

Abraão Jessé Capistrano de Souza

*A matéria escura como efeito não-linear da
gravitação*

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física Teórica.

Orientador:
Prof.Dr. Marcos Duarte Maia

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

Brasília

Julho de 2006

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A matéria escura como efeito não-linear da gravitação

Por

Abraão Jessé Capistrano de Souza

Orientador

Prof.Dr. Marcos Duarte Maia

Aos meus pais in memoriam.

Agradecimentos

Ao meu orientador Marcos Duarte Maia, pela paciência, confiança, apoio e incentivo fundamentais na realização desse trabalho bem como para o meu amadurecimento profissional.

Ao professor Ademir Santana que sempre esteve presente apoiando e motivando com sua ampla visão de Física e de *fazer* Física.

Aos colegas do grupo de discussão: Cláudio, Daniel Müller, Jackson, Nildsen.

Agradeço ao apoio da minha família em Belém do Pará: minhas irmãs: Ruth, Sula, Denise, Vanise, Mirianilde, Débora e Lídia, que são o suporte da minha vida e que sempre cuidaram de mim. A minha outra família aqui no DF: meu irmão, João Capistrano, e família, pela companhia e amizade. E também com muito amor aos meus eternos bebês: Ana Júlia, David Williams, Daniel Wellington, João Lucas, Maria Vitória, Oswaldo Neto e Valkx Marcelo, que são e sempre serão a alegria da minha vida.

Um agradecimento em especial à Danielle Marques e também aos outros amigos que cultivamos aqui: André Penna, Fábio Moura, Fábio Mendes, Jonathas “Hacker” Antunes, Marcelo “véio” Leineker, “Mr. Neo” Nanderson Syrlon, Ricardo Silva, Ronni Amorim, Roberto Steiner e Pedro “Terminator” Ivo.

Não poderia esquecer de meus professores de graduação em Belém que me ajudaram a trilhar este caminho com muito profissionalismo e sincera amizade: José M.F. Bassalo, Luis Crispino, Marcelo Lima, Sérgio Vizeu e Van Sérgio Alves.

Ao pessoal da secretaria da Física: Célia, Severino e todos outros.

À CAPES, pela bolsa de estudo que nos permitiu a realização desta pesquisa.

*Assim como a arte não consiste apenas em obras de arte,
mas numa “atitude, no espírito artístico”,
a ciência não consiste na acumulação de conhecimento,
mas na criação de novos modos de percepção.*

John Horgan

Resumo

A existência da matéria escura está fundamentalmente relacionada ao problema de curvas de rotação em galáxias espirais o qual é resolvido neste trabalho como um exercício na descrição de movimento lento em Relatividade Geral. Usando a métrica estática de Weyl para descrever a geometria de um disco fino como modelo de galáxia, calculamos a velocidade de rotação de uma estrela na vizinhança da galáxia (borda do disco) por uso do limite *quase-newtoniano* da Relatividade Geral. Este campo gravitacional *quase-newtoniano* é obtido quando usamos a não-linearidade das equações de Einstein no vácuo aliada à condição de movimento lento somente na equação da geodésica. Neste contexto, as equações de Einstein e do desvio geodésico não são utilizadas. Por conseguinte, mostramos que as curvas de velocidade obtidas concordam com as curvas experimentais de observação.

Abstract

The existence of Dark Matter is fundamentally related to the rotation curves problem on spiral galaxies which is solved as an exercise on the description of slow motion in General Relativity. Using the Weyl static metric to describe a thin disk geometry as a galaxy model, we calculate the velocity rotation of a star on the vicinity of a galaxy (the disk edge). The non-linearity of the vacuum Einstein's equations is used to show that when slow motion condition is applied to the geodesic equations alone, while leaving Einstein's and the geodesic deviation equations intact, a "nearly Newtonian" gravitational field is obtained. It is also shown that the obtained curves agree with experimental curves of observation.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução	p. 10
1 O problema da Matéria Escura	p. 14
1.1 Matéria Escura e Curvas de Rotação	p. 14
1.2 O modelo MOND	p. 21
2 O limite <i>quase-newtoniano</i> da Relatividade Geral	p. 25
2.1 Introdução	p. 25
2.2 Limites newtoniano e <i>quase-newtoniano</i>	p. 27
3 Curvas de rotação via limite <i>quase-newtoniano</i>	p. 32
3.1 O modelo de galáxia discoidal para obtenção das curvas de rotação . . .	p. 32
3.2 Aplicações e resultados	p. 38
Conclusão e Perspectivas	p. 43
Apêndice A: Programa para cálculo da equações de Einstein	p. 44
Apêndice B: Cálculo numérico para k_0 e β_0 .	p. 46
Referências	p. 53

Lista de Figuras

1	Simulação de uma curva de rotação <i>típica</i> em $km/s \times Kpc$ de uma galáxia espiral. A linha de pontos representa a curva newtoniana enquanto que o seguimento de reta contínuo representa a curva observada experimentalmente para distâncias superiores ao núcleo da galáxia.	p. 11
2	Discrepância entre os resultados teórico (linhas pontilhadas) e experimental (linha contínua) na curva de rotação de galáxias.	p. 16
3	Representação de um <i>bulk</i> de matéria escura (“dark matter”). [58] . . .	p. 17
4	Composição do Cosmos.	p. 18
5	Composição do Cosmos segundo medições recentes do WMAP [12].(Março de 2006).	p. 19
6	Espectro de potência da radiação cósmica de fundo do terceiro ano de medidas do WMAP [11].	p. 19
7	Curva de rotação do modelo MOND.	p. 23
8	Curva de rotação da Via-láctea a 21 kpc.	p. 39
9	Curva de rotação da NGC3198 a 30 kpc.	p. 39
10	Curva de rotação da UGC6399 a 10 kpc.	p. 40
11	Curva de rotação da UGC6667 a 9 Kpc	p. 40
12	Curva de rotação da NGC3949 a 10 Kpc.	p. 41
13	Curva de rotação da NGC3877 a 13kpc.	p. 41

Introdução

O problema de curvas de rotação em galáxias persiste por mais de 70 anos desde as observações do aglomerado de galáxias COMA por Fritz Zwicky [1] em 1933 com a proposição do problema da matéria faltante cuja solução poderia justificar a alta velocidade do aglomerado. A teoria newtoniana de gravitação não prevê este tipo de comportamento; pelo contrário, o esperado é haver uma diminuição progressiva do valor absoluto da velocidade de rotação para distâncias superiores ao centro da galáxia (tanto quanto de massa). Este argumento advém do fato que o potencial newtoniano decai com o inverso da distância, i.e, para distâncias superiores ao centro galáctico o acoplamento gravitacional entre as partículas deveria se tornar cada vez mais fraco. No entanto isto não ocorre, como constatado por Zwicky.

O gráfico apresentado na figura 1, o qual relaciona velocidade e distância, é o que se denomina *curva de rotação*, sendo este um termo de uso comum em Astrofísica. A velocidade de “rotação” calculada é referente à *velocidade tangencial* de uma estrela como uma função da distância ao centro da galáxia. Por exemplo, se considerarmos uma força gravitacional (agindo sobre esta mesma estrela de massa unitária com velocidade tangencial $v = \omega r$, $\omega = \text{constante}$) tal que $\vec{F} = \frac{v^2}{r} \hat{r}$ e comparando com a força oriunda de um potencial gravitacional Φ temos que

$$\vec{F} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \hat{r}$$

e assim obtemos a expressão bem conhecida

$$v(r) = \sqrt{\left| r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|} \tag{1}$$

a qual usaremos na determinação da velocidade de “rotação” ou tangencial. Este potencial Φ é, a princípio, genérico. Como mostraremos, o potencial Φ quando gerado por auto-interação depende da escolha da simetria do campo gravitacional que se está usando. Por exemplo, se considerarmos uma geometria esfericamente simétrica, como a solução de Schwarzschild das equações de Einstein no vácuo, obtemos um potencial gravitacional que *coincide* com o potencial newtoniano. No entanto, quando usamos uma geometria dife-

rente como a de um disco ou cilindro fino o potencial gravitacional gerado difere do caso newtoniano. Isto somente é possível quando quebramos o princípio da *covariância generalizada* da Relatividade Geral. Este é o ponto central do trabalho que iremos discutir mostrando que encontramos uma solução consistente com os dados observacionais.

Na figura 1, podemos observar que enquanto a velocidade newtoniana (linha de pontos) decai, a velocidade observada (seguimento de reta contínuo) tende a se tornar constante (ou aumentar, em alguns casos). Com a evolução dos métodos de observação, tornou-se cada vez mais clara a discrepância entre as curvas observadas e as previsões da teoria newtoniana.

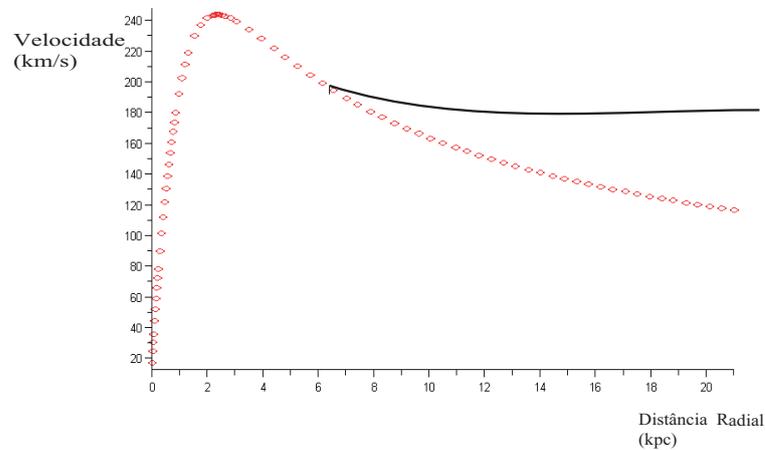


Figura 1: Simulação de uma curva de rotação típica em $km/s \times Kpc$ de uma galáxia espiral. A linha de pontos representa a curva newtoniana enquanto que o seguimento de reta contínuo representa a curva observada experimentalmente para distâncias superiores ao núcleo da galáxia.

Uma correção para tal desajuste, mantendo a teoria newtoniana, seria obtida por adição de matéria escura bariônica à massa visível. Como exemplo deste tipo de matéria escura temos planetas de massa da ordem de Júpiter os quais seriam responsáveis *a priori* pela estabilidade da curva de rotação. Embora tais “planetas” sejam observados, a quantidade necessária para poder corrigir as curvas de rotação é enorme. Isto tem sido fonte de questionamentos e é o que motivou explicações alternativas, inclusive com a hipótese da matéria escura *não*-bariônica e propriedades da gravitação que ainda não foram observadas.

A Relatividade Geral, como correção à teoria newtoniana, seria uma candidata “natural” para explicar o problema de curvas de rotação. No entanto, no centro da galáxia (ou bojo) a Relatividade Geral possui como aproximação o limite newtoniano. Se estendermos

a análise à aproximação pós-newtoniana encontraremos um potencial gravitacional que decai ($1/r^3$) o que não contribui para a correção da curva de rotação teórica [2].

Atualmente, com a disposição de vários dados experimentais em Cosmologia e Astrofísica, muitos outros esforços têm sido aplicados para tentar justificar a velocidade de rotação. Alguns modelos teóricos como alternativa à matéria escura podem ser citados como a modificação da teoria newtoniana (MOND¹) [3,4], a generalização da Relatividade Geral por uso de um campo escalar tensorial antisimétrico [5,6], modelos de Branas [7–10], dentre outros.

Recentemente, as medidas do satélite WMAP [11,12] revelaram uma quantidade de 22% da densidade de energia do universo sendo mais do que 90% deste percentual é formado por matéria escura *exótica* cujos constituintes ainda são especulados. Atualmente, isto se tornou um grande problema para os físicos teóricos que querem explicar o problema de curvas de rotação somente por gravitação.

O objetivo deste trabalho é de propormos um modelo que justifique o comportamento peculiar da velocidade de rotação de galáxias espirais, em grande parte como resultado da não-linearidade da curvatura do campo gravitacional [13]. Para tanto usamos um simples modelo de disco fino, por meio da métrica de Weyl [16], para representarmos uma galáxia. A velocidade de rotação é obtida por solução das equações de Einstein no vácuo em conjunto com o limite *quase*-newtoniano da Relatividade Geral não havendo necessidade de quaisquer hipóteses adicionais sobre as equações de Einstein. Apenas tomamos uma análise conceitual da equação da geodésica e das equações de Einstein sob a condição de movimento lento. Com isso quebramos a covariância generalizada da Relatividade Geral. Não acrescentamos *nada* além do que já existe na teoria de Einstein e de Newton.

Cabe comentar que, a princípio, tínhamos o objetivo de fazer o tratamento de curvas de rotação pela teoria covariante de Branas [14,15]. O modelo consistia em tomarmos a geometria de um disco fino, dado inicialmente pelo elemento de linha quadrimensional de Weyl, imerso em um espaço maior chamado *bulk*. A curvatura extrínseca² $k_{\mu\nu}$ seria o elemento geométrico o qual iríamos atribuir os efeitos causados pela matéria escura. No entanto, devido à questões de inconsistência de equações não-lineares não pudemos encontrar algo conclusivo, mas isto nos possibilitou investigar posteriormente uma solução partindo

¹Do inglês, *Modified Newtonian Dynamics*.

²A curvatura extrínseca ou *Segunda forma fundamental de Gauss* mede a convergência/divergência dos vetores normais à uma hipersuperfície σ , i.e, a projeção da derivada covariante do vetor normal à hipersuperfície em questão.

da Relatividade Geral. Tentamos, ainda com Branas, reproduzir o modelo MOND ou *Modificação da Dinâmica Newtoniana* pelo relativo sucesso do mesmo embora sendo um modelo puramente fenomenológico. Não obtivemos sucesso já que a solução dependia de hipóteses muito restritivas o que poderia comprometer a consistência do trabalho. Curiosamente, com os novos dados do WMAP [11], o modelo MOND tem se mostrado incompatível com o espectro de potência da radiação cósmica de fundo.

No primeiro capítulo faremos uma introdução ao problema e modelos que tentam tratar a matéria escura. Os detalhes dos procedimentos aplicados serão apresentados nos capítulos 2 e 3 bem como a comparação com as curvas experimentais. Como exemplos, aplicamos o modelo de disco fino à determinação da velocidade de rotação das galáxias: Via-láctea (usando o sol como partícula-teste), NGC3198 e galáxias do aglomerado Ursa Maior: NGC3949, NGC3877, NGC3769, UGC6399 e UGC6667. Nos apêndices A e B encontram-se informações acerca da programação computacional utilizada neste trabalho.

1 *O problema da Matéria Escura*

...Um desafio à profundidade e ao significado...

Jean Baudrillard, Simulacres et simulation

Aqui faremos uma breve descrição do problema da matéria escura a qual originou-se do problema de curvas de rotação de galáxias espirais. Uma descrição das tentativas de explicação da matéria escura também é feita, haja vista a não-trivialidade do problema.

1.1 Matéria Escura e Curvas de Rotação

Com o avanço das técnicas observacionais, deu-se o surgimento de novos problemas em Cosmologia e Astrofísica, agora fundamentadas em bases experimentais mais sólidas. Um dos grandes problemas atuais nestas áreas de pesquisa é o problema das curvas de rotação de galáxias o qual retrata um comportamento diferenciado da velocidade de rotação não previsto pela teoria de Kepler ou de Newton. Há uma discrepância entre a velocidade de rotação da teoria newtoniana que considerava apenas a matéria visível e a velocidade de rotação experimental observada nos discos de galáxias espirais. A questão fundamental é que existe uma diferença no *afélio*¹ inconsistente com a predição teórica que considera apenas a atuação da força gravitacional da matéria visível. Neste sentido, o afélio observado é mais veloz do que se esperava, onde pela teoria newtoniana, o acoplamento gravitacional entre as partículas seria menor. Por conseguinte, como a teoria não explicava tal fenômeno, motivou-se a busca por novos modelos.

A idéia da existência de uma *Matéria Escura* é uma das principais propostas para explicar o problema que curvas de rotação. Consiste em uma espécie de matéria que não absorve nem emite luz ou qualquer faixa de radiação eletromagnética mas exerce uma forte influência gravitacional sobre uma estrela, o que poderia explicar a aceleração no

¹Trajectoria na qual, no caso em particular, a estrela encontra-se mais afastada do centro da galáxia ou bojo (*Bulge*).

afélio estelar. Este fenômeno ficou conhecido como *Estabilização das Curvas de Rotação*².

Esta idéia de massa adicional para corrigir o movimento de órbitas ou velocidade de rotação foi utilizada mesmo dentro dos limites do nosso sistema solar. Temos dois exemplos a citar. O primeiro é o problema de precessão do periélio de mercúrio onde se cogitava a existência de um pequeno planeta não observado chamado *Vulcano* cuja órbita estaria entre sol e mercúrio. No entanto, com o advento da Relatividade Geral em 1915 este problema foi resolvido teoricamente por meio do limite pós-newtoniano desta teoria. O segundo exemplo é referente às perturbações na órbita de Urano as quais eram incompatíveis com as previsões teóricas. Supôs-se a existência de um novo planeta mais tarde observado: Netuno [2]. É importante notar que Vulcano e Netuno eram a “matéria escura” de suas épocas.

Uma referência pioneira sobre matéria escura encontra-se no trabalho publicado pelo astrônomo Fritz Zwicky [1](1898-1974) em 1933 em que ao fazer estudos sobre os aglomerados ou *Clusters* de galáxias, em particular o aglomerado *Coma*, notou que a alta velocidade desses aglomerados não poderia ser justificada apenas levando-se em consideração a gravidade apresentada pela massa visível. Zwicky encontrou uma massa total do aglomerado cerca de 400 vezes maior do que o esperado (considerando o número de galáxias e o brilho do cluster). Portanto, algo a mais do que a massa visível do cluster deveria ser considerado, foi então que chamou de *Problema de déficit de massa* [17, 18]. Desta forma a matéria escura está relacionada tanto ao problema de velocidade como o de massa em galáxias.

Além do problema de massa e velocidade de rotação em *clusters* [19], as mesmas questões surgem quando tratamos de galáxias elípticas onde estudos mostram possíveis evidências de auréolas de matéria escura [20–23]. Em 1975, tivemos a primeira evidência experimental do problema das curvas de rotação por Vera Rubin e Kent Ford [18]. Em 1978, tivemos outras importantes evidências experimentais de que as galáxias espirais não giram como o esperado pela teoria newtoniana [24].

Contudo, especulou-se ainda que a matéria escura poderia ser apenas corpos cósmicos quaisquer muito massivos, como planetas jovianos, i.e, da ordem de massa de Júpiter. Porém, embora tal situação de fato ocorra na realidade, ainda não é capaz de explicar, por exemplo, o problema de déficit de massa nas galáxias espirais, o aumento de velocidade e massa em *clusters* de galáxias [25] que ainda continua uma questão em aberto. Cabe lembrar que, se matéria escura somente interage gravitacionalmente, a sua detecção direta

²Do inglês, *Flattening of Galaxies Rotation Curves*.

torna-se difícil. Porém existem certos mecanismos de medição. Um destes mecanismos nos fornece evidências indiretas como o efeito de lentes gravitacionais³, particularmente o efeito de lente gravitacional *fraco* (“weak lensing”) que possui as características de pequenas distorções dos objetos do *background* do espaço-tempo, originalmente proposto em 1936 por Albert Einstein. Este efeito é usado para o mapeamento e medição da matéria escura até o nível de influência da mesma na coesão de um cluster [17, 26]. Uma evidência recente, fevereiro de 2005, mostrada um grupo de pesquisadores liderados por Robert Minchin da *Cardiff University*, detectaram a galáxia VIRGOHI21 na *University of Manchester* a qual é constituída quase em sua totalidade por matéria escura [27].

Na figura 2, mostra-se a incompatibilidade dos resultados com base na teoria de gravitação newtoniana (linhas pontilhadas) e os dados experimentais (linha contínua).

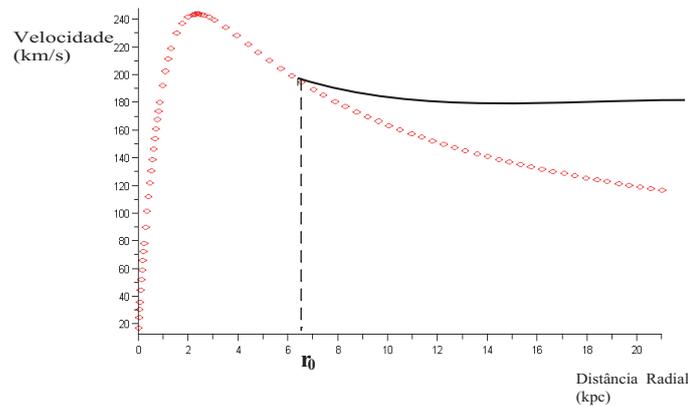


Figura 2: Discrepância entre os resultados teórico (linhas pontilhadas) e experimental (linha contínua) na curva de rotação de galáxias.

Em referência à figura 2, temos que as curvas se diferenciam a partir de uma dada distância r_0 que representa o centro da galáxia. Note que quanto mais longe do centro, a diferença entre as curvas torna-se mais significativa e evidente. Então, a teoria newtoniana é efetiva somente a distâncias até r_0 . Para tentar corrigir isso, supôs-se que a Relatividade Geral, como correção à teoria newtoniana, seria uma candidata “natural” para tratar do problema de curvas de rotação. No centro da galáxia a gravitação é mais forte e portanto é onde a Relatividade Geral valeria. No entanto, nesta região ela concorda com a teoria newtoniana. Isto é devido à grande concentração de massa no centro da galáxia que ao gerar um forte campo gravitacional torna o núcleo um sistema esféricamente simétrico. Por conseguinte, a solução de Schwarzschild é uma solução simetricamente esférica e exata

³Consiste essencialmente no desvio da luz nas proximidades de um corpo muito massivo devido sua atração gravitacional.

das equações de Einstein. Ao fazermos o cálculo do potencial gerado pela solução de Schwarzschild, encontramos um potencial que coincide com o potencial newtoniano⁴. Se estendermos a análise ao limite pós-newtoniano da Relatividade Geral encontraremos um potencial gravitacional que decai ($1/r^3$) o qual não contribui para a correção da curva de rotação teórica [2]. Isto implicaria que as soluções das Equações de Einstein exatas ou aproximadas não dariam contribuições para explicar o problema. Tal hipótese despreza efeitos de não-linearidade das equações de Einstein pois leva em consideração somente a força do campo gravitacional. Por outro lado, mostraremos que partindo de uma solução exata das Equações de Einstein e de uso somente da equação da geodésica aliada à condição de campo gravitacional fraco, obtemos um potencial gravitacional que corrige as curvas de rotação teóricas. Para tanto quebramos a covariância da Relatividade Geral com a condição de movimento lento deixando as Equações de Einstein e do desvio geodésicos intactas.

O modelo mais simples de matéria escura consiste na chamada *Hipótese das auréolas de matéria escura*⁵ pelo qual uma galáxia estaria imersa em um espaço maior⁶. Como mostrado na figura 3, este espaço maior estaria preenchido por matéria escura o que tornaria a curva de rotação estável ou *flat* para distância além do núcleo da galáxia.

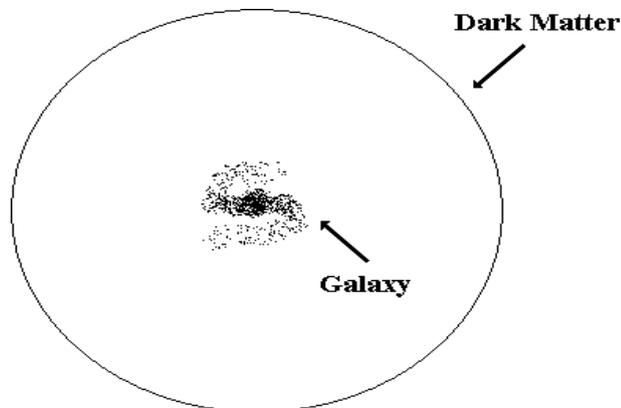


Figura 3: Representação de um *bulk* de matéria escura (“dark matter”). [58]

Cabe lembrar que, em detrimento ao que é mostrado na figura 3, a rigor não temos como determinar uma fronteira propriamente dita onde a matéria escura estaria confinada com uma galáxia imersa na mesma pela dificuldade técnica de sua detecção, portanto o

⁴No segundo capítulo mostramos em mais detalhes como ocorre esta coincidência por meio do limite newtoniano da Relatividade Geral.

⁵Do inglês, *hypothesis of dark matter halos*. Embora seja correto em português o termo *auréola* como tradução de *Halo* do inglês na denominação do modelo, comumente emprega-se o termo *Halo* de matéria escura.

⁶Mais comumente chamado pelo termo inglês *bulk*.

modelo é apenas uma estimativa de como recuperar uma força gravitacional que deveria existir. A figura 4 fornece alguns dados interessantes sobre a composição do Cosmos⁷ como conhecidos até 2005.

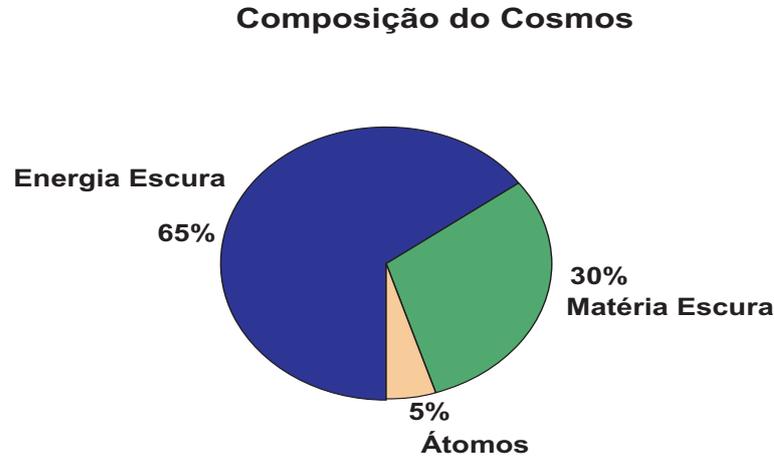


Figura 4: Composição do Cosmos.

Note que o universo como um todo é formado por estruturas que não temos referências precisas de suas constituições, que são a matéria e energia escura, uma vasta área de investigação. A energia escura [14] tem um efeito repulsivo e difere muito da matéria escura, que tem efeito atrativo, como exemplificado pelo problema de curvas de rotação abordado por este trabalho, e curiosamente apenas aproximadamente 5% é o universo “conhecido”.

Contudo, note como estes valores estão consideravelmente diferentes nas recentes⁸ medidas do satélite WMAP [11,12] as quais revelaram uma quantidade de 22% de matéria escura, 74% de energia escura e apenas 4% de átomos(matéria visível comum), como mostrado pela figura 5. Os dados do WMAP ainda implicam que a maior parte da matéria escura é não-bariônica. Isto traz restrições muito importantes aos modelos de gravitação com base no conceito de inércia os quais tentam resolver o problema apenas com matéria comum como o MOND⁹. Como é uma teoria baseada na inércia, o MOND possui uma restrição no segundo pico no espectro de potência da radiação cósmica de fundo. Como neste modelo somente há a consideração de matéria visível este pico é menor, já que mais radiação é absorvida pela matéria em detrimento do que foi medido pelo satélite. Na figura 6, é mostrado o espectro de potência da radiação cósmica de fundo medido pelo

⁷Informação obtida em palestra proferida pelo prof. J.S Alcaniz (Observatório Nacional-MCT) no XXVI Encontro Nacional de Partículas e Campos(2005).

⁸Março de 2006.

⁹Detalhes sobre o MOND serão apresentados na próxima seção.

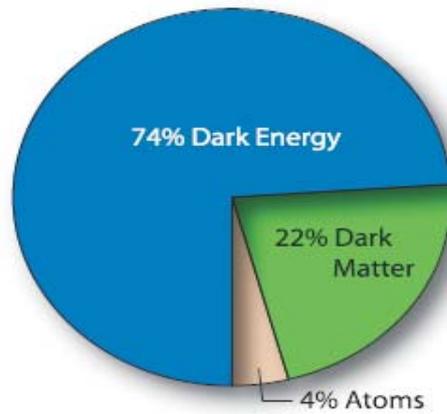


Figura 5: Composição do Cosmos segundo medições recentes do WMAP [12].(Março de 2006).

WMAP [11].

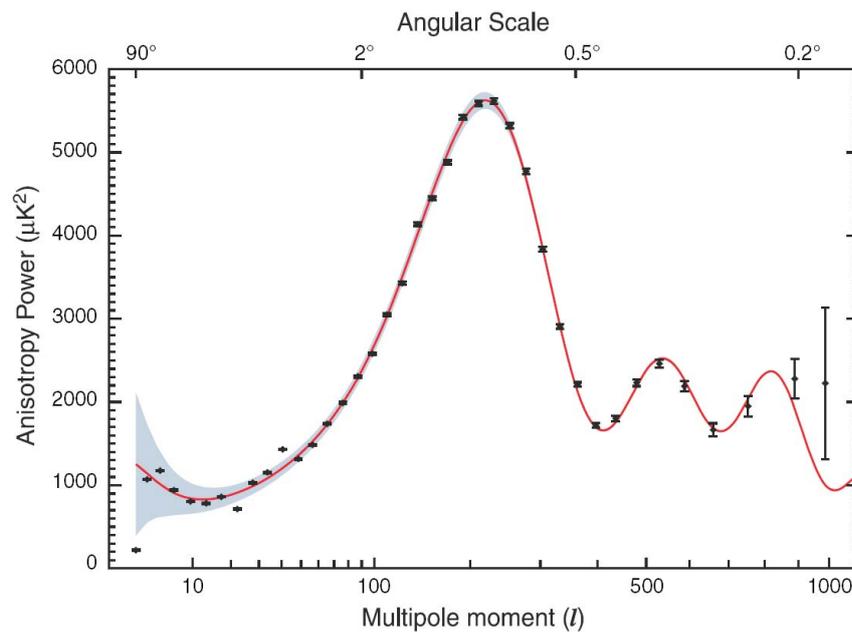


Figura 6: Espectro de potência da radiação cósmica de fundo do terceiro ano de medidas do WMAP [11].

Por outro lado, estas restrições não se aplicam à teorias gravitacionais que sejam capazes de produzir gravitação no vácuo, por auto-interação. Os efeitos não-lineares das equações de Einstein irão contribuir como matéria escura não-bariônica na forma de auto-interação do campo gravitacional no vácuo. Isto é obtido quando aplicamos a condição de movimento lento ($v \ll c$) à equação da geodésica sem alterar as equações de Einstein [13].

Como veremos nos capítulos seguintes, isso não implica em recuperar o limite newtoniano da Relatividade Geral. Desta forma conseguimos corrigir as curvas de rotação e também estar consistentes com o espectro de potência da radiação cósmica de fundo. As medições do WMAP reforçam ainda a evidência de energia escura consistentes com um universo plano.

Por conseguinte, no sentido de tentar entender a matéria escura, existem duas abordagens principais [28, 29]:

- Matéria Escura Quente (*Hot Dark Matter*-HDM): É constituída partículas relativísticas. Dentre os principais candidatos à matéria escura quente temos os neutrinos e SIMPs;
- Matéria Escura Fria (*Cold Dark Matter*-CDM): A constituição básica é de partículas não-relativísticas. Temos como principais candidatos Wimps, MACHOs, áxions e neutralinos.

As partículas foram por sua vez classificadas em bariônicas e não-bariônicas. As bariônicas são subdivididas em [18, 29]:

- WIMPs (*Weakly Interactions Massive Particles*): Partículas hipotéticas que interagem a nível gravitacional e de força fraca, portanto difíceis de detectar. Foram propostas no intuito de explicar a matéria escura fria;
- MACHOs (*Massive Compact Halo Objects*): É uma denominação genérica a corpos massivos, que não emitem luz própria, que possam explicar a presença de matéria escura nas auréolas das galáxias, como, por exemplo, planetas de ordem de massa de Júpiter.

Enquanto que as não-bariônicas possuem a seguinte subdivisão:

- SIMPs (*Strongly Interactive Massive Particle*) [30]: Propostas no sentido de que poderiam formar a matéria escura, apesar de interagirem a nível forte com matéria visível;
- Neutrinos: São férmions de spin $1/2$ e de massa próxima a zero. Interagem a nível de interações fraca e gravitacional;
- Existe também a proposta supersimétrica dos *neutralinos* [29] como possível candidato à matéria escura fria, porém, obviamente, ainda depende da confirmação da existência da supersimetria;

- Áxions [29]: Partícula hipotética postulada pela *teoria de Peccei-Quim* na tentativa de resolver o problema da simetria CP (carga-paridade) em Cromodinâmica Quântica. Possuem massa muito pequena ($10^{-6} - 10^{-2} eV/c^2$) e não apresentam carga elétrica, portanto praticamente invisível para matéria ordinária e assim poderia ser usado para explicar a matéria escura;
- Matéria-espelho (*Mirror Matter*) [31]: Quantidade hipotética de matéria sugerida por Tsung-Dao Lee e Chen-Ning Yang em suas formulações de uma teoria de não-conservação da paridade. A matéria espelho teria as seguintes características principais:
 - As partículas-espelho têm simetrias de rotação, translação e reflexão;
 - Para cada partícula-espelho deve existir uma companheira equivalente, i.e, uma antipartícula-espelho;
 - A interação é a nível da força fraca com a matéria ordinária.

Obviamente, gera-se espaço para críticas inerentes à classificação mostrada acima, o que advém da questão de que ainda não conhecemos de fato a natureza intrínseca da matéria escura.

1.2 O modelo MOND

Em 1983, M. Milgrom sugeriu uma alteração na equação dinâmica de Newton dando origem ao modelo MOND [3, 4] no intuito, *a priori*, de explicar as curvas de rotação como um efeito gravitacional em detrimento à existência da matéria escura. É um modelo inercial de gravitação que leva em consideração apenas a matéria bariônica visível. Embora já expostas as restrições observacionais do WMAP acerca de teorias inerciais de gravitação, ainda cabe citar o MOND aqui pela atenção substancial dada ao modelo desde sua proposição há mais de 20 anos atrás.

A proposta de Milgrom consistia na alteração da segunda lei de Newton para analisar corpos submetidos à baixa aceleração, como ocorre em escala galáctica, em que fazia a modificação na equação $\vec{F} = m\vec{a}_N$ tal que

$$\vec{F} = m \left(\mu \left(\frac{\vec{a}}{a_0} \right) \right) \vec{a} \quad (1.1)$$

onde \vec{a} é a aceleração modificada do MOND e \vec{a}_N é a aceleração Newtoniana usual cuja

relação com \vec{a} é

$$\vec{a}_N = \mu\left(\frac{\vec{a}}{a_0}\right)\vec{a} \quad (1.2)$$

O termo $\mu\left(\frac{\vec{a}}{a_0}\right)$ é uma função determinada de acordo com o regime gravitacional e que obedece à seguinte condição:

$$\mu(x) = \begin{cases} x \gg 1, & \mu(x) = 1 \longrightarrow \text{regime Newtoniano} \\ x \ll 1, & \mu(x) = x \longrightarrow \text{regime MOND} \end{cases} \quad (1.3)$$

A aceleração a_0 é uma constante tendo um valor aproximado [3,4]

$$a_0 \approx 2 \times 10^{-8} (H_0/50 \text{ km.s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})^2 \text{ cm.s}^{-2} \approx cH_0$$

sendo H_0 a constante de Hubble ($70 \text{ km.s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} (+2.4/ - 3.2)$) [11].

Bekenstein & Milgrom [25] sugeriram a eq.(1.1) para a descrição do movimento de objetos luminosos em um campo estático de um corpo massivo. Para a análise das curvas de rotação [3,32], por exemplo, a função $\mu(x)$ é sugerida com

$$\mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

que substituída na eq.(1.1) leva à velocidade de rotação, que se mostra uma curva constante. Para tanto iremos tomar a força gravitacional exercida entre uma galáxia e uma estrela cujo módulo será dado por

$$F = \frac{G_N M m}{r^2} \quad (1.4)$$

onde G_N é a constante gravitacional Newtoniana, M é a massa visível do centro da galáxia, m é a massa da estrela e r , a distância do bojo à estrela.

Desta forma igualando as eqs.(1.1) e (1.4), obtemos

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) a = \frac{G_N M}{r^2}$$

Mas para r muito grandes, pela definição de $\mu(x)$ na eq.(1.3), temos que $a \ll a_0$, sendo a a aceleração, portanto

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) a = \left(\frac{a}{a_0}\right) a = \frac{G_N M}{r^2}$$

obtendo assim

$$a = \frac{(G_N M a_0)^{1/2}}{r} \quad (1.5)$$

no entanto, ao tomarmos uma órbita circular, i.e, $a = \frac{v^2}{r}$, obtemos a velocidade MOND

$$v = (G_N M a_0)^{1/4} \quad (1.6)$$

Na figura 6, mostramos a curva do MOND para uma galáxia qualquer. A curva de rotação torna-se *flat* na situação em que a estrela está longe do bojo, com velocidade constante e sem dependência radial. Este resultado difere da equação mostrada em (1) a qual é uma função da distância.

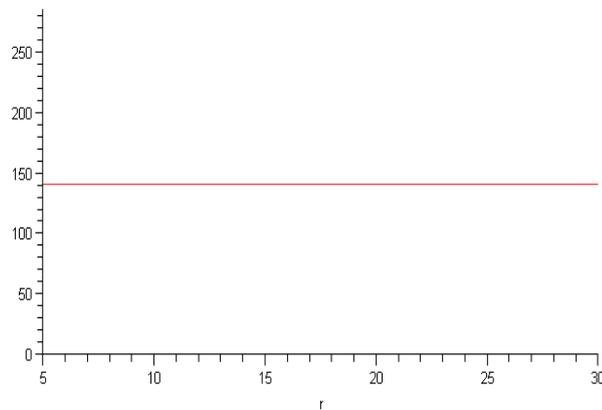


Figura 7: Curva de rotação do modelo MOND.

Contudo, existem outras propostas que tratam do problema de curvas de rotação. Uma proposta a ser comentada é uma generalização da Relatividade Geral baseada em um tensor métrico pseudo-Riemanniano e em um campo tensorial anti-simétrico $F_{\mu\nu\lambda}$ chamada MSTG¹⁰ [5, 6]. A constante gravitacional G é uma função da distância sendo um dos parâmetros de ajuste desta teoria.

Outra tentativa é a Modificação da noção de tempo na Relatividade Geral, tal que no limite newtoniano o tempo seria diferente do tempo absoluto newtoniano [33, 34]. Outra teoria impõe a adição de um campo escalar às equações de Einstein resultando em uma teoria escalar-tensorial [35]. Algumas propostas sugerem que tomemos ordens superiores de aproximação em Relatividade Geral onde se poderia constatar efeitos sutis de curvatura do campo gravitacional [36, 37]. Temos também modelos em que a constante cosmológica é considerada componente de matéria escura [38].

Existem também modelos de Branas [7–10] para resolver o problema de curvas de

¹⁰metric-skew-tensor-gravity.

rotação. Como por exemplo, a adição de campos escalares massivos em um *bulk* não-compacto [39, 40] para compensar a deficiência de massa em galáxias.

Em termos de desenvolvimento deste trabalho, originalmente pensamos em abordar o problema em 5 dimensões por uso da *Teoria Covariante de Branas* [14, 15] no vácuo. Conjecturamos que a curvatura extrínseca poderia ser um campo tensorial de segunda ordem capaz de corrigir a curva de rotação teórica. Entretanto, por imposição das equações teríamos de fazer hipóteses acerca da solução a qual deveria ser compatível(consistente) com o sistema de equações. A princípio, isto tornou-se uma tarefa inviável. Por outro lado, motivou-nos a trabalhar em uma solução 4-dimensional de posse da mesma simetria de disco fino usada em branas.

No capítulo seguinte, iremos mostrar como a aproximação *quase-newtoniana* da Relatividade Geral pode ser útil no problema de curvas de rotação.

2 *O limite quase-newtoniano da Relatividade Geral*

Nothing is what it seems

Slipknot, Duality

Neste capítulo será apresentado uma revisão geral das aproximações newtoniana e *quase-newtoniana* em Relatividade Geral, em que a segunda aproximação citada serve de base para o cálculo ulterior de curvas de rotação.

2.1 Introdução

Para o tratamento do problema de curvas de rotação a partir da Relatividade Geral, devemos tomar uma análise mais criteriosa de seus fundamentos como não-linearidade e covariância generalizada. Por exemplo, como podemos fazer movimento lento em Relatividade Geral?. A princípio, esta teoria seria uma candidata “natural” para propor a correção necessária à curva de rotação newtoniana.

A teoria da Relatividade Geral possui o que poderíamos chamar de três axiomas básicos em sua construção. Os dois primeiros são chamados respectivamente princípios da Equivalência e da Covariância Generalizada. Um terceiro axioma é a definição da ação de Einstein que dará origem as equações de Einstein as quais descrevem como a geometria e a matéria se relacionam .

O princípio da equivalência é baseado na igualdade das massas inercial e gravitacional objetivando estender o princípio da relatividade (não-simultaneidade de eventos) a sistemas de referência acelerados. Por outro lado, o princípio da Covariância Generalizada informa-nos que não há sistemas de coordenadas privilegiados, i.e, as equações tensoriais de campo (equações de Einstein) devem ter a mesma forma em quaisquer sistemas de coordenadas [41].

Note que na Relatividade Geral as equações de movimento advém das equações de campo de Einstein as quais são equações *não-lineares*. As equações da geodésica são lineares na conexão enquanto que as equações de Einstein são quadráticas nesta mesma conexão. Estas características influenciam no “amortecimento” da força do campo gravitacional da Relatividade Geral. Isto é, por exemplo, se tomarmos apenas a equação da geodésica sob as hipóteses de baixa velocidade e campo fraco, este campo será atenuado de forma mais suave, pois a conexão é linear nesta equação. Algo diferente ocorrerá ao tomarmos as equações de Einstein, pois sendo que a conexão é quadrática neste caso, o campo gravitacional será mais atenuado. Isto significa que, a princípio, um campo gravitacional formado somente a partir da equação da geodésica terá características diferentes, já que não é tão forte quanto o campo gravitacional da Relatividade Geral ou tão fraco quanto o campo newtoniano. Este “novo” campo gravitacional será denominado campo *quase-newtoniano* [42], como mostraremos neste capítulo.

No entanto, diferentemente da Relatividade Geral, na teoria newtoniana a equação de movimento é *postulada* separadamente da equação de campo as quais são equações *lineares*. Portanto, para obtermos o limite newtoniano da Relatividade Geral devemos restaurar a equação de movimento de Newton através da equação da geodésica quebrando a covariância generalizada, porém a não-linearidade ainda é conservada. Para obtermos o limite newtoniano completo devemos restaurar também a equação de campo de Poisson por uso da equação do desvio geodésico para quebrarmos a não-linearidade das equações de Einstein. Assim podemos postular as equações de Newton e Poisson, obtendo o limite newtoniano. No entanto, como iremos mostrar, se restaurarmos apenas a equação de movimento *tipo-Newton* sem utilizarmos as equações de Einstein e do desvio geodésico, obtemos um limite diferente do newtoniano, que é o limite *quase-newtoniano*.

Infeld e Plebanski [43] fazem uma demonstração muito interessante e consistente da restauração da Relatividade Geral a partir das equações de Newton, mostrando ainda que a equação da geodésica está contida nas equações de Einstein. A partir das equações de Newton, eles tomaram **sucessivas** aproximações da métrica com o parâmetro $v/c \ll 1$. Após um extenso desenvolvimento, uma vez que as equações da geodésica estejam restauradas, o postulado das equações de Newton pode ser abandonado. Apesar de ter sido conjecturado por Einstein, isto não estava claro até então desde o advento da Relatividade Geral em 1915.

A motivação principal aqui é de fazer uma descrição de movimento lento em Relatividade Geral independente de quão forte seja o campo gravitacional.

2.2 Limites newtoniano e *quase*-newtoniano

Vamos expor agora a chamada aproximação ao movimento lento (baixas velocidades comparadas à velocidade da luz) da Relatividade Geral. Para tanto, iremos assumir que as velocidades v envolvidas são bem inferiores à velocidade da luz, i.e, $v \ll c$ [44]. Consideramos também a hipótese de campo gravitacional fraco, porém desvinculada da velocidade. Assim temos:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\delta h_{\mu\nu}^2) \quad (2.1)$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \delta h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\delta h_{\mu\nu}^2) \quad (2.2)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski¹ adicionada de um termo pequeno $\delta h_{\mu\nu}$ tal que $\delta h_{\mu\nu}^2 \ll \delta h_{\mu\nu}$. A princípio, $\delta h_{\mu\nu}$ não está relacionado à condição de baixa velocidade $v \ll c$. Uma partícula qualquer caindo em um campo gravitacional oriundo da solução exata das equações de Einstein não irá ter velocidade próxima à velocidade da luz. Isto torna-se evidente, por exemplo, se considerarmos uma estrela típica da ordem da massa solar² orbitando o centro da galáxia, portanto sob um forte campo gravitacional. Esta estrela não atinge a velocidade da luz ao orbitar a galáxia, pelo contrário, sua velocidade é bastante inferior à da luz, da ordem de 250km/s. Com isso, vemos que a condição de movimento lento $v \ll c$ não deve estar vinculada à força do campo gravitacional. Observe ainda que a condição $v \ll c$ também não está vinculada de imediato ao limite newtoniano. Usando o mesmo exemplo da estrela de ordem de massa solar, veja que mesmo à baixa velocidade o limite newtoniano (ou propriamente a teoria newtoniana) não é capaz de resolver o problema das curvas de rotação. Posteriormente, como mostraremos, para a obtenção do limite *quase*-newtoniano da Relatividade Geral, esta hipótese inicial de campo fraco será abandonada, pois este mesmo campo será restaurado por auto-interação da gravitação.

Dando continuidade às considerações sobre movimento lento, vamos tomar agora um determinado tempo δt , em que um corpo a baixa velocidade percorre uma distância δx^i onde ($i = 1, 2, 3$), tal que:

$$\delta x^i \sim v \delta t \implies \delta x^i \approx \epsilon \delta x^4$$

$$\frac{\epsilon}{\delta x^i} \sim \frac{1}{\delta x^4}$$

onde $\epsilon = \frac{v}{c}$ e $\delta x^4 = c \delta t$.

¹Usamos a assinatura (+ + + -).

²Uma massa solar é da ordem de $1 \times 10^{30} kg$.

Tomando uma função arbitrária f

$$\frac{\partial f}{\partial x^4} \sim \epsilon \times \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (2.3)$$

Assim temos que as variações da coordenada relativística x^4 são aproximadas a um movimento mais lento nas dimensões espaciais, sendo $\epsilon \ll 1$ ($v \ll c$).

Se quisermos reproduzir o limite newtoniano é necessário que sejamos capazes de reproduzir a equação de campo gravitacional de Poisson. Para tanto, vamos tomar a seguinte situação: tome duas partículas teste, uma está em uma ponto $x^i + \xi^i$ e a outra em x^i . Ambas estão caindo em queda livre. De acordo com a teoria newtoniana temos a aceleração relativa entre duas partículas

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = \frac{d^2(x^i + \xi^i)}{dt^2} - \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right|_{x^i + \xi^i} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right|_{x^i} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \xi^j$$

Notando que o termo $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}$ é o laplaciano do potencial que podemos escrever $\nabla^2 \Phi$.

De posse da condição de campo gravitacional fraco da eqs.(2.1) e (2.2), temos os símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \\ \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} (\delta h_{\mu\sigma,\nu} + \delta h_{\nu\sigma,\mu} - \delta h_{\mu\nu,\sigma}) + \mathcal{O}(\delta h_{\mu\nu}^2) \end{aligned}$$

Tomando agora a equação do desvio geodésico na Relatividade Geral temos

$$\frac{D^2 \xi^i}{d\tau^2} = \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = -\mathcal{R}_{4j4}^i \xi^j$$

sendo que para o tensor de Ricci, temos:

$$\mathcal{R}_{ij} = \Gamma_{ik,j}^k - \Gamma_{ij,k}^k + \mathcal{O}(\delta h_{ij}^2)$$

tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{44} &= \mathcal{R}_{4i4}^i = \underbrace{\mathcal{R}_{444}^4}_{=0} - \Gamma_{44,i}^i + \mathcal{O}(\delta h_{ij}^2) \\ &= -\frac{1}{2} \delta h_{44,ii} + \mathcal{O}(\delta h_{ij}^2) = -\nabla^2 \Phi + \mathcal{O}(\delta h_{ij}^2) \end{aligned}$$

e, a partir das equações de Einstein em meio material, $\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, podemos encontrar que $\mathcal{R}_{44} = 4\pi\rho$. Temos então a equação de campo de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho$$

Esta equação é fundamental para completarmos a redução da Relatividade Geral ao limite newtoniano, desde que façamos a construção do postulado de movimento pela equação da geodésica obtendo o potencial $\Phi = -\frac{GM}{r}$. É importante notar que a redução ao limite newtoniano da Relatividade Geral é uma *opção* e que depende da recuperação dos postulados de campo e de movimento. No entanto, o que aconteceria se recuperássemos somente a equação da geodésica deixando intactas as equações de Einstein e desvio geodésico?. O potencial relacionado a esse tipo de aproximação é chamado de potencial “*quase-newtoniano*” [42]. A denominação “*quase-newtoniano*” deve-se ao fato de que o limite newtoniano não está completo, já que se considera somente a equação da geodésica, pois esta equação está relacionada mais diretamente ao movimento e por razões já citadas, o força do campo cai linearmente.

Mostraremos agora um desenvolvimento diferente àquele apresentado na maioria dos livros básicos de Relatividade Geral para reproduzirmos o limite *quase-newtoniano*. Partindo novamente das hipóteses de campo fraco e baixa velocidade, trabalharemos apenas a equação da geodésica.

Para tanto, podemos considerar uma partícula se move lentamente ($v \ll c$) sob uma geodésica tipo tempo tal que $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Assim temos a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

que parametrizando em termos da coordenada $x^4 = -ct$ temos que

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} + \Gamma_{44}^i \frac{dx^4}{cdt} \frac{dx^4}{cdt} + \Gamma_{4k}^i \frac{dx^4}{cdt} \frac{dx^k}{cdt} + \Gamma_{j\nu}^i \frac{dx^j}{cdt} \frac{dx^\nu}{cdt} + \Gamma_{\lambda\nu}^4 \frac{dx^\lambda}{cdt} \frac{dx^\nu}{cdt} = 0$$

Os três últimos termos serão desprezados por imposição das hipóteses de campo fraco e baixa velocidade. Note ainda que neste desenvolvimento não usamos o parâmetro $\lambda = \frac{v}{c}$, comumente utilizado em aproximações ao limite newtoniano. Logo, obtemos

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} \simeq -\Gamma_{44}^i$$

onde

$$\Gamma_{44}^i = -\frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \delta h_{4i}}{\partial x^4} - \frac{\partial \delta h_{44}}{\partial x^i} \right)$$

sendo que de acordo como este campo *quase-newtoniano* é estático, isto é, $\frac{\partial \delta h_{4i}}{\partial x^4} = 0$, então

$$\Gamma_{44}^i \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial \delta h_{44}}{\partial x^i}$$

Assim, temos que

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq \frac{1}{2} c^2 \frac{\partial \delta h_{44}}{\partial x^i} \quad (2.4)$$

Como a equação da geodésica não é um postulado mas é oriunda das equações de Einstein, nesta reconstrução devemos postular a equação de movimento *quase-newtoniana* com um potencial escalar definido por

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} \stackrel{def}{=} - \frac{\partial \Phi_{qN}}{\partial x^a} \quad (2.5)$$

onde Φ_{qN} denota o potencial “*quase-newtoniano*” [42].

Por conseguinte, se considerarmos que uma partícula movimenta-se lentamente e continuamente em queda livre, o campo gravitacional toma mais incrementos adicionais, tal que

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu} + (\delta h_{\mu\nu})^2 + \dots$$

Desta forma recuperamos a força do campo por adição destes incrementos. Por este motivo a única hipótese ainda válida é de baixa velocidade, já que o campo agora é forte.

Como naturalmente este processo tende a continuar, podemos somar todas as perturbações da métrica $g_{\mu\nu}$ desde $\delta h_{44} = 0$ até um dado valor finito $\delta h_{\mu\nu}$. Comparando as eqs.(2.4) e (2.5) e integrando de 0 à δh_{44} temos que

$$\Phi_{qN} = -\frac{1}{2} c^2 \int_0^{\delta h_{44}} d(\delta h'_{44}) = -\frac{1}{2} c^2 \delta h_{44}$$

Assim, obtemos a equação para o potencial *quase-newtoniano*

$$\Phi_{qN} = -\frac{1}{2} c^2 (1 + g_{44}) \quad (2.6)$$

Como já comentamos no início do capítulo, este potencial situa-se entre a Relatividade Geral e a Teoria de Newton. Não é um potencial suficientemente forte como na Relatividade Geral pois a soma de incrementos ocorre apenas em uma componente da métrica, a componente g_{44} que carrega todos os efeitos de não-linearidade. Deve-se notar que as equações de Einstein e do desvio geodésico estão intactas. Este potencial não é fraco tal como o potencial newtoniano, já que o limite está incompleto.

É importante lembrar que a recuperação dos postulados de campo e movimento são *independentes*. Portanto, a princípio os potenciais oriundos da equação de campo e de movimento são *independentes*. Quando restauramos a equação de campo (equação de Poisson) tornamos a teoria *linear*, quebrando a não-linearidade das equações de Einstein.

Por outro lado, quando restauramos a equação de movimento temos apenas a quebra da covariância generalizada, a não-linearidade é mantida pela presença da componente g_{44} . No entanto, se *escolhermos* obter o limite newtoniano faz-se necessário aplicar a condição $v \ll c$ nas equações de Einstein e do desvio geodésico, como mostrado no início do capítulo. E mais ainda, assumindo uma geometria simetricamente esférica (Schwarzschild) com $g_{44} = -(1 - 2GM/r)$ e substituindo na eq.(2.6) encontramos um potencial $\Phi \sim 1/r$ que coincide com o potencial newtoniano. Somente após tais considerações podemos afirmar que o potencial encontrado é solução da equação de Poisson.

Entretanto, como sabemos que a teoria newtoniana não resolve o problema das curvas de rotação, iremos tomar apenas o limite *quase-newtoniano* da Relatividade Geral. Como a não-linearidade está presente no potencial Φ_{qN} através de g_{44} , isto pode significar que a auto-interação do campo gravitacional pode contribuir de modo *não-bariônico* para as curvas de rotação. O campo gravitacional puro deduzido por auto-interação seria um modelo de matéria escura não-bariônica. A princípio, não há restrição alguma do WMAP acerca de propostas baseadas em auto-interação do campo gravitacional. Como será mostrado no capítulo seguinte, as curvas de rotação descritas por Φ_{qN} também concordam com as medições das curvas de rotação nas galáxias em forma de disco.

3 *Curvas de rotação via limite quase-newtoniano*

*Escolhi o caminho menos percorrido
E isso fez toda a diferença*

Robert Frost

Para fazer um tratamento formal do problema de curvas de rotação, vamos propor um modelo de galáxia discoidal (disco fino). Esta geometria consiste em um cilindro com altura bem menor que seu raio, e partindo da métrica estática de Weyl determinaremos o potencial quase-newtoniano Φ_{qN} bem como a velocidade de rotação associada ao mesmo.

3.1 O modelo de galáxia discoidal para obtenção das curvas de rotação

Considere um campo gravitacional 4-dimensional de simetria cilíndrica cuja altura h_0 seja muito menor que seu raio r_0 . Embora seja um modelo simples, esta geometria é conveniente às galáxias espirais as quais possuem estrutura discoidal. No esforço de simplificar o tratamento inicial desse problema, vamos tomar a solução estática de Weyl [16] expressa em coordenadas cilíndricas (r, φ, z) pelo elemento de linha

$$ds^2 = e^{2(\lambda-\sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\varphi^2 + e^{2(\lambda-\sigma)} dz^2 - e^{2\sigma} dt^2 \quad (3.1)$$

onde por questões de simetria do disco na variável φ , temos que $\lambda = \lambda(r, z)$ e $\sigma = \sigma(r, z)$.

Como o cálculo será feito sobre esta simetria cilíndrica aproximada a um disco fino, consideramos a galáxia como este disco e uma estrela orbitando em sua região limítrofe (borda do disco). Lembrando que, nestas condições, o campo gravitacional é fraco (e as velocidades são baixas comparadas a da luz) o que nos permite tomar o limite quase-newtoniano obtendo uma equação para Φ_{qN} , como mostrado no capítulo anterior.

Vamos então iniciar o nosso desenvolvimento tomando as equações de Einstein no vácuo em termos do tensor de Einstein

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 0$$

que ao usarmos a métrica de Weyl, podemos obter as seguintes componentes¹ não-nula do tensor de Einstein

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{11} &= \frac{-\lambda_{,r} + r\sigma_{,r}^2 - r\sigma_{,z}^2}{r} \\ \mathcal{G}_{13} = \mathcal{G}_{31} &= \frac{2r\sigma_{,r}\sigma_{,z} - \lambda_{,z}}{r} \\ \mathcal{G}_{22} &= \frac{-r^2e^{-2\sigma}}{e^{2(\lambda-\sigma)}} \left(\lambda_{,zz} + \lambda_{,rr} + \sigma_{,r}^2 + \sigma_{,z}^2 \right) \\ \mathcal{G}_{33} &= -\mathcal{G}_{11}\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_{44} = \frac{1}{re^{2(\lambda-\sigma)}} \left[e^{2\sigma} \left(-2\sigma_{,r} - 2r\sigma_{,rr} - 2r\sigma_{,zz} + r(\lambda_{,zz} + \lambda_{,rr} + \sigma_{,r}^2 + \sigma_{,z}^2) \right) \right]$$

onde a notação $(,r)$ e $(,z)$ representa respectivamente as derivadas ordinárias em relação as coordenadas r e z . Ao tomarmos as componentes do tensor de Einstein nas equações de Einstein em termos das funções $\lambda(r, z)$ e $\sigma(r, z)$ presentes na métrica de Weyl, podemos obter o seguinte sistema diferencial não-linear

$$-\lambda_{,r} + r\sigma_{,r}^2 - r\sigma_{,z}^2 = 0 \quad (3.2)$$

$$2r\sigma_{,r}\sigma_{,z} = \lambda_{,z} \quad (3.3)$$

$$\lambda_{,zz} + \lambda_{,rr} + \sigma_{,r}^2 + \sigma_{,z}^2 = 0 \quad (3.4)$$

$$-\lambda_{,r} + r\sigma_{,r}^2 - r\sigma_{,z}^2 = 0 \quad (3.5)$$

$$-2\sigma_{,r} - 2r\sigma_{,rr} - 2r\sigma_{,zz} + r(\lambda_{,zz} + \lambda_{,rr} + \sigma_{,r}^2 + \sigma_{,z}^2) = 0 \quad (3.6)$$

Devemos então resolver tal sistema para estabelecer a forma dos coeficientes $\lambda(r, z)$ e $\sigma(r, z)$; em particular a função $\sigma(r, z)$ que irá definir a forma da componente g_{44} da métrica para o cálculo do potencial e velocidade associados. Neste caso, como tomamos as equações de Einstein no vácuo, as eqs.(3.2) e (3.5) são idênticas. Ao substituirmos a eq.(3.4) na eq.(3.6) obtemos

$$r(\sigma_{,zz} + \sigma_{,rr}) + \sigma_{,r} = 0$$

Assim, o sistema não-linear se reduz ao conjunto de quatro equações diferenciais

¹Para mais detalhes do cálculo do tensor de Einstein veja o apêndice A onde mostramos a programação Maple usada no trabalho para determinação das mesmas.

compatíveis:

$$-\lambda_{,r} + r\sigma_{,r}^2 - r\sigma_{,z}^2 = 0 \quad (3.7)$$

$$r(\sigma_{,zz} + \sigma_{,rr}) + \sigma_{,r} = 0 \quad (3.8)$$

$$\lambda_{,zz} + \lambda_{,rr} + \sigma_{,r}^2 + \sigma_{,z}^2 = 0 \quad (3.9)$$

$$2r\sigma_{,r}\sigma_{,z} = \lambda_{,z} \quad (3.10)$$

Vamos tomar então a condição de disco fino $h_0 \ll r_0$, isto é, a altura h_0 do cilindro é bem menor que o raio r_0 . Esta condição é compatível como a situação física de uma galáxia discoidal espiral ou lenticular [2, 18, 45]. Levando em consideração a dependência na variável cilíndrica z das funções λ e σ , tal que $z \in [-h_0/2, h_0/2]$ enquanto que $r \in [0, r_0]$. Isto significa que a variação de z deve permanecer em um intervalo pequeno relativamente ao diâmetro da galáxia. Para tanto, façamos uma expansão em Taylor de primeira ordem em z , tal que:

$$\begin{aligned} \sigma(r, z) &\approx \sigma(r, 0) + z \frac{\partial \sigma}{\partial z} \Big|_{h_0 \ll r_0} + \dots \approx A(r) + a(r)z \\ \lambda(r, z) &\approx \lambda(r, 0) + z \frac{\partial \lambda}{\partial z} \Big|_{h_0 \ll r_0} + \dots \approx B(r) + b(r)z \end{aligned}$$

onde os coeficientes a e b são funções dependentes unicamente de r . Se considerarmos mais termos à expansão não teremos uma contribuição significativa à solução final, já que temos apenas a adição de mais constantes de integração arbitrárias. A característica da geometria de disco fino é bem conservada na primeira ordem de expansão.

Podemos então encontrar as seguintes relações principais:

$$\sigma_{,r} = A(r)_{,r} + a(r)_{,r}z$$

$$\lambda_{,r} = B(r)_{,r} + b(r)_{,r}z$$

$$\sigma_{,z} = a(r)$$

$$\lambda_{,z} = b(r)$$

$$\lambda_{,zz} = \sigma_{,zz} = 0$$

que serão substituídas no sistema não-linear. Desta forma, de posse da eq.(3.10), temos:

$$2r\sigma_{,r}\sigma_{,z} = \lambda_{,z}$$

$$2r\sigma_{,r}a(r) = b(r)$$

que resulta em

$$\sigma(r, z) = \frac{1}{2} \int_{r_0}^r \frac{b(r')}{a(r')} \frac{1}{r'} dr' + C(z) \quad (3.11)$$

onde fazemos a integração desde o raio da galáxia (r_0) até uma região limítrofe (r) da galáxia definida pela distância visível $a(r_0)$. $C(z)$ é uma constante de integração.

Por conseguinte, de acordo com a eq.(3.8)

$$r(\sigma_{,zz} + \sigma_{,rr}) + \sigma_{,r} = 0 \longrightarrow \sigma_{,rr} + \sigma_{,r} = 0$$

e fazendo a mudança de variável $y = \sigma_{,r}$ e integrando, temos

$$y + ry' = 0 \longrightarrow \ln y = \ln \left(\frac{C_1(z)}{r} \right)$$

e ao retornarmos a variável original, obtemos:

$$\sigma(r, z) = C_1(z) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + C_2(z) \quad (3.12)$$

onde novamente fazemos a integração de (r_0) a (r), sendo C_1 e C_2 constantes de integração.

Ao compararmos a eq.(3.11) a (3.12), temos:

$$\begin{cases} C_1(z) = \frac{1}{2} \frac{b(r)}{a(r)} \\ C_0(z) = C_2(z) \end{cases} .$$

logo a razão $\frac{b(r)}{a(r)} = 2C_1(z) = \text{constante} = k$. Cada coeficiente da expansão, $a(r)$ e $b(r)$, continua, individualmente, uma função do raio (r).

Vamos trabalhar agora as duas equações restantes do sistema não-linear. Tomando a eq.(3.7)

$$-\lambda_{,r} + r\sigma_{,r}^2 - r\sigma_{,z}^2 = -\lambda_{,r} + r \left(\frac{k}{2r} \right)^2 - ra^2(r) = 0$$

e derivando esta expressão em r

$$-\lambda_{,rr} - \frac{k^2}{4r^2} - a^2(r) - 2ra'(r) = 0$$

que somando com a eq.(3.9), ao substituírmos os valores de $\lambda_{,zz}$, $\sigma_{,r}$ e $\sigma_{,z}$, temos:

$$\begin{cases} -\lambda_{,rr} - \frac{k^2}{4r^2} - a^2(r) - 2ra'(r) = 0 \\ \lambda_{,rr} + \frac{k^2}{4r^2} + a^2(r) = 0 \end{cases} .$$

que resulta em $2a'r = 0$ que implica em $a(r) = \text{constante} = a_0$. Desta forma concluímos também que $b(r) = \text{constante} = b_0$. Assim, iremos definir o coeficiente $k_0 = \frac{b_0}{a_0}$, tal que

$k_0 = \text{constante}$.

Note que consideramos os coeficientes da expansão linear como funções da distância e portanto precisamos da eq.(3.9) para a análise correta do sistema em que concluímos que $a(r)$ e $b(r)$ são constantes. No entanto, se já partíssemos com coeficientes constantes, $a(r) = a_0$ e $b(r) = b_0$, teríamos as mesmas equações encontradas por N. Rosen [46]: eqs.(3.7), (3.8) e (3.10). A manipulação direta destas equações nos mostra que a eq.(3.9) é uma identidade.

Ao tomarmos novamente a eq.(3.7) e a integrarmos diretamente, obtemos

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{a_0^2}{2}(r^2 - r_0^2) + D(z)$$

onde assim como em $\sigma(r, z)$, a integração foi feita de (r_0) a (r) . Desta forma, temos que os coeficientes da métrica de Weyl são dados por

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + C(z) \quad (3.13)$$

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{a_0^2}{2}(r^2 - r_0^2) + D(z) \quad (3.14)$$

De posse da função $\sigma(r, z)$ podemos determinar a componente g_{44} da métrica por $g_{44} = -e^{2\sigma(r, z)}$. Desta forma temos

$$g_{44} = -e^{\ln r^{k_0}} e^{2C(z) - k_0 \ln r_0}$$

Como a constante de integração $C(z)$ é arbitrária, iremos tomá-la para $z=0$ obtendo uma constante C_0 . Tomando $r_0 = 1$, já que faremos as curvas de rotação para região fora do núcleo da galáxia, temos que

$$g_{44} = e^{\ln r^{k_0}} e^{2C_0}$$

É importante notar como o efeito da não-linearidade age neste modelo. Embora a componente g_{44} não dependa explicitamente da função $\lambda(r, z)$, a mesma apresenta uma contribuição do coeficiente b_0 oriundo da expansão linear da coordenada z em $\lambda(r, z)$. Os termos cruzados das funções $\sigma(r, z)$ e $\lambda(r, z)$ são denotados pelo coeficiente k_0 que aparece na expressão de g_{44} . Como k_0 mede a relação de efeitos entre estas funções, este coeficiente será fundamental para corrigir a curva de rotação teórica tornando-a compatível com as observações.

Em analogia à solução de Schwarzschild, a constante de integração e^{2C_0} pode ser

interpretada como um termo que carrega a massa do sistema. Assim, tomamos e^{2C_0} como

$$e^{2C_0} = 2 \frac{\beta_0}{k_0 c^2} G M_G = \text{constante}$$

sendo que β_0 é um fator de escala com dimensão $[L]^{-1}$. G é referente à constante gravitacional, c é a velocidade da luz no vácuo e M_G é referente à massa visível da galáxia. Desta forma, a contribuição da matéria escura não-bariônica é gerada somente pelo efeito de auto-interação do campo gravitacional no vácuo.

Tomando a eq.(2.6) podemos determinar o potencial gravitacional calculado em $z=0$

$$\Phi_{qN} = -\frac{1}{2} c^2 (1 + g_{44}) |_{z=0} = -\frac{1}{2} (1 - 2\beta_0 G M r^{k_0}) \quad (3.15)$$

Podemos finalmente calcular a velocidade de rotação de uma estrela dada pela força gerada pelo potencial quase-newtoniano. Relembrando o que fizemos no capítulo introdutório, se considerarmos uma força gravitacional agindo sobre uma estrela de massa unitária com velocidade tangencial $v = \omega r$, $\omega = \text{constante}$ a ser $\vec{F} = \frac{v^2}{r} \hat{r}$ e ao compararmos com a força oriunda de um potencial gravitacional Φ temos que

$$\vec{F} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r}$$

Assim, usando o potencial determinado na eq.(3.15), temos que

$$v(r) = \sqrt{|\beta_0 G M r^{k_0}|} \quad (3.16)$$

onde k_0 é o coeficiente de ajuste da curva de rotação. Note que se tomarmos $\beta_0 = k_0 = -1$ recuperamos a equação da velocidade de rotação newtoniana $v(r) = \sqrt{|\frac{GM}{r}|}$. Para valores inferiores a (-1), temos um comportamento de $v(r)$ incompatível com qualquer dado observacional. De forma análoga se $\beta_0 = k_0 = 1$ ou valores próximos de 1 (ou ainda valores de ordem superior) também não produzem curvas de rotação observáveis. Para $k_0 = 0$ temos somente um valor de transição onde não temos qualquer tipo de movimento. Portanto o valor de k_0 deve se situar próximo de zero onde ajustamos o valor do mesmo numericamente a partir dos dados experimentais disponíveis de distância, massa e velocidade [47]. O coeficiente β_0 será visto apenas como fator de ajuste.

É importante notar que este desenvolvimento foi feito usando-se somente a equação da geodésica sob condição de campo fraco e, posteriormente, recuperamos a força do campo, como já mostramos. Por se tratar de movimento lento ($v \ll c$), a covariância generalizada da Relatividade Geral é perdida. Isto impossibilita transformamos um cilindro ou disco em uma esfera por difeomorfismo. Porém, caso a covariância fosse mantida, poderíamos

reproduzir novamente o limite newtoniano por solução de Schwarzschild, o que comprometeria a consistência deste modelo de disco fino. Observe que as equações de Einstein em conjunto com a equação do desvio geodésico não foram utilizadas, mantendo-se assim a não-linearidade das equações de Einstein.

3.2 Aplicações e resultados

Os gráficos $v(r) \times r$ a serem apresentados, a partir da página seguinte, estão em $Km/s \times Kpc$ de posse da eq.(3.16). O fator de conversão para Km é de 3.08×10^{16} [29] que equivale a $1Kpc$. A constante gravitacional a princípio é também convertida para Kpc assumindo o valor:

$$G = 2.284 \times 10^{-69} Kpc^3/kg.s^2$$

A seguir temos os *plots* para as seguintes galáxias: via-láctea (o sol como partícula teste), NGC3198, UMA²: NGC3949, NGC3877, NGC3769, UGC6667 e UGC6399. Nestes *plots* estamos tomando as medidas experimentais, representadas pelos pontos com barras de erro³, da distância ao centro r_{HI} e massas M_{HI} das galáxias baseados na emissão dos gases hidrogênio e hélio [6, 47, 48]. Os pontos em vermelho são oriundos do modelo que propomos. As curvas newtonianas são mostradas pelas curvas formadas por triângulos. Na tabela-resumo abaixo, mostramos os valores de massa, raio e dos coeficientes β_0 e k_0 .

Galáxias	Massa (Kg)	Raio (Kpc)	β_0	k_0
Via-lactea	$1,99 \times 10^{41}$	8,5	0,0901	0,0682
NGC3198	$1,19 \times 10^{40}$	16,6	0,8224	0,0162
UGC6399	$4,18 \times 10^{39}$	9	0,2413	0,6087
UGC6667	$1,19 \times 10^{39}$	7	0,8251	0,5924
NGC3949	$4,97 \times 10^{39}$	6	1,1657	0,3766
NGC3877	$2,19 \times 10^{39}$	10	2,2371	0,4235

²Referente ao *cluster* Ursa Maior.

³O tamanho das barras de erro é relativo ao erro percentual entre a curva teórica que propomos e a curva experimental.

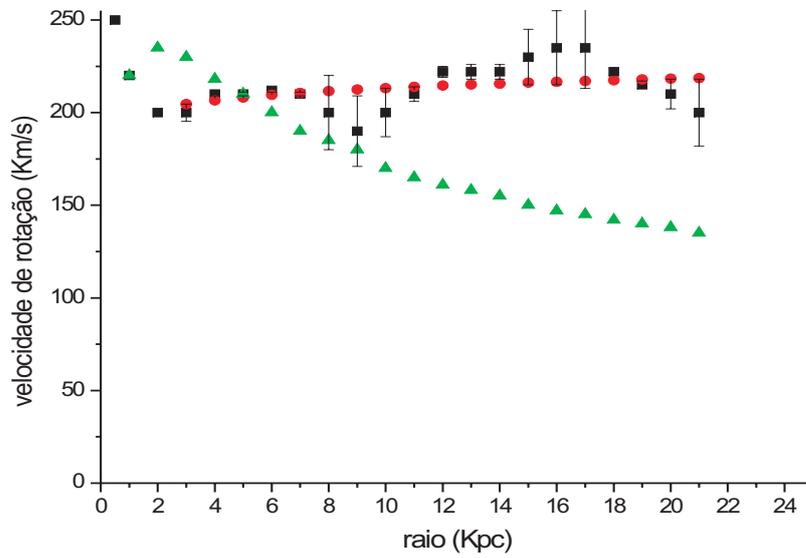
1) Via-láctea

Figura 8: Curva de rotação da Via-láctea a 21 kpc.

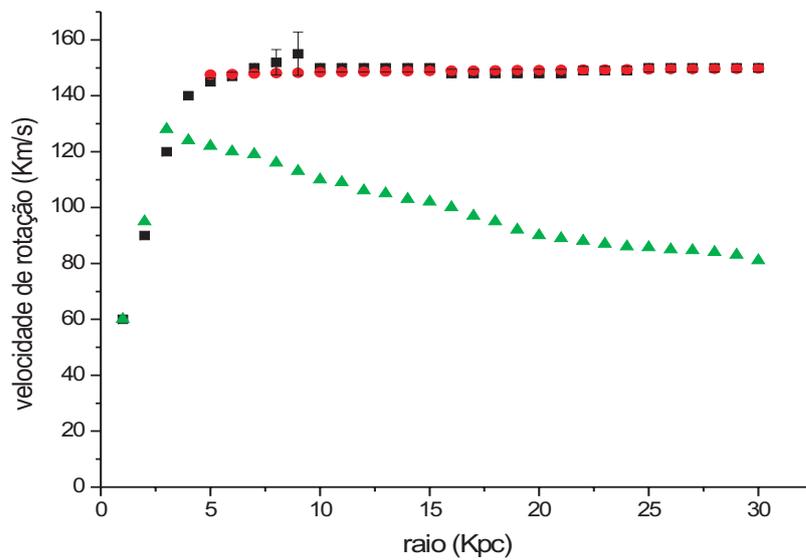
2) NGC3198

Figura 9: Curva de rotação da NGC3198 a 30 kpc.

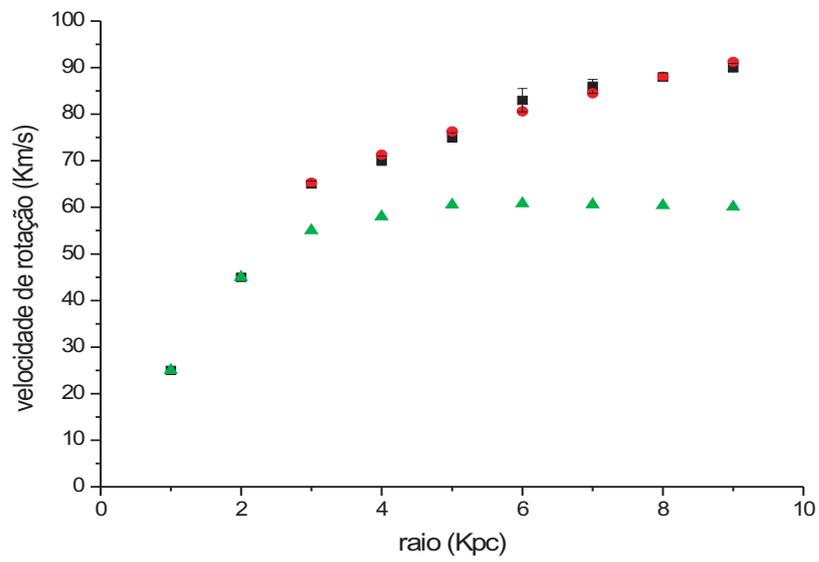
3) UMA: UGC6399

Figura 10: Curva de rotação da UGC6399 a 10 kpc.

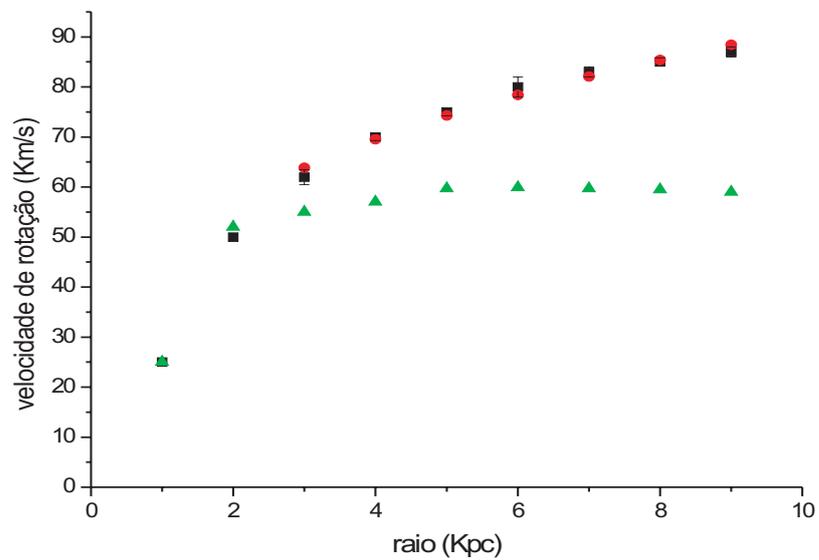
4) UMA: UGC6667

Figura 11: Curva de rotação da UGC6667 a 9 Kpc .

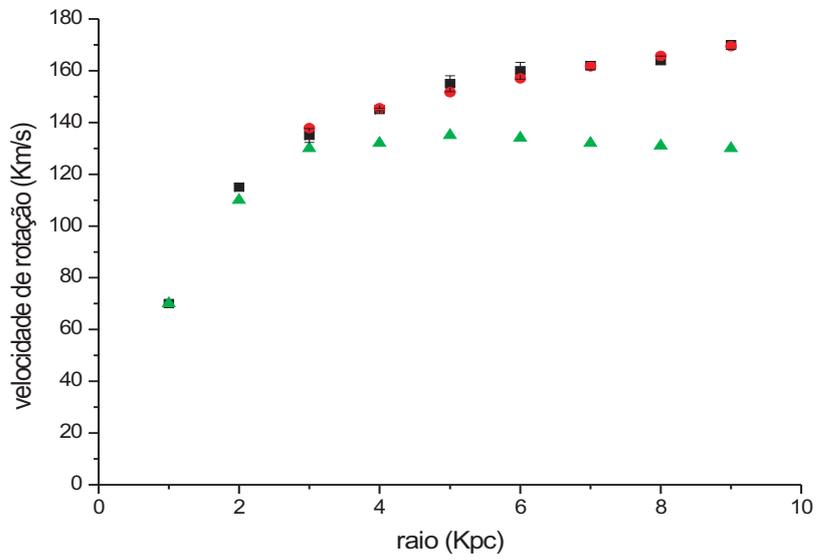
5) UMA: NGC3949

Figura 12: Curva de rotação da NGC3949 a 10 Kpc.

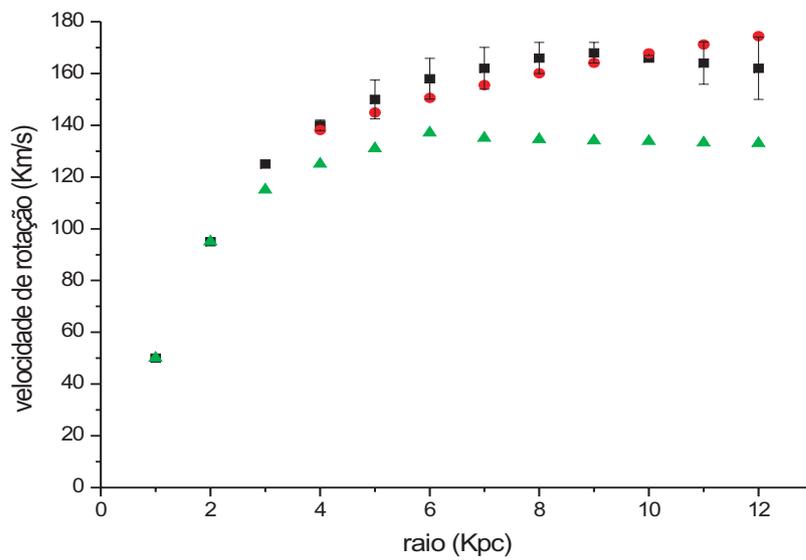
6) NGC3877

Figura 13: Curva de rotação da NGC3877 a 13kpc.

Note que as curvas teóricas, propostas pelo nosso modelo, foram traçadas a partir da distância na qual começa a ocorrer a diferença na velocidade de rotação entre a curva experimental (pontos com barras de erro) e a curva newtoniana (triângulos). Os valores de β_0 e k_0 foram determinados numericamente a partir dos valores experimentais de massa, raio e velocidade de rotação, sem a necessidade de qualquer outro vínculo.

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho, mostramos que mesmo utilizando um modelo bem simples para representação de uma galáxia por geometria discoidal para o tratamento do problema de curvas de rotação, encontramos resultados compatíveis com as observações experimentais da velocidade de rotação de galáxias. Contudo, para obtermos tais resultados, a partir da Relatividade Geral, tivemos de reavaliar a aproximação ao movimento lento que a princípio não está relacionada ao campo fraco, mas tão somente à equação de movimento.

Na expressão do potencial *quase*-Newtoniano oriunda de imposições sobre a equação da geodésica, a componente g_{44} da métrica carrega a não-linearidade oriunda das equações de Einstein, notando que o princípio de equivalência mantém-se válido; o que não ocorre com a covariância generalizada que é quebrada ao postularmos $v \ll c$ aliada à condição de disco fino. Então a escolha de uma geometria adequada ao problema toma papel importante. São tais sutilezas que justificam o comportamento das curvas teóricas obtidas. Note que não acrescentamos nada além do que existe na teoria de Einstein ou de Newton, apenas fizemos uso conceitual da equação da geodésica e da Relatividade Geral sob condição de movimento lento. Do nosso ponto de vista, isto é uma vantagem sobre as demais propostas de explicação do problema de curvas de rotação, muitas das quais dependem de novos conceitos, alguns bastante especulativos.

Extensões do trabalho podem vir a ser implementadas com a utilização de modelos, a princípio, mais realísticos como o uso de uma geometria de um esferóide oblato fino dado pela métrica de Zipoy [49] sob a mesma idéia de desenvolvimento e também de avaliar este mesmo problema sob a ótica de Teoria de Branas investigando a influência da curvatura extrínseca na geometria das galáxias, objetivando melhorar os resultados expostos aqui.

Apêndice A: Programa para cálculo da equações de Einstein

Apresentamos a seguinte programação em *Maple* para auxiliar no cálculo das equações de Einstein. Neste caso é simples pois usamos as equações de Einstein no vácuo. A métrica usada é a métrica cilíndrica de Weyl.

```

>with( tensor );

> simplify(% , constant);

> simplify(% , symbolic);

> g := create([-1, -1], array(symmetric, sparse, [[exp(2*(lambda(r, z)-sigma(r, z)))
, 0, 0, 0], [0, r**(2)*exp(-2*(sigma(r, z))), 0, 0], [0, 0, exp(2*(lambda(r, z)-sigma(r, z))), 0],
[0, 0, 0, -exp(2 * (sigma(r, z)))]));

> coord := [r, phi, z, t];

> d1g := d1metric(g, coord) : d2g := d2metric(d1g, coord) :
ginverse := invert(g, 'detg') : Cf1 := Christoffel1(d1g) :
Cf2 := Christoffel2(g - inverse, Cf1);

> ginv := invert(g, 'detg') : D1g := d1metric(g, coord) :
D2g := d2metric(D1g, coord) : Cf1 := Christoffel1(D1g) :
RMN := Riemann(ginv, D2g, Cf1) : RMNc := get - compts(RMN);

> map(proc(x) if RMNc[op(x)] <> 0 then x = RMNc[op(x)] else
NULLendifendproc, [indices(RMNc)]);

> ginv := invert(g, 'detg') : D1g := d1metric(g, coord) : D2g := d2metric(D1g, coord) :
Cf1 := Christoffel1(D1g) : RMN := Riemann(ginv, D2g, Cf1) :
RICCI := Ricci(ginv, RMN);

```

```
> ginv := invert(g, 'detg') : D1g := d1metric(g, coord) :  
D2g := d2metric(D1g, coord) : Cf1 := Christoffel1(D1g) :  
RMN := Riemann(ginv, D2g, Cf1) :  
RICCI := Ricci(ginv, RMN) : RS := Ricciscalar(ginv, RICCI);  
  
> Estn := Einstein(g, RICCI, RS);
```

Apêndice B: Cálculo numérico para k_0 e β_0 .

Podemos calcular k_0 e β_0 por método numérico. O método que usamos foi o método de quadrado mínimo utilizando o programa *Python* no *Ubuntu linux 6.06*. Para usarmos este programa é necessário instalar bibliotecas gerenciadoras chamadas *scipy* e *numpy*. Todos três programas são *freeware* e estão disponíveis para *download* nos sites www.python.org e www.scipy.org. As rotinas das galáxias estudadas estão apresentadas aqui com seus respectivos resultados (valor do raio com seu respectivo valor da velocidade teórica, ponto a ponto). Os pontos da velocidade V apresentados na rotina são pontos experimentais, enquanto aqueles apresentados na tabela são os resultados do ponto de vista deste modelo teórico proposto pelo presente trabalho. Os gráficos das curvas de rotação de galáxias foram feitos no programa *Origin*.

A expressão para iteração é oriunda diretamente de expressão da velocidade de rotação sendo:

$$(9.32 \times 10^{32})r^{k_0} - \frac{v^2}{\beta_0 MG} = 0$$

onde o fator (9.32×10^{32}) é o fator de conversão de escala de Kpc/s para km/s. Os melhores valores de k_0 e β_0 são determinados automaticamente pelo programa.

Para Via-láctea:

```
from scipy import * -*- coding: Latin-1 -*-

V = array([200, 210, 210, 212, 210, 200, 190, 200, 210, 222, 222, 222, 230,
235, 235, 222, 215 , 210, 200]);

R = array([ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 ])

assert len(V) == len(R), 'V e R devem ter o mesmo tamanho!,

%s%s' %(len(V), len(R))

def v(x): k, beta = x return sum(((656.6 * sqrt(R * *k * beta) - V)**2)
```

```
con1 = lambda x: x[0] con2 = lambda x: x[1] cons = [ con1, con2 ]
k, beta = x = optimize.fmin_cobyla(v, [1., 1.], cons) print
print 'RESULTADO: k = %s, beta=%s' % (k,beta)
f = lambda r: 656.6* sqrt(r**k * beta) print print 'Datos (R, v(r))' print
' n'.join( '%s, %s' % (r, f(r)) for r in R )
import time time.sleep(2. x 60 x 60)
```

Quando compilamos esta rotina, obtemos os seguintes resultados:

Para NGC3198:

```

from scipy import * -*- coding: Latin-1 -*-

V = array([ 140, 145, 147, 150, 152, 155, 150, 150, 150, 150, 150, 150, 148,
148, 148, 145, 145, 148, 149 , 149, 149, 150,150, 150, 150, 150, 150]);

R = array([ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 ,
22 , 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 , 30])

assert len(V) == len(R), 'V e R devem ter o mesmo tamanho!,
%s%s' %(len(V), len(R))

def v(x): k, beta = x return sum((160.6 * sqrt(R * *k * beta) - V)**2)

con1 = lambda x: x[0] con2 = lambda x: x[1] cons = [ con1, con2 ]

k, beta = x = optimize.fmin_cobyla(v, [1., 1.], cons) print

print 'RESULTADO: k = %s, beta=%s' % (k,beta)

f = lambda r: 160.6* sqrt(r**k * beta) print print 'Dados (R, v(r))' print
' n'.join( '%s, %s' % (r, f(r)) for r in R )

import time time.sleep(2. x 60 x 60)

```

Quando compilamos esta rotina, obtemos os seguintes resultados:

Para UGC 6399:

```

from scipy import * -*- coding: Latin-1 -*-

V = array([ 65, 70, 75, 83, 86, 88, 90 ]);

R = array([ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])

assert len(V) == len(R), 'V e R devem ter o mesmo tamanho!,
%s%s' % (len(V), len(R))

def v(x): k, beta = x return sum((95.17 * sqrt(R * k * beta) - V)**2)

con1 = lambda x: x[0] con2 = lambda x: x[1] cons = [ con1, con2 ]

k, beta = x = optimize.fmin_cobyla(v, [1., 1.], cons) print

print 'RESULTADO: k = %s, beta=%s' % (k,beta)

f = lambda r: 95.17* sqrt(r**k * beta) print print 'Dados (R, v(r))' print
' n'.join( '%s, %s' % (r, f(r)) for r in R )

import time time.sleep(2. x 60 x 60)

```

Quando compilamos esta rotina, obtemos os seguintes resultados:

Para UGC 6667:

```

from scipy import * -*- coding: Latin-1 -*-

V = array([62, 70, 75, 80, 83, 85, 87]);

R = array([ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ])

assert len(V) == len(R), 'V e R devem ter o mesmo tamanho!,
%s%s' % (len(V), len(R))

def v(x): k, beta = x return sum(((50.78 * sqrt(R * k * beta) - V)**2)

con1 = lambda x: x[0] con2 = lambda x: x[1] cons = [ con1, con2 ]

k, beta = x = optimize.fmin_cobyla(v, [1., 1.], cons) print

print 'RESULTADO: k = %s, beta=%s' % (k,beta)

f = lambda r: 50.78* sqrt(r**k * beta) print print 'Dados (R, v(r))' print
' n'.join( '%s, %s' % (r, f(r)) for r in R )

import time time.sleep(2. x 60 x 60)

```

Quando compilamos esta rotina, obtemos os seguintes resultados:

```

Para NGC 3949: from scipy import * -*- coding: Latin-1 -*-
V = array([135, 145, 155, 160, 162, 164, 168 ]);
R = array([ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])
assert len(V) == len(R), 'V e R devem ter o mesmo tamanho!,
%s%s' % (len(V), len(R))
def v(x): k, beta = x return sum((103.8 * sqrt(R * k * beta) - V)**2)
con1 = lambda x: x[0] con2 = lambda x: x[1] cons = [ con1, con2 ]
k, beta = x = optimize.fmin_cobyla(v, [1., 1.], cons) print
print 'RESULTADO: k = %s, beta=%s' % (k,beta)
f = lambda r: 103.8* sqrt(r**k * beta) print print 'Dados (R, v(r))' print
' n'.join( '%s, %s' % (r, f(r)) for r in R )
import time time.sleep(2. x 60 x 60)

```

Quando compilamos esta rotina, obtemos os seguintes resultados:

Para NGC3877:

```

from scipy import * -*- coding: Latin-1 -*-

V = array([140, 150, 158, 162, 166, 168, 166, 164, 162]);
R = array([ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12])
assert len(V) == len(R), 'V e R devem ter o mesmo tamanho!,
%s%s' % (len(V), len(R))

def v(x): k, beta = x return sum(((68.89 * sqrt(R * *k * beta) - V)**2)
con1 = lambda x: x[0] con2 = lambda x: x[1] cons = [ con1, con2 ]
k, beta = x = optimize.fmin_cobyla(v, [1., 1.], cons) print
print 'RESULTADO: k = %s, beta=%s' % (k,beta)
f = lambda r: 68.89* sqrt(r**k * beta) print print 'Dados (R, v(r))' print
' n'.join( '%s, %s' % (r, f(r)) for r in R )

import time time.sleep(2. x 60 x 60)

```

Quando compilamos esta rotina, obtemos os seguintes resultados:

..

Referências

- [1] Zwicky, F. *Helv.Phys.Acta.*,6,110.(1933)
- [2] Silva, F.A.G.. Curvas de rotação em galáxias espirais e aproximação pós-newtoniana da Relatividade Geral. Dissertação de Mestrado.Unb.(2000).
- [3] Milgrom, M. *Apj*, 270,365.(1983a)
- [4] Milgrom, M. astro-ph /0112069.
- [5] Moffat, J.W & Brownstein, J.R . astro-ph/0507222.
- [6] Moffat, J.W & Brownstein, J.R . astro-ph/0506370.
- [7] Mak, M.K. & Harko, T. gr-qc/0404104.
- [8] Vollick, D.N. *Gen.Rel.Grav.*34.471.(2002); hep-th/0005033.
- [9] Nihei, T.*et.al.*. hep-ph/0409219.
- [10] Okada, N. & Seto, O. hep-ph/0407092.
- [11] Spergel, D.N. et al.astro-ph/0603449.
- [12] http://map.gsfc.nasa.gov/m_mm.html. (Dados sobre WMAP)
- [13] Maia, M.D; Capistrano, A.J.S; Müller, D. astro-ph/0605688.
- [14] Maia, M.D. *et.al.* astro-ph/0403072.
- [15] Maia, M.D . astro-ph/0404370.
- [16] Weyl, H..*Ann.Phys.*54, 117.(1917)
- [17] Bassalo, J.M.F. **Nascimentos da Física**. Belém:EDUFPA.2000,503p.
- [18] <http://en.wikipedi.org./wiki/darkmatter>.(Página relacionada à matéria escura)
- [19] Sofue, Y. & Rubin, V. astro-ph/0010594.
- [20] Fabricant & Gorenstein. *ApJ* 267, 535 (1983).
- [21] Fabian, *et.al.*, *MNRAS* 221, 1049,(1986).
- [22] Quinn . *ApJ* 279, 596, (1984).

- [23] Hernquist & Quinn ApJ 312, (1987).
- [24] Bosma, A. *The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types*. Nasa Extragalactic database.1978.
- [25] Bekenstein, J.D & Milgrom, M. Apj, 286, 7-14.(1984).
- [26] <http://en.wikipedi.org/wiki/gravitationalensing>.(Explicações acerca do efeito de lentes gravitacionais.)
- [27] <http://www.newscientist.com/article.ns?id=dn7056>.(Detecção da galáxia VIRGOHI21 a qual é constituída quase em sua totalidade por matéria escura)
- [28] <http://esep10.phys.utk.edu/atr162/lect/cosmology/darkmatter.html>.(Página relacionada à matéria escura)
- [29] Khalil, S. & Muñoz, C. hep-ph/0110122.
- [30] Wandelt, B.D *et.al.*. *Self-interaction Dark matter*. Marina Del Rey, 2000, *Soucers and detection of Dark matter in the Universe*, 263.
- [31] Lee, T.D & Yang, N. *Phys. Rev.*104,254-258(1956).
- [32] Brada, R. & Milgrom, M. astro-ph /9811013.
- [33] Behar, S. & Carmelli, M. *Int.Jour.Theor.Phys.***39,1397**(2000);ibid astro-ph/9907244.
- [34] Harnett, J.G. gr-qc/0407082.
- [35] Cembranos, J.A.R *et.al.*. astro-ph/0111292.
- [36] Capozziello, S. *et.al.*Phys.Lett.**A326,292**.(2004);gr-qc/0404114;astro-ph/0411114.
- [37] Fay, S.*Astron.Astrophys.***413,799**.(2004);ibid gr-qc/0402103.
- [38] Whitehouse, S.B & Kranitotis, G.V.astro-ph/9911485.
- [39] Ichiki, K.*et.al.*Phys.Rev.**D66,023514**.(2002)
- [40] Lidsay, J.E.*et.al.*astro-ph/0111292.
- [41] Papapetrou, A. *Lectures on General Relativity*.D.Eidel Publishing company.Boston,USA.(1974)
- [42] Misner, C; Thorne, K.S & Wheeler, J.A. *Gravitation*. W.H.Freeman & co.p412ff.(1970)
- [43] Infeld, L.& Plebanski, J. *Motion and Relativity*,Pergamon Press.(1960)
- [44] Hughston, L.P. & Tod, K.P. *An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press.(1990)
- [45] Battaner, E. & Florido, E. astro-ph/ 0010475.

- [46] Rosen, N. *Rev. Mod. Phys.*, 21, 503.(1949)
- [47] Sanders R.H.& Verheijen, M.A.W..ApJ, 503, 97 (1998); astro-ph/9802240.
- [48] Sanders, R.H. ApJ, 473, 117 (1996); astro-ph/9606089.
- [49] Zipoy, D.M. *Jour. Math. Phys.*..**71137**.(1966)
- [50] Bekenstein, J.D & Milgrom, M. IAU, 117, 319M. (1987).
- [51] Bunge, Mario. Teoria Física: Uma visão Geral .In:__. **Filosofia da Física**. São Paulo:martin Fontes.1973, p.39-58.cap.III.
- [52] Eisenhart, L.P. **Riemannian Geometry**. Princeton U.P. Reprint (1966).
- [53] Horgan, Jonh. **O fim da ciência:uma discussão sobre os limites do conhecimento científico**. São Paulo:Companhia das Letras.1998,363p.
- [54] Maartens, R. gr-qc/0312059.
- [55] Mollá, M. & Diaz, A.I. astro-ph/0501370.
- [56] Slozar A; Melchiori, A. & Silk, J.I. astro-ph/0508048.
- [57] Szekeres, P. & Rainford. T. gr-qc/9903056.
- [58] [http://onelang.com/encyclopedia/index.php/modified newtonian dynam-ics](http://onelang.com/encyclopedia/index.php/modified-newtonian-dynamics).(Explicação sobre o modelo MOND)

Return from subroutine COBYLA because the MAXFUN limit has been reached.

NFVALS = 1000 F = 3.851595E+02 MAXCV = 0.000000E+00
X = 4.235316E-01 2.237128E+00

RESULTADO: k=0.423531592876, beta=2.23712773142

Dados (R, v(r))

4, 138.196577921
5, 144.883695578
6, 150.586969962
7, 155.583821635
8, 160.046118444
9, 164.088256478
10, 167.790501414
11, 171.211497882
12, 174.39549078

Normal return from subroutine COBYLA

NFVALS = 984 F = 3.314674E+01 MAXCV = 0.000000E+00
X = 3.766031E-01 1.165691E+00

RESULTADO: k=0.376603082868, beta=1.16569135515

Dados (R, v(r))

3, 137.826208469
4, 145.498315651
5, 151.742163073
6, 157.04214599
7, 161.667381796
8, 165.783909908
9, 169.501863349

Normal return from subroutine COBYLA

NFVALS = 463 F = 1.268156E+01 MAXCV = 0.000000E+00
X = 6.087033E-01 2.413066E-01

RESULTADO: k=0.608703301689, beta=0.241306566633

Dados (R, v(r))

3, 65.3126463682
4, 71.2890113386
5, 76.2987308972
6, 80.6522072038
7, 84.5262541213
8, 88.0322025451
9, 91.2451779694

Normal return from subroutine COBYLA

NFVALS = 771 F = 9.705839E+00 MAXCV = 0.000000E+00
X = 5.924571E-01 8.250691E-01

RESULTADO: k=0.592457080754, beta=0.825069109139

Dados (R, v(r))

3, 63.8667465236
4, 69.5480908289
5, 74.3006690321
6, 78.4239060357
7, 82.0880651061
8, 85.4002002139
9, 88.4324639915

Normal return from subroutine COBYLA

NFVALS = 296 F = 1.784556E+02 MAXCV = 0.000000E+00
X = 1.357256E-02 8.320204E-01

RESULTADO: k=0.0135725589364, beta=0.832020384908

Dados (R, v(r))

4, 147.507887202
5, 147.731429749
6, 147.914328763
7, 148.069144324
8, 148.203382634
9, 148.321890227
10, 148.427979177
11, 148.524013673
12, 148.611740554
13, 148.692487218
14, 148.767286066
15, 148.836955948
16, 148.902157305
17, 148.963430583
18, 149.021223659
19, 149.075911854
20, 149.127812815
21, 149.177197759
22, 149.224300111
23, 149.269322215
24, 149.312440622
25, 149.353810297
26, 149.393568004
27, 149.431835049
28, 149.468719526
29, 149.504318172
30, 149.5387179

Normal return from subroutine COBYLA

NFVALS = 94 F = 2.307424E+03 MAXCV = 0.000000E+00
X = 6.825178E-02 9.012399E-02

RESULTADO: k=0.0682517752716, beta=0.0901239863933

Dados (R, v(r))

3, 204.64600048
4, 206.664987762
5, 208.24474307
6, 209.544457047
7, 210.649676164
8, 211.611771301
9, 212.464046062
10, 213.229340017
11, 213.924007037
12, 214.560164265
13, 215.147042631
14, 215.691838176
15, 216.200270613
16, 216.676962258
17, 217.125702547
18, 217.549637274
19, 217.951406889
20, 218.333249493
21, 218.697078831