b_n)$.

Observe que f é multilinear de grau n se, e somente se, tem a forma

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

onde $\alpha_\sigma \in \mathbb{K}$.

Definição 1.4.2. *Dois subconjuntos de polinômios são TS-equivalentes se eles geram o mesmo T-espaço e são TI-equivalentes se geram o mesmo T-ideal.*

O próximo resultado nos dá uma importante ferramenta no trabalho de determinar geradores para T-espaços e T-ideais quando $\mathbb{K}$ é infinito e em particular quando tem característica zero.

Proposição 1.4.3. *Seja $f(x_1, \ldots, x_m)$ um polinômio em $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Escreva*

$$f = \sum_{n} f_{(n_1,\ldots,n_m)},$$

onde $f_{(n_1,\ldots,n_m)}$ é a componente multi-homogênea de f com multigrau $n = (n_1, \ldots, n_m)$.
(i) *Se $\mathbb{K}$ é infinito, então*

$$\{f\} \text{ e } \{f_{(n_1,\ldots,n_m)} \mid n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m\}$$

são TS-equivalentes.
(ii) *Se* $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$*, então $\{f\}$ é TS-equivalente a um conjunto de polinômios multilineares.*

Demonstração. (i) Seja

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{d} f_i(x_1, \ldots, x_m),$$

onde f_i é a parte de f formada pelos monômios com grau i em x_1. Denote por W o T-espaço gerado por f e por W^* o T-espaço

$$W^* = \langle f_0, f_1, \ldots, f_d\rangle^{TS}.$$

Mostraremos que $W = W^*$. A inclusão $\subseteq$ é óbvia. Sejam $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ elementos distintos de $\mathbb{K}$. Uma vez que W é um T-espaço,

$$g_j = f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in W.$$

Temos

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix},$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & {\alpha_0}^2 & \ldots & {\alpha_0}^d \\ 1 & \alpha_1 & {\alpha_1}^2 & \ldots & {\alpha_1}^d \\ 1 & \alpha_2 & {\alpha_2}^2 & \ldots & {\alpha_2}^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & {\alpha_n}^2 & \ldots & {\alpha_n}^d \end{pmatrix}.$$

Como M é a matriz de Vandermonde e

$$\det(M) = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0,$$

segue que M é uma matriz invertível. Portanto

$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}$$

e cada f_i é uma combinação linear dos elementos $g_0, \ldots, g_d$. Como cada $g_j \in W$, segue que $f_i \in W$ para todo i. Logo, $W = W^*$ como desejado.

Aplicando agora o mesmo argumento acima para cada polinômio f_i, mas na variável x_2, teremos que W é TS-equivalente a um conjunto de polinômios, onde cada cada polinômio é homogêneo nas variáveis x_1 e x_2. Assim, por indução obtemos a equivalência desejada do teorema.

(ii) Pelo item (i) temos que $\{f\}$ é TS-equivalente a um conjunto de polinômios multi-homogêneos. Assim, para provar o resultado, devemos mostrar que todo polinômio multi-homogêneo é equivalente a um multilinear. Suponha $f = f(x_1, \ldots, x_m)$ multi-homogêneo de grau d_i em x_i. Seja

$$g = g(x_{11}, \ldots, x_{1d_1}, x_{21}, \ldots, x_{2d_2}, \ldots, x_{m_1}, \ldots, x_{md_m})$$

a componente multilinear de grau $d_1 + d_2 + \ldots + d_m$ do polinômio

$$f(x_{11} + \ldots + x_{1d_1}, x_{21} + \ldots + x_{2d_2}, \ldots, x_{m_1} + \ldots + x_{md_m}).$$

Pelo item (i) segue que $\langle g\rangle^{TS} \subseteq \langle f\rangle^{TS}$. Agora, substituindo x_{ij} por x_i em g, obtemos

$$g(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_m) = (d_1!d_2! \ldots d_m!)f$$

e portanto $\langle f\rangle^{TS} \subseteq \langle g\rangle^{TS}$. Concluímos assim a demonstração. □

Corolário 1.4.4. *A Proposição anterior permanece válida se trocarmos o termo TS-equivalente por TI-equivalente.*

Demonstração. A demonstração é análoga a da proposição anterior. □

Uma consequência direta desse corolário é o próximo resultado.

Corolário 1.4.5. *Seja T um T-ideal.*

(i) *Se o corpo* $\mathbb{K}$ *é infinito, então* T *é gerado, como T-ideal, por seus polinômios multi-homogêneos.*

(ii) *Se o corpo* $\mathbb{K}$ *tem característica zero, então* T *é gerado, como T-ideal, por seus polinômios multilineares.*

1.5 Polinômios próprios

Nesta seção definimos o termo "polinômio próprio". Além disso, mostramos que dependendo do corpo, um T-ideal é gerado por seus elementos próprios multi-homogêneos (corpo infinito) ou próprios multilineares (corpo de característica 0).

Seja $\mathrm{Com}(X)$ o conjunto de todos os comutadores em X. Aqui assumimos que o elemento unidade 1 é um comutador de comprimento 0 e portanto $1 \in \mathrm{Com}(X)$.

Definição 1.5.1. *Denote por* B *a subálgebra de* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *gerada por* $\mathrm{Com}(X)$. *Dizemos que um elemento em* B *é um polinômio próprio.*

Note que se $w \in (B - \mathbb{K})$, então

$$w = \sum_i \alpha_i [x_{i_{(11)}}, \ldots, x_{i_{(1t_1)}}][x_{i_{(21)}}, \ldots, x_{i_{(2t_2)}}] \ldots [x_{i_{(n1)}}, \ldots, x_{i_{(nt_n)}}],$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Além disso, observe que se $w = w(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in B$, então

$$w(x_1 + 1, x_2 + 1, \ldots, x_m + 1) = w(x_1, x_2, \ldots, x_m). \qquad (1.5)$$

Esse fato é consequência direta da igualdade

$$[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \ldots, x_n] = [x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n].$$

Verifique!

Seja $<$ uma relação de ordem em Com(X) com a seguinte propriedade: se $f, g \in$Com(X) com $\deg(f) < \deg(g)$, então $f < g$.

Usando a teoria de álgebras de Lie prova-se o seguinte teorema.

Teorema 1.5.2. *Existe um subconjunto $\Lambda \subset \mathrm{Com}(X)$ com a propriedade de que $\mathbb{K}\langle X\rangle$ tem uma base formada pelos elementos*

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}u_1u_2\dots u_k, \tag{1.6}$$

onde $n, k \geq 0$ e $a_i \geq 0$, $u_i \in \Lambda$, $u_i \leq u_{i+1}$ para todo i.

A demonstração do teorema pode ser encontrada em [6] na página 42.

Usando o fato que se u e v são comutadores, então $[u, v]$ é uma combinação linear de comutadores de grau $\deg(u) + \deg(v)$, segue que B tem uma base formada pelos elementos (1.6) com $a_i = 0$ para todo i. Usaremos essa base de agora em diante para B.

Pelo teorema anterior, segue que se $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, então

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_a \alpha_a x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}w_a \tag{1.7}$$

onde $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\alpha_a \in \mathbb{K}$ e $w_a \in B$.

Relembramos que as álgebras consideradas nesta dissertação são todas associativas e com unidade.

Proposição 1.5.3. *Seja A uma álgebra. Se $\mathbb{K}$ é infinito, então $T(A)$ é gerado por seus elementos próprios multi-homogêneos. Se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, então $T(A)$ é gerado por seus elementos próprios multilineares.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\langle T(A) \cap B \rangle^T = T(A)$. A inclusão $\subseteq$ é óbvia. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade polinomial de A. Como $\mathbb{K}$ é infinito, para provar que $f \in \langle T(A) \cap B \rangle^T$, basta mostrar que cada componente multi-homogênea de f pertence a $\langle T(A) \cap B \rangle^T$. Assim, podemos assumir que f é multi-homogêneo de multigrau $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Escreva f como em (1.7), isto é,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_a \alpha_a x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} w_a$$

onde $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\alpha_a \in \mathbb{K}$ e $w_a \in B$. Seja $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ a sequência cujo monômio $x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n}$ é o maior (na ordem lexicográfica) dentre os monômios $x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ que aparecem em f com coeficiente $\alpha_a \neq 0$. Por (1.5) segue que

$$f(x_1 + 1, \ldots, x_n + 1) = \sum_a \alpha_a (x_1 + 1)^{a_1} \ldots (x_n + 1)^{a_n} w_a \in T(A).$$

Como

$$(x_i + 1)^{a_i} = \sum_{j=0}^{a_i} \binom{a_i}{j} x^j,$$

segue que a componente multi-homogênegea de $f(x_1 + 1, \ldots, x_n + 1)$ com multigrau $(d_1 - b_1, d_2 - b_2, \ldots, d_n - b_n)$ é $\alpha_b w_b$. Assim, $w_b \in T(A)$. Utilizando agora o mesmo argumento acima para

$$f - \alpha_b x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n} w_b,$$

após alguns passos teremos que $w_a \in T(A)$ para toda sequência a com $\alpha_a \neq 0$. Como $w_a \in B$, segue que $f \in \langle T(A) \cap B \rangle^T$ e o resultado está provado.

Para demonstrar a segunda parte da proposição, usamos o mesmo argumento acima assumindo que f é multilinear. $\square$

Corolário 1.5.4. *Seja A uma álgebra comutativa sobre um corpo $\mathbb{K}$ infinito. Então*

$$T(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T.$$

Demonstração. Já sabemos que $[x_1, x_2]$ é uma identidade para A. Assim,

$$\langle [x_1, x_2] \rangle^T \subseteq T(A).$$

Como $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}] = [[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}], x_{i_k}]$, temos que todo comutador está no T-ideal $\langle [x_1, x_2] \rangle^T$. Logo,

$$T(A) \cap B \subseteq \langle [x_1, x_2] \rangle^T$$

e portanto, pela proposição anterior,

$$T(A) = \langle T(A) \cap B \rangle^T \subseteq \langle [x_1, x_2] \rangle^T.$$

Concluímos assim a igualdade desejada. □

Sejam A uma álgebra e $\overline{p}$ a imagem de $p \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ pelo homomorfismo canônico $\mathbb{K}\langle X \rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle X \rangle / T(A)$. Seja $B(A) = \{\overline{p} \mid p \in B\}$ onde B é o conjunto dos polinômios próprios de $\mathbb{K}\langle X \rangle$. Note que $B(A)$ e $B/(B \cap T(A))$ são álgebras isomorfas.

Seja M o subconjunto de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ formado pelos monômios do tipo

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k},$$

onde $k \geq 0$ e $a_i \geq 0$.

A importância dos polinômios próprios justifica-se, entre outras coisas, pelo seguinte resultado.

Proposição 1.5.5. *Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo infinito e* A *uma álgebra. Seja* β *um conjunto de polinômios multi-homogêneos de* B *de forma que* $\overline{\beta} = \{\overline{p} \mid p \in \beta\}$ *seja uma base para o espaço vetorial* $B(A)$*. Então*

$$\mathcal{B} = \{\overline{mp} \mid m \in M \text{ } e \, p \in \beta\}$$

é uma base para $\mathbb{K}\langle X\rangle/T(A)$*.*

Demonstração. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Escrevendo f como em (1.7) temos que

$$\overline{f} = \sum_a \alpha_a \overline{x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} w_a}$$

onde $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \geq 0$, $\alpha_a \in \mathbb{K}$ e $w_a \in B$. Uma vez que $\overline{w}_a$ é uma combinação linear de elementos de $\overline{\beta}$ segue que $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{K}\langle X\rangle/T(A)$. Deixamos para o leitor verificar que $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente. $\square$

Capítulo 2

Álgebra de Grassmann G

2.1 O T-ideal $T(G)$

Ao longo desta seção, o corpo $\mathbb{K}$ será infinito e de $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$. Definiremos o que é uma álgebra de Grassmann G e provaremos que o T-ideal das identidades polinomiais de G é gerado pelo comutador triplo.

Definição 2.1.1. *Seja V um espaço vetorial com base infinita enumerável $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. A álgebra de Grassmann (ou álgebra Exterior) de V, denotada por G, é a álgebra gerada por $\{1, e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ que satisfaz*

$$e_i e_j + e_j e_i = 0,$$

para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$.

A álgebra G existe e é isomorfa a álgebra quociente $\mathbb{K}\langle X\rangle/I$, onde I é o ideal gerado pelo conjunto

$$\{x_i x_j + x_j x_i \mid i, j \in \mathbb{N}\}.$$

No isomorfismo o elemento $x_i + I$ de $\mathbb{K}\langle X\rangle/I$ corresponde ao elemento e_i de G. Pode-se mostrar que

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_n} \mid i_1 < \dots < i_n,\ i_k \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \tag{2.1}$$

é uma base de G. Destacamos em G os subespaços vetoriais G_0 e G_1 gerados, respectivamente, por $\{1, e_{i_1}\dots e_{i_m} \mid m \text{ par}\}$ e $\{e_{i_1}\dots e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$. Temos $G = G_0 \bigoplus G_1$ e, da relação

$$[e_{i_1}\dots e_{i_m}, e_{j_1}\dots e_{j_k}] = (1-(-1)^{mk})e_{i_1}\dots e_{i_m}e_{j_1}\dots e_{j_k},$$

temos que o centro de G é $Z(G) = G_0$.

Exemplo 2.1.2. *O polinômio*

$$f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$$

é uma identidade para G.

De fato, como f é multilinear, para verificar que f se anula sobre os elementos de G, basta substituir as variáveis de f por elementos da base de G. Sejam a_1, a_2, a_3 elementos da base (2.1). Uma vez que $[a_1, a_2] \in Z(G)$, segue que $[[a_1, a_2], a_3] = 0$.

De agora em diante, denotaremos por T o T-ideal gerado pelo comutador triplo $[x_1, x_2, x_3]$. Exibiremos alguns resultados necessários para provar que $T = T(G)$. De início convencionaremos que $\overline{p}$ é o elemento $p + T$ da álgebra quociente $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$.

Proposição 2.1.3. *Para todo $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, temos:*

(i) O elemento $\overline{[g_1, g_2]}$ pertence ao centro de $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$;

(ii) Vale a igualdade $\overline{[g_1, g_2][g_3, g_4]} = -\overline{[g_1, g_3][g_2, g_4]}$.

Demonstração. (i) Se $g \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, então

$$[\overline{[g_1, g_2]}, \overline{g}] = \overline{[[g_1, g_2], g]} = 0,$$

pois $[[g_1, g_2], g] \in T$. Logo, $\overline{[g_1, g_2]} \in Z(\mathbb{K}\langle X\rangle/T)$.

(ii) É fácil ver que em toda álgebra A são válidas as igualdades

$$[a, bc] = b[a, c] + [a, b]c \quad \text{e} \quad [bc, a] = b[c, a] + [b, a]c, \ \forall a, b, c \in A.$$

Assim,

$$[x_1, x_2^2, x_3] = [[x_1, x_2^2], x_3] = [x_2[x_1, x_2] + [x_1, x_2]x_2, x_3] =$$

$$= x_2[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] + [x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_1, x_2, x_3]x_2.$$

Uma vez que

$$[x_2, x_3][x_1, x_2] = [[x_2, x_3], [x_1, x_2]] + [x_1, x_2][x_2, x_3],$$

segue que

$$[x_1, x_2^2, x_3] = x_2[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, [x_1, x_2]] + 2[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_1, x_2, x_3]x_2,$$

e portanto, $\overline{[x_1, x_2][x_2, x_3]} = 0$. Fazendo $x_2 = y_1 + y_2$, temos

$$0 = \overline{[x_1, y_1 + y_2][y_1 + y_2, x_3]} = \overline{[x_1, y_1][y_1, x_3]} + \overline{[x_1, y_1][y_2, x_3]}$$

$$+ \overline{[x_1, y_2][y_1, x_3]} + \overline{[x_1, y_2][y_2, x_3]} = \overline{[x_1, y_1][y_2, x_3]} + \overline{[x_1, y_2][y_1, x_3]}.$$

Logo, $\overline{[g_1, g_2][g_3, g_4]} = -\overline{[g_1, g_3][g_2, g_4]}$ para quaisquer polinômios $g_1, \ldots, g_4$ em $\mathbb{K}\langle X\rangle$. $\square$

Observação 2.1.4. *Segue do item (ii) da proposição anterior e da igualdade* $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ *que*

$$\overline{[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \dots [x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)}]} = (\text{sign}\sigma)\overline{[x_1, x_2] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}]},$$

para todo $\sigma \in S_{2k}$. *Em particular, trocando duas variáveis* x_i*'s por um mesmo elemento, então o produto acima será nulo.*

Proposição 2.1.5. *Se* I *é um* T*-ideal de* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *tal que* $T \subsetneq I$, *então*

$$I = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] \rangle^T$$

para algum $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como o corpo é infinito, temos que I é gerado por seus polinômios próprios multi-homogêneos. Se f é um polinômio próprio multi-homogêneo de I, então

$$f = \sum_{t=1}^{z} \alpha_t w_t,$$

onde w_t é um produto de comutadores e $\alpha_t \in \mathbb{K}$. Se w_t não for do tipo

$$[x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]$$

com $x_{i_p} \neq x_{i_q}$ para $i_p \neq i_q$, então $\overline{w}_t = 0$. De fato, se w_t tem um comutador de comprimento ≥ 3 em sua formação, então $\overline{w}_t = 0$, pois $w_t \in T$. Além disso, se em w_t existir $x_{i_p} = x_{i_q}$ para algum $i_p \neq i_q$, segue da Observação 2.1.4 que $\overline{w}_t = 0$.

Seja $f \in I - T$ próprio multi-homogêneo. Segue da Observação 2.1.4 que

$$\overline{f} = \alpha\overline{[x_1, x_2] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}]}$$

para algum $\alpha \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}$. Assim, se

$$n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid [x_1, x_2] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}] \in I\},$$

então $I = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] \rangle^T$. $\square$

Teorema 2.1.6. $T(G) = T$.

Demonstração. Pelo Exemplo 2.1.2 temos $T \subset T(G)$. Supondo $T \subsetneq T(G)$, segue da Proposição 2.1.5 que $[x_1, x_2], \dots, [x_{2n-1}, x_{2n}] \in T(G)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Mas

$$[e_1, e_2] \dots [e_{2n-1}, e_{2n}] = 2^n e_1 e_2 \dots e_{2n-1} e_{2n} \neq 0$$

em G. Logo $T(G) = T$. $\square$

2.2 O T-espaço $C(G)$

Faremos nesta seção um estudo sobre o T-espaço $C(G)$ dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann G e introduziremos o conceito de T-espaço limite. O assunto aqui apresentado encontra-se em [2].

De agora em diante, $\mathbb{K}$ será um corpo infinito de característica $p \neq 2$. Relembramos que o T-ideal

$$T = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$$

é o conjunto das identidades polinomiais da álgebra de Grassmann G, analisada na seção anterior. Dado um polinômio f, denotaremos por $\overline{f}$ o elemento da álgebra quociente $\mathbb{K}\langle X \rangle / T$ dado por $f + T$. Denotaremos também por T^* o T-espaço

$$T^* = \langle x_1 [x_2, x_3, x_4] x_5,\ [x_1, x_2] \rangle^{TS}.$$

Observe que

$$T^* = T + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS}.$$

Proposição 2.2.1. *Se $p > 2$, então para quaisquer $g_1, g_2 \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ e $n \in \mathbb{N}$ valem as relações:*

i) $\overline{[g_1^n, g_2]} = n\overline{g_1^{n-1}[g_1, g_2]}$;

ii) $g_1^p \in C(G)$;

iii) $\overline{(g_1g_2)^n} = \overline{g_1^n g_2^n} + \dfrac{n(n-1)}{2}\overline{g_1^{n-1}g_2^{n-1}[g_2, g_1]}$;

iv) $\overline{(g_1g_2)^p} = \overline{g_1^p g_2^p}$;

v) $\overline{(g_1 + g_2)^n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \overline{g_1^{n-j} g_2^j} + \dfrac{n(n-1)}{2}\overline{(g_1 + g_2)^{n-2}[g_2, g_1]}, \ \forall n \geq 2$;

vi) $\overline{(g_1 + g_2)^p} = \overline{g_1^p + g_2^p}$.

Demonstração. i) A prova será feita por indução sobre n. Obviamente a fórmula é verdadeira para $n = 1$. Suponha que a fórmula seja verdadeira para $n - 1$. De $\overline{[g_1^n, g_2]} = \overline{[g_1^{n-1}g_1, g_2]}$ temos

$$\overline{[g_1^n, g_2]} = \overline{g_1^{n-1}[g_1, g_2]} + \overline{[g_1^{n-1}, g_2]g_1} = \overline{g_1^{n-1}[g_1, g_2]} + (n-1)\overline{g_1^{n-2}[g_1, g_2]g_1}$$

$$= \overline{g_1^{n-1}[g_1, g_2]} + (n-1)\overline{g_1^{n-1}[g_1, g_2]} = n\overline{g_1^{n-1}[g_1, g_2]}.$$

ii) Do item i) temos

$$\overline{[g_1^p, g_2]} = p\,\overline{g_1^{p-1}[g_1, g_2]} = 0$$

para todo $g_2 \in \mathbb{K}\langle X \rangle$. Assim, $\overline{g_1^p} \in Z(\mathbb{K}\langle X \rangle / T)$ e portanto $g_1^p \in C(G)$.

iii) A prova será feita por indução sobre n. Se $n = 1$ a fórmula é obviamente verdadeira. Suponha que ela seja verdadeira para $n - 1$, ou seja

$$\overline{(g_1g_2)^{n-1}} = \overline{g_1^{n-1}g_2^{n-1}} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{g_1^{n-2}g_2^{n-2}[g_2, g_1]}.$$

Então

$$\overline{(g_1g_2)^n} = \overline{(g_1g_2)(g_1g_2)^{n-1}} = \overline{g_1g_2g_1^{n-1}g_2^{n-1}} +$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{g_1g_2g_1^{n-2}g_2^{n-2}[g_2,g_1]} = \overline{g_1(g_1^{n-1}g_2+[g_2,g_1^{n-1}])g_2^{n-1}} +$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{g_1(g_1^{n-2}g_2+[g_2,g_1^{n-2}])g_2^{n-2}[g_2,g_1]} =$$

$$= \overline{g_1^ng_2^n} + \overline{g_1[g_2,g_1^{n-1}]g_2^{n-1}} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{g_1^{n-1}g_2^{n-1}[g_2,g_1]} +$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{g_1[g_2,g_1^{n-2}]g_2^{n-2}[g_2,g_1]}.$$

O último termo, de acordo com a Proposição 2.1.3 e a Observação 2.1.4, é nulo. Portanto,

$$\overline{(g_1g_2)^n} = \overline{g_1^ng_2^n} + (n-1)\overline{g_1^{n-1}g_2^{n-1}[g_2,g_1]} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{g_1^{n-1}g_2^{n-1}[g_2,g_1]}$$

$$= \overline{g_1^ng_2^n} + \frac{n(n-1)}{2}\overline{g_1^{n-1}g_2^{n-1}[g_2,g_1]}.$$

iv) Segue imediatamente do item iii).

v) Deixamos para o leitor a verificação da fórmula para os casos $n = 2$ e $n = 3$. Suponha que a fórmula seja válida para $n-1$ e $n-2$, $n \geq 4$. Então

$$\overline{(g_1+g_2)^{n-1}} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\overline{g_1^{n-1-j}g_2^j} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{(g_1+g_2)^{n-3}[g_2,g_1]}$$

e

$$\overline{(g_1+g_2)^{n-2}} = \sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}\overline{g_1^{n-2-j}g_2^j} + \frac{(n-2)(n-3)}{2}\overline{(g_1+g_2)^{n-4}[g_2,g_1]}.$$

Então

$$\overline{(g_1+g_2)^n} = \overline{(g_1+g_2)(g_1+g_2)^{n-1}} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\overline{g_1^{n-j}g_2^j} +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\overline{g_2 g_1^{n-1-j}g_2^j}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{(g_1+g_2)^{n-2}[g_2,g_1]}=$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\overline{g_1^{n-j}g_2^j}+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\overline{g_1^{n-(j+1)}g_2^{j+1}}+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\overline{[g_2,g_1^{n-1-j}]g_2^j}+$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{(g_1+g_2)^{n-2}[g_2,g_1]}=$$

$$=\overline{g_1^n}+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}\overline{g_1^{n-j}g_2^j}+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j-1}\overline{g_1^{n-j}g_2^j}+\overline{g_2^n}+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(n-1-j)\overline{g_1^{n-2-j}g_2^j[g_2,g_1]}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{(g_1+g_2)^{n-2}[g_2,g_1]}=$$

$$=\overline{g_1^n}+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\overline{g_1^{n-j}g_2^j}+\overline{g_2^n}+(n-1)\Big(\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}\overline{g_1^{n-2-j}g_2^j}\Big)\overline{[g_2,g_1]}+$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{(g_1+g_2)^{n-2}[g_2,g_1]}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\overline{g_1^{n-j}g_2^j}+$$

$$+(n-1)\Big(\overline{(g_1+g_2)^{n-2}}-\frac{(n-2)(n-3)}{2}\overline{(g_1+g_2)^{n-4}[g_2,g_1]}\Big)\overline{[g_2,g_1]}+$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{(g_1+g_2)^{n-2}[g_2,g_1]}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\overline{g_1^{n-j}g_2^j}+$$

$$+(n-1)\overline{(g_1+g_2)^{n-2}[g_2,g_1]}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\overline{(g_1+g_2)^{n-2}[g_2,g_1]}=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\overline{g_1^{n-j}g_2^j}+\frac{n(n-1)}{2}\overline{(g_1+g_2)^{n-2}[g_2,g_1]}.$$

vi) Do item v) segue que

$$\overline{(g_1+g_2)^p}=\overline{g_1^p}+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}\overline{g_1^{p-j}g_2^j}+\overline{g_2^p}+\frac{p(p-1)}{2}\overline{(g_1+g_2)^{p-2}[g_2,g_1]}.$$

Uma vez que $\binom{p}{j}$ é múltiplo de p para $1 \leq j \leq p-1$, então

$$\overline{(g_1 + g_2)^p} = \overline{g_1^p} + \overline{g_2^p}.$$

$\square$

Lema 2.2.2. *Se $p > 2$, então*

$$x_1^p[x_2, x_3] \in T^*.$$

Demonstração. Pela proposição anterior temos

$$\overline{[x_1^p x_2, x_3]} = \overline{x_1^p[x_2, x_3]} + \overline{[x_1^p, x_3]x_2} = \overline{x_1^p[x_2, x_3]}.$$

Assim,

$$[x_1^p x_2, x_3] = x_1^p[x_2, x_3] + h,$$

para algum $h \in T$ e portanto $x_1^p[x_2, x_3] \in T^*$. $\square$

Proposição 2.2.3. *A álgebra $\mathbb{K}\langle X \rangle / T$ tem uma base cujos elementos são*

$$\overline{x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \ldots x_{i_s}^{n_s} [x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]},$$

onde $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_{2r}$, $r, s \geq 0$ e $n_k > 0$ para todo k.

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = \{\overline{[x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]} \ / \ j_1 < j_2 < \ldots < j_{2r}\}$. Pela Proposição 1.5.5 é suficiente demonstrar que $\mathcal{A}$ é uma base para $B/B \cap T$. Pois bem, olhando para a demonstração da Proposição 2.1.5 temos que $\mathcal{A}$ gera $B/B \cap T$. Agora, suponha que

$$\sum_j \alpha_j \overline{[x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]} = 0.$$

Pela Proposição 2.1.6 temos que $T = T(G)$ e portanto

$$g = \sum_j \alpha_j [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] \in T(G).$$

Para cada j, $[x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]$ é uma componente multi-homogênea de g. Portanto, se $\alpha_j \neq 0$ para algum j, então $[x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] \in T(G)$. Absurdo, ver a demonstração da Proposição 2.1.6. Assim, $\mathcal{A}$ é uma base para $B/B \cap T$. $\square$

Lema 2.2.4. *Seja $g = g(x_2, x_3, \dots, x_l) \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ um polinômio que não depende de x_1. Se $x_1 g \in C(G)$, então $g \in T$.*

Demonstração. Seja $f = f(x_1, x_2, \dots, x_l) = x_1 g(x_2, \dots, x_l)$. Uma vez que $C(G)$ é um T-espaço, então

$$f(1, x_2, \dots, x_l) = g(x_2, \dots, x_l) \in C(G).$$

Assim, dados $a_1, a_2, \dots, a_l, b \in G$, temos

$$[g(a_2, \dots, a_l), b] = 0 \quad \text{e} \quad [a_1 g(a_2, \dots, a_l), b] = 0.$$

Sabendo que

$$[a_1 g(a_2, \dots, a_l), b] = a_1 [g(a_2, \dots, a_l), b] + [a_1, b] g(a_2, \dots, a_l)$$

segue que

$$[a_1, b] g(a_2, \dots, a_l) = 0. \tag{2.2}$$

Uma vez que $\mathcal{B} = \{e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k,\ k \geq 0\}$ é uma base para G, podemos escrever $g(a_2, \dots, a_l)$ como uma combinação linear de um conjunto finito de elementos de $\mathcal{B}$. Suponha $g(a_2, \dots, a_l) = \sum_a \alpha_a e_1^{a_1} e_2^{a_2} \dots e_t^{a_t}$

em que $a_j \in \{0,1\}$. Fazendo $a_1 = e_{t+1}$ e $b = e_{t+2}$ em (2.2) temos

$$0 = [e_{t+1}, e_{t+2}]g(a_2, \ldots, a_l) = 2e_{t+1}e_{t+2} \sum_a \alpha_a e_1^{a_1} e_2^{a_2} \ldots e_t^{a_t}$$

$$= \sum_a 2\alpha_a e_1^{a_1} e_2^{a_2} \ldots e_t^{a_t} e_{t+1} e_{t+2}.$$

Logo $\alpha_a = 0,\ \forall a$. Assim $g(a_2, \ldots, a_l) = 0$ e uma vez que $a_2, \ldots, a_l$ foram escolhidos arbitrariamente segue que $g \in T(G) = T$. □

Lema 2.2.5. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ um polinômio homogêneo de grau 1 em x_1. Se $f \in C(G)$, então $f \in T^*$.*

Demonstração. Podemos escrever

$$f(x_1, \ldots, x_l) = \sum_i \alpha_i a_i x_1 b_i$$

em que $a_i = a_i(x_2, \ldots, x_l)$ e $b_i = b_i(x_2, \ldots, x_l)$, ou seja, a_i e b_i são monômios que não dependem de x_1 e alguns deles possivelmente iguais a 1. Uma vez que $a_i x_1 b_i = x_1 b_i a_i + [a_i, x_1 b_i]$ então

$$f = \sum_i \alpha_i x_1 b_i a_i + \sum_i \alpha_i [a_i, x_1 b_i] = x_1 \sum_i \alpha_i b_i a_i + \sum_i \alpha_i [a_i, x_1 b_i].$$

Fazendo $g(x_2, \ldots, x_l) = \sum\limits_i \alpha_i b_i a_i$ e $h(x_1, \ldots, x_l) = \sum\limits_i \alpha_i [a_i, x_1 b_i]$ temos

$$f(x_1, \ldots, x_l) = x_1 g(x_2, \ldots, x_l) + h(x_1, \ldots, x_l).$$

Uma vez que $h \in T^* \subset C(G)$ e, por hipótese, $f \in C(G)$, temos que $x_1 g \in C(G)$. Segue do Lema 2.2.4 que $g \in T$ e, portanto, $x_1 g \in T \subset T^*$. Assim, $f \in T^*$. □

Lema 2.2.6. *Sejam $p > 2$ e $f = f(x_1, \ldots, x_l)$ um polinômio homogêneo de grau $m_1 \geq 1$ em x_1. Se p não divide m_1 e $f \in C(G)$, então $f \in T^*$.*

Demonstração. Se $m_1 = 1$, então pelo lema anterior o resultado está provado. Suponha $m_1 > 1$. Se $p \nmid m_1$ então $m_1 = pq + m$, onde $0 < m < p$. Sabe-se que $\overline{f}$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$\overline{x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_s}^{n_s} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]}$$

em que $i_1 < i_2 < \dots < i_s,\ j_1 < j_2 < \dots < j_{2r},\ r, s \geq 0, n_k > 0,\ \forall k$. Uma vez que f é homogêneo de grau $m_1 > 1$ em x_1 temos $i_1 = 1$. Pode ocorrer que existam monômios em que $n_1 = m_1$ e, portanto, $j_1 \neq 1$ e monômios em que $n_1 = m_1 - 1$ e, portanto, $j_1 = 1$. No primeiro caso temos,

$$\overline{x_1^{m_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_s}^{n_s} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]}$$

$$= \overline{x_1^{pq} (x_1^{m} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_s}^{n_s} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]}.$$

No segundo caso,

$$\overline{x_1^{m_1-1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_s}^{n_s} [x_1, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]}$$

$$= \overline{x_1^{pq} (x_1^{m-1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_s}^{n_s} [x_1, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]}.$$

Portanto, podemos escrever

$$\overline{f} = \overline{x_1^{pq} g(x_1, \dots, x_l)}$$

em que $g = g(x_1, \dots, x_l)$ tem grau m em x_1. Temos $f = x_1^{pq} g + r$ para algum $r \in T$. Logo, $x_1^{pq} g \in C(G)$. Pela Proposição 2.2.1 temos

$$\overline{(1 + x_1)^{pq} g(1 + x_1, \dots, x_l)} = \overline{(1 + x_1^p)^q g(1 + x_1, \dots, x_l)}.$$

Logo, $(1 + x_1^p)^q g(1 + x_1, \dots, x_l) \in C(G)$ e sua componente homogênea de grau m em x_1, dada por g, também pertence a $C(G)$. Denote por $h =$

$h(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_l)$ a componente multilinear em $y_1, y_2, \ldots, y_m$ do polinômio

$$g(y_1 + \ldots + y_m, x_2, \ldots, x_l).$$

Temos que $h \in C(G)$. Como o grau de h em y_1 é 1, segue do Lema 2.2.5 que $h \in T^*$. Da igualdade

$$h(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{m}, x_2, \ldots, x_l) = m!g(x_1, x_2, \ldots, x_l) \tag{2.3}$$

temos que $g \in T^*$. Observe que $(m!) \neq 0$, pois $0 < m < p$. Pelo Lema 2.2.2 segue que $x_1^{pq} g \in T^*$. Logo, $f \in T^*$. $\square$

Lema 2.2.7. *Sejam $p > 2$ e $f = f(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ um polinômio multi-homogêneo com multigrau $(m_1, \ldots, m_l)$. Suponha que p não divide m_j para algum j. Se $f \in C(G)$, então $f \in T^*$.*

Demonstração. O polinômio g obtido pela troca das variáveis x_1 e x_j em f,

$$g(x_1, \ldots, x_l) = f(x_j, \ldots, x_1, \ldots, x_l),$$

pertence a $C(G)$. Logo, pelo lema anterior temos que $g \in T^*$ e portanto $f \in T^*$ também. $\square$

Considere os polinômios

$$q(x_1, x_2) = x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1}$$

e

$$q_n(x_1, \ldots, x_{2n}) = q(x_1, x_2)q(x_3, x_4) \ldots q(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

É fácil ver que q_n e $x_0^p q_n$ são polinômios centrais para G.

Teorema 2.2.8. *Se $p > 2$, então*

$$C(G) = \langle x_1[x_2, x_3, x_4],\ x_0^p,\ x_0^p q_1,\ x_0^p q_2, \ldots, x_0^p q_n, \ldots\rangle^{TS}. \qquad (2.4)$$

Demonstração. Antes de demonstrar o teorema vamos obter algumas informações: da igualdade

$$x_1[x_2, x_3, x_4]x_5 = x_1[x_2, x_3, x_4x_5] - x_1x_4[x_2, x_3, x_5]$$

temos que

$$\langle x_1[x_2, x_3, x_4]\rangle^{TS} = \langle x_1[x_2, x_3, x_4]x_5\rangle^{TS} = T.$$

Agora, a componente multi-homogênea de multigrau $(0, 1, 1)$ do polinômio

$$(1 + x_0)^p q(1 + x_1, 1 + x_2) = (1 + x_0)^p (1 + x_1)^{p-1}[x_1, x_2](1 + x_2)^{p-1}$$

é $[x_1, x_2]$. Logo, $[x_1, x_2] \in \langle x_0^p q(x_1, x_2)\rangle^{TS}$.

Denote por Γ o lado direito da igualdade (2.4). Pelo que já foi argumentado, temos que $T^* \subset \Gamma$. Agora estamos preparados para provar a igualdade $C(G) = \Gamma$. A inclusão $\supseteq$ é óbvia. Para provar a outra inclusão, basta verificar que todo elemento multi-homogêneo de $C(G)$ está em Γ, pois $\mathbb{K}$ é um corpo infinito. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_l) \in C(G)$ um polinômio multi-homogêneo de multigrau $(m_1, \ldots, m_l)$.

Se $p \nmid m_j$ para algum j, então pelo Lema 2.2.7 temos que $f \in T^* \subset \Gamma$.

Suponha agora que $p \mid m_i$ para todo i e escreva $m_i = pq_i$. Uma vez que $\overline{f}$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$\overline{x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \ldots x_{i_s}^{n_s} [x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]}$$

onde $i_1 < i_2 < \ldots < i_s,\ j_1 < j_2 < \ldots < j_{2r}$, e lembrando que $\overline{x_i^p},\ \overline{[x_i, x_j]} \in Z(\mathbb{K}\langle X\rangle/T)$, temos que $\overline{f}$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$\overline{x_1^{pq_1} \ldots x_{i_1}^{pq_{i_1}-1} \ldots x_{i_2}^{pq_{i_2}-1} \ldots x_{i_{2k}}^{pq_{i_{2k}}-1} \ldots x_l^{pq_l} [x_{i_1}, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]}$$

$$= \overline{x_1^{pq_1} \dots x_{i_1}^{p(q_{i_1}-1)} \dots x_{i_2}^{p(q_{i_2}-1)} \dots x_{i_{2k-1}}^{p(q_{i_{2k-1}}-1)} \dots x_{i_{2k}}^{p(q_{i_{2k}}-1)} \dots x_l^{pq_l}} \times$$
$$\times \overline{x_{i_1}^{p-1}[x_{i_1}, x_{i_2}]x_{i_2}^{p-1} \dots x_{i_{2k-1}}^{p-1}[x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]x_{i_{2k}}^{p-1}}$$
$$= \overline{(x_1^{q_1} \dots x_l^{q_l})^p x_{i_1}^{p-1}[x_{i_1}, x_{i_2}]x_{i_2}^{p-1} \dots x_{i_{2k-1}}^{p-1}[x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]x_{i_{2k}}^{p-1}}.$$

Observe que a última igualdade é consequência da Proposição 2.2.1 item (iv).

Assim, $f = f' + f''$, onde $f' \in \langle x_0^p q_k \rangle^{TS}$ e $f'' \in T$. Portanto, $f \in \Gamma$ e a demonstração está completa. □

Olhando para a demonstração do último teorema é fácil ver que o próximo corolário é válido.

Corolário 2.2.9. *Sejam $p > 2$ e $f = f(x_1, \dots, x_l)$ um polinômio multi-homogêneo de multigrau $(m_1, \dots, m_l)$. Se $p \mid m_i$ para todo i, então $f \in C(G)$.*

Seja $p > 2$. Denote por I o ideal de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ gerado pelos elementos f^p em que $f \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ é um polinômio sem termo escalar. Sejam V_n e W_n os seguintes T-espaços:

$$V_n = \langle q_1, \dots, q_n \rangle^{TS} \ \text{ e } \ W_n = \langle x_0^p, x_0^p q_1, \dots, x_0^p q_n \rangle^{TS}.$$

Denotaremos também por $\langle 1 \rangle_{\mathbb{K}}$ o subespaço gerado por 1 em $\mathbb{K}\langle X \rangle$.

Observe que pelo Teorema 2.2.8,

$$C(G) = \bigcup_{n \geq 1} (W_n + T).$$

A proposição abaixo se deve a Shchigolev e é uma reformulação de [18] Lema 13.

Proposição 2.2.10. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k(n) > n$ tal que*

$$q_{k(n)} \notin (V_n + T + I).$$

Segue da prova dessa proposição que se pode escolher $k(n) = n + 1$.

Lema 2.2.11. *Seja $p > 2$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a igualdade*

$$V_n + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}} + I = W_n + I.$$

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Seja $f(x_0, x_1, \ldots, x_{2i}) = x_0^p q_i(x_1, \ldots, x_{2i})$, onde $i \leq n$. Como $f \in W_n$ temos $f(1, x_1, \ldots, x_n) = q_i(x_1, \ldots, x_{2i}) \in W_n$. Assim $V_n \subset W_n$. Além disso, $h(x_0) = x_0^p \in W_n$, e portanto $h(1) = 1 \in W_n$. Logo, $V_n + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}} + I \subset W_n + I$.

Agora, W_n é gerado como subespaço pelos elementos g_0^p, $g_0^p q_i(g_1, \ldots, g_{2i})$, onde $i \leq n$ e $g_0, g_1, \ldots, g_{2i} \in \mathbb{K}\langle X \rangle$. Para mostrar que $W_n \subset V_n + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}} + I$ é suficiente verificar que esses elementos estão em $V_n + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}} + I$. Suponha que $g_0 = f + \alpha$ em que $f(0, \ldots, 0) = 0$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então $g_0^p = (f + \alpha)^p = f^p + \alpha^p \in I + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}}$. Além disso,

$$g_0^p q_i(g_1, \ldots, g_{2i}) = f^p q_i(g_1, \ldots, g_{2i}) + \alpha^p q_i(g_1, \ldots, g_{2i}) \in I + V_n.$$

Assim $W_n \subset V_n + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}} + I$ e, portanto, $W_n + I \subset V_n + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}} + I$. $\square$

Um exercício simples de álgebra linear é o próximo lema.

Lema 2.2.12. *Sejam U_1, U_2 e U_3 espaços vetoriais tais que $U_1 \subsetneqq U_2$ e $U_2 \cap U_3 = \{0\}$. Então $U_1 + U_3 \subsetneqq U_2 + U_3$.*

Teorema 2.2.13. *Se $p > 2$, então $C(G)$ não é finitamente gerado como T-espaço.*

Demonstração. Uma vez que $V_n \subset V_{n+1}$ temos que $V_n + I + T \subset V_{n+1} + I + T$. Agora, se $V_{n+1} + I + T \subset V_n + I + T$, então $q_{n+1} \in V_n + I + T$. Absurdo pela Proposição 2.2.10. Assim, $V_n + I + T \subsetneqq V_{n+1} + I + T$.

Não é difícil ver que se $f \in V_l + I + T$, então $f(0, \ldots, 0) = 0$. Portanto,

$$(V_l + I + T) \cap \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}} = 0.$$

Segue do Lema 2.2.12 que

$$V_n + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}} + I + T \subsetneqq V_{n+1} + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}} + I + T$$

e consequentemente, pelo Lema 2.2.11, temos

$$W_n + I + T \subsetneqq W_{n+1} + I + T.$$

Como $W_n \subset W_{n+1}$ temos pela última afirmação que $W_n + T \subsetneqq W_{n+1} + T$ para todo n.

Suponha que $C(G)$ seja finitamente gerado como T-espaço e considere $g_1, \ldots, g_l \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ tais que

$$\langle g_1, \ldots, g_l \rangle^{TS} = C(G).$$

Uma vez que $C(G) = \bigcup_{n \geq 1} (W_n + T)$, temos $g_1 \in W_{n_1} + T, \ \ldots, g_l \in W_{n_l} + T$ para determinados $n_1, \ldots, n_l$. Se $m = \max\{n_1, \ldots, n_l\}$, então $g_1, \ldots, g_l \in W_m + T$ e, portanto, $C(G) = W_m + T$. Em particular, $W_{m+1} + T \subset C(G) = W_m + T$. Absurdo. Dessa forma $C(G)$ não é finitamente gerado como T-espaço. $\square$

Proposição 2.2.14. *Sejam $p > 2$ e W um T-espaço tal que $C(G) \subsetneqq W$. Então existe um T-ideal $I \supsetneqq T$ tal que $W = I + C(G)$.*

Demonstração. Seja I o maior T-ideal em W que contém T. É claro que $I + C(G) \subset W$. Provaremos a outra inclusão: seja $f = f(x_1, \ldots, x_l) \in W$. Como o corpo $\mathbb{K}$ é infinito, podemos assumir que f é multi-homôgenea de multigrau $(m_1, \ldots, m_l)$.

Se $p \mid m_i$, $\forall i = 1, \ldots, l$, então pelo Corolário 2.2.9 temos $f \in C(G) + I$.

Suponha que $p \nmid m_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, l\}$. Como um T-espaço é fechado com relação a mudança de variáveis, podemos assumir que $i = 1$ em f. Usaremos agora vários argumentos análogos aos da demonstração do Lema 2.2.6. Portanto, sugerimos ao leitor, caso tenha alguma dificuldade de compreensão, que olhe a demonstração de tal lema. Escrevendo $m_1 = pq + m$ em que $0 < m < p$, temos

$$\overline{f} = \overline{x_1^{pq} g(x_1, \ldots, x_l)},$$

onde g tem grau m em x_1. Temos que $g \in W$. Seja $h(y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_l)$ a componente multilinear em $y_1, \ldots, y_m$ de $g(y_1 + \ldots + y_m, x_2, \ldots, x_l)$. Então $h \in W$. Tendo em vista que h é linear em y_1, podemos escrever

$$h(y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_l) = \sum_i \alpha_i a_i y_1 b_i,$$

onde a_i e b_i não dependem de y_1. Da igualdade

$$a_i y_1 b_i = y_1 b_i a_i + [a_i, y_1 b_i]$$

temos $h = y_1 h_1 + h_2$, onde h_1 não depende de y_1 e $h_2 \in \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS}$. Assim, $h_2 \in W$ e, consequentemente, $y_1 h_1 \in W$. Uma vez que W é um T-espaço temos também que $z_1 y_1 h_1 \in W$. Como $y_1 h_1 z_1 = z_1 y_1 h_1 + [y_1 h_1, z_1]$ e $[y_1 h_1, z_1] \in W$, então $y_1 h_1 z_1 \in W$. Logo, $\langle h_1 \rangle^T \subset W$. Mas I é o maior T-ideal contido em W e por isso, $\langle h_1 \rangle^T \subset I$. Então $y_1 h_1 \in I$ e, portanto, $h \in I + C(G)$. Dado que

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_l) = (m!)^{-1} h(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_l)$$

então $g \in I + C(G)$, ou seja, $g = g_1 + g_2$ em que $g_1 \in I$ e $g_2 \in C(G)$. Assim

$$x_1^{pq} g = x_1^{pq} g_1 + x_1^{pq} g_2 \in I + C(G),$$

pois $x_1^{pq} \in C(G)$. Uma vez que $\overline{f} = \overline{x_1^{pq} g(x_1, \ldots, x_l)}$, então $f = x_1^{pq} g + f_1$ onde $f_1 \in T \subset C(G)$ e, portanto, $f \in I + C(G)$. $\square$

Definição 2.2.15. *Um T-espaço V é chamado T-espaço limite se todo T-espaço maior $W \supsetneqq V$ é finitamente gerado, mas V não o é.*

Teorema 2.2.16. *Se $p > 2$, então $C(G)$ é um T-espaço limite.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.13 temos que $C(G)$ não é finitamente gerado e, portanto, é suficiente mostrar que cada T-espaço $W \supsetneqq C(G)$ é finitamente gerado como T-espaço.

Pela Proposição 2.2.14, $W = I + C(G)$ para algum T-ideal $I \supsetneqq T$. Pela Proposição 2.1.5, temos que

$$I = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \ldots [x_{2N-1}, x_{2N}] \rangle^T$$

para algum $N \in \mathbb{N}$. Uma vez que

$$x_0[x_1, x_2] \ldots [x_{2N-1}, x_{2N}] x_{2N+1}$$

$$= x_0 x_{2N+1} [x_1, x_2] \ldots [x_{2N-1}, x_{2N}] + x_0[[x_1, x_2] \ldots [x_{2N-1}, x_{2N}], x_{2N+1}]$$

e esse último comutador equivale a

$$x_0[[x_1, x_2], x_{2N+1}][x_3, x_4] \ldots [x_{2N-1}, x_{2N}]$$

$$+ x_0[x_1, x_2][[x_3, x_4], x_{2N+1}] \ldots [x_{2N-1}, x_{2N}]$$

$$+ \ldots + x_0[x_1, x_2] \ldots [x_{2N-3}, x_{2N-2}][[x_{2N-1}, x_{2N}], x_{2N+1}],$$

segue que o T-espaço gerado por $x_0[x_1,x_2]\dots[x_{2N-1},x_{2N}]x_{2N+1}$ equivale ao T-espaço gerado por $x_0[x_1,x_2]\dots[x_{2N-1},x_{2N}]$. Assim I é gerado como T-espaço por $x_0[x_1,x_2]\dots[x_{2N-1},x_{2N}]$ e $x_0[x_1,x_2,x_3]$. Pelo Teorema 2.2.8 temos que W é gerado como T-espaço por

$$x_0[x_1,x_2,x_3],\ x_0[x_1,x_2]\dots[x_{2N-1},x_{2N}],\ x_0^p \text{ e } x_0^p q_n,\ n\geq 1.$$

Se $s\geq N$, então

$$\begin{aligned}\overline{x_0^p q_s} &= \overline{x_0^p x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}\dots x_{2N-1}^{p-1}[x_{2N-1},x_{2N}]x_{2N}^{p-1}\dots x_{2s-1}^{p-1}[x_{2s-1},x_{2s}]x_{2s}^{p-1}}\\ &= \overline{(x_0^p x_1^{p-1}\dots x_{2s}^{p-1}[x_{2N+1},x_{2N+2}]\dots[x_{2s-1},x_{2s}])[x_1,x_2]\dots[x_{2N-1},x_{2N}]}\end{aligned}$$

e, portanto, $x_0^p q_s$ pertence ao T-espaço gerado por $x_0[x_1,x_2]\dots[x_{2N-1},x_{2N}]$ e $x_0[x_1,x_2,x_3]$. Dessa forma

$$W=\langle x_0[x_1,x_2,x_3],x_0[x_1,x_2]\dots[x_{2N-1},x_{2N}],x_0^p,x_0^p q_1,\dots,x_0^p q_{N-1}\rangle^{TS}$$

é finitamente gerado como T-espaço. □

Proposição 2.2.17. *Se $p=0$, então*

$$C(G)=\langle 1,\ x_0[x_1,x_2,x_3],\ [x_1,x_2]\rangle^{TS}. \tag{2.5}$$

Demonstração. Denote por W o lado direito da igualdade (2.5). É claro que $C(G)\supseteq W$. Agora, uma vez que o corpo $\mathbb{K}$ tem característica zero, para provar a outra inclusão, basta mostrar que cada elemento multilinear em $C(G)$ está em W. Seja $f\in C(G)$ um polinômio multilinear.

Se grau $(f)=0$, então $f\in\mathbb{K}$ e portanto $f\in W$.

Se grau $(f)>0$, então pelo Lema 2.2.5 temos que $f\in T^*\subset W$. □

Estudamos o T-espaço $C(G)$ quando o corpo $\mathbb{K}$ é infinito de característica $p \neq 2$. Se $p > 2$, vimos que $C(G)$ não é finitamente gerado e se $p = 0$ encontramos um conjunto gerador com apenas 3 elementos para $C(G)$. É preciso observar que na situação em que a característica do corpo é zero, restringimos nosso estudo aos polinômios centrais multilineares, pois estes geram $C(G)$. Na sistuação em que a característica do corpo é $p > 2$ não é possível usar esse fato.

Capítulo 3

Álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{K})$

3.1 Matrizes genéricas

Nesta seção estudaremos a álgebra das matrizes genéricas. A relação existente entre ela e as identidades polinomiais para as matrizes $M_n(\mathbb{K})$ será um ponto chave na obtenção de alguns resultados necessários para a criação de um polinômio central não trivial para $M_n(\mathbb{K})$, assunto este, que será tratado na próxima seção.

De agora em diante, assumimos que o corpo $\mathbb{K}$ é de característica 0. No entanto, chamamos a atenção do leitor para o fato que muitos dos resultados aqui apresentados permanecem válidos para corpos de característica $\neq 0$. Para mais detalhes ver por exemplo [6].

Dado $n \in \mathbb{N}$, fixamos a notação Ω_n para a álgebra dos polinômios em variáveis comutativas

$$\Omega_n = \mathbb{K}[Z_n],$$

onde $Z_n = \{z_{pq}^{(i)} \;/\; p, q = 1, \ldots, n;\; i = 1, 2, \ldots\}$.

Definição 3.1.1. *As matrizes*

$$z_i = \sum_{p,q=1}^{n} z_{pq}^{(i)} e_{pq} \in M_n(\Omega_n)$$

são chamadas de matrizes genéricas $n \times n$. A álgebra gerada pelas matrizes genéricas $z_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ denotada por R_n, é chamada de álgebra das matrizes genéricas de ordem n.

Proposição 3.1.2. *Sejam C uma álgebra comutativa e $a_1, a_2, \ldots$ matrizes de $M_n(C)$. Existe um único homomorfismo*

$$\Gamma : R_n \longrightarrow M_n(C)$$

tal que $\Gamma(z_1) = a_1,\ \Gamma(z_2) = a_2, \ldots$.

Demonstração. Seja $a_i = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}^{(i)} e_{pq},\ a_{pq}^{(i)} \in C,\ i = 1, 2, \ldots$ e considere a aplicação $h : Z_n \longrightarrow C$ tal que $h(z_{pq}^{(i)}) = a_{pq}^{(i)}$. Uma vez que Ω_n é uma álgebra livre na classe das álgebras comutativas, livremente gerada por Z_n, a aplicação h pode ser estendida a um único homomorfismo $\varphi : \Omega_n \longrightarrow C$ de forma que $\varphi|_{Z_n} = h$. O homomorfismo φ induz um homomorfismo ψ de $M_n(\Omega_n)$ em $M_n(C)$ dado por

$$\psi\Big(\sum_{p,q=1}^{n} g_{pq} e_{pq}\Big) = \sum_{p,q=1}^{n} \varphi(g_{pq}) e_{pq}$$

em que $g_{pq} \in \Omega_n$. Da restrição de ψ a R_n, obtém-se o homomorfismo $\Gamma : R_n \longrightarrow M_n(C)$ em que

$$\Gamma(z_i) = \psi(z_i) = \psi\Big(\sum_{p,q=1}^{n} z_{pq}^{(i)} e_{pq}\Big)$$

$$= \sum_{p,q=1}^{n} \varphi(z_{pq}^{(i)}) e_{pq} = \sum_{p,q=1}^{n} h(z_{pq}^{(i)}) e_{pq} = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}^{(i)} e_{pq} = a_i.$$

Logo, $\Gamma(z_1) = a_1,\ \Gamma(z_2) = a_2, \ldots$. $\square$

Proposição 3.1.3. *As álgebras R_n e $\mathbb{K}\langle X\rangle/T(M_n(\mathbb{K}))$ são isomorfas.*

Demonstração. Seja $\phi : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow R_n$ o homomorfismo definido por $\phi(x_i) = z_i$. Claramente ϕ é sobrejetor. Uma vez que $\mathbb{K}\langle X\rangle/\mathrm{Ker}(\phi) \cong R_n$, para demonstrar a proposição é suficiente mostrar que $\mathrm{Ker}(\phi) = T(M_n(\mathbb{K}))$.

Seja $f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Então $\phi(f) = f(z_1, \ldots, z_m) = 0$. Dados $a_1, \ldots, a_m \in M_n(\mathbb{K})$ existe, pela Proposição 3.1.2, um único homomorfismo $\Gamma : R_n \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ em que $\Gamma(z_1) = a_1, \ \ldots, \Gamma(z_m) = a_m$. Logo,

$$f(a_1, \ldots, a_m) = \Gamma(f(z_1, \ldots, z_m)) = \Gamma(0) = 0.$$

Então $f \in T(M_n(\mathbb{K}))$ e, dessa forma, $\mathrm{Ker}(\phi) \subset T(M_n(\mathbb{K}))$.

Seja $f(x_1, \ldots, x_m) \in T(M_n(\mathbb{K}))$. Devemos mostrar que $f \in \mathrm{Ker}(\phi)$, ou seja, $\phi(f) = f(z_1, \ldots, z_m) = 0$. Suponha, por absurdo, que $f(z_1, \ldots, z_m) \neq 0$. Escrevendo

$$f(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{p,q=1}^{n} g_{pq}(t_1, \ldots, t_l)e_{pq},$$

onde $g_{pq}(t_1, \ldots, t_l) \in \Omega_n$ e $\{t_1, \ldots, t_l\} \subset Z_n$, teremos $g_{pq}(t_1, \ldots, t_l) \neq 0$ para algum par $p, q \in \{1, \ldots, n\}$. Sem perda de generalidade suponha $g_{11}(t_1, \ldots, t_l) \neq 0$. Esse polinômio pode ser escrito como

$$g_{11}(t_1, \ldots, t_l) = \sum_{a} \alpha_a t_1^{a_1} \ldots t_l^{a_l}$$

em que $\alpha_a \in \mathbb{K}$ e $\alpha_a \neq 0$ para algum $a = (a_1, \ldots, a_l)$.

Note que g_{11} não é uma identidade polinomial para $\mathbb{K}$. De fato, se g_{11} fosse uma identidade para $\mathbb{K}$, então cada componente multi-homogênea de g_{11} também seria, pois $\mathbb{K}$ é infinito. Assim, para cada a,

$$\widetilde{g}_a(t_1, \ldots, t_l) = \alpha_a t_1^{a_1} \ldots t_l^{a_l}$$

seria uma identidade para $\mathbb{K}$ e portanto $\widetilde{g}_a(1,\ldots,1) = \alpha_a = 0$. Absurdo. Dessa forma, existem $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_l \in \mathbb{K}$ tais que $g_{11}(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_l) \neq 0$.

Considere o homomorfismo $\varphi : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\varphi(t_1) = \epsilon_1,\ldots,\varphi(t_l) = \epsilon_l$. Seja $\psi : M_n(\Omega_n) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ o homomorfismo definido por

$$\psi\Big(\sum_{p,q=1}^{n} h_{pq}e_{pq}\Big) = \sum_{p,q=1}^{n} \varphi(h_{pq})e_{pq},\ h_{pq} \in \Omega_n.$$

Então,

$$\psi(f(z_1,\ldots,z_m)) = \sum_{p,q=1}^{n} \varphi(g_{pq}(t_1,\ldots,t_l))e_{pq} = \sum_{p,q=1}^{n} g_{pq}(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_l)e_{pq}.$$

Por outro lado,

$$\psi(f(z_1,\ldots,z_m)) = f(\psi(z_1),\ldots,\psi(z_m)) = 0$$

pois $\psi(z_i) \in M_n(\mathbb{K})$ para todo i e $f \in T(M_n(\mathbb{K}))$. Absurdo. Assim, $f(z_1,\ldots,z_m) = 0$ e, portanto, $T(M_n(\mathbb{K})) \subset \mathrm{Ker}(\phi)$. $\square$

Na proposição mostramos que o homorfismo sobrejetor $\phi : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow R_n$, definido por $\phi(x_i) = z_i$, tem núcleo $\mathrm{Ker}(\phi) = T(M_n(\mathbb{K}))$. Portanto:

Corolário 3.1.4. *Um polinômio $f(x_1,\ldots,x_m)$ é uma identidade para $M_n(\mathbb{K})$ se, e somente se, $f(z_1,\ldots,z_m) = 0$.*

Antes de continuar o assunto “matrizes genéricas”, faremos uma pausa e relembraremos alguns conceitos como discriminante, resultante e a relação existente entre eles. Sejam D um domínio com característica 0 e $f(x) \in D[x]$ um polinômio mônico de grau n com raízes $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ em algum corpo $L \supset D$. O discriminante de $f(x)$, denotado por $\Delta(f)$, é dado por

$$\Delta(f) = \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Observe que $f(x)$ tem raízes múltiplas se, e somente se, $\Delta(f) = 0$.

Sejam

$$\begin{cases} f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0, & a_m \neq 0, \\ g(x) = b_n x^n \;\; + b_{n-1}x^{n-1} \;\; + \ldots + b_1 x + b_0, & b_n \neq 0 \end{cases}$$

dois polinômios não constantes em $D[x]$. A resultante de $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $\mathrm{R}_{f,g}$, é o determinante da matriz $(m+n) \times (m+n)$ abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & \ldots & & \ldots & \ldots & a_0 & & \\ & a_m & \ldots & \vdots & \vdots & & \ldots & a_0 & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \\ & \vdots & & \vdots & a_m & \ldots & \ldots & \ldots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \ldots & \vdots & b_1 & b_0 & & & \\ & b_n & \ldots & \vdots & \ldots & b_1 & b_0 & & \\ & & & \vdots & \ldots & \ldots & & & \\ & & & b_n & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_0 \end{bmatrix}.$$

Na matriz existem n linhas de coeficientes a_i e m linhas de coeficientes b_j. Além disso, todas as entradas, com exceção daquelas mostradas, são formadas por zeros.

O resultado abaixo é uma reformulação de [8], página 85.

Proposição 3.1.5. *Sejam D um domínio com característica 0 e*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

um polinômio mônico em $D[x]$ de grau $n \geq 2$. Então

$$R_{f,f'} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(f),$$

onde f' é a derivada usual de f.

Aqui chamamos a atenção do leitor para o seguinte fato: pela definição de $R_{f,f'}$ e pela Proposição 3.1.5, se

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

então $\Delta(f)$ pode ser expresso em função dos coeficientes de $f(x)$, ou seja,

$$\Delta(f) = g(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}),$$

onde $g(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ é um polinômio em n variáveis comutativas (os t_i's) sobre $\mathbb{Z}$.

Exemplo 3.1.6. *Sejam $f_{z_1}(\lambda)$ e $f_a(\lambda)$ os polinômios característicos das matrizes $z_1 = (z_{pq}^{(1)})_{pq} \in R_n$ e $a = (a_{pq})_{pq} \in M_n(\mathbb{K})$ respectivamente. Então existe $\widetilde{g}\left(z_{11}^{(1)}, z_{12}^{(1)}, \ldots, z_{nn}^{(1)}\right) \in \Omega_n$ tal que*

$$\Delta(f_{z_1}) = \widetilde{g}\left(z_{11}^{(1)}, z_{12}^{(1)}, \ldots, z_{nn}^{(1)}\right).$$

Além disso,

$$\Delta(f_a) = \widetilde{g}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}).$$

De fato, como

$$f_{z_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - z_{11}^{(1)} & -z_{12}^{(1)} & \ldots & -z_{1n}^{(1)} \\ -z_{21}^{(1)} & \lambda - z_{22}^{(1)} & \ldots & -z_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -z_{n1}^{(1)} & -z_{n2}^{(1)} & \ldots & \lambda - z_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} g_i \lambda^i$$

onde $g_i = g_i(z_{11}^{(1)}, z_{12}^{(1)}, \ldots, z_{nn}^{(1)}) \in \Omega_n$, segue do comentário acima que existe um polinômio $g(t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{Z}[t_0, \ldots, t_{n-1}]$ tal que

$$\Delta(f_{z_1}) = g(g_0, \ldots, g_{n-1}).$$

Definindo $\widetilde{g} = g(g_0, \ldots, g_{n-1})$ segue o resultado.

Proposição 3.1.7. *Os autovalores da matriz genérica z_1 são dois a dois distintos.*

Demonstração. Seja $a = \sum_{p=1}^{n} \rho_p e_{pp}$ uma matriz diagonal de $M_n(\mathbb{K})$ cujos elementos da diagonal são todos distintos. Dessa forma, o polinômio característico de a não tem raízes múltiplas e, portanto, $\Delta(f_a) \neq 0$. Considere o homomorfismo $\varphi : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\varphi(z_{pq}^{(1)}) = a_{pq},\ p, q = 1, \ldots, n$. Segue do Exemplo 3.1.6 que

$$\Delta(f_{z_1}) = \widetilde{g}\Big(z_{11}^{(1)}, z_{12}^{(1)}, \ldots, z_{nn}^{(1)}\Big) \quad \text{e} \quad \Delta(f_a) = \widetilde{g}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}).$$

Então

$$\begin{aligned} \varphi\Big(\Delta(f_{z_1})\Big) = \varphi\Big(\widetilde{g}\Big(z_{11}^{(1)}, z_{12}^{(1)}, \ldots, z_{nn}^{(1)}\Big)\Big) &= \widetilde{g}\Big(\varphi\Big(z_{11}^{(1)}\Big), \varphi\Big(z_{12}^{(1)}\Big), \ldots, \varphi\Big(z_{nn}^{(1)}\Big)\Big) \\ &= \widetilde{g}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}) = \Delta(f_a) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo $\Delta(f_{z_1}) \neq 0$ e, portanto, f_{z_1} não tem raízes múltiplas. □

Proposição 3.1.8. *Sejam $w_1 = \sum_{p=1}^{n} z_{pp}^{(1)} e_{pp}$ e $w_i = z_i$ para $i > 1$. A álgebra W_n gerada por $w_1, w_2, \ldots$ é isomorfa a álgebra de matrizes genéricas R_n.*

Demonstração. Seja $\mathbb{F}$ o fecho algébrico do corpo de frações da álgebra polinomial Ω_n. Uma vez que a matriz genérica z_1 não tem autovalores múltiplos, existe uma matriz v com entradas em $\mathbb{F}$ tal que $v^{-1} z_1 v$ é diagonal.

Seja $u_i = v^{-1} z_i v,\ i = 1, 2, \ldots$. Denote por U_n a $\mathbb{K}$-álgebra de $M_n(\mathbb{F})$ gerada por $u_1, u_2, \ldots$. De acordo com a Proposição 3.1.2 existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\varphi : R_n \longrightarrow M_n(\mathbb{F})$ tal que $\varphi(z_i) = u_i$.

Seja $r \in R_n$. Podemos escrever $r = \sum_i \alpha_i z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_k},\ \alpha_i \in \mathbb{K}$. Logo

$$\varphi(r) = \sum_i \alpha_i \varphi(z_{i_1}) \varphi(z_{i_2}) \ldots \varphi(z_{i_k}) = \sum_i \alpha_i u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_k}$$

$$= \sum_i \alpha_i v^{-1} z_{i_1} v v^{-1} z_{i_2} v v^{-1} z_{i_3} v \dots v^{-1} z_{i_k} v = \sum_i \alpha_i v^{-1} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k} v = v^{-1} r v.$$

Dessa forma se $r \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ então $v^{-1}rv = 0$ e, portanto, $r = 0$. Assim φ é injetora e uma vez que a imagem de φ é U_n, então φ é um isomorfismo de R_n em U_n.

Considere o homomorfismo $\phi : \Omega_n \longrightarrow \Omega_n$ definido por

$$\begin{cases} \phi(z_{pp}^{(1)}) = z_{pp}^{(1)}, & \\ \phi(z_{pq}^{(1)}) = 0 & \text{se } \; p \neq q, \\ \phi(z_{pq}^{(i)}) = z_{pq}^{(i)} & \text{se } \; i > 1. \end{cases}$$

Ele induz o homomorfismo $\psi : M_n(\Omega_n) \longrightarrow M_n(\Omega_n)$ definido por

$$\psi\Big(\sum_{p,q=1}^{n} g_{pq} e_{pq}\Big) = \sum_{p,q=1}^{n} \phi(g_{pq}) e_{pq}.$$

Se Γ_1 é a restrição de ψ a R_n, então a imagem de Γ_1 é W_n. Assim, Γ_1 é um homomorfismo sobrejetor de R_n em W_n onde $\Gamma_1(z_i) = w_i$.

Suponha $u_i = \displaystyle\sum_{p,q=1}^{n} u_{pq}^{(i)} e_{pq}$, onde $u_{pq}^{(i)} \in \mathbb{F}$, e considere o homomorfismo $\widetilde{\phi} : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{F}$ definido por $\widetilde{\phi}(z_{pq}^{(i)}) = u_{pq}^{(i)}$. Esse homomorfismo induz o homomorfismo $\widetilde{\psi} : M_n(\Omega_n) \longrightarrow M_n(\mathbb{F})$ definido da forma usual. Se Γ_2 é a restrição de $\widetilde{\psi}$ a W_n, então Γ_2 é um homomorfismo sobrejetor de W_n em U_n onde $\Gamma_2(w_i) = u_i$.

Os homomorfismos obtidos acima podem ser dispostos no diagrama

$$\begin{tikzcd} R_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Gamma_1"'] & U_n \\ W_n \arrow[ur, "\Gamma_2"'] & \end{tikzcd}$$

Temos $\varphi = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$. Como φ é um isomorfismo, temos que Γ_1 é injetiva e portanto um isomorfismo. $\square$

Proposição 3.1.9. *Seja $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ um polinômio multilinear nas variáveis $x_2, \ldots, x_m$. Se $f(w_1, e_{i_2j_2}, \ldots, e_{i_mj_m}) = 0$ para quaisquer $e_{i_qj_q}$, então f é uma identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$.*

Demonstração. Como $f(w_1, e_{i_2j_2}, \ldots, e_{i_mj_m}) = 0$ para quaisquer $e_{i_qj_q}$ e f é multilinear nas variáveis $x_2, \ldots, x_m$, temos que $f(w_1, w_2, \ldots, w_m) = 0$. Pelo isomorfismo Γ_1 da proposição anterior segue que $f(z_1, z_2, \ldots, z_m) = 0$. Pelo Corolário 3.1.4 concluímos o resultado. □

Seja J o ideal de Ω_n gerado por $h = z_{11}^{(1)} + \ldots + z_{nn}^{(1)}$. Vamos denotar por $\overline{p}$ o elemento $p + J$ do quociente Ω_n/J. Sejam

$$\overline{x}_i = \sum_{p,q=1}^{n} \overline{z_{pq}^{(i)}} e_{pq} \in M_n(\Omega/J)$$

e $\overline{R}_n$ a álgebra gerada por $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots$. Considere agora as matrizes de $M_n(\Omega/J)$ dadas por

$$\overline{w}_1 = \sum_{p=1}^{n} \overline{z_{pp}^{(1)}} e_{pp} \quad \text{e} \quad \overline{w}_i = \overline{x}_i \ (i > 1)$$

e denote por $\overline{W}_n$ a álgebra gerada por elas.

Denotaremos por sl_n o conjunto das matrizes em $M_n(\mathbb{K})$ com traço 0.

Proposição 3.1.10. *Sejam $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, $b_1 \in sl_n$, $b_2, \ldots, b_m \in M_n(\mathbb{K})$. Se $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m) = 0$, então $f(b_1, b_2, \ldots, b_m) = 0$.*

Demonstração. Suponha $b_i = \sum_{p,q=1}^{n} b_{pq}^{(i)} e_{pq}$, onde $b_{pq}^{(i)} \in \mathbb{K}$. Considere o homomorfismo $\varphi : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por $\varphi(z_{pq}^{(i)}) = b_{pq}^{(i)}$ para todos i, p, q. Uma vez que $b_1 \in sl_n$, temos $\varphi(h) = 0$ e, portanto, $J = \langle h\rangle \subset \mathrm{Ker}\varphi$. Dessa forma, o homomorfismo $\varphi^* : \Omega_n/J \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $\varphi^*(\overline{g}) = \varphi(g)$ está bem definido.

Seja ψ o homomorfismo de $M_n(\Omega_n/J)$ em $M_n(\mathbb{K})$ definido por

$$\psi\Big(\sum_{p,q=1}^{n} \overline{g_{pq}}e_{pq}\Big) = \sum_{p,q=1}^{n} \varphi(g_{pq})e_{pq}.$$

Observe que $\psi(\overline{x}_i) = b_i$ para todo i. Logo, se $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m) = 0$, então

$$f(b_1, b_2, \ldots, b_m) = \psi(f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)) = 0.$$

$\square$

Lema 3.1.11. *A matriz $\overline{x}_1$ tem autovalores dois a dois distintos.*

Demonstração. Considere a matriz

$$a = \left(\sum_{p=1}^{n-1} pe_{pp}\right) - (1 + 2 + \ldots + n - 1)e_{nn}.$$

Observe que a é uma matriz com autovalores distintos e com traço zero.

Denotando por f_b o polinômio característico de uma matriz b, suponha que $\Delta(f_{\overline{x}_1}) = \overline{0}$. Uma vez que $\Delta(f_{\overline{x}_1}) = \overline{\Delta(f_{z_1})}$, temos que $\Delta(f_{z_1}) \in J$. Portanto, $\Delta(f_{z_1}) = (z_{11}^{(1)} + \ldots + z_{nn}^{(1)})g$, onde $g \in \Omega_n$. Seja $\varphi : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{K}$ o homomorfismo definido por $\varphi(z_{pq}^{(1)}) = a_{pq}$, onde $a = (a_{pq})_{pq}$ é a matriz acima. De

$$\Delta(f_a) = \varphi(\Delta(f_{z_1})) = (a_{11} + \ldots + a_{nn})\varphi(g) = 0$$

temos um absurdo, pois a tem autovalores distintos. Portanto $\Delta(f_{\overline{x}_1}) \neq \overline{0}$ e a demonstração está concluída. $\square$

Proposição 3.1.12. *Seja $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Se*

$$f(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_m) = 0,$$

então $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m) = 0$.

Demonstração. Seja $\mathbb{A}$ o fecho algébrico do corpo de frações de Ω_n/J. Uma vez que a matriz $\overline{x}_1$ não tem autovalores múltiplos, existe uma matriz v com entradas em $\mathbb{A}$ tal que $v^{-1}\overline{x}_1 v$ é diagonal. Seja $u_i = v^{-1}\overline{x}_i v,\ i = 1, 2, \ldots$. Denote por U_n a $\mathbb{K}$-álgebra de $M_n(\mathbb{A})$ gerada por $u_1, u_2, \ldots$.

Seja $\psi_1 : M_n(\Omega_n/J) \to M_n(\mathbb{A})$ o homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras definido por

$$\psi_1(b) = v^{-1}bv.$$

Se Γ_1 é a restrição de ψ_1 a $\overline{R}_n$, então é fácil mostrar que Γ_1 é um isomorfismo de $\overline{R}_n$ em U_n onde $\Gamma_1(\overline{x}_i) = u_i$.

Seja $\varphi : \Omega_n \to \Omega_n/J$ o homomorfismo definido por

$$\begin{cases} \varphi(z_{pp}^{(1)}) = \overline{z_{pp}^{(1)}}, & \\ \varphi(z_{pq}^{(1)}) = \overline{0} & \text{se } \ p \neq q, \\ \varphi(z_{pq}^{(i)}) = \overline{z_{pq}^{(i)}} & \text{se } \ i > 1. \end{cases}$$

Como $J \subset ker\,(\varphi)$ temos um homomorfismo induzido $\varphi^* : \Omega_n/J \to \Omega_n/J$ definido por

$$\varphi^*(\overline{a}) = \varphi(a),\ a \in \Omega_n.$$

Por sua vez, esse homomorfismo induz um homomorfismo $\psi_2 : M_n(\Omega_n/J) \to M_n(\Omega_n/J)$ definido por

$$\psi_2((\overline{a_{pq}})_{pq}) = (\varphi^*(\overline{a_{pq}}))_{pq}$$

Denotando por Γ_2 a restrição de ψ_2 a $\overline{R_n}$, temos que Γ_2 é um homomorfismo sobrejetor de $\overline{R}_n$ em $\overline{W}_n$ que satisfaz $\Gamma_2(\overline{x}_i) = \overline{w}_i$ para todo i.

Seja $\phi : \Omega_n \to \mathbb{A}$ o homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras definido por

$$\phi(z_{pq}^{(i)}) = u_{pq}^{(i)},$$

onde $u_{pq}^{(i)}$ é a entrada pq da matriz u_i. Como

$$\phi(h) = u_{11}^{(1)} + \ldots + u_{nn}^{(1)} = tr\,(u_1) = tr\,(\overline{x_1}) = \overline{0},$$

temos que $J \subset ker\,(\phi)$. Assim, está bem definido o homomorfismo induzido $\phi^* : \Omega_n/J \to \mathbb{A}$ definido por

$$\phi^*(\overline{a}) = \phi(a),\ a \in \Omega_n.$$

Esse homomorfismo induz um homomorfismo $\psi_3 : M_n(\Omega_n/J) \to M_n(\mathbb{A})$ definido por

$$\psi_3((\overline{a_{pq}})_{pq}) = (\phi^*(\overline{a_{pq}}))_{pq}$$

Denotando por Γ_3 a restrição de ψ_3 a $\overline{W}_n$, temos que Γ_3 é um homomorfismo sobrejetor de $\overline{W}_n$ em U_n que satisfaz $\Gamma_3(\overline{w}_i) = u_i$ para todo i.

$$\begin{tikzcd} \overline{R}_n \arrow[r, "\Gamma_1"] \arrow[d, "\Gamma_2"'] & U_n \\ \overline{W}_n \arrow[ur, "\Gamma_3"'] & \end{tikzcd}$$

Temos $\Gamma_1 = \Gamma_3 \circ \Gamma_2$. Uma vez que Γ_1 é um isomorfismo, segue que Γ_2 é injetiva e portanto um isomorfismo de $\overline{R}_n$ em $\overline{W}_n$.

Logo, se $f(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_m) = 0$, então

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m) = \Gamma_2^{-1}(f(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_m)) = 0.$$

$\square$

Proposição 3.1.13. *Seja $f(x, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{K}\langle x, y_1, \ldots, y_m\rangle$ um polinômio multilinear em $y_1, \ldots, y_m$ e sejam $a \in sl_n$, $b_1, \ldots, b_m \in M_n(\mathbb{K})$. Se*

$$f(\overline{w}_1, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m) = 0$$

para quaisquer matrizes elementares $\overline{y}_q = e_{i_q j_q}$, então $f(a, b_1, \ldots, b_m) = 0$.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.10, devemos mostrar que

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m) = 0.$$

Agora, essa igualdade é obtida se provarmos que $f(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_m) = 0$, ver Proposição 3.1.12. Pois bem, como f é multilinear em $y_1, \ldots, y_m$, segue que $f(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_m)$ é uma combinação linear (coeficientes em Ω_n/J) de

$$f(\overline{w}_1, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m) = 0,$$

onde os $\overline{y}_q$'s são matrizes elementares. Assim, o resultado está provado. □

3.2 Um polinômio central para $M_n(\mathbb{K})$

Nesta seção encontraremos uma identidade polinomial w essencialmente fraca para as matrizes $M_n(\mathbb{K})$, onde $n \geq 3$. Depois, usando um resultado de Razmyslov, a partir de w exibiremos um polinômio central não trivial para $M_n(\mathbb{K})$ de grau $(n-1)^2+4$, onde $n \geq 3$. Os resultados aqui apresentados encontram-se em [5]. Ao longo de toda a seção, $\mathbb{K}$ será um corpo de característica zero.

Seja $\phi : \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_{n+1}] \to \mathbb{K}\langle x, y_1, \ldots, y_n\rangle$ a transformação linear definida da seguinte forma: se

$$g(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \sum_{a=(a_1,\ldots,a_{n+1})} \alpha_a t_1^{a_1} \ldots t_{n+1}^{a_{n+1}},\ \alpha_a \in \mathbb{K},$$

então

$$\phi(g)(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{a=(a_1,\ldots,a_{n+1})} \alpha_a x^{a_1} y_1 x^{a_2} y_2 x^{a_3} y_3 \ldots x^{a_n} y_n x^{a_{n+1}}.$$

Considere um polinômio $f = f(x, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}\langle x, y_1, \ldots, y_n\rangle$ multilinear em $y_1, \ldots, y_n$. Podemos escrevê-lo na forma $f = \sum\limits_{r=(r_1,\ldots,r_n)} f_r(x, y_1, \ldots, y_n)$ em que

$$f_r(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_a \alpha_{r,a} x^{a_1} y_{r_1} x^{a_2} y_{r_2} x^{a_3} y_{r_3} \ldots x^{a_n} y_{r_n} x^{a_{n+1}}.$$

Observe que f_r é obtido pela soma de todos os monômios de f cujas variáveis $y_1, \ldots, y_n$ aparecem na ordem $y_{r_1}, \ldots, y_{r_n}$. Claramente, para cada f_r existe $g_r(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_{n+1}]$ tal que

$$f = \sum_{r=(r_1,\ldots,r_n)} \phi(g_r)(x, y_{r_1}, \ldots, y_{r_n}).$$

De agora em diante usaremos a notação

$$\overline{x} = \sum_{p=1}^{n} \rho_p e_{pp}$$

para uma matriz diagonal cujas variáveis $\rho_1, \ldots, \rho_n$ são comutativas. Além disso, $\overline{y}_q$ será uma matriz elementar $e_{i_q j_q}$ qualquer.

Lema 3.2.1. *Se* $g(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in K[t_1, \ldots, t_{n+1}]$, *então*

$$\phi(g)(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = g(\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_n}, \rho_{j_n}) e_{i_1 j_1} \ldots e_{i_n j_n}.$$

Demonstração. Uma vez que

$$\overline{x}^m = \Big(\sum_{p=1}^{n} \rho_p e_{pp}\Big)^m = \sum_{p=1}^{n} \rho_p^m e_{pp},$$

então

$$\phi(g)(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = \sum_{a=(a_1,\ldots,a_{n+1})} \alpha_a \overline{x}^{a_1} \overline{y}_1 \overline{x}^{a_2} \overline{y}_2 \overline{x}^{a_3} \overline{y}_3 \ldots \overline{x}^{a_n} \overline{y}_n \overline{x}^{a_{n+1}}$$

$$= \sum_{a=(a_1,\dots,a_{n+1})} \alpha_a \underbrace{\Big(\sum_{p=1}^{n} \rho_p^{a_1} e_{pp}\Big) e_{i_1 j_1}}_{\rho_{i_1}^{a_1} e_{i_1 j_1}} \dots \underbrace{\underbrace{\Big(\sum_{p=1}^{n} \rho_p^{a_n} e_{pp}\Big) e_{i_n j_n}}_{\rho_{i_n}^{a_n} e_{i_n j_n}} \Big(\sum_{p=1}^{n} \rho_p^{a_{n+1}} e_{pp}\Big)}_{\rho_{i_n}^{a_n} \rho_{j_n}^{a_{n+1}} e_{i_n j_n}}$$

$$= \sum_{a=(a_1,\dots,a_{n+1})} \alpha_a \rho_{i_1}^{a_1} \rho_{i_2}^{a_2} \dots \rho_{i_n}^{a_n} \rho_{j_n}^{a_{n+1}} e_{i_1 j_1} \dots e_{i_n j_n}$$

$$= g(\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \dots, \rho_{i_n}, \rho_{j_n}) e_{i_1 j_1} \dots e_{i_n j_n}.$$

□

Uma consequência direta desse lema é o próximo corolário.

Corolário 3.2.2. *Se $f(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}\langle x, y_1, \dots, y_n \rangle$ é um polinômio multilinear nas variáveis $y_1, \dots, y_n$, então*

$$f(\overline{x}, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n) = \sum_r g_r(\rho_{i_{r_1}}, \rho_{i_{r_2}}, \dots, \rho_{i_{r_n}}, \rho_{j_{r_n}}) e_{i_{r_1} j_{r_1}} \dots e_{i_{r_n} j_{r_n}}.$$

Lema 3.2.3. *Seja $d = (d_1, d_2, \dots, d_{n-2})$, onde $d_1, d_2, \dots, d_{n-2} \in \mathbb{N}$. Defina $g_d \in \mathbb{K}[t_1, t_2, \dots, t_{n+1}]$ por*

$$g_d(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) = \sum_{1 \le k_1 < \dots < k_{n-2} \le n+1} (-1)^{\lambda_k} \begin{vmatrix} t_{k_1}^{d_1} & t_{k_2}^{d_1} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_1} \\ t_{k_1}^{d_2} & t_{k_2}^{d_2} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{k_1}^{d_{n-2}} & t_{k_2}^{d_{n-2}} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_{n-2}} \end{vmatrix},$$

onde $k = (k_1, \dots, k_{n-2})$ e $\lambda_k = \sum_{i=1}^{n-2} (k_i - 1)$. Se

$$f_d(x, y_1, \dots, y_n) = s_{2n-2}(x^{d_1}, x^{d_2}, \dots, x^{d_{n-2}}, y_1, \dots, y_n),$$

então

$$f_d(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma) g_d(\rho_{i_{\sigma(1)}}, \rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) \overline{y}_{\sigma(1)} \cdots \overline{y}_{\sigma(n)}.$$

Em particular, $g_d = 0$ *se* $d_i = d_j$ *para* $i \neq j$.

Demonstração. Primeiro vamos analisar os monômios que formam f_d. Se um monômio m aparece na decomposição de f_d com coeficiente não nulo, então as variáveis y_j devem separar as potências x^{d_i} em m. De fato, os monômios

$$m_1 x^{d_i} x^{d_j} m_2 \quad \text{e} \quad m_1 x^{d_j} x^{d_i} m_2$$

são iguais e aparecem com coeficientes opostos em f_d. Logo se anulam. Assim, na formação de m não podem ocorrer duas potências x^{d_i} adjacentes.

Seja $k = (k_1, \ldots, k_{n-2})$, onde $1 \leq k_1 < \ldots < k_{n-2} \leq n+1$, e considere

$$\widetilde{g}_d(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \sum_k \left(\sum_{\tau \in S_{n-2}} t_{k_1}^{d_{\tau(1)}} \cdots t_{k_{n-2}}^{d_{\tau(n-2)}} \right).$$

Então $\phi(\widetilde{g}_d) = \phi(\widetilde{g}_d)(x, y_1, \ldots, y_n)$ dada por

$$\phi(\widetilde{g}_d) = \sum_k \left(\sum_{\tau \in S_{n-2}} y_1 \cdots y_{k_1 - 1} x^{d_{\tau(1)}} y_{k_1} \cdots y_{k_2 - 1} x^{d_{\tau(2)}} \cdots x^{d_{\tau(n-2)}} y_{k_{n-2}} \cdots y_n \right)$$

insere de todas as maneiras possíveis as potências x^{d_i} entre $y_1, \ldots, y_n$ (nessa ordem) de forma que duas dessas potências não sejam adjacentes.

Agora queremos que $\phi(\widetilde{g}_d)$ corresponda as parcelas de f_d em que $y_1, \ldots, y_n$ apareçam nessa ordem. Para tanto devemos reformular a definição de $\widetilde{g}_d$ de forma a considerar o sinal de τ e o número de inversões de $x^{d_1}, \ldots, x^{d_{n-2}}$ em relação a $y_1, \ldots, y_n$ que ocorrem no monômio

$$y_1 \cdots y_{k_1 - 1} x^{d_{\tau(1)}} y_{k_1} \cdots y_{k_2 - 1} x^{d_{\tau(2)}} \cdots x^{d_{\tau(n-2)}} y_{k_{n-2}} \cdots y_n.$$

Seja λ_k esse número. Uma vez que $k_i - 1$ é o número de y's que antecedem $x^{d_{\tau(i)}}$ então $\lambda_k = \sum_{i=1}^{n-2}(k_i - 1)$. Assim

$$g_d(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \sum_k (-1)^{\lambda_k} \left(\sum_{\tau \in S_{n-2}} (\text{sign}\tau) t_{k_1}^{d_{\tau(1)}} \ldots t_{k_{n-2}}^{d_{\tau(n-2)}} \right)$$

é a definição apropriada. Dessa forma, $\phi(g_d)(x, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)})$, $\sigma \in S_n$, corresponde a todas as parcelas de f_d em que as variáveis y's aparecem na ordem $y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}$. Portanto,

$$f_d = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma) \phi(g_d)(x, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)})$$

e uma vez que

$$\phi(g_d)(\overline{x}, \overline{y}_{\sigma(1)}, \ldots, \overline{y}_{\sigma(n)}) = g_d(\rho_{i_{\sigma(1)}}, \rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) \overline{y}_{\sigma(1)} \ldots \overline{y}_{\sigma(n)}$$

a demonstração está completa. $\square$

De agora em diante, usaremos a notação $g_d(t_1, \ldots, t_{n+1})$ especificamente para o polinômio do Lema 3.2.3.

Lema 3.2.4. *Se g'_d é a componente homogênea de grau $(d_1 + \ldots + d_{n-2}) - 1$ de $g_d(1 + t_1, \ldots, 1 + t_{n+1})$, então*

$$g'_d = g'_d(t_1, \ldots, t_{n+1}) = d_1\, g_{(d_1-1, d_2, \ldots, d_{n-2})}(t_1, \ldots, t_{n+1}) +$$

$$+ d_2\, g_{(d_1, d_2-1, \ldots, d_{n-2})}(t_1, \ldots, t_{n+1}) + \ldots + d_{n-2}\, g_{(d_1, d_2, \ldots, d_{n-2}-1)}(t_1, \ldots, t_{n+1}).$$

Demonstração. Pelo lema anterior, temos que

$$g_d(1 + t_1, \ldots, 1 + t_{n+1}) = \sum_k (-1)^{\lambda_k} \begin{vmatrix} (1 + t_{k_1})^{d_1} & \ldots & (1 + t_{k_{n-2}})^{d_1} \\ (1 + t_{k_1})^{d_2} & \ldots & (1 + t_{k_{n-2}})^{d_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (1 + t_{k_1})^{d_{n-2}} & \ldots & (1 + t_{k_{n-2}})^{d_{n-2}} \end{vmatrix}.$$

Uma vez que

$$(1+t_i)^{d_l} = t_i^{d_l} + d_l t_i^{d_l-1} + \sum_{j=2}^{d_l} \binom{d_l}{j} t_i^{d_l-j},$$

então

$$g'_d(t_1,\ldots,t_{n+1}) = \sum_k (-1)^{\lambda_k} \begin{vmatrix} d_1 t_{k_1}^{d_1-1} & d_1 t_{k_2}^{d_1-1} & \ldots & d_1 t_{k_{n-2}}^{d_1-1} \\ t_{k_1}^{d_2} & t_{k_2}^{d_2} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{k_1}^{d_{n-2}} & t_{k_2}^{d_{n-2}} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_{n-2}} \end{vmatrix} +$$

$$+ \sum_k (-1)^{\lambda_k} \begin{vmatrix} t_{k_1}^{d_1} & t_{k_2}^{d_1} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_1} \\ d_2 t_{k_1}^{d_2-1} & d_2 t_{k_2}^{d_2-1} & \ldots & d_2 t_{k_{n-2}}^{d_2-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{k_1}^{d_{n-2}} & t_{k_2}^{d_{n-2}} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_{n-2}} \end{vmatrix} +$$

$$+ \ldots + \sum_k (-1)^{\lambda_k} \begin{vmatrix} t_{k_1}^{d_1} & t_{k_2}^{d_1} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_1} \\ t_{k_1}^{d_2} & t_{k_2}^{d_2} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n-2} t_{k_1}^{d_{n-2}-1} & d_{n-2} t_{k_2}^{d_{n-2}-1} & \ldots & d_{n-2} t_{k_{n-2}}^{d_{n-2}-1} \end{vmatrix} =$$

$$= d_1\, g_{(d_1-1,d_2,\ldots,d_{n-2})}(t_1,\ldots,t_{n+1}) + d_2\, g_{(d_1,d_2-1,\ldots,d_{n-2})}(t_1,\ldots,t_{n+1}) +$$

$$+ \ldots + d_{n-2}\, g_{(d_1 d_2,\ldots,d_{n-2}-1)}(t_1,\ldots,t_{n+1})$$

□

Lema 3.2.5. *Se $1 \le i \le n$, então $g_d(t_1,\ldots,t_{i-1},0,0,t_{i+2},\ldots,t_{n+1})$ é igual,* *a menos de um sinal, ao determinante*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1^{d_1} & \dots & t_{i-1}^{d_1} & t_{i+2}^{d_1} & \dots & t_{n+1}^{d_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{d_{n-2}} & \dots & t_{i-1}^{d_{n-2}} & t_{i+2}^{d_{n-2}} & \dots & t_{n+1}^{d_{n-2}} \end{vmatrix}.$$

Demonstração. Seja $k^{(q)} = (1, \dots, i-1, i+2, \dots, q-1, q+1, \dots, n+1)$, onde $q \neq i, i+1$. Se $\Delta_{i_{(1,q)}}$ é o determinante que se obtém de Δ_i eliminando a 1ª linha e a q-ésima coluna, então

$$\Delta_{i_{(1,q)}} = \sum_{\tau \in S_{n-2}} (\mathrm{sign}\tau) t_{k_1}^{d_{\tau(1)}} \dots t_{k_{n-2}}^{d_{\tau(n-2)}},$$

onde $(k_1, \dots, k_{n-2}) = k^{(q)}$. Além disso,

$$\Delta_i = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i, i+1}}^{n+1} (-1)^{1+q} \Delta_{i_{(1,q)}}.$$

Por outro lado,

$$g_d(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, 0, t_{i+2}, \dots, t_{n+1}) = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i, i+1}}^{n+1} (-1)^{\lambda_{k^{(q)}}} \Delta_{i_{(1,q)}}.$$

Mostraremos que $(-1)^{1+q} = (-1)^{\lambda_{k^{(q)}}}$ para todo q ou $(-1)^{1+q} = -(-1)^{\lambda_{k^{(q)}}}$ para todo q. Temos

$$\lambda_{k^{(q)}} = (1 + 2 + \dots + n + n + 1) - i - (i + 1) - q - (n - 2) = \alpha + 2(1 - i) - q,$$

onde $\alpha = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Se α é par, então

$$(-1)^{\lambda_{k^{(q)}}} = (-1)^{\alpha + 2(1-i) - q} = (-1)^{-q} = (-1)^q$$

e portanto $(-1)^{1+q} = -(-1)^{\lambda_{k(q)}}$ para todo q. Deixamos para o leitor a verificação de que se α é ímpar, então $(-1)^{1+q} = (-1)^{\lambda_{k(q)}}$ para todo q. Concluímos assim a demonstração. $\square$

Lema 3.2.6. *Vale a igualdade*

$$g_d(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1}) + g_d(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, t_i, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1})$$

$$= 2g_d(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, 0, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1}).$$

Além disso,

$$g_d(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n) = g_d(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, 0, t_{i+1}, \ldots, t_n).$$

Demonstração. Vamos considerar o caso $i = 1$; a prova para um i arbitrário é similar. Seja $k = (k_1, \ldots, k_{n-2})$ em que $1 \leq k_1 < \ldots < k_{n-2} \leq n+1$. Então

$$g_d(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \sum_k (-1)^{\lambda_k} \begin{vmatrix} t_{k_1}^{d_1} & t_{k_2}^{d_1} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_1} \\ t_{k_1}^{d_2} & t_{k_2}^{d_2} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{k_1}^{d_{n-2}} & t_{k_2}^{d_{n-2}} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_{n-2}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{k \\ k_1=1 \\ k_2=2}} (-1)^{\lambda_k} \underbrace{\begin{vmatrix} t_1^{d_1} & t_2^{d_1} & t_{k_3}^{d_1} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_1} \\ t_1^{d_2} & t_2^{d_2} & t_{k_3}^{d_2} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{d_{n-2}} & t_2^{d_{n-2}} & t_{k_3}^{d_{n-2}} & \ldots & t_{k_{n-2}}^{d_{n-2}} \end{vmatrix}}_{\Lambda_k}$$

$$+\underbrace{\sum_{\substack{k\\k_1>2}}(-1)^{\lambda_k}\begin{vmatrix} t_{k_1}^{d_1} & t_{k_2}^{d_1} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_1}\\ t_{k_1}^{d_2} & t_{k_2}^{d_2} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_{k_1}^{d_{n-2}} & t_{k_2}^{d_{n-2}} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_{n-2}} \end{vmatrix}}_{g_d(0,0,t_3,\dots,t_{n+1})}$$

$$+\sum_{\substack{k\\k_1=1\\k_2>2}}(-1)^{\lambda_k}\underbrace{\begin{vmatrix} t_{1}^{d_1} & t_{k_2}^{d_1} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_1}\\ t_{1}^{d_2} & t_{k_2}^{d_2} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_{1}^{d_{n-2}} & t_{k_2}^{d_{n-2}} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_{n-2}} \end{vmatrix}}_{\Lambda_k^{(1)}}$$

$$+\sum_{\substack{k\\k_1=2}}(-1)^{\lambda_k}\underbrace{\begin{vmatrix} t_{2}^{d_1} & t_{k_2}^{d_1} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_1}\\ t_{2}^{d_2} & t_{k_2}^{d_2} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_{2}^{d_{n-2}} & t_{k_2}^{d_{n-2}} & \dots & t_{k_{n-2}}^{d_{n-2}} \end{vmatrix}}_{\Lambda_k^{(2)}}$$

Fixe $k_2,\dots,k_{n-2}$ tal que $2 < k_2 < k_3 < \dots < k_{n-2}$. Para

$$k' = (1, k_2, k_3, \dots, k_{n-2}) \ \text{ e } \ k'' = (2, k_2, k_3, \dots, k_{n-2})$$

temos $\lambda_{k''} = 1 + \lambda_{k'}$ e, portanto, $(-1)^{\lambda_{k''}} = -(-1)^{\lambda_{k'}}$. Assim, os dois últimos somatórios podem ser escritos como

$$\sum_{k'}(-1)^{\lambda_{k'}}\Lambda_{k'}^{(1)} + \sum_{k''}(-1)^{\lambda_{k''}}\Lambda_{k''}^{(2)} = \sum_{k'}(-1)^{\lambda_{k'}}\Lambda_{k'}^{(1)} - \sum_{k''}(-1)^{\lambda_{k'}}\Lambda_{k''}^{(2)}$$

e portanto

$$g_d(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n+1}) = \sum_{\substack{k\\k_1=1\\k_2=2}}(-1)^{\lambda_k}\Lambda_k + g_d(0, 0, t_3, \dots, t_{n+1})$$

$$+\sum_{2<k_2<\ldots<k_{n-2}} (-1)^{\lambda_{k'}} \left(\Lambda^{(1)}_{k'} - \Lambda^{(2)}_{k''}\right).$$

Usando propriedades elementares dos determinantes, temos que

$$g_d(t_2,t_1,t_3,\ldots,t_{n+1}) = -\sum_{\substack{k\\k_1=1\\k_2=2}} (-1)^{\lambda_k}\Lambda_k + g_d(0,0,t_3,\ldots,t_{n+1})$$

$$+\sum_{2<k_2<\ldots<k_{n-2}} (-1)^{\lambda_{k'}} \left(\Lambda^{(2)}_{k''} - \Lambda^{(1)}_{k'}\right).$$

Portanto,

$$g_d(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_{n+1}) + g_d(t_2,t_1,t_3,\ldots,t_{n+1}) = 2g_d(0,0,t_3,\ldots,t_{n+1}).$$

O segundo resultado do lema segue imediatamente do primeiro trocando t_{i+1} por t_i. $\square$

Lema 3.2.7. *Seja $h_l(t_1,\ldots,t_m)$ a função simétrica completa de grau l nas variáveis comutativas $t_1,\ldots,t_m$, isto é,*

$$h_l = \sum_{i_1\le\ldots\le i_l} t_{i_1}\ldots t_{i_l}.$$

Para $r \geq 0$ considere a matriz $m\times m$

$$D_{mr} = D_{mr}(t_1,\ldots,t_m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_m \\ t_1^2 & t_2^2 & \ldots & t_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{m-2} & t_2^{m-2} & \ldots & t_m^{m-2} \\ t_1^{m-1+r} & t_2^{m-1+r} & \ldots & t_m^{m-1+r} \end{pmatrix}.$$

Então

$$det(D_{mr}) = h_r(t_1,\ldots,t_m)\prod_{1\le p<q\le m}(t_q - t_p).$$

A demonstração do lema é deixada para o leitor e pode ser encontrada em [5]. Observe que o determinante da matriz D_{mr} é o determinante da matriz de Vandermonde D_{m0} a menos da função h_r.

Lema 3.2.8. *Sejam* $c_1, \ldots, c_n \geq 0$, $d_0 \geq 0$ *e* $d_1, \ldots, d_{n-2} \geq 1$. *Denote* $d = (d_1, \ldots, d_{n-2})$. *Temos que*

$$\overline{x}^{d_0} s_{2n-2}(\overline{x}^{d_1}, \ldots, \overline{x}^{d_{n-2}}, \overline{y}_1\overline{x}^{c_1}, \ldots, \overline{y}_n\overline{x}^{c_n}) =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} (\text{sign}\sigma) g_d(\rho_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) \rho_{i_{\sigma(1)}}^{d_0} \rho_{i_{\sigma(2)}}^{c_{\sigma(1)}} \ldots \rho_{i_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n-1)}} \rho_{j_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n)}} \overline{y}_{\sigma(1)} \ldots \overline{y}_{\sigma(n)}.$$

Demonstração. Se $\overline{\gamma}_q = \overline{y}_q\overline{x}^{c_q}$, então $\overline{\gamma}_q = \rho_{j_q}^{c_q}\overline{y}_q$. Assim, pelo Lema 3.2.3 temos

$$s_{2n-2}(\overline{x}^{d_1}, \ldots, \overline{x}^{d_{n-2}}, \overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_n) = (\rho_{j_1}^{c_1} \ldots \rho_{j_n}^{c_n}) s_{2n-2}(\overline{x}^{d_1}, \ldots, \overline{x}^{d_{n-2}}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$$

$$= (\rho_{j_1}^{c_1} \ldots \rho_{j_n}^{c_n}) \sum_{\sigma\in S_n} (\text{sign}\sigma) g_d(\rho_{i_{\sigma(1)}}, \rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) \overline{y}_{\sigma(1)} \ldots \overline{y}_{\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} (\text{sign}\sigma) g_d(\rho_{i_{\sigma(1)}}, \rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) \overline{\gamma}_{\sigma(1)} \ldots \overline{\gamma}_{\sigma(n)}.$$

Agora, como

$$\overline{x}^{d_0}\overline{\gamma}_{\sigma(1)}\overline{\gamma}_{\sigma(2)} \ldots \overline{\gamma}_{\sigma(n)} = \underbrace{(\sum_{p=1}^{n} \rho_p^{d_0} e_{pp})(e_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(1)}})}_{\rho_{i_{\sigma(1)}}^{d_0} e_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(1)}}} \underbrace{(\sum_{p=1}^{n} \rho_p^{c_{\sigma(1)}} e_{pp})(e_{i_{\sigma(2)}j_{\sigma(2)}})}_{\rho_{i_{\sigma(2)}}^{c_{\sigma(1)}} e_{i_{\sigma(2)}j_{\sigma(2)}}} \times$$

$$\times \underbrace{(\sum_{p=1}^{n} \rho_p^{c_{\sigma(2)}} e_{pp})(e_{i_{\sigma(3)}j_{\sigma(3)}})}_{\rho_{i_{\sigma(3)}}^{c_{\sigma(2)}} e_{i_{\sigma(3)}j_{\sigma(3)}}} \ldots \underbrace{(\sum_{p=1}^{n} \rho_p^{c_{\sigma(n-1)}} e_{pp})(e_{i_{\sigma(n)}j_{\sigma(n)}})}_{\rho_{i_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n-1)}} e_{i_{\sigma(n)}j_{\sigma(n)}}} (\sum_{p=1}^{n} \rho_p^{c_{\sigma(n)}} e_{pp})$$

$$= \rho_{i_{\sigma(1)}}^{d_0} \rho_{i_{\sigma(2)}}^{c_{\sigma(1)}} \rho_{i_{\sigma(3)}}^{c_{\sigma(2)}} \ldots \rho_{i_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n-1)}} \rho_{j_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n)}} e_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(1)}} \ldots e_{i_{\sigma(n)}j_{\sigma(n)}}$$

$$= \rho_{i_{\sigma(1)}}^{d_0}\rho_{i_{\sigma(2)}}^{c_{\sigma(1)}}\rho_{i_{\sigma(3)}}^{c_{\sigma(2)}}\ldots\rho_{i_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n-1)}}\rho_{j_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n)}}\overline{y}_{\sigma(1)}\ldots\overline{y}_{\sigma(n)},$$

segue o resultado. $\square$

Lema 3.2.9. *Sejam* $d = (1, 2, \ldots, n-3, n-2)$, $\widetilde{d} = (1, 2, \ldots, n-3, n)$ *e* $e_2(t_1, \ldots, t_{n+1})$ *a segunda função simétrica elementar em* $t_1, \ldots, t_{n+1}$. *Se*

$$\begin{aligned} w(x, y_1, ..., y_n) &= s_{2n-2}(x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^n, y_1, \ldots, y_n) \\ &+ \sum_{p=1}^{n} x s_{2n-2}(x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^{n-2}, y_1, \ldots, y_p x, \ldots, y_n) \\ &+ \sum_{1\le p<q\le n} s_{2n-2}(x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^{n-2}, y_1, \ldots, y_p x, \ldots, y_q x, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

então a igualdade

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} (\mathrm{sign}\sigma) g(\rho_{i_{\sigma(1)}}, \rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}})\overline{y}_{\sigma(1)}\ldots\overline{y}_{\sigma(n)}$$

se verifica para

$$g(t_1, \ldots, t_{n+1}) = g_{\widetilde{d}}(t_1, \ldots, t_{n+1}) + g_d(t_1, \ldots, t_{n+1})e_2(t_1, \ldots, t_{n+1}).$$

Demonstração. Por um abuso de linguagem, escreveremos (ρ_σ) no lugar de $(\rho_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}})$ e denotaremos por $\overline{y}_\sigma$ o elemento $\overline{y}_{\sigma(1)}\ldots\overline{y}_{\sigma(n)}$. Segue do Lema 3.2.3 que

$$s_{2n-2}(\overline{x}, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^{n-3}, \overline{x}^n, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} (\mathrm{sign}\sigma) g_{\widetilde{d}}(\rho_\sigma)\overline{y}_\sigma.$$

De acordo com o Lema 3.2.8, dado $p \in \{1, \ldots, n\}$ temos que

$$\overline{x}s_{2n-2}(\overline{x}, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^{n-3}, \overline{x}^{n-2}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_p\overline{x}, \ldots, \overline{y}_n) =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} (\mathrm{sign}\sigma) g_d(\rho_\sigma)\rho_{i_{\sigma(1)}}\rho_{i_{\sigma(2)}}^{c_{\sigma(1)}}\ldots\rho_{i_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n-1)}}\rho_{j_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n)}}\,\overline{y}_\sigma$$

Observe que apenas um dos $c_{\sigma(j)}$'s é 1 e o restante é 0. Logo

$$\sum_{p=1}^{n} \overline{x} s_{2n-2}(\overline{x}, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^{n-3}, \overline{x}^{n-2}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_p \overline{x}, \ldots, \overline{y}_n)$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma) g_d(\rho_\sigma) \rho_{i_{\sigma(1)}} \rho_{i_{\sigma(2)}}^{c_{\sigma(1)}} \ldots \rho_{i_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n-1)}} \rho_{j_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n)}} \, \overline{y}_\sigma \right)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma) g_d(\rho_\sigma) \rho_{i_{\sigma(1)}} \left(\sum_{p=1}^{n} \rho_{i_{\sigma(2)}}^{c_{\sigma(1)}} \ldots \rho_{i_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n-1)}} \rho_{j_{\sigma(n)}}^{c_{\sigma(n)}} \right) \overline{y}_\sigma$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma) g_d(\rho_\sigma) \rho_{i_{\sigma(1)}} \Big(\rho_{i_{\sigma(2)}} + \ldots + \rho_{i_{\sigma(n)}} + \rho_{j_{\sigma(n)}} \Big) \overline{y}_\sigma$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma) g_d(\rho_\sigma) \rho_{i_{\sigma(1)}} e_1(\rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) \overline{y}_\sigma,$$

onde e_1 é a primeira função simétrica elementar. Usando novamente o Lema 3.2.8 e um argumento parecido com o anterior, podemos mostrar que

$$\sum_{1 \le q < p \le n} s_{2n-2}(\overline{x}, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^{n-3}, \overline{x}^{n-2}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_q \overline{x}, \ldots, \overline{y}_p \overline{x}, \ldots, \overline{y}_n) =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma) g_d(\rho_\sigma) e_2(\rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) \, \overline{y}_\sigma.$$

Assim

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma) \Bigg(g_{\widetilde{d}}(\rho_\sigma) +$$

$$+ g_d(\rho_\sigma) \Big(\rho_{i_{\sigma(1)}} e_1(\rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) + e_2(\rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) \Big) \Bigg) \overline{y}_\sigma.$$

Uma vez que

$$\rho_{i_{\sigma(1)}} e_1(\rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) + e_2(\rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}})$$

$$= e_2(\rho_{i_{\sigma(1)}}, \rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) = e_2(\rho_\sigma),$$

temos

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma)\Big(g_{\widetilde{d}}(\rho_\sigma) + g_d(\rho_\sigma)e_2(\rho_\sigma)\Big)\overline{y}_\sigma$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma) g(\rho_\sigma)\overline{y}_\sigma.$$

□

Observação 3.2.10. *Seja v_r o polinômio definido por*

$$v_r(t_1, \ldots, t_{n+1}) = g_{(1,\ldots,n-3,n-2+r)}\,(t_1, \ldots, t_{n+1}).$$

Observe que a função g definida no último lema é

$$g(t_1, \ldots, t_{n+1}) = v_2(t_1, \ldots, t_{n+1}) + v_o(t_1, \ldots, t_{n+1})e_2(t_1, \ldots, t_{n+1}).$$

Do Lema 3.2.6 temos

$$v_r(t_1, t_1, t_2, \ldots, t_n) = g_{(1,\ldots,n-3,n-2+r)}\,(0, 0, t_2, \ldots, t_n).$$

Agora usaremos os Lemas 3.2.5 e 3.2.7 respectivamente na primeira e segunda igualdade abaixo:

$$g_{(1,\ldots,n-3,n-2+r)}\,(0,0,t_2,\ldots,t_n) = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_2 & t_3 & \ldots & t_n \\ t_2^2 & t_3^2 & \ldots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_2^{n-3} & t_3^{n-3} & \ldots & t_n^{n-3} \\ t_2^{n-2+r} & t_3^{n-2+r} & \ldots & t_n^{n-2+r} \end{vmatrix}$$

$$= \pm h_r(t_2, \ldots, t_n) \prod_{2 \le p < q \le n} (t_q - t_p).$$

Portanto

$$\begin{cases} v_2(t_1,t_1,t_2,\ldots,t_n) &= \pm h_2(t_2,\ldots,t_n)\prod_{2\le p<q\le n}(t_q-t_p),\\ v_0(t_1,t_1,t_2,\ldots,t_n) &= \pm \prod_{2\le p<q\le n}(t_q-t_p).\end{cases}$$

Da demonstação do Lema 3.2.5 temos que o sinal ± 1 *depende de* n *e, portanto, para um mesmo* n*, o sinal de* v_2 *é o mesmo de* v_0*. De forma similar pode-se mostrar que*

$$v_r(t_1,\ldots,t_{j-1},0,0,t_{j+1},\ldots,t_n) = \pm h_r(t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)\prod_{\substack{p<q\\ p,q\neq j}}(t_q-t_p)$$

com as mesmas considerações para o sinal ± 1*.*

Lema 3.2.11. *Se*

$$g = g_{(1,\ldots,n-3,n)}(t_1,\ldots,t_{n+1}) + g_{(1,\ldots,n-3,n-2)}(t_1,\ldots,t_{n+1})e_2(t_1,\ldots,t_{n+1}),$$

então $t_1+t_2+\ldots+t_n$ *divide* $g(t_1,\ldots,t_i,\ldots,t_{j-1},t_i,t_j,\ldots,t_n)$ *para todo* $1\le i<j\le n+1$*.*

Demonstração. Vamos aplicar indução nas diferenças $j-i$. Por simplicidade de notação será considerado apenas o caso $i=1$; o caso geral é similar. No desenvolvimento dessa demonstração faremos uso dos resultados obtidos na Observação 3.2.10. Primeiro, seja $j-i=1$. Temos

$$g(t_1,t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

$$\begin{aligned} &= v_2(t_1,t_1,t_2,\ldots,t_n)+v_0(t_1,t_1,t_2,\ldots,t_n)e_2(t_1,t_1,t_2,\ldots,t_n)\\ &= \pm\Big(h_2(t_2,\ldots,t_n)+e_2(t_1,t_1,t_2,\ldots,t_n)\Big)\prod_{2\le p<q\le n}(t_q-t_p).\end{aligned}$$

Uma vez que

$$h_2(t_2, \ldots, t_n) + e_2(t_1, t_1, t_2, \ldots, t_n) =$$

$$\Big(h_2(t_1, \ldots, t_n) - t_1(t_1 + \ldots + t_n)\Big) + \Big(e_2(t_1, \ldots, t_n) + t_1(t_1 + \ldots + t_n)\Big) =$$

$$h_2(t_1, \ldots, t_n) + e_2(t_1, \ldots, t_n) = (t_1 + \ldots + t_n)^2$$

então

$$g(t_1, t_1, t_2, \ldots, t_n) = \pm(t_1 + \ldots + t_n)^2 \prod_{2 \leq p < q \leq n} (t_q - t_p).$$

Portanto, $t_1 + \ldots + t_n$ divide $g(t_1, t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Agora, seja $j - i > 1$. Por hipótese de indução assumimos

$$g(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_1, t_j, \ldots, t_n) = (t_1 + \ldots + t_n)U(t_1, \ldots, t_n)$$

para algum $U(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_n]$. Pelo Lema 3.2.6,

$$g_d(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_1, \ldots, t_n) = -g_d(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_1, t_j, \ldots, t_n)$$

$$+2g_d(t_1, \ldots, t_{j-1}, 0, 0, t_{j+1} \ldots, t_n)$$

e, portanto, para $d = (1, 2, \ldots, n-3, n-2+r)$, temos

$$v_r(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_1, \ldots, t_n) = -v_r(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_1, t_j, \ldots, t_n)$$

$$+2v_r(t_1, \ldots, t_{j-1}, 0, 0, t_{j+1} \ldots, t_n)$$

de forma que

$$g(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_1, \ldots, t_n)$$

$= v_2(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_1, \ldots, t_n)$
$+v_0(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_1, \ldots, t_n)e_2(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_1, \ldots, t_n)$
$= -v_2(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_1, t_j, \ldots, t_n) + 2v_2(t_1, \ldots, t_{j-1}, 0, 0, t_{j+1} \ldots, t_n)$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(-v_0(t_1,\ldots,t_{j-1},t_1,t_j,\ldots,t_n)\\
&+2v_0(t_1,\ldots,t_{j-1},0,0,t_{j+1}\ldots,t_n)\Big)e_2(t_1,\ldots,t_{j-1},t_j,t_1,\ldots,t_n)\\
&=-\Big(v_2(t_1,\ldots,t_{j-1},t_1,t_j,\ldots,t_n)\\
&+v_0(t_1,\ldots,t_{j-1},t_1,t_j,\ldots,t_n)e_2(t_1,\ldots,t_{j-1},t_j,t_1,\ldots,t_n)\Big)\\
&+2\Big(v_2(t_1,\ldots,t_{j-1},0,0,t_{j+1}\ldots,t_n)\\
&+v_0(t_1,\ldots,t_{j-1},0,0,t_{j+1}\ldots,t_n)e_2(t_1,\ldots,t_{j-1},t_j,t_1,\ldots,t_n)\Big)\\
&=-g(t_1,\ldots,t_{j-1},t_1,t_j,\ldots,t_n)\\
&+2\Big(\pm h_2(t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)\prod_{\substack{1\le p<q\le n\\ p,q\neq j}}(t_q-t_p)\\
&\pm\prod_{\substack{1\le p<q\le n\\ p,q\neq j}}(t_q-t_p)e_2(t_1,\ldots,t_{j-1},t_j,t_1,\ldots,t_n)\Big)\\
&=-(t_1+\ldots+t_n)U(t_1,\ldots,t_n)\\
&\pm 2\Big(h_2(t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)+e_2(t_1,t_1,t_2,\ldots,t_n)\Big)\prod_{\substack{1\le p<q\le n\\ p,q\neq j}}(t_q-t_p).
\end{aligned}
$$

Para $j>i$ temos

$$
\begin{aligned}
& h_2(t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)+e_2(t_1,t_1,t_2,\ldots,t_n)\\
&=\Big(h_2(t_1,\ldots,t_n)-t_j(t_1+\ldots+t_n)\Big)+\Big(e_2(t_1,\ldots,t_n)+t_1(t_1+\ldots+t_n)\Big)\\
&=h_2(t_1,\ldots,t_n)+e_2(t_1,\ldots,t_n)+(t_1-t_j)(t_1+\ldots+t_n)\\
&=(t_1+\ldots+t_n)^2+(t_1-t_j)(t_1+\ldots+t_n).
\end{aligned}
$$

Portanto, $t_1+\ldots+t_n$ divide $g(t_1,\ldots,t_j,t_1,\ldots,t_n)$. □

Teorema 3.2.12 (Amitsur-Levitzki). *O polinômio standard s_{2n} é uma identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$.*

Demonstração. Veja [6], Seção 7.1. □

Definição 3.2.13. *Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é denominado uma identidade polinomial fraca para $M_n(\mathbb{K})$ se $f(s_1, \ldots, s_m) = 0$ para quaisquer $s_1, \ldots, s_m \in sl_n$. Se a identidade polinomial fraca não é uma identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$ ela é denominada identidade polinomial essencialmente fraca.*

Exemplo 3.2.14. *O polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1^2, x_2]$ é uma identidade polinomial essencialmente fraca para $M_2(\mathbb{K})$.*

De fato, se $a \in sl_2$ e $b \in M_2(\mathbb{K})$, então $[a^2, b] = 0$ e, portanto, $f(x_1, x_2)$ é uma identidade fraca para $M_2(\mathbb{K})$. Uma vez que $f(e_{11}, e_{12}) = e_{12} \neq 0$, então $f(x_1, x_2)$ não é uma identidade para $M_2(\mathbb{K})$.

Teorema 3.2.15. *O polinômio*

$$\begin{aligned} w(x, y_1, ..., y_n) &= s_{2n-2}(x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^n, y_1, \ldots, y_n) \\ &+ \sum_{p=1}^{n} x s_{2n-2}(x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^{n-2}, y_1, \ldots, y_p x, \ldots, y_n) \\ &+ \sum_{1 \leq p < q \leq n} s_{2n-2}(x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^{n-2}, y_1, \ldots, y_p x, \ldots, y_q x, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

é uma identidade polinomial essencialmente fraca para $M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 3$. Além disso, $w(a, b_1, \ldots, b_n) = 0$ para todo $a \in sl_n$ e $b_1, \ldots, b_n \in M_n(\mathbb{K})$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que $w(a, b_1, \ldots, b_n) = 0$ para todo $a \in sl_n$ e $b_1, \ldots, b_n \in M_n(\mathbb{K})$. Pela Proposição 3.1.13 é suficiente mostrar que

$$w(\overline{w}_1, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = 0$$

para quaisquer matrizes elementares $\overline{y}_q = e_{i_q j_q}$. Identificando $\overline{x} = \overline{w}_1$, devemos mostrar que

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = 0,$$

onde $\rho_1 + \ldots + \rho_n = 0$. Pelo Lema 3.2.9 temos

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma) g(\rho_{i_{\sigma(1)}}, \rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) \overline{y}_{\sigma(1)} \ldots \overline{y}_{\sigma(n)},$$

onde g foi definido no lema.

Suponha que $\{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_n, j_n\} \neq \{1, 2, \ldots, n\}$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $n \notin \{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_n, j_n\}$. Se

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \neq 0,$$

então alguma entrada da matriz

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = \sum_{p,q=1}^{n} \tau_{pq}(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}) e_{pq}$$

é não nula, onde $\tau_{pq}(t_1, \ldots, t_{n-1})$ é um polinômio em $\mathbb{K}[t_1, \ldots, t_{n-1}]$. Sem perda de generalidade, suponha $\tau_{11}(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}) \neq 0$. Como, em particular, $\tau_{11}(t_1, \ldots, t_{n-1}) \neq 0$, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tais que

$$\tau(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \neq 0.$$

Pelo Teorema de Amitsur-Levitzki temos que $w(x, y_1, ..., y_n)$ é uma identidade para $M_{n-1}(\mathbb{K})$ e, portanto,

$$0 = w(\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p e_{pp}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = w(\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p e_{pp} - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1}) e_{nn}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$$

$$= \sum_{p,q=1}^{n} \tau_{pq}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) e_{pq} \neq 0.$$

Absurdo. Logo, $w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = 0$.

Suponha $\{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_n, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Se $w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \neq 0$, então

$$\overline{y}_{l_1} \ldots \overline{y}_{l_n} \neq 0$$

para alguma sequência $l_1, \ldots, l_n$ de $1, \ldots, n$. Além disso, essa sequência é escolhida, de modo que a entrada (i_{l_1}, j_{l_n}) de $w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$ seja não nula. Como $w(x, y_1, \ldots, y_n)$ é anti-simétrico nas variáveis $y_1, \ldots, y_n$, temos que

$$w(\overline{x}, \overline{y}_{l_1}, \ldots, \overline{y}_{l_n}) \neq 0.$$

Seja b o menor valor de t tal que $j_{l_t} \in \{i_{l_1}, \ldots, i_{l_t}\}$. Assim,

$$i_{l_1} \neq j_{l_1} = i_{l_2} \neq j_{l_2} = \ldots = i_{l_{b-1}} \neq j_{l_{b-1}} = i_{l_b} * j_{l_b} =$$

$$= i_{l_{b+1}} \neq j_{l_{b+1}} = i_{l_{b+2}} \neq j_{l_{b+2}} = \ldots = i_{l_n} \neq j_{l_n},$$

onde $*$ pode ser o símbolo de $\neq$ ou $=$. Observe que as diferenças após o $*$ devem ocorrer pois

$$\{i_{l_1}, i_{l_2}, \ldots, i_{l_b}, j_{l_{b+1}}, j_{l_{b+2}}, \ldots, j_{l_n}\} = \{i_{l_1}, j_{l_1}, i_{l_2}, j_{l_2} \ldots, i_{l_n}, j_{l_n}\} = \{1, \ldots, n\}.$$

Redefinindo os índices, é fácil ver que

$$w(\overline{x}, e_{12}, e_{23}, \ldots, e_{b-1b}, e_{bi}, e_{ib+1}, e_{b+1b+2}, \ldots, e_{n-1n}) \neq 0,$$

onde $i \in \{1, \ldots, b\}$. Para manter a notação do artigo [5], vamos trocar b por j. Assim, devemos calcular $w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$ nas matrizes

$$\overline{y}_1 = e_{12}, \overline{y}_2 = e_{23}, \ldots, \overline{y}_{j-1} = e_{j-1,j}, \overline{y}_j = e_{j,i},$$

$$\overline{y}_{j+1} = e_{i,j+1}, \overline{y}_{j+2} = e_{j+1,j+2}, \ldots, \overline{y}_n = e_{n-1,n}$$

para $1 \leq i \leq j \leq n$. Pelo Lema 3.2.9 temos

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}\sigma) g(\rho_{i_{\sigma(1)}}, \rho_{i_{\sigma(2)}}, \ldots, \rho_{i_{\sigma(n)}}, \rho_{j_{\sigma(n)}}) \overline{y}_{\sigma(1)} \ldots \overline{y}_{\sigma(n)}$$

em que $g = g(t_1, \ldots, t_{n+1})$ é dado por

$$g = g_{(1,\ldots,n-3,n)}\,(t_1, \ldots, t_{n+1}) + g_{(1,\ldots,n-3,n-2)}(t_1, \ldots, t_{n+1}) e_2(t_1, \ldots, t_{n+1}).$$

Temos então as seguintes possibilidades:

1º) Para $1 \leq i \leq j < n$,

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = g(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_j, \rho_i, \rho_{j+1}, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n) e_{1n}$$

2º) Para $1 < i < j = n$,

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = g(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n, \rho_i) e_{1i}$$

3º) Para $i = j = n$,

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = g(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n, \rho_n) e_{1n}$$

4º) Para $i = 1$ e $j = n$,

$$\begin{aligned} w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) &= g(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-2}, \rho_{n-1}, \rho_n, \rho_1) e_{11} \\ &+ g(\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_{n-2}, \rho_{n-1}, \rho_n, \rho_1, \rho_2) e_{22} \\ &+ g(\rho_3, \rho_4, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n, \rho_1, \rho_2, \rho_3) e_{33} \\ &+ \ldots + g(\rho_n, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n) e_{nn}. \end{aligned}$$

De acordo com o Lema 3.2.11,

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n \quad \text{divide} \quad g(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_{j-1}, t_i, t_j, \ldots, t_n)$$

para todos $1 \leq i < j \leq n+1$. Portanto,

$$g(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_{j-1}, t_i, t_j, \ldots, t_n) = (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)U_{ij}(t_1, \ldots, t_n),$$

para algum $U_{ij} \in \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_n]$. Assim

$$w(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = 0,$$

pois $\rho_1 + \ldots + \rho_n = 0$.

Para completar a demonstração, falta mostrar que $w(x, y_1, \ldots, y_n)$ não é uma identidade para $M_n(\mathbb{K})$. Sejam $a, b_1, \ldots, b_n \in M_n(\mathbb{K})$ definidas por

$$a = \sum_{p=1}^{n} \rho_p e_{pp},\ b_1 = e_{11},\ b_2 = e_{12},\ b_3 = e_{23}, \ldots,\ b_n = e_{n-1,n}.$$

Pela demonstração do Lema 3.2.11 temos

$$\begin{aligned} w(a, b_1, \ldots, b_n) &= g(\rho_1, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)e_{1n} \\ &= (\rho_1 + \ldots + \rho_n)^2 \prod_{2 \leq p < q \leq n} (\rho_q - \rho_p)e_{1n}. \end{aligned}$$

Assim, escolhendo $\rho_p = p$, temos que $w(a, b_1, \ldots, b_n) \neq 0$. □

Faremos uso do seguinte resultado devido a Razmyslov. A demonstração pode ser encontrado em [16] ou [6], página 96.

Lema 3.2.16. *Seja $f(x_1, \ldots, x_m)$ uma identidade polinomial multiltilinear essencialmente fraca para $M_n(\mathbb{K})$ tal que $f([x_1, x_{m+1}], x_2, \ldots, x_m)$ é uma identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$. Escreva $f(x_1, \ldots, x_m)$ na forma*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{pq} p(x_2, \ldots, x_m)x_1 q(x_2, \ldots, x_m)$$

em que p e q são monômios que não dependem de x_1. Então

$$f^*(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{pq} q(x_2, \ldots, x_m)x_1 p(x_2, \ldots, x_m)$$

é um polinômio central não trivial para $M_n(\mathbb{K})$.

Lema 3.2.17. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito. Se $f(x_1, \ldots, x_m)$ é uma identidade polinomial fraca, então cada componente multi-homogênea de f é uma identidade polinomial fraca.*

Demonstração. Escreva $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$, onde f_i é a componente homogênea de f com grau i em x_1. Considere $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Para cada j, o polinômio

$$g_j = f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = f_0 + \alpha_j f_1 + \ldots + {\alpha_j}^n f_n$$

é uma identidade polinomial fraca para $M_n(\mathbb{K})$. Além disso,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \ldots & {\alpha_0}^n \\ 1 & \alpha_1 & \ldots & {\alpha_1}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & {\alpha_n}^n \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix},$$

onde V é a matriz de Vandermonde invertível. Logo, dados $a_1, \ldots, a_m \in sl_n$ temos

$$\begin{pmatrix} f_0(a_1, \ldots, a_m) \\ f_1(a_1, \ldots, a_m) \\ \vdots \\ f_n(a_1, \ldots, a_m) \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} g_0(a_1, \ldots, a_m) \\ g_1(a_1, \ldots, a_m) \\ \vdots \\ g_n(a_1, \ldots, a_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Provamos assim que $f_0, f_1, \ldots, f_n$ são identidades polinomiais fracas. Agora, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ e cada $t = 0, 1, 2, \ldots$, tomemos f_{it} como sendo a componente homogênea em f_i de grau t em x_2. Usando então os mesmos argumentos anteriores, concluímos que f_{it} é uma identidade polinomial fraca e assim, repetindo o processo para cada variável, temos que cada componente multi-homogênea de f é uma identidade polinomial fraca. $\square$

Observação 3.2.18. *O raciocínio utilizado na demonstração do lema nos permite concluir que se* $f(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$ *satisfaz*

$$f(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) = 0,\ \forall a_1, \ldots, a_k \in sl_n,\ b_1, \ldots, b_l \in M_n(\mathbb{K}),$$

então cada componente multi-homogênea de f *também possui essa propriedade.*

Definição 3.2.19. *Seja* $w(x, y_1, \ldots, y_l)$ *um polinômio homogêneo de grau* k *em* x*. A linearização completa em* x *de* $w(x, y_1, \ldots, y_l)$ *é a componente multilinear em* $x_1, \ldots, x_k$ *do polinômio*

$$w(x_1 + \ldots + x_k, y_1, \ldots, y_l).$$

Considere w como na definição acima e suponha que

$$w(a, b_1, \ldots, b_l) = 0,\ \forall a \in sl_n,\ b_1, \ldots, b_l \in M_n(\mathbb{K}).$$

Se $u(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) = w(x_1 + \ldots + x_k, y_1, \ldots, y_l)$, então

$$u(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) = 0,\ \forall a_1, \ldots, a_k \in sl_n,\ b_1, \ldots, b_l \in M_n(\mathbb{K}).$$

Assim, pela última observação,

$$w'(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) = 0,\ \forall a_1, \ldots, a_k \in sl_n,\ b_1, \ldots, b_l \in M_n(\mathbb{K}),$$

onde $w'(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$ é a linearização completa em x de w.

Usaremos o seguinte lema no nosso resultado principal.

Lema 3.2.20. *Se* $m = \sum_{p=1}^{n} \rho_p e_{pp} \in sl_n$, *então* m *pode ser escrito como um comutador de duas matrizes em* $M_n(\mathbb{K})$.

Demonstração. Sejam a e b matrizes em $M_n(\mathbb{K})$ definidas por

$$a = \sum_{j=1}^{n-1} e_{(j+1,j)} \quad e \quad b = \sum_{i=1}^{n-1} (\rho_{i+1} + \rho_{i+2} + \ldots + \rho_n) e_{(i,i+1)}.$$

Temos

$$ab = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (\rho_{i+1} + \rho_{i+2} + \ldots + \rho_n) e_{(j+1,j)} e_{(i,i+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (\rho_{i+1} + \rho_{i+2} + \ldots + \rho_n) e_{(i+1,i+1)} = \sum_{j=2}^{n} (\rho_j + \rho_{j+1} + \ldots + \rho_n) e_{(j,j)}.$$

De maneira similar,

$$ba = \sum_{j=1}^{n-1} (\rho_{j+1} + \rho_{j+2} + \ldots + \rho_n) e_{(j,j)}.$$

Logo,

$$ab - ba = \rho_n e_{(n,n)} + \sum_{j=2}^{n-1} (\rho_j + \rho_{j+1} + \ldots + \rho_n) e_{(j,j)}$$

$$-(\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_n) e_{(1,1)} - \sum_{j=2}^{n-1} (\rho_{j+1} + \rho_{j+2} + \ldots + \rho_n) e_{(j,j)}$$

$$= \rho_n e_{(n,n)} + \left(\sum_{j=2}^{n-1} \rho_j e_{(j,j)} \right) - (\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_n) e_{(1,1)} = m,$$

pois $\rho_1 = -(\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_n)$. □

Chamamos a atenção do leitor para o fato que o lema acima é um caso particular do teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [19].

Teorema 3.2.21. *Toda matriz $m \in sl_n$ é o comutador de duas matrizes em $M_n(\mathbb{K})$.*

Teorema 3.2.22. *Seja $w'(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ a linearização completa em x do polinômio*

$$\begin{aligned} w(x, y_1, ..., y_n) &= s_{2n-2}(x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^n, y_1, \ldots, y_n) \\ &+ \sum_{p=1}^{n} x s_{2n-2}(x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^{n-2}, y_1, \ldots, y_p x, \ldots, y_n) \\ &+ \sum_{1 \le p < q \le n} s_{2n-2}(x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^{n-2}, y_1, \ldots, y_p x, \ldots, y_q x, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

onde $k = (n^2 - 3n + 6)/2$. Se

$$f(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_k) = w'(x_1, [x_2, \widetilde{x}_2], \ldots, [x_k, \widetilde{x}_k], y_1, \ldots, y_n)$$

então

$$f^*(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_k)$$

é um polinômio central não trivial de grau $(n-1)^2 + 4$ para $M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 3$.

Demonstração. O grau de $f^*(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_k)$ é

$$k + n + k - 1 = n^2 - 2n + 5 = (n-1)^2 + 4.$$

Pelo Teorema 3.2.15, $w(a, b_1, ..., b_n) = 0$, $\forall a \in sl_n$, $b_1, \ldots, b_n \in M_n(\mathbb{K})$. Assim, como já foi comentado anteriormente,

$$w'(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n) = 0, \ \forall a_1, \ldots, a_k \in sl_n, \ b_1, \ldots, b_n \in M_n(\mathbb{K}).$$

Sejam $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n, c_2, \ldots, c_k \in sl_n$. Temos

$$f(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n, c_2, \ldots, c_k) = w'(a_1, [a_2, c_2], \ldots, [a_k, c_k], b_1, \ldots, b_n) = 0$$

e, portanto, f é uma identidade polinomial multilinear fraca.

Sejam $a_h, c_h, b_l \in M_n(\mathbb{K})$, $h = 1, \ldots, k$ e $l = 1, \ldots, n$. Uma vez que $[a_h, c_h] \in sl_n$ temos

$$f([a_1, c_1], a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n, c_2, \ldots, c_k)$$

$$= w'([a_1, c_1], [a_2, c_2], \ldots, [a_k, c_k], b_1, \ldots, b_n) = 0$$

e, portanto, $f([x_1, \widetilde{x}_1], x_2, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_k)$ é uma identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$.

Dessa forma, para mostrar que f^* é um polinômio central não trivial para $M_n(\mathbb{K})$ é suficiente, pelo Lema 3.2.16, verificar que f não é uma identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$. Seja

$$\widetilde{w}(x, y_1, \ldots, y_n) = w'(1, \underbrace{x, \ldots, x}_{k-1}, y_1, \ldots, y_n)$$

e suponha que existam $a, b_1, \ldots, b_n \in sl_n$, $a = \sum_{p=1}^{n} \rho_p e_{pp}$, tais que

$$\widetilde{w}(a, b_1, \ldots, b_n) \neq 0.$$

Pelo Teorema 3.2.20, existem $c, d \in M_n(\mathbb{K})$ tais que $a = [c, d]$ e, portanto,

$$f(e, \underbrace{c, \ldots, c}_{k-1}, b_1, \ldots, b_n, \underbrace{d, \ldots, d}_{k-1}) = w'(e, \underbrace{[c, d], \ldots, [c, d]}_{k-1}, b_1, \ldots, b_n)$$

$$= \widetilde{w}([c, d], b_1, \ldots, b_n) = \widetilde{w}(a, b_1, \ldots, b_n) \neq 0.$$

Seja $w_q(x, y_1, \ldots, y_n)$ a componente de grau q em x de $w(1 + x, y_1, \ldots, y_n)$. Temos que

$$\widetilde{w}(x, y_1, \ldots, y_n) = (k-1)!\, w_{k-1}(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Portanto, se $w_{k-1}(a, b_1, \ldots, b_n) \neq 0$, então $\widetilde{w}(a, b_1, \ldots, b_n) \neq 0$.

Vamos calcular w_{k-1} para

$$a = \sum_{p=1}^{n} \rho_p e_{pp},$$

$$b_1 = e_{12},\ b_2 = e_{21},\ b_3 = e_{13},\ b_4 = e_{34},\ b_5 = e_{45},\ \ldots,\ b_n = e_{n-1,n}.$$

De acordo com o Lema 3.2.9 temos

$$w(a, b_1, \ldots, b_n) = g(\rho_1, \rho_2, \rho_1, \rho_3, \rho_4, \ldots, \rho_n)e_{1n}$$

em que g é um polinômio de $\mathbb{K}[t_1, \ldots, t_{n+1}]$ com grau k, dado por

$$g(t_1, \ldots, t_{n+1}) = g_{(1,2,\ldots,n-3,n)}(t_1, \ldots, t_{n+1})$$

$$+ \ g_{(1,2,\ldots,n-3,n-2)}(t_1, \ldots, t_{n+1})e_2(t_1, \ldots, t_{n+1}).$$

Seja $g'(t_1, \ldots, t_{n+1})$ a componente homogênea de grau $k-1$ de

$$g(1 + t_1, \ldots, 1 + t_{n+1}).$$

Como $w_{k-1}(a, b_1, \ldots, b_n) = g'(\rho_1, \rho_2, \rho_1, \rho_3, \rho_4, \ldots, \rho_n)e_{1n}$, o próximo passo é calcular g' e mostrar que

$$g'(\rho_1, \rho_2, \rho_1, \rho_3, \rho_4, \ldots, \rho_n) \neq 0.$$

Temos que $g_{(1,2,\ldots,n-3,n)}(t_1, \ldots, t_{n+1})$ é um polinômio de grau k e de acordo com os Lemas 3.2.3 e 3.2.4, a componente homogênea de grau $k-1$ de $g_{(1,2,\ldots,n-3,n)}(1 + t_1, \ldots, 1 + t_{n+1})$ é dada por

$$g_{(0,2,\ldots,n-3,n)}(t_1, \ldots, t_{n+1}) + 2g_{(1,1,\ldots,n-3,n)}(t_1, \ldots, t_{n+1})$$

$$+3g_{(1,2,2,\ldots,n-3,n)}(t_1, \ldots, t_{n+1}) + \ldots + (n-3)g_{(1,2,\ldots,n-4,n-4,n)}(t_1, \ldots, t_{n+1})$$

$$+ng_{(1,2,\ldots,n-3,n-1)}(t_1,\ldots,t_{n+1}) = ng_{(1,2,\ldots,n-3,n-1)}(t_1,\ldots,t_{n+1}).$$

O polinômio $g_{(1,2,3,\ldots,n-3,n-2)}(t_1,\ldots,t_{n+1})$ tem grau $k-2$ enquanto que o polinômio $e_2(t_1,\ldots,t_{n+1})$ tem grau 2. Portanto, a componente homogênea de grau $k-1$ de

$$g_{(1,2,\ldots,n-3,n-2)}(1+t_1,\ldots,1+t_{n+1})e_2(1+t_1,\ldots,1+t_{n+1})$$

pode ser obtida de duas formas:

1ª) Pela componente homogênea de grau $k-3$ de

$$g_{(1,2,\ldots,n-3,n-2)}(1+t_1,\ldots,1+t_{n+1})$$

multiplicada pela componente homogênea de grau 2 de $e_2(1+t_1,\ldots,1+t_{n+1})$.

2ª) Pela componente homogênea de grau $k-2$ de

$$g_{(1,2,\ldots,n-3,n-2)}(1+t_1,\ldots,1+t_{n+1})$$

multiplicada pela componente homogênea de grau 1 de $e_2(1+t_1,\ldots,1+t_{n+1})$.

Segue dos Lemas 3.2.3 e 3.2.4 que a componente homogênea de grau $k-3$ de $g_{(1,2,\ldots,n-3,n-2)}(1+t_1,\ldots,1+t_{n+1})$ é dada por

$$g_{(0,2,\ldots,n-3,n-2)}(t_1,\ldots,t_{n+1}) + 2g_{(1,1,\ldots,n-3,n-2)}(t_1,\ldots,t_{n+1})$$

$$+3g_{(1,2,2,\ldots,n-3,n-2)}(t_1,\ldots,t_{n+1}) + \ldots + (n-3)g_{(1,2,\ldots,n-4,n-4,n-3)}(t_1,\ldots,t_{n+1})$$

$$+(n-2)g_{(1,2,\ldots,n-3,n-3)}(t_1,\ldots,t_{n+1}) = 0.$$

A componente homogênea de grau $k-2$ de $g_{(1,2,\ldots,n-3,n-2)}(1+t_1,\ldots,1+t_{n+1})$ é $g_{(1,2,\ldots,n-3,n-2)}(t_1,\ldots,t_{n+1})$ enquanto que a componente homogênea de grau 1 de $e_2(1+t_1,\ldots,1+t_{n+1})$ é

$$\sum_{1\le p<q\le n+1}(t_p+t_q) = nh_1(t_1,\ldots,t_{n+1}).$$

Assim a componente homogênea de grau $k-1$ de

$$g_{(1,2,\ldots,n-3,n-2)}(1+t_1,\ldots,1+t_{n+1})e_2(1+t_1,\ldots,1+t_{n+1})$$

é dada por

$$ng_{(1,2,\ldots,n-3,n-2)}(t_1,\ldots,t_{n+1})h_1(t_1,\ldots,t_{n+1}).$$

Logo ,

$$\begin{aligned}
g'(t_1,\ldots,t_{n+1}) &= ng_{(1,2,\ldots,n-3,n-1)}(t_1,\ldots,t_{n+1}) \\
&\quad +ng_{(1,2,\ldots,n-3,n-2)}(t_1,\ldots,t_{n+1})h_1(t_1,\ldots,t_{n+1}) \\
&= n(v_1(t_1,\ldots,t_{n+1}) + v_0(t_1,\ldots,t_{n+1})h_1(t_1,\ldots,t_{n+1})).
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.2.6 e a Observação 3.2.10, obtemos para $r \geq 0$,

$$\begin{aligned}
v_r(t_1,t_2,t_1,t_3,t_4,\ldots,t_n) &= -v_r(t_1,t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n) + 2v_r(t_1,0,0,t_3,\ldots,t_n) \\
&= -v_r(0,0,t_2,t_3,\ldots,t_n) + 2v_r(t_1,0,0,t_3,\ldots,t_n) \\
&= \pm h_r(t_2,\ldots,t_n)\prod_{2\leq p<q\leq n}(t_q-t_p) \\
&\quad \pm 2h_r(t_1,t_3,t_4,\ldots,t_n)\prod_{\substack{1\leq p<q\leq n\\ p,q\neq 2}}(t_q-t_p).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$g'(t_1,t_2,t_1,t_3,t_4,\ldots,t_n) = nv_1(t_1,t_2,t_1,t_3,t_4,\ldots,t_n)$$

$$+nv_0(t_1,t_2,t_1,t_3,t_4,\ldots,t_n)(2t_1+t_2+\ldots+t_n)$$

$$= n\Big(\pm h_1(t_2,\ldots,t_n)\prod_{2\leq p<q\leq n}(t_q-t_p)$$

$$\pm 2h_1(t_1,t_3,t_4,\ldots,t_n)\prod_{\substack{1\leq p<q\leq n\\ p,q\neq 2}}(t_q-t_p)\Big)$$

$$+n\Big(\pm h_0(t_2,\ldots,t_n)\prod_{2\leq p<q\leq n}(t_q-t_p)$$

$$\pm 2h_0(t_1,t_3,t_4,\ldots,t_n)\prod_{\substack{1\le p<q\le n\\ p,q\neq 2}}(t_q-t_p)\Big)(2t_1+t_2+t_3+\ldots+t_n)$$

$$= \pm n\Big((t_2+t_3+\ldots+t_n)+(2t_1+t_2+t_3+\ldots+t_n)\Big)\prod_{2\le p<q\le n}(t_q-t_p)$$

$$\pm 2n\Big((t_1+t_3+t_4+\ldots+t_n)+(2t_1+t_2+t_3+\ldots+t_n)\Big)\prod_{\substack{1\le p<q\le n\\ p,q\neq 2}}(t_q-t_p)$$

$$= \pm 2n(t_1+\ldots+t_n)\prod_{2\le p<q\le n}(t_q-t_p)$$

$$\pm 2n\Big(2(t_1+\ldots+t_n)+(t_1-t_2)\Big)\prod_{\substack{1\le p<q\le n\\ p,q\neq 2}}(t_q-t_p)$$

$$= \pm 2n(t_1+\ldots+t_n)\Bigg(\prod_{2\le p<q\le n}(t_q-t_p)-2\prod_{\substack{1\le p<q\le n\\ p,q\neq 2}}(t_q-t_p)\Bigg)$$

$$\pm 2n(t_1-t_2)\prod_{\substack{1\le p<q\le n\\ p,q\neq 2}}(t_q-t_p).$$

Tomando

$$\rho_1=1,\ \rho_2=2,\ \ldots,\ \rho_{n-1}=n-1 \quad \text{e} \quad \rho_n=-(1+2+\ldots+n-1),$$

temos $\rho_1+\ldots+\rho_n=0 \quad \text{e} \quad \rho_i\neq\rho_j,\ \forall i\neq j.$ Dessa forma,

$$g'(\rho_1,\rho_2,\rho_1,\rho_3,\rho_4,\ldots,\rho_n)\neq 0$$

e isso completa a demonstração do teorema. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] S.A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449–463, (1950).

[2] A. Brandão, P. Koshlukov, A. Krasilnikov, E. Silva, *The central polynomials for the Grassmann algebra,* Israel J. Math. **179**, 127-144, (2010).

[3] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra i Logika **20**, 282–290, (1981). Translation: Algebra and Logic **20**, 188–194, (1981).

[4] V. Drensky, A. Kasparian, *A new central polynomial for the* 3×3 *matrices* , Commun. in Algebra, **13**, 745–752, (1985).

[5] V. Drensky, *New central polynomials for the matrix algebra*, Israel J. Math. **92**, 235–248, (1995).

[6] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras, Graduate Course in Algebra*, Springer, Singapore, (2000).

[7] E. Formanek, *Central polynomials for matrix rings*, J. Algebra **23**, 129–132, (1972).

[8] A. Garcia, Y. Lequain, *Elementos de Álgebra*, 5.e.d Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[9] I. Kaplansky, *Problems in the theory of rings*, Nat. Acad. Sci. Nat. Res. Council **502**, 1–3, (1957).

[10] A. Kemer, *Ideal of identities of associative algebras*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. **87**, 1991.

[11] P. Koshlukov, *Basis of the Identities of the Matrix Algebra of Order Two over a Field of Characteristic $p \neq 2$*, J. Algebra **241**, 410–434 (2001).

[12] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra and its Applications **377**, 53–67, (2004).

[13] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181** , 429–438,(1973).

[14] V. N. Latyshev, *On the choice of basis in a T-ideal*, Sibirsk. Matem. Zh. **4**, No. 5, 1122–1126, (1963) .

[15] S. Okhitin, *Central polynomials of the algebra of second order matrices*, Moscow Univ. Math. Bull. **43** (4), 49–51, (1988).

[16] Yu. P. Razmyslov, *On a problem of Kaplansky*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat **37**, 483-501, (1973). Translation: Math. USSR, Izv. **7**, 479–496, (1973).

[17] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero* (Russian), Algebra i

Logika **12**, 83–113, (1973). Translation: Algebra and Logic **12**, 47–63, (1973).

[18] V.V Shchigolev, *Examples of infinitely basable T-spaces* (Russian), Mat. Sbornik **191**, 143-160, (2000). English translation: Sborn. Math. **191**, 459–476, (2000).

[19] A. A. Albert, B. Muckenhoupt, *On matrices of trace zeros*, Michigan Math. Journal. **4**, 1–3, (1957).