

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

# Gravitação Quântica em Branas-Mundo

por

Nildsen Fernando L. Silva

Tese de Doutorado

Brasília, Novembro de 2007

# Agradecimentos

Sou grato ao Prof. Dr. Marcos Duarte Maia, pela sua orientação, dedicação e paciência durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também ao meu pai Nildsen Rodriguês da Silva e minha mãe Maria Stela Lisbôa da Silva pelo incentivo e apoio nos meus estudos e na vida.

E, finalmente, sou grato a minha esposa Luana, minha filha Luísa, minha sogra Maria, pela compreensão e apoio nos momentos difíceis.

## Resumo

A formulação canônica de Arnowitt-Deser-Misner para a relatividade geral é estendida para a teoria de brana-mundo covariante em um número arbitrário de dimensões. O acesso exclusivo das dimensões extras pela gravitação faz uma diferença significativa, implicando na construção de uma teoria canônica sem vínculo Hamiltoniano. Os estados quânticos da geometria da brana-mundo são definidos pela equação de Tomonaga-Schwinger, cujas as condições de integrabilidade são determinadas por perturbações clássicas de subvariedades contidas no teorema de imersões diferenciáveis de Nash. Em princípio, a teoria quântica de brana-mundo pode ser testada por experimentos em astrofísica e num futuro próximo em experimentos de laboratórios na escala  $TeV$  de energia. Aplicações à perda de informação nos buracos-negros, à cosmologia acelerada, e à teoria matemática quântica de subvariedades quadridimensionais são brevemente comentadas.

# Abstract

The Arnowitt-Deser-Misner canonical formulation of general relativity is extended to the covariant brane-world theory in arbitrary dimensions. The exclusive probing of the extra dimensions makes a substantial difference, allowing for the construction of a non-constrained canonical theory. The quantum states of the brane-world geometry are defined by the Tomonaga-Schwinger equation, whose integrability conditions are determined by the classical perturbations of submanifolds contained in the Nash's differentiable embedding theorem. In principle, quantum brane-world theory can be tested by current experiments in astrophysics and by near future laboratory experiments at TeV energy. The implications to the black-hole information loss problem, to the accelerating cosmology, and to a quantum mathematical theory of four-sub manifolds are briefly commented.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Razões para uma Teoria Quântica da Gravitação . . . . .	2
1.1.1	Unificação . . . . .	2
1.1.2	Física na Escala de Planck . . . . .	2
1.2	Tentativas de Quantização da gravitação . . . . .	3
1.3	Teoria das Branas-Mundo . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Quantização ADM</b>	<b>11</b>
2.1	Formalismo ADM . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Branas-Mundo</b>	<b>18</b>
3.1	As Equações de movimento da Brana-mundo . . . . .	18
3.2	As Equações Canônicas do Movimento . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Teoria de Muitos Tempos de Dirac-Tomonaga-Schwinger</b>	<b>29</b>
4.1	Formulação de Dirac . . . . .	29
4.2	Formulação de Tomonaga . . . . .	31
4.3	Integrabilidade da equação Tomonaga-Schwinger . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Quantização da Brana-mundo</b>	<b>36</b>
5.1	Introdução . . . . .	36
5.2	Estados quânticos de Tomonaga-Schwinger . . . . .	37

5.3	Conclusões e Perspectivas . . . . .	38
<b>A</b>	<b>Imersão de Variedades</b>	<b>41</b>
A.1	Imersões Isométricas . . . . .	42
A.2	Equações de Gauss-Codazzi-Ricci . . . . .	44
	<b>Bibliografia</b>	<b>48</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A Mecânica Quântica e a Relatividade Geral são duas teorias de sucesso na confrontação com resultados experimentais. Ambas as teorias apresentaram a importância do papel do observador e do processo de medida em uma teoria física. A Mecânica Quântica revolucionou a física com a afirmação de que uma partícula em regime quântico não tem uma trajetória definida, experimentalmente comprovado, mas tem limite clássico compatível com a física Newtoniana. Por outro lado, é sabido que a trajetória de um corpo submetido a um campo gravitacional é determinada univocamente pelas equações de Einstein através da geometria do espaço-tempo. Portanto a Relatividade Geral é uma teoria eminentemente clássica nos seus métodos de observação. Mas, em princípio não há impedimento formal ao desenvolvimento de uma teoria quântica da gravitação. De fato, existem diversas motivações para uma teoria quântica da gravitação, como veremos a seguir.

## 1.1 Razões para uma Teoria Quântica da Gravitação

### 1.1.1 Unificação

Não parece natural, na comparação com as demais interações fundamentais, somente a gravitação não ter um comportamento quântico. Assim como a natureza deve apresentar uma unidade, as leis da física que a representam devem ser unificadas.

A história da física é caracterizada por uma progressiva unificação de várias teorias diferentes, descrevendo fenômenos aparentemente diferentes, em uma nova teoria unificadora. Por exemplo, o movimento de queda livre baseado na lei de inércia de Galileo e a mecânica celestial dos movimentos dos planetas de Kepler foram unificadas na teoria da gravitação universal de Newton; fenômenos como a eletricidade, magnetismo e óptica foram sintetizados na teoria eletromagnética de Maxwell; a teoria quântica de campos é uma união da teoria clássica de campos, relatividade especial e mecânica quântica, sendo que a teoria quântica de campos fornece o suporte matemático com o qual a eletrodinâmica quântica é formulada, apresentando uma descrição unificada da teoria de Maxwell e a mecânica quântica; A teoria eletrofraca de Glashow, Weinberg e Salam incorpora a força nuclear fraca e a eletrodinâmica quântica. As forças eletromagnética, fraca e forte, exceto a gravidade, são formuladas como uma teoria quântica de campos renormalizável e são todas governadas pela existência de uma simetria de calibre. Todos estes processos de unificação tem tido sucesso do ponto de vista experimental.

### 1.1.2 Física na Escala de Planck

É geralmente admitido que a gravitação quântica se manifesta apenas na escala de energia de Planck, a qual é inacessível por experiências diretas. Várias questões surgem neste contexto: O que acontece na escala de Planck? Quais tipos de fenômenos físicos são



esperados? Ou ainda, como pode ser descrita a física em um regime de energia onde nem os efeitos gravitacionais e nem quânticos podem ser negligenciados?

Na escala de Planck a representação clássica do espaço-tempo como uma variedade diferenciável de quatro dimensões talvez não se aplique, pois a geometria do espaço-tempo apresentaria flutuações quânticas sujeitas ao princípio de incerteza de Heisenberg, implicando na quebra da estrutura causal do espaço-tempo, comprometendo a estrutura de cone de luz e a distinção de regiões do tipo espacial e do tipo temporal. Entretanto não se sabe exatamente o que significa *flutuações quânticas da geometria*, pois a noção de geometria quântica advém da gravitação, pelo menos no contexto da Relatividade Geral.

A existência de singularidades gravitacionais pode ser uma indicação que a teoria da relatividade geral está sendo aplicada além do seu domínio. Portanto, a consideração que a curvatura do espaço-tempo pode crescer ilimitadamente, não pode ser usada para resolver singularidades como o big bang, o big crunch, ou um buraco negro. Além disso, a relatividade geral tem sido testada com sucesso somente na escala do sistema solar, que apresenta um cenário muito simples comparado com as atuais observações em astrofísica e cosmologia.

Portanto, efeitos quânticos gravitacionais devem ter sido importantes nos primeiros momentos do big bang, quando as dimensões do universo tinham a mesma ordem de grandeza do comprimento de Planck ( $10^{-33}cm$ ), que corresponde a energia de Planck.

## 1.2 Tentativas de Quantização da gravitação

Na teoria quântica de campos, o procedimento para a quantização de um campo é tradicionalmente perturbativo, em contraposição ao processo canônico. Durante muitos anos suspeitava-se que o método perturbativo não se aplicaria a gravitação devido a dimensionalidade da constante gravitacional de Newton  $G$ , que é a constante de acoplamento com a matéria. Entretanto a divergência do método perturbativo para a gravitação foi

confirmada definitivamente pelo trabalho de Goroff e Sagnotti [45]. Por outro lado, G. 't Hooft mostrou que todas as demais interações fundamentais são perturbativamente quantizáveis (isto é, Yang-Mills é uma teoria renormalizável). Entretanto, A. Ashtekar argumentou, com base em exemplos que apesar da gravitação não ser perturbativamente quantizável, ela poderia ser canonicamente quantizável [14].

A seguir faremos um breve relato das principais tentativas de quantização canônica da gravitação.

#### a) Quantização de Dirac

Uma formulação canônica ou Hamiltoniana para gravitação é um passo importante para o sucesso de qualquer teoria física de campo, já que ela permite, em princípio, caracterizar a energia do campo. Para isso, torna-se necessário definir um parâmetro de evolução que tradicionalmente é tomado como sendo o tempo. Como a gravitação deforma o espaço-tempo, a separação do espaço-tempo em espaço (hipersuperfície tridimensional) e tempo, onde o a hipersuperfície seria o elemento a evoluir e o tempo o parâmetro de evolução, parecia ser a solução mais natural.

No final dos anos 50, Dirac [1] propôs um esquema de quantização do campo gravitacional através da deformação de uma hipersuperfície do tipo espacial tridimensional na direção temporal, ou seja, usando um sistema de coordenadas preferencial. Dirac precisou restringir a perturbação da hipersuperfície tridimensional na direção temporal e fixar o sistema de coordenadas da hipersuperfície para que o processo de quantização pudesse ser resolvido, no entanto, esta restrição tira o caráter difeomórfico do processo de quantização, o que contraria um dos princípios da teoria da relatividade geral.

Apesar de Dirac ter obtido corretamente a Hamiltoniana não nula, a quebra da covariância generalizada foi suficiente para que o processo fosse rejeitado.

#### b) Quantização ADM

Em 1961, Arnowitt, Deser e Misner (ADM) [4] seguindo essencialmente a mesma idéia de Dirac da separação do espaço-tempo em hipersuperfícies tridimensionais evoluindo no espaço-tempo, procurando restaurar o difeomorfismo formularam a versão Hamiltoniana da Relatividade Geral, postulando que a evolução da hipersuperfície se processa ao longo de uma direção arbitrária, mantendo a covariância da teoria. Um primeiro problema que surgiu foi o anulamento da Hamiltoniana clássica. É importante notar que Misner, no trabalho extraído de sua tese, intitulado *Feynman Quantization of General Relativity* [5] (onde o propagador de Feynman para uma hipersuperfície tridimensional foi estudado) de 1957, já havia chegado a conclusão que o operador hamiltoniano associado a uma equação do tipo Schrödinger para a gravitação deveria ser nulo para que o difeomorfismo entre as hipersuperfícies tridimensionais fosse mantido. A Hamiltoniana nula não é realmente um impedimento, pois o próprio Dirac já havia desenvolvido um procedimento alternativo, conhecido como *quantização de sistemas vinculados*, no qual seria suficiente o cálculo dos parênteses de Poisson e sua propagação. Posteriormente constatou-se que os parênteses de Poisson não são covariantes no caso da gravitação (este problema ficou conhecido como o *problema do tempo*). Portanto, o procedimento ADM não produzia os resultados desejados.

Convém salientar que tanto no caso de Dirac quanto no ADM, a visão quântica da gravitação era a de uma *variedade diferenciável 3-dimensional* que apresentava modos quânticos de oscilação dentro do espaço-tempo.

### c) Cosmologia Quântica

A cosmologia quântica desenvolveu-se principalmente, devido aos trabalhos de Hartle - Hawking(1983) [46] e Vilenkin (1988) [47], que tratavam da possibilidade de construir uma teoria quântica nos moldes da teoria de Hamilton-Jacobi, aplicada a gravitação Euclidiana, onde se estuda a propagação de uma hipersuperfície. A equação correspondente foi desenvolvida por J. Wheeler e B. S. de Witt.

A característica principal da cosmologia quântica é a sua independência do tempo. Assim ela não teria início nem fim. A recuperação do tempo clássico se tornaria o maior problema desta teoria.

#### d) Gravitação Semi-Clássica

Foi uma teoria desenvolvida durante a década de 70, principalmente, por L. Parker [48], S. A. Fulling, P. C. W. Daves e W. G. Unruh [43]. Com base na equação de Einstein cuja fonte é o valor esperado de um campo quântico

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi G \langle \psi | T_{\alpha\beta} | \psi \rangle. \quad (1.1)$$

Uma aplicação importante dessa equação foi a descoberta de Hawking da radiação quântica de um buraco negro [35], bem como o teorema de perda de informação quântica em buracos negros.

#### e) Supercordas

Apesar de não ser uma teoria consolidada, a teoria de cordas é freqüentemente citada como a única teoria viável da gravitação quântica.

A teoria de cordas surgiu a partir do trabalho de Veneziano, apresentado para resolver a questão do confinamento de quarks (ressonância dual) [21]. Segundo Veneziano o confinamento se devia de uma força forte entre dois quarks, unidos pela linha de força, que poderia ser vista como uma corda.

Y. Nambu (1970) [22] propôs que a corda seria o objeto fundamental e os quarks apenas seriam as condições de contorno para a corda. Segundo Nambu, a corda deveria mover-se no espaço-tempo através da ação que descreve uma superfície mínima de duas dimensões (a folha mundo) dada por

$$S = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{(\dot{X}X)^2 - \dot{X}^2 X'^2}.$$

Onde  $X$  é um vetor posição da corda em um espaço de fundo, que é em princípio um

espaço-tempo  $D$ -dimensional,  $\sigma$  e  $\tau$  são parâmetros de evolução da folha mundo,  $T$  é a tensão da corda,  $\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau}$  e  $X' = \frac{\partial X}{\partial \sigma}$ . Observou-se que a invariância das equações com o grupo de Lorentz vale somente se a dimensão do espaço-tempo for  $D = 26$ . Posteriormente, com a introdução da supersimetria conseguiu-se uma redução da dimensão do espaço-tempo para  $D = 10$  e a teoria passou a ser chamada de teoria de *supercorda* [50].

A teoria de cordas não é uma teoria de campos local, mas sim de objetos extensos (as cordas) que são quantizados perturbativamente. Os campos aparecem apenas em um limite da teoria, inclusive a gravitação 4-dimensional após uma redução dimensional e em limite clássico.

Existem atualmente cinco teorias de cordas: Tipo I (abertas ou fermiônicas), Tipo IIa ( $SO(32)$ ) (fechadas ou bosônicas), Tipo IIb ( $SO(32)$ ) (fechadas orientadas), Tipo II Heterótica ( $SO(32)$ ) e a Tipo II Heterótica  $E_8 \times E_8$ . Cada uma dessas cinco teorias são definidas em um espaço-tempo de 10 dimensões.

Um problema crucial em teoria de cordas é o cancelamento de anomalias quânticas, isto é, o surgimento de correntes que não são conservadas quanticamente, mas o são classicamente. Este cancelamento vale somente se as cordas tiverem uma simetria interna  $SO(32)$  ou o grupo excepcional  $E_8 \times E_8$ .

Estas cinco teorias de cordas são atualmente vistas como diferentes aspectos de uma única teoria de 11 dimensões, chamada Teoria M. Através da compactificação de uma das dimensões e correspondências específicas, chamadas dualidades, pode-se recuperar cada uma das cinco teorias. Na teoria M pode-se identificar, além das cordas, outras variedades imersas, as  $p$ -branas que são subvariedades de dimensão  $p$  imersas no nosso espaço estrutural (agora com 11 dimensões) e gerando uma brana-mundo de  $p + 1$  dimensões, igualmente imersa no espaço estrutural e que se move dinamicamente em uma região delimitada por branas fixas atuando como condição de contorno de Dirichlet (D-branas).

## f) Teoria de Laços

Em 1986, Ashtekar [14] propôs a quantização canônica da gravitação usando variáveis auxiliares. Segundo a proposta, a quantização da variável auxiliar induziria a quantização do campo gravitacional desde que a mesma esteja associada à geometria do espaço-tempo. Esta variável auxiliar seria a conexão ( $A_a$ ) associada ao grupo de holonomia das triadas que percorreriam um caminho fechado ( $\gamma$ ) nas superfícies espaciais do espaço-tempo. Como se sabe, este grupo é isomorfo ao  $SO(3)$ , que por sua vez é isomorfo ao  $SU(2)$ . Então, usa-se a ação definida através da integral de Wilson

$$T[\gamma, A] := \text{tr}P \left( \exp \left( \oint_{\gamma} dS^a A_a \right) \right),$$

onde  $P$  é o operador de ordenação e  $A_a$  seria a conexão associada ao  $SU(2)$ . Como esta integral está associada à curvatura do espaço-tempo, a quantização de  $A_a$  implica na quantização da ação, ou seja, da geometria 3-dimensional.

A teoria quântica da gravitação via laços surgiu em 1987 como uma teoria de calibre da gravitação, tendo o grupo de holonomia das triadas como grupo de calibre, e a conexão  $A_a$  associada seria aquela contida na integral de Wilson.

A teoria dos loops apresenta uma vantagem em relação a teoria de cordas, qual seja, não necessita de dimensões extras e nem de um espaço de fundo fixo. Isso permite que a teoria seja construída em qualquer sistema de coordenadas e que seus resultados sejam transparentes à mudança de sistemas de coordenadas, essa covariância é a essência da relatividade geral.

O propósito do nosso trabalho é mostrar que existe uma alternativa interessante à quantização da gravitação, que é a teoria covariante de branas-mundo.

### 1.3 Teoria das Branas-Mundo

Em 1998 surgiu uma nova teoria multidimensional derivada da teoria M e da teoria de Kaluza-Klein motivada pelo problema da hierarquia das interações fundamentais. Esta teoria se chamou de teoria de Branas-mundo. O argumento básico é que não existe evidência experimental deste desnível energético entre os domínios das interações, portanto parece plausível a hipótese de que a gravitação pode ser também efetiva à  $10^3 GeV$  (e não somente em  $10^{18} GeV$ ).

A teoria das branas-mundo originalmente proposta por N. Arkani-Hamed, G. Dvali e S. Dimopolos [10], influenciada pela teoria de Horava-Witten [12], onde o espaço-tempo 4-dimensional é uma subvariedade imersa no  $AdS_5$ , no qual estariam confinadas as interações de calibre. Entretanto, na brana-mundo, o  $AdS_5$  foi substituído por uma variedade Riemanniana  $V_D$ , a qual seria também uma solução da equação de Einstein. Portanto, enquanto a gravitação é multidimensional, as interações de calibre são 4-dimensionais. Assim, a gravitação clássica 4-dimensional seria a geometria da folha-mundo gerada pelo movimento de uma 3-brana no espaço de imersão. O problema da hierarquia era resolvido através da proposta de uma nova escala fundamental de energia efetiva  $M_{Pl(4+n)}$ , na ordem de  $TeV$ , a mesma da escala eletrofraca.

Considerando apenas os princípios fundamentais das branas, como originalmente proposto por N. Arkani-Hamed, G. Dvali e S. Dimopolos, é possível descrever a teoria das branas de modo consistente, podendo ser verificada experimentalmente em futuro próximo. Esses princípios fundamentais são:

- a) O espaço de imersão (o bulk) é uma solução das equações de Einstein;
- b) A brana-mundo é uma variedade 4-dimensional imersa em um espaço D-dimensional;
- c) As interações de calibre e a matéria ordinária permanecem confinadas à brana-mundo de quatro dimensões.

Mostraremos adiante que estas três condições, aliadas aos teoremas mais gerais de imersão de variedades diferenciais permitem descrever as equações dinâmicas das branas,

inclusive em sua formulação canônica, com hamiltoniano não nulo.



# Capítulo 2

## Quantização ADM

O procedimento de quantização canônica da relatividade geral requer que a teoria seja colocada na forma canônica, e uma das formas de se conseguir isso é através da decomposição  $(3 + 1)$  do espaço-tempo, ou seja, um folheamento do espaço-tempo em hipersuperfícies tridimensionais ao longo de uma direção arbitrária.

### 2.1 Formalismo ADM

O procedimento de R. Arnowitt, S. Deser e C. Misner [4] (ADM) apresentado em 1962 é o modelo básico da quantização de uma variedade 3-dimensional imersa em um espaço-tempo quadridimensional. Este procedimento pode ser generalizado para qualquer variedade de dimensão  $n$  imersa em um espaço de dimensão  $D$ . A peculiaridade que se destaca no caso da imersão de uma variedade 3-dimensional em um espaço-tempo quadridimensional que é solução das equações de Einstein, deve-se aos demais postulados da relatividade geral, principalmente o da covariância generalizada.

O formalismo ADM fornece uma formulação canônica da relatividade geral através da consideração de uma variedade espaço-temporal  $M$ , equipada com a métrica  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ , folheada

por uma família de hipersuperfícies tridimensionais  $\Sigma_t$  do tipo espacial, realizando assim uma decomposição (3+1) de uma geometria originalmente quadridimensional.

Para obter a formulação hamiltoniana da relatividade geral, considerar-se-á uma hipersuperfície tridimensional  $\bar{\Sigma}$  parametrizada pela variável de imersão<sup>[1]</sup>  $\mathcal{X}^\mu(x^i)$ , e cada ponto no espaço-tempo terá uma base vetorial  $\{\mathcal{X}_{,i}^\mu, \eta^\mu\}$  composta por vetores tangentes  $\mathcal{X}_{,i}^\mu$  e por um vetor unitário normal  $\eta^\mu$  de modo que os vetores desta base obedecem as seguintes relações:

$$\mathcal{X}_{,i}^\mu \mathcal{X}_{,j}^\nu \mathcal{G}_{\mu\nu} = \bar{g}_{ij}, \quad \mathcal{X}_{,i}^\mu \eta^\nu \mathcal{G}_{\mu\nu} = 0, \quad \eta^\mu \eta^\nu \mathcal{G}_{\mu\nu} = -1, \quad (2.1)$$

onde  $\bar{g}_{ij}$  é a métrica de  $\bar{\Sigma}$ .

Agora, deformando a hipersuperfície  $\bar{\Sigma}$  através da variável temporal  $t$ , constrói-se uma família uniparamétrica de hipersuperfícies do tipo espacial parametrizadas por  $\mathcal{Z}^\mu = \mathcal{Z}^\mu(t, x^i)$ , onde  $\mathcal{Z}^\mu$  obedece as seguintes relações:

$$\mathcal{Z}_{,i}^\mu \mathcal{Z}_{,j}^\nu \mathcal{G}_{\mu\nu} = g_{ij}, \quad \mathcal{Z}_{,i}^\mu \eta^\nu \mathcal{G}_{\mu\nu} = 0; \quad (2.2)$$

sendo  $g_{ij}$  a métrica de uma hipersuperfície deformada.

Na deformação das hipersuperfícies, a medida do tempo próprio entre as hipersuperfícies é dada pela função lapso  $N(t, x^i)$

$$d\tau = N(t, x^i) dt; \quad (2.3)$$

$N^i$  é a função shift que relaciona coordenadas entre hipersuperfícies vizinhas

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - N^i(t, x^j) dt; \quad (2.4)$$

considerando a expressão (2.3) e o sistema de referência Gaussiano  $\{\mathcal{Z}_{,i}^\mu, \eta^\mu\}$  podemos definir o vetor normal  $\eta_\mu = (-N, 0, 0, 0)$ .

Notando que  $\{\mathcal{Z}_{,i}^\mu\}$  é a base tangente à variedade 3-dimensional  $\Sigma_t$ , podemos escrever

$$g_{ij} \mathcal{G}^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^i \mathcal{Z}_{,\nu}^j = \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu} + \mathcal{G}^{\mu\nu} \eta_\mu \eta_\nu. \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Os índices gregos referem-se ao espaço-tempo quadridimensional (0..3) e os índices em latim referem-se à coordenadas na hipersuperfície tridimensional (1..3)

Portanto os termos de  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  podem ser calculados a partir da expressão

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{Z}_{,\mu}^i \mathcal{Z}_{,\nu}^j g_{ij} - \eta_\mu \eta_\nu, \quad (2.6)$$

e então

$$\mathcal{G}_{00} = \underbrace{\mathcal{Z}_{,0}^i \mathcal{Z}_{,0}^j g_{ij}}_{N^i N^j g_{ij}} - \underbrace{\eta_0 \eta_0}_{N^2} = g_{ij} N^i N^j - N^2 \quad (2.7)$$

$$\mathcal{G}_{k0} = \underbrace{\mathcal{Z}_{,k}^i \mathcal{Z}_{,0}^j g_{ij}}_{\delta_k^i N^j g_{ij}} - \underbrace{\eta_k \eta_0}_0 = g_{kj} N^j \quad (2.8)$$

$$\mathcal{G}_{kl} = \underbrace{\mathcal{Z}_{,k}^i \mathcal{Z}_{,l}^j g_{ij}}_{\delta_k^i \delta_l^j g_{ij}} - \underbrace{\eta_k \eta_l}_0 = g_{kl}. \quad (2.9)$$

Finalmente obtém-se a forma do tensor métrico covariante

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{ij} N^i N^j - N^2 & g_{kj} N^j \\ g_{jk} N^j & g_{kl} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

e através de uma álgebra simples, que relaciona componentes contravariantes e covariantes, pode-se encontrar o tensor métrico contravariante

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & g^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Para prosseguir usaremos a curvatura extrínica  $k_{ij}$ . A curvatura extrínica é definida através da derivada covariante de uma componente do vetor normal  $\eta^\mu$  em relação a uma coordenada da hipersuperfície, o que é expresso pelo transporte paralelo do vetor normal  $\eta_a$  a esta hipersuperfície de um ponto a outro infinitamente próximo nesta hipersuperfície, como mostrado na figura (2.1).

Para o caso do formalismo ADM, a curvatura extrínica tem a forma

$$k_{ij} = -\eta_{,i}^\mu \mathcal{Z}_{,j}^\nu \mathcal{G}_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Uma vez definida a curvatura extrínica, podemos inserí-la na equação de Gauss, cuja dedução pode ser acompanhada em [33]. A equação de Gauss, proveniente da imersão da

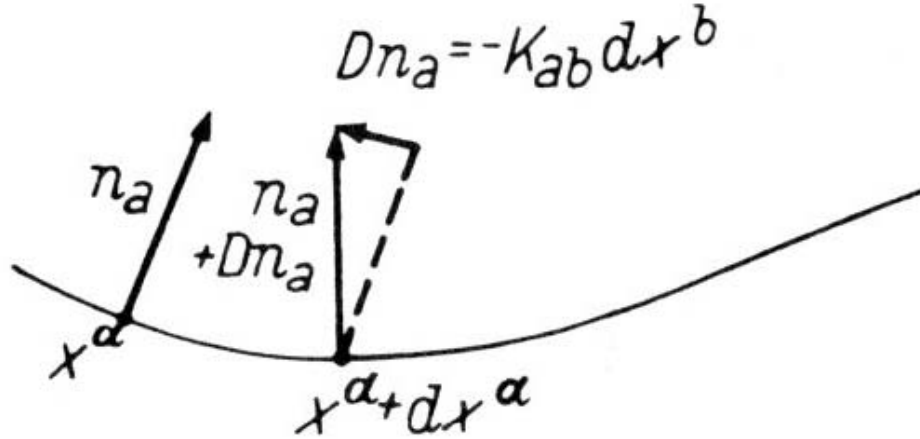


Figura 2.1: Curvatura extrínseca de uma hipersuperfície

hipersuperfície no espaço-tempo, relaciona o tensor de curvatura do espaço-tempo com o tensor de curvatura da hipersuperfície definida na base  $\{\mathcal{Z}_i^\mu, \eta^\nu\}$ ; e tem a seguinte forma

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\gamma\rho} \mathcal{Z}_i^\mu \mathcal{Z}_j^\nu \mathcal{Z}_k^\gamma \mathcal{Z}_l^\rho = R_{ijkl} + k_{ik} k_{jl} - k_{il} k_{jk}. \quad (2.13)$$

Contraindo a equação de Gauss (2.13) e usando a relação (2.6) calcula-se o tensor escalar de Ricci do espaço-tempo

$$\mathcal{R} = R - (K^2 - h^2) - \underbrace{2\mathcal{R}_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu + \mathcal{R}_{\mu\nu\gamma\rho}\eta^\mu\eta^\nu\eta^\gamma\eta^\rho}_0, \quad (2.14)$$

onde  $\mathcal{R}$  é o escalar de curvatura do espaço-tempo e onde  $K^2 = -k_{ij}k^{ij}$ ,  $h = g^{ij}k_{ij}$ . O tensor de Ricci  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  do espaço-tempo nos dá

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu = -\left(K^2 + \frac{\partial h}{\partial t}\right), \quad (2.15)$$

eliminando o termo de divergência  $\partial h/\partial t$  a ação de Einstein-Hilbert se decompõe como

$$S[g_{ij}, N, N_i] = \int \int_{\Sigma_t} \sqrt{\mathcal{G}} [R + (K^2 + h^2)] d^3x dt, \quad (2.16)$$

e os momentos canônicos conjugados às variáveis dinâmicas  $g_{ij}$ ,  $N$ , e  $N_i$  calculados a partir da densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{\mathcal{G}} [R + (K^2 + h^2)] \quad (2.17)$$

são:

$$p^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right)} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{ij}} = -(k^{ij} + hg^{ij})\sqrt{\mathcal{G}} \quad (2.18)$$

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)} = 0 \quad (2.19)$$

$$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial t}\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\left(\frac{\partial N_i}{\partial t}\right)} = 0. \quad (2.20)$$

Para uma densidade qualquer  $\mathcal{W}(\mathcal{Z}^\mu(t, x^i))$ , a variação  $d\mathcal{W}$  no sistema de coordenadas  $\mathcal{Z}^\mu$  é dada por

$$d\mathcal{W} = \frac{d\mathcal{W}}{d\mathcal{Z}^\mu} d\mathcal{Z}^\mu, \quad (2.21)$$

usando a regra da cadeia

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = \frac{d\mathcal{W}}{d\mathcal{Z}^0} \frac{d\mathcal{Z}^0}{dt} + \frac{d\mathcal{W}}{d\mathcal{Z}^i} \frac{d\mathcal{Z}^i}{dt} \quad (2.22)$$

obtemos

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = \frac{d\mathcal{W}}{d\mathcal{Z}^0} N + \frac{d\mathcal{W}}{d\mathcal{Z}^i} N^i, \quad (2.23)$$

identificando  $\frac{d\mathcal{W}}{d\mathcal{Z}^0} = \mathcal{W}_0$  e  $\frac{d\mathcal{W}}{d\mathcal{Z}^i} = \mathcal{W}_i$ , podemos escrever

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = \mathcal{W}_0 N + \mathcal{W}_i N^i, \quad (2.24)$$

integrando em uma região  $\Omega$  de  $\Sigma_t$

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\Omega} [\mathcal{W}_0 N + \mathcal{W}_i N^i] d^3x. \quad (2.25)$$

Em particular a densidade hamiltoniana também pode ser expressa nessa forma. Usando a transformada de Legendre

$$\mathcal{H} = p^{\mu\nu} \frac{d\mathcal{G}_{\mu\nu}}{dt} - \mathcal{L} \quad (2.26)$$

e as equações (2.17), (2.24); então

$$\mathcal{H} = p^{\mu\nu} [\mathcal{G}_{\mu\nu,0}N + \mathcal{G}_{\mu\nu,i}N^i] - \sqrt{\mathcal{G}} [R + (K^2 + h^2)], \quad (2.27)$$

onde denotamos

$$\mathcal{G}_{\mu\nu,\alpha} = \frac{d\mathcal{G}_{\mu\nu}}{dZ^\alpha}, \quad (2.28)$$

e lembrando que  $\sqrt{-\mathcal{G}} = \sqrt{g}N$ , encontramos

$$\mathcal{H} = \left\{ p^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu,0} - \sqrt{\mathcal{G}} [R + (K^2 + h^2)] \sqrt{g} \right\} N + p^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu,i} N^i. \quad (2.29)$$

Finalmente,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 N + \mathcal{H}_i N^i, \quad (2.30)$$

com

$$\mathcal{H}_0 = p^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu,0} - \sqrt{\mathcal{G}} [R + (K^2 + h^2)] \sqrt{g} \quad (2.31)$$

$$\mathcal{H}_i = p^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu,i}. \quad (2.32)$$

A partir da transformada de Legendre e da equação de Euler-Lagrange, chega-se no importante resultado

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} \Rightarrow \frac{\partial (p^{ij} g_{ij} - \mathcal{H})}{\partial N} = 0 \Rightarrow \mathcal{H}_0 = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}^i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^i} \Rightarrow \frac{\partial (p^{ij} g_{ij} - \mathcal{H})}{\partial N^i} = 0 \Rightarrow \mathcal{H}_i = 0. \quad (2.34)$$

Portanto resulta de (2.30) que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 N + \mathcal{H}_i N^i = 0, \quad (2.35)$$

significando que o sistema possui vínculo Hamiltoniano.

Esse resultado significa que o procedimento de quantização pode ser feito pelo método de Dirac para sistemas com vínculos. Nesse caso o que se procura é a evolução da estrutura dos parênteses de Poisson, que infelizmente não é covariante por difeomorfismos. Esse problema ficou conhecido como o problema do tempo na Relatividade Geral [16] [17].

As dificuldades do procedimento ADM decorrem das componentes  $N^i$ , que são as componentes tangentes da perturbação da geometria  $\Sigma$ . Como o sistema é covariante por difeomorfismos, é possível transformar uma componente espacial  $N^i$  em uma componente temporal  $N$  e vice versa. Como no procedimento canônico  $\mathcal{H}$  é o operador de translação temporal, essa característica não se mantém com difeomorfismos.

Devemos salientar que Dirac, mesmo antes do desenvolvimento do ADM, já havia mostrado que se  $N^i = 0$  a Hamiltoniana não se anula e o sistema torna-se perfeitamente quantizável.

# Capítulo 3

## Branas-Mundo

A teoria das branas-mundo considera o espaço-tempo como uma hipersuperfície imersa em um bulk, resultante do movimento de uma 3-brana imersa no mesmo bulk.

Como já foi dito anteriormente, os princípios fundamentais da brana-mundo são apenas três:

- a) O espaço de imersão (o bulk) é uma solução das equações de Einstein;
- b) A brana-mundo é uma variedade 4-dimensional imersa em um espaço D-dimensional;
- c) As interações de calibre e a matéria ordinária permanecem confinadas à brana-mundo de quatro dimensões.

### 3.1 As Equações de movimento da Brana-mundo

Para tratar da formulação da teoria das branas-mundo é suficiente usar imersões locais porque, como na relatividade geral basta descrever um campo gravitacional local (embora as imersões globais possam ser de interesse em teoria de cordas e em cosmologia). A imersão será isométrica porque se quer a mesma noção de gravitação: A métrica do bulk induz a métrica da brana-mundo. Finalmente, porque a brana-mundo evolui dentro do bulk, com sua geometria métrica que varia com as dimensões extra, a imersão não deve ser rígida. Em outras palavras, a equação de Einstein no bulk induz uma dinâmica na



imersão que é descrita pelas equações de movimento da brana-mundo. Uma dificuldade associada com essa dinâmica (em uma dimensão extra apenas) das hipersuperfícies brana-mundos em um bulk de curvatura constante é devido a um resultado geral em geometria, mostrando que nesse caso, se um hipersuperfície tiver mais de dois raios de curvatura finitos  $\ell_i$ , então ela se torna indeformável [33]. Isto significa que há um determinado grau de rigidez associado com as perturbações, impedindo a geração de umas configurações mais complicadas da geometria de imersão.

Por outro lado, existem uns bons argumentos que indicam que a imersão não deve ser analítica. De fato, a condição de analiticidade (no sentido que as funções de imersão são representadas pela convergência da série de potências positiva) é uma exigência muito forte para descrever um campo de altas energias tal como o gráviton, cujas as propriedades ainda não conhecidas podem ser obscurecidas pela exigência da analiticidade [44]. Entretanto, muito dos teoremas de imersão que, no passado, empregavam funções analíticas são agora resolvidos pelo teorema de imersão diferenciável de Nash [23]. Conseqüentemente, a maioria de nossos argumentos serão baseados em imersões diferenciáveis.

Uma propriedade interessante do procedimento usado por Nash ao tratar do problema de imersão, é a noção de perturbação de uma subvariedade arbitrária imersa. Desta forma pode-se gerar qualquer subvariedade imersa deformando ou perturbando a subvariedade dada ao longo das dimensões extra. Mas a importância real deste procedimento é a sua interpretação física. O método perturbativo é similar a formulação canônica de Dirac do campo gravitacional para um sistema especial de coordenadas

Denote por  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  a métrica de uma variedade 4-dimensional arbitrariamente dada  $\bar{V}_4$  (a brana-mundo antes da perturbação) e por  $\mathcal{G}_{AB}$  a métrica do bulk  $V_D$ . A imersão local isométrica de  $\bar{V}_4$  é dado por uma aplicação  $\mathcal{X} : \bar{V}_4 \rightarrow V_D$ , com componentes  $\bar{\mathcal{X}}^A$ ,  $D = 4 + N$  satisfazendo as equações de imersão discutidas no apêndice A<sup>[1]</sup>

---

<sup>1</sup>Usa-se a seguinte notação: Os índices em latin maiúsculos referem-se ao bulk, com  $\mathcal{G}_{AB}$ . Os índices

$$\mathcal{X}^A \mathcal{X}^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{g}_{\mu\nu}, \quad \mathcal{X}^A \bar{\eta}_b^B \mathcal{G}_{AB} = 0, \quad \bar{\eta}_a^A \bar{\eta}_b^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{g}_{ab} \quad (3.1)$$

onde as componentes com uma barra em cima referem-se à  $\bar{V}_4$ . Aqui  $\bar{\eta}_a^A$  são as componentes dos  $N$  vetores independentes normais a  $\bar{V}_4$ . Considere em seguida um deslocamento de uma coordenada local de imersão  $\bar{\mathcal{X}}$  ao longo de cada sentido normal  $\bar{\eta}_a^A$ .

É importante dizer que a perturbação de Nash é feita ao longo das normais, independentemente em cada direção normal. A razão dessa limitação é desconhecida e dá margem à uma possível generalização daquele teorema.

De fato, na sua apresentação original do teorema, Nash denota os termos geométricos perturbados com relação à um único parâmetro por  $\dot{x}$ , referindo-se à variação de  $x$  ao longo de qualquer normal, sem distinção. Aqui colocaremos a questão de forma mais geral, com a perturbação de uma geometria descrita por coordenadas de imersão  $\mathcal{X}^A$ , ao longo de uma direção normal  $\eta_a$  pelo deslocamento local de  $\mathcal{X}^A$  produzido pelo grupo de difeomorfismo com um parâmetro  $y^a$ . Dito de outra forma, pela sua derivada de Lie [41]

$$y^a \mathcal{L}_{\eta_a} \mathcal{X}^A = y^a [\eta_a, \mathcal{X}^A]. \quad (3.2)$$

Portanto, obtemos uma nova variável de imersão dada por

$$\mathcal{Z}^A = \mathcal{X}^A + y^a \mathcal{L}_{\eta_a} \mathcal{X}^A, \quad (3.3)$$

o que permite uma descrição do teorema de Nash em uma base formal mais geral e que permite a mencionada generalização.

Um detalhe interessante a ser analisado é: Como temos  $N$  normais independentes  $\eta_a$ , com componentes  $\eta_a^A$  em uma base arbitrária do espaço de imersão, qual o comportamento da perturbação ao longo de  $\eta_a$  em relação à  $\eta_b$ ? Como dissemos, o teorema de Nash não trata desse assunto, embora admita existência de várias normais. Isto significa que na

---

em latin minúsculos referem-se às dimensões extra e todos os índices gregos referem-se à brana. O  $\mathcal{R}$  denota sempre curvaturas do bulk, como em  $\mathcal{R}_{ABCD}$ . Por generalidade será denotado  $\mathcal{G} = |\det(\mathcal{G}_{AB})|$

sua forma original a variação de uma normal  $\eta_a$  na direção de outra normal  $\eta_b$  é ignorada

$$\mathcal{L}_{\eta_a}\eta_b = 0 \quad (3.4)$$

e portanto cada direção normal é tratada independentemente da outra. Uma condição mais geral para o teorema seria que

$$\mathcal{L}_{\eta_a}\eta_b = [\eta_a, \eta_b] \neq 0. \quad (3.5)$$

Nesse caso é possível expressar este comutador em termos da álgebra de Lie do grupo de rotações dessas normais. Usando a métrica  $g_{ab}$  do espaço normal é possível descrever este comutador na base de Killing da álgebra de Lie, o que seria proporcional às constantes de estrutura  $f_{ab}^c \bar{\eta}_c$  do grupo de rotações das normais.

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}_a}\bar{\eta}_b = [\bar{\eta}_a, \bar{\eta}_b] = f_{ab}^c \bar{\eta}_c, \quad (3.6)$$

onde  $f_{ab}^c$  seriam as constantes de estrutura da álgebra de Lie do grupo de rotação dos diferentes  $\bar{\eta}_a$ .

Aqui tomaremos cada direção separadamente, ou seja

$$\mathcal{Z}^A = \mathcal{X}^A + (y^a \mathcal{L}_{\eta_a} \mathcal{X})^A, \quad \eta_a^A = \bar{\eta}_a^A + (y^a \mathcal{L}_{\eta_a} \bar{\eta}_a)^A = \bar{\eta}_a^A, \quad (3.7)$$

onde  $y^a$  denota as coordenadas extras ao longo de  $\bar{\eta}_a$ . O resultado pode ser uma outra subvariedade imersa no mesmo bulk. A existência, unicidade e a natureza desta imersão dependem do requerimento que se faz sobre ela.

Portanto, considerando a situação mais geral onde as funções de imersão são funções diferenciáveis, a imersão pode ser obtida pelo procedimento de perturbação descrito acima. Além de serem diferenciáveis, a única exigência adicional feita por Nash é que as funções de imersão sejam também regulares de modo que localmente a imersão seja inversível. Com isso, os vetores  $\{\mathcal{Z}_{,\mu}^A, \eta_a^A\}$  definem um sistema de referência gaussiano do bulk sobre a brana-mundo.

As equações de imersão similares ao (3.1) (mas agora dependente em  $y^a$ ) são:

$$\mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = g_{\mu\nu}, \quad \mathcal{Z}_{,\mu}^A \eta_a^B \mathcal{G}_{AB} = g_{\mu a}, \quad \eta_a^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = g_{ab} \quad (3.8)$$

Novamente, como  $\mathcal{Z}_{,\mu}^A$  é uma base tangente à variedade perturbada. Segue-se da primeira das equações acima que  $g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = \mathcal{G}^{AB} \mathcal{G}_{AB} - g^{ab} g_{ab}$ . Usando o restante destas equações, segue que

$$g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B = \mathcal{G}^{AB} - g^{ab} \eta_a^A \eta_b^B \quad (3.9)$$

Os componentes básicos da métrica perturbada podem ser calculados pela substituição direta de  $\mathcal{Z}_{,\mu}^A$  e de  $\eta_a^A$  derivados de (3.7) em (3.8):

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{g}_{\mu\nu} - 2y^a \bar{k}_{\mu\nu a} + y^a y^b [\bar{g}^{\alpha\beta} \bar{k}_{\mu\alpha a} \bar{k}_{\nu\beta b} + g^{cd} \bar{A}_{\mu ca} \bar{A}_{\nu db}], \quad (3.10)$$

$$g_{\mu a}(x, y) = \mathcal{Z}_{,\mu}^A \eta_a^B \mathcal{G}_{AB} = y^b A_{\mu ab}, \quad (3.11)$$

$$g_{ab}(x, y) = \eta_a^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{g}_{ab} \quad (3.12)$$

e as novas segunda e terceira formas fundamentais são

$$k_{\mu\nu a}(x, y) = -\eta_{a,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{k}_{\mu\nu a} - y^b \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{k}_{\mu\alpha a} \bar{k}_{\nu\beta b} - g^{cd} y^b \bar{A}_{\mu ca} \bar{A}_{\nu db}, \quad (3.13)$$

$$A_{\mu ab}(x, y) = \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{A}_{\mu ab}(x) \quad (3.14)$$

De (3.10) e de (3.13) obtêm-se a relação de York para a curvatura extrínica, estendida às variáveis extra  $y^a$ :

$$k_{\mu\nu a} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^a}. \quad (3.15)$$

Isto significa que além do campo gravitacional da brana-mundo representado pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , a curvatura extrínica também se propaga. É interessante observar que essa relação foi usada por Nash na sua definição original da perturbação com a notação  $\dot{g}_{\mu\nu}$ . Diferentemente,  $A_{\mu ab}$  não se propaga no bulk.

A etapa seguinte é decidir qual a geometria do bulk. No caso da brana-mundo não há muita discussão sobre isto porque sua geometria foi definida pelo princípio de Einstein-Hilbert. Conseqüentemente pode-se começar escrevendo seu tensor  $R_{ABCD}$  de Riemann que é a estrutura mais geral que pode-se construir com a métrica e suas derivadas de segunda ordem. Usando o sistema Gaussiano de referência  $\{\mathcal{Z}_{,\alpha}^A, \eta_a^A\}$ , obtemos as componentes  $\mathcal{R}_{ABCD}$  [33]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2g^{mn}k_{\alpha[\gamma m}k_{\delta]\beta n} + \mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\alpha}^A\mathcal{Z}_{,\beta}^B\mathcal{Z}_{,\gamma}^C\mathcal{Z}_{,\delta}^D \quad (3.16)$$

$$k_{\alpha[\gamma b;\delta]} = g^{mn}A_{[\gamma mb}k_{\alpha\delta]n} + \mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{Z}_{,\alpha}^A\eta_b^B\mathcal{Z}_{,\gamma}^C\mathcal{Z}_{,\delta}^D \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} 2A_{[\gamma ab;\delta]} &= -2g^{mn}A_{[\gamma ma}A_{\delta]nb} \\ &\quad - g^{mn}k_{[\gamma ma}k_{\delta]nb} - \mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\mathcal{Z}_{,\gamma}^C\mathcal{Z}_{,\delta}^D \end{aligned} \quad (3.18)$$

para simplificar a notação usamos a seguinte convenção: os parênteses antisimétricos  $[\ ]$  se aplicam apenas aos índices que estão mais próximos dos parênteses.

Observe que estas não são de fato equações mas apenas expressões das componentes do tensor  $\mathcal{R}_{ABCD}$  de Riemann do bulk no sistema de referência da imersão. Elas se transformarão em equações somente depois que as componentes  $\mathcal{R}_{ABCD}$  do lado direito forem definidas. Neste trabalho, essa definição é dada por uma solução de equações de Einstein D-dimensional

$$\mathcal{R}_{AB} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathcal{G}_{AB} = \alpha_*T_{AB}^* \quad (3.19)$$

com isso, as equações (3.16)-(3.18) transformam-se nas equações de Gauss-Codazzi-Ricci para a brana-mundo, agindo como condições de integrabilidade da imersão. Estas equações podem ser encontradas no apêndice A. Em princípio deve-se resolver estas equações em termos de  $g_{\mu\nu}$ ,  $k_{\mu\nu a}$ ,  $A_{\mu\nu b}$  e posteriormente substituir os resultados em (3.10)-(3.14) para encontrar as variáveis de imersão  $\mathcal{Z}^A$ .

As equações de movimento da brana-mundo são derivadas exclusivamente da única ação presente, ou seja, da equação de Einstein (3.19).

Assim, da contração das equações de Gauss com  $g^{\mu\nu}$  e usando (3.9), obtêm-se o tensor de Ricci da brana-mundo

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= g^{cd}(g^{\alpha\beta}k_{\mu\alpha c}k_{\nu\beta d} - h_c k_{\mu\nu d}) + \mathcal{R}_{AB}Z_{,\mu}^AZ_{,\nu}^B \\ &- g^{ab}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^AZ_{,\mu}^BZ_{,\nu}^C\eta_b^D \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde denotamos  $K^2 = g^{ab}k^{\mu\nu}{}_ak_{\mu\nu b}$ ,  $h_a = g^{\mu\nu}k_{\mu\nu a}$  and  $h^2 = g^{ab}h_a h_b$ . Uma outra contração desta, resulta no escalar de Ricci

$$\begin{aligned} R &= (K^2 - h^2) + \mathcal{R} - 2g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B \\ &+ g^{ad}g^{bc}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\eta_c^C\eta_d^D \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pode-se agora escrever a ação de Einstein-Hilbert para a geometria do bulk em  $D$ -dimensões nos termos da geometria de imersão. Para completar a dinâmica, inclui-se também a Lagrangiana fonte do bulk  $\mathcal{L}^*$  no lado direito

$$\begin{aligned} \int \mathcal{R}\sqrt{\mathcal{G}}d^Dv &\equiv \int [R - (K^2 - h^2)] \sqrt{\mathcal{G}}d^Dv + \\ \int [2g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B - g^{ad}g^{bc}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\eta_c^C\eta_d^D] \sqrt{\mathcal{G}}d^Dv \\ &= \alpha_* \int \mathcal{L}^*\sqrt{\mathcal{G}}d^Dv \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde denota-se por  $\alpha_*$  a escala fundamental D-dimensional da energia.

Para obter as equações de movimento da brana-mundo, utiliza-se as variações de (3.22) com respeito as variáveis dinâmicas  $g_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu a}$  e  $g_{ab}$ , notando que  $\mathcal{L}^*$  depende destas variáveis através das variáveis de imersão  $\mathcal{Z}_{,\mu}^A$ . Um caminho mais simples consiste em calcular as componentes do tensor de Einstein para a brana-mundo diretamente de (3.19) no sistema de referência da imersão. Denotando as componentes do tensor energia-momento nesse referencial, obtemos

$$T_{\mu\nu}^* = T_{AB}^*\mathcal{Z}_{,\mu}^AZ_{,\nu}^B, \quad T_{\mu a}^* = T_{AB}^*\mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_a^B \quad \text{e} \quad T_{ab}^* = T_{AB}^*\eta_a^A\eta_b^B$$

O confinamento das interações de calibre é conseqüência da teoria de Yang-Mills, que tem dualidade das formas diferenciais consistente apenas em quatro dimensões. Assim as únicas componentes do tensor energia-momentum  $T_{AB}^*$  não nulas são  $T_{\mu\nu}^*$ , ou seja,

$$T_{\mu a}^* = 0, \quad T_{ab}^* = 0 \quad (3.23)$$

e onde assumimos a definição de  $\alpha_* T_{\mu\nu}^*$

$$\alpha_* T_{\mu\nu}^* = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

Denotando

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu} &= g^{ab} k_{\mu a}^\rho k_{\rho\nu b} - g^{ab} h_a k_{\mu\nu b} - \frac{1}{2}(K^2 - h^2)g_{\mu\nu} \\ W_{\mu\nu} &= g^{ad} \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \mathcal{Z}_{,\mu}^B \mathcal{Z}_{,\nu}^C \eta_d^D \\ W_{\mu a} &= g^{mn} \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \eta_m^B \mathcal{Z}_{,\mu}^C \eta_n^D \end{aligned} \quad (3.25)$$

Usando (3.19), (3.20), (3.21) e o confinamento das interações de calibre, obtêm-se a equação *gravi-tensor*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu} - W_{\mu\nu} - g^{ab} \mathcal{R}_{AB} \eta_a^A \eta_b^B = \alpha_* T_{\mu\nu}^* = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.26)$$

do traço da equação de Codazzi (3.17) obtêm-se a equação *gravi-vector*

$$k_{\mu a;\rho}^\rho - h_{a,\mu} + A_{\rho ca} k_\mu^{\rho c} - A_{\mu ca} h^c + 2W_{\mu a} = 2\alpha_* \left( -\frac{1}{N+2} T^* g_{\mu a} \right) \quad (3.27)$$

e finalmente, contraindo (3.19) com  $\eta_a^A \eta_b^B$  obtemos a equação *gravi-scalar*

$$S_{ab} - S g_{ab} - \frac{1}{2} [R - K^2 + h^2] g_{ab} = 0, \quad (3.28)$$

onde  $S_{ab} = g^{ab} \mathcal{R}_{AB} \eta_a^A \eta_b^B$  é as vezes chamado termo de Hawking-Gibbons, cujo traço é  $S = g^{ab} S_{ab}$ . Estas equações representam as equações covariantes do movimento da brana-mundo, resultante das equações de Einstein do bulk, e das equações de imersão.

Como descrevemos a imersão da brana-mundo pelo processo perturbativo de Nash, e as equações (3.26)-(3.28) foram deduzidas das condições de integrabilidade da imersão,

concluimos que aquela imersão resulta do processo dinâmico descrito por (3.26)-(3.28), desde que o espaço de imersão seja definido pela ação de Einstein-Hilbert.

Isto é um resultado importante porque ele atribui o processo de formação de objetos geométricos (superfícies, área, volume e etc.) à dinâmica de Einstein-Hilbert. Isto é, Nash descreve a formação de objetos geométricos através da deformação (perturbação) de estruturas mais simples, mas ele não diz *como isso se processa*. Aqui estamos propondo, pelo exemplo da ação de Einstein-Hilbert, a necessidade de uma ação física para que isso ocorra.

## 3.2 As Equações Canônicas do Movimento

Uma distinção fundamental entre a dinâmica das brana-mundos e a dinâmica da relatividade geral gravitacional já foi comentada: O confinamento das interações do calibre e o acesso exclusivo dos grávitons às dimensões extra implica que a invariância do difeomorfismo com respeito às variáveis extra é quebrada. Certamente, se esta simetria fosse mantida, então por uma simples transformação das coordenadas no bulk poderia tornar os campos do calibre não confinados, e a solução pretendida do problema da hierarquia não seria possível, ao menos do ponto de vista da distinção qualitativa de Misner. Nesta seção mostra-se que isto implica no fato relevante que as equações (3.26)-(3.28) são equivalentes a um conjunto de equações canônicas relativo a uma família das brana-mundos, cujo o espaço de fase é definido com respeito às dimensões extra.

O procedimento é derivado da construção de Tomonaga-Schwinger [19, 20] do formalismo de muitos tempos de Dirac, onde a família de hipersuperfícies de três dimensões em  $M_4$  cede lugar à uma família de brana-mundo 4-dimensionais no bulk, caracterizada pelos valores das coordenadas extras  $y^a$ .

O momento conjugado a  $\mathcal{G}_{AB}$ , relativo à dimensão extra  $y^a$  é definido por

$$p^{AB}{}_{(a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \mathcal{G}_{AB}}{\partial y^a} \right)}$$



Em particular pode-se calcular os momentos conjugados associados as componentes da métrica da brana-mundo.

$$p^{\mu\nu}{}_{(a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^a}\right)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{\mu\nu a}} = -(k_a^{\mu\nu} + h_a g^{\mu\nu}) \sqrt{\mathcal{G}} \quad (3.29)$$

$$p^{\mu a}{}_{(b)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\left(\frac{\partial g_{\mu a}}{\partial y^b}\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu ab}} = 0 \quad (3.30)$$

$$p^{ab}{}_{(c)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial y^c}\right)} = 0 \quad (3.31)$$

As últimas duas equações expressam a hipótese do confinamento, no sentido que não há nenhum momento extríntrico para os campos confinados e correspondem à simplificação feita por Nash  $[\eta_a, \eta_b] = 0$ . Portanto, o hamiltoniano correspondente ao deslocamento ao longo de cada sentido ortogonal  $\eta_a$ , pode ser escrito diretamente da transformação de Legendre:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a(g, p) &= p^{\mu\nu}{}_{(a)} g_{\mu\nu, a} - \mathcal{L} = \\ &= R\sqrt{\mathcal{G}} - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} \left[ \frac{3p^2}{5} + 2\frac{p_{(a)}^2}{5} + p_{(a)}^{\mu\nu} p_{\mu\nu(a)} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde denotamos  $p_a = g_{\mu\nu} p_{(a)}^{\mu\nu}$ . Usando essa Hamiltoniana obtemos as equações de Hamilton relativas à coordenada extra  $y^a$ , que são

$$\begin{aligned} \frac{dg_{\mu\nu}}{dy^a} &= \frac{\delta \mathcal{H}_a}{\delta p^{\mu\nu(a)}} = [g_{\mu\nu}, \mathcal{H}_a] = -2k_{\mu\nu a}, \\ \frac{dp_{(a)}^{\mu\nu}}{dy^a} &= -\frac{\delta \mathcal{H}_a}{\delta g_{\mu\nu}} = [p_{(a)}^{\mu\nu}, \mathcal{H}_a]. \end{aligned}$$

É fácil perceber que a primeira destas equações é equivalente a relação de York (3.15) escrita no espaço de fase, dando a propagação da métrica nos termos da curvatura extríntrica. A segunda equação dá a propagação da curvatura extríntrica expressada nos termos de  $p_{(a)}^{\mu\nu}$ .

Para um dado funcional  $\mathcal{F}(g_{\mu\nu}, p_{\mu\nu})$  definido no espaço da fase, podemos calcular os parênteses de Poisson com cada Hamiltoniano  $\mathcal{H}_a$

$$[\mathcal{F}, \mathcal{H}_a] = \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta g_{\mu\nu}} \frac{\delta \mathcal{H}_a}{\delta p^{\mu\nu(a)}} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta p^{\mu\nu(a)}} \frac{\delta \mathcal{H}_a}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta y^a}, \quad (3.33)$$

o qual dá a propagação de  $\mathcal{F}$  ao longo de  $y^a$ . Isto é covariante somente com o grupo de simetrias das dimensões extra. Em particular, quando este parêntese se anula,  $\mathcal{F}$  é dito ser conservado com respeito a essa simetria. Em particular interpreta-se as condições

$$[\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b] = 0 \tag{3.34}$$

como indicando que o Hamiltoniano correspondente a uma dimensão extra será conservado quando é propagado ao longo de outras dimensões extras de acordo com a independência das perturbações de Nash para cada direção normal  $\eta_a$ . No exemplo particular onde têm-se apenas uma dimensão extra, a afirmação acima significa que o hamiltoniano é auto conservado. De outra forma, então o parêntese (3.33) não desaparece, e neste caso é dado ao Hamiltoniano  $\mathcal{H}_a$  a interpretação da propagação clássica funcional ao longo da dimensão extra  $\eta_a$ . Portanto é possível implementar a quantização extra-dimensional da geometria da brana-mundo por uma generalização da equação de Schödinger através do procedimento de muitos tempos de Dirac-Tomonaga-Schwinger.

# Capítulo 4

## Teoria de Muitos Tempos de Dirac-Tomonaga-Schwinger

No final dos anos quarenta Tomonaga e Schwinger trabalharam no desenvolvimento de uma Teoria Quântica de Campos, seus métodos basearam-se no formalismo de muitos tempos de Dirac [3], no qual um conjunto de  $N$  elétrons era associado a  $N$  equações do tipo Schrödinger definidas para  $N$  tempos próprios. O limite contínuo do conjunto destas equações foi formulado por Tomonaga [19] para um campo relativístico definido numa hipersuperfície  $\sigma$  espacial tridimensional, com um tempo definido para cada ponto desta hipersuperfície. Esta extensão geométrica do formalismo de muitos tempos de Dirac era equivalente a representação de interação da Mecânica Quântica desenvolvida por Schwinger [20].

O conteúdo das seções seguintes segue basicamente o livro texto de K. Nishijima [34].

### 4.1 Formulação de Dirac

Dirac tentou construir uma equação de Schrödinger para um conjunto de elétrons interagindo com um campo eletromagnético. Para isso, ele considerou que todos os elétrons estariam atrelados a um único tempo, ou seja, para  $N$  elétrons teria-se  $t_1 = t_2 = \dots = t_N = t$

e portanto uma equação de Schrödinger para um único tempo poderia ser construída, com um Hamiltoniano  $H_{em}$  descrevendo o campo eletromagnético e com potencial  $A(x_j)$  para o campo eletromagnético. Tal equação tem a seguinte forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \left[ H_{em} + \sum_{j=1}^N H_j(x_j, p_j, A(x_j)) \right] \psi(t) \quad , \quad (4.1)$$

usando a transformação unitária

$$U(t) = \exp(itH_{em}/\hbar) \quad (4.2)$$

pode-se transformar o potencial  $A(x_j)$  em um potencial na representação de Heisenberg  $A(x_j, t)$  através de

$$A(x_j, t) = U(t)A(x_j)U(t)^{-1} \quad . \quad (4.3)$$

Agora redefina a função de onda  $\psi(t)$  por

$$\phi(t) = U(t)\psi(t), \quad (4.4)$$

e o Hamiltoniano do campo eletromagnético  $H_{em}$  é absorvido em  $\phi(t)$  e  $A(x_j, t)$  através de  $U(t)$ , o que permite escrever a equação

$$i\hbar \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \left( \sum_{j=1}^N H_j(x_j, p_j, A(x_j, t)) \right) \phi(t) \quad . \quad (4.5)$$

Nesse ponto, podemos considerar os múltiplos tempos, definindo uma nova função de onda  $\phi(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N)$ , por

$$i\hbar \frac{\partial \phi(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N)}{\partial t_j} = \left( \sum_{j=1}^N H_j(x_j, p_j, A(x_j, t)) \right) \phi(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N) \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (4.6)$$

temos  $N$  equações de onda, as quais devem ser compatíveis, e para isso é exigido que

$$\frac{\partial^2}{\partial t_j \partial t_k} \phi = \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_j} \phi \quad (4.7)$$

o que implica nas seguintes condições

$$(H_j H_k - H_k H_j) \phi(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N) = 0 \quad \text{com} \quad j, k = 1..N \quad . \quad (4.8)$$

Estas condições são chamadas de condições de integrabilidade, e o único termo que poderia contribuir para o não anulamento do comutador  $[H_j, H_k]$  é o termo contendo o potencial  $A(x_j, t)$ , e portanto deve-se ter

$$[A(x_j, t_j), A(x_k, t_k)] = 0 \quad \text{com} \quad j, k = 1..N \quad . \quad (4.9)$$

Como os valores esperados dos potenciais  $A(x_j, t_j)$  e  $A(x_k, t_k)$  devem ser resultados de medidas, então, para que uma medida feita em  $A(x_j, t_j)$  não afete uma medida feita em  $A(x_k, t_k)$  é necessário que distância entre os pontos de coordenadas  $(x_j, t_j)$  e  $(x_k, t_k)$  seja do tipo espacial, ou seja,

$$(x_j - x_k)^2 - (t_j - t_k)^2 > 0 \quad . \quad (4.10)$$

Isto é, as partículas estão distribuídas em uma superfície espacial  $\Sigma$ .

A extensão do cenário de muitas partículas para uma teoria de campos pode ser feita através da substituição da distribuição contínua de partículas com suas respectivas posições espaço-temporais, por uma hipersuperfície tridimensional espacial, onde cada ponto tem o seu tempo próprio atrelado. Tal extensão, como será visto a seguir, é uma teoria de muitos tempos para campos.

## 4.2 Formulação de Tomonaga

Em 1943<sup>[1]</sup>, Tomonaga apresentou uma versão para campos da teoria de muitos tempos de Dirac. Por não mais se tratar de partículas, mas sim de campos, o Hamiltoniano do

---

<sup>1</sup>Este trabalho foi apresentado na língua japonesa. Somente em 1946 foi publicado em inglês

sistema foi expresso pela integração das densidades de Hamiltoniano nos seus respectivos domínios. Aqui seguimos essencialmente o texto de Nishijima [34].

$$H = H_f + H_{int} = \int \mathcal{H}_f(x) d^3x + \int \mathcal{H}_{int}(x) d^3x \quad , \quad (4.11)$$

onde  $H_f$  representa a Hamiltoniana livre e  $H_{int}$  representa o Hamiltoniano de interação dos campos. O Hamiltoniano  $H$  deve obedecer a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H\psi(t) \quad . \quad (4.12)$$

Considerando, novamente, uma transformação unitária  $U(t)$  dada por

$$U(t) = \exp(itH_f/\hbar) \quad (4.13)$$

e a transformação de  $\varphi_\alpha(x)$  para  $\varphi_\alpha(x, t)$  dada por

$$\varphi_\alpha(x, t) = U(t)\varphi_\alpha(x)U(t)^{-1}, \quad (4.14)$$

onde os  $\varphi_\alpha$  são as variáveis dinâmicas, assim como na formulação de Dirac,  $A(x)$  representou o campo eletromagnético.

Um novo vetor de estado  $\phi$  pode ser definido

$$\phi(t) = U(t)\psi(t) \quad (4.15)$$

obedecendo a equação

$$i\hbar \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \left[ U(t) \left( \int \mathcal{H}_{int}(x) d^3x \right) U(t)^{-1} \right] \phi(t) \quad , \quad (4.16)$$

Considerando que  $\mathcal{H}_{int}(x)$  é um polinômio de  $\varphi_\alpha(x)$ , tem-se

$$U(t)\mathcal{H}_{int}[\varphi_\alpha(x)]U(t)^{-1} = \mathcal{H}_{int}[U(t)\varphi_\alpha(x)U(t)^{-1}] = \mathcal{H}_{int}[\varphi_\alpha(x, t)] \quad . \quad (4.17)$$

Esta é uma representação híbrida entre a representação de Heisenberg e Schrödinger, chamada de representação de interação por Schwinger. E portanto a equação (4.16) torna-se

$$i\hbar \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \left\{ \int \mathcal{H}_{int}[\varphi_\alpha(x, t)] d^3x \right\} \phi(t) \quad . \quad (4.18)$$

Na teoria de Dirac a cada elétron foi associado um respectivo tempo, enquanto Tomonaga associou a cada ponto da hipersuperfície  $\sigma$  um tempo  $t_x$ . Note entretanto que a derivada temporal é substituída por uma derivada funcional

$$\frac{\delta\phi}{\delta t_x} = \lim_{\delta t_x \rightarrow 0} \frac{\phi[t_x + \delta t_x] - \phi[t_x]}{\int \delta t_x d^3x} \quad (4.19)$$

ou, considerando o vetor de estado

$$\phi = \phi[t_x, t_{x'}, \dots] = \phi[\sigma] \quad , \quad (4.20)$$

pode-se escrever a derivada funcional da seguinte forma

$$\frac{\delta\phi}{\delta t_x} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\phi[\sigma'] - \phi[\sigma]}{\Delta V} = \frac{\delta\phi[\sigma]}{\delta\sigma(x)} \quad , \quad (4.21)$$

onde  $\Delta V$  denota um volume quadridimensional infinitesimal entre duas hipersuperfícies  $\sigma$  e  $\sigma'$ . Usando esta derivada funcional a equação de Schrödinger torna-se

$$i\hbar \frac{\delta\phi[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \mathcal{H}(x)\phi[\sigma]. \quad (4.22)$$

No caso de uma hipersuperfície  $\sigma$  plana,  $t_x = \text{constante}$ , é possível mostrar que a teoria usual de Schrödinger reaparece, quando

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \int \frac{\delta\phi}{\delta\sigma(x)} d^3x \quad , \quad (4.23)$$

e a condição de integrabilidade para uma hipersuperfície plana é generalizada por

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \frac{\delta}{\delta\sigma(y)} \phi[\sigma] = \frac{\delta}{\delta\sigma(y)} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \phi[\sigma] \quad (4.24)$$

ou

$$[\mathcal{H}_{int}(x), \mathcal{H}_{int}(y)] = 0 \quad . \quad (4.25)$$

Esta condição é satisfeita quando  $(x - y)^2 > 0$ , ou seja, quando todos os pontos na hipersuperfície  $\sigma$  são separados por distâncias do tipo espacial. Quando isto acontece,  $\sigma$  é chamada de hipersuperfície do tipo espacial. Portanto a condição de integrabilidade de (4.22) exige que o vetor de estado seja definido somente quando  $\sigma$  é o do tipo espacial, o que realmente significa uma restrição forte à dinâmica quântica das hipersuperfícies tridimensionais no espaço-tempo de Minkowski ( $\mathcal{M}_4$ ).

### 4.3 Integrabilidade da equação Tomonaga-Schwinger

Como vimos a principal dificuldade na equação (4.22) é que ela não é facilmente integrável. No caso particular onde  $[\hat{\mathcal{H}}_\sigma, \hat{\mathcal{H}}_{\sigma'}] = 0$ , a equação pode ser integrada, mas para isso é necessário que  $\sigma$  e  $\sigma'$  sejam planas. No caso geral onde  $\sigma$  e  $\sigma'$  não são planas, a solução de (4.22) pode ser determinada, como uma solução aproximada, depois da aplicação do formalismo de Yang-Feldmann e da expressão de Dyson para a matriz  $S$  Nishijima [34]. A dificuldade em resolver (4.22) está no fato de que a operação de limite feita em (4.21) não foi previamente definida. De fato, a proximidade de  $\sigma$  e  $\sigma'$  não foi dada previamente, e isto só é conseguido depois que se resolve a equação quântica (4.22) através de algum método quântico de aproximação (Feynman, por exemplo). Entretanto nos trabalhos de Tomonaga e Schwinger não há uma definição de limite de proximidade entre duas hipersuperfícies. Não é demais lembrar que em qualquer processo de análise matemática no sentido tradicional, a operação de limite requer uma noção preliminar de topologia.

O método perturbativo de Nash usa a perturbação de uma hipersuperfície em relação a coordenada extra. Portanto podemos usar a perturbação de Nash para definir a proximidade das hipersuperfícies, permitindo definir a integração da equação de Tomonaga-Schwinger, sem a necessidade de soluções aproximadas a posteriori.

Na aplicação da equação de Tomonaga-Schwinger (4.22) para a brana-mundo, a operação de limite entre duas branas-mundo quadridimensionais  $\sigma_4$  e  $\sigma'_4$  é definida claramente pela variação clássica de uma subvariedade inicial  $\sigma_4$ , de acordo com a perturbação de Nash para imersão. Ou seja, o elemento de volume em (4.21) é especificado pelo parâmetro  $\delta y^a$  da geometria perturbada, que mede a separação entre as duas subvariedades. Na prática, o volume  $\Delta V$  entre  $\sigma_4$  e  $\sigma'_4$  é o produto do volume  $\Delta v$  de uma região pequena e compacta em  $\sigma_4$ , pela variação  $\Delta y^a$  da coordenada extra. Como  $\Delta v$  é arbitrário, é suficiente especificar somente o limite  $\Delta y^a \rightarrow 0$  para calcular a derivada



funcional (4.21), que passa a ser apenas a derivada comum com relação a  $y^a$

$$\left. \frac{\delta\phi}{\delta\sigma} \right|_{y^a} = \lim_{\Delta y^a \rightarrow 0} \frac{\phi(\sigma') - \phi(\sigma)}{\Delta y^a} = \frac{\partial\phi}{\partial y^a}. \quad (4.26)$$

Entendemos que uma dificuldade maior da teoria quântica de campos pode ser sanada se implementarmos, ainda no domínio clássico, a medida da separação entre duas folhas quaisquer de uma foliação do Bulk. A seguir aplicaremos esse resultado para a quantização da Brana-Mundo pela equação de Tomonaga-Schwinger.

# Capítulo 5

## Quantização da Brana-mundo

### 5.1 Introdução

Depois de analisar perturbativamente a gravitação quântica, por diversos meios, Misner chegou na interessante conclusão que uma teoria efetiva da gravitação quântica deve ser qualitativamente diferente das teorias de calibre [5]. Como dito em sua frase:

*”If gravity is to occupy a significant place in modern physics, it can do so only by being qualitatively different from other fields. As soon as we assume that gravity behaves qualitatively like other fields, we find that it is quantitatively insignificant.”*

Admitindo a significância quantitativa em termos de níveis de energia, a conclusão de Misner sugere que o problema da quantização do campo gravitacional pode ser resolvido concomitantemente com o problema da hierarquia das interações fundamentais. A gravitação pode ter o mesmo nível de energia ( $TeV$ ) das demais interações fundamentais, mas ela terá comportamento qualitativamente diferente. Ou seja, ela não será uma teoria de calibre, como muitos pensam atualmente.

A gravitação descrita pela brana-mundo é motivada pelo problema da hierarquia das interações fundamentais. No artigo de N. Arkani-Hamed, G. Dvali e S. Dimopoulos é

questionada a hipótese correntemente aceita de que os grávitons são quantitativamente relevantes somente na escala de Planck de energias, essencialmente porque esta hipótese não tem suporte experimental. Eles propuseram que todos os campos de calibre conhecidos estão confinados com a brana-mundo quadridimensional, mas os grávitons podem se propagar em um espaço ambiente de dimensão maior (bulk), na mesma escala  $TeV$  de energia dos campos de calibre. De acordo com este ponto de vista a gravitação via brana-mundo é qualitativamente diferente, mas quantitativamente equivalente aos campos de calibre do modelo padrão. Portanto, ela se qualifica para quantização segundo o critério de Misner.

## 5.2 Estados quânticos de Tomonaga-Schwinger

Como vimos, a equação de Tomonaga-Schwinger teve origem no formalismo de muitos tempos de Dirac para a teoria quântica relativística de um conjunto de  $N$  elétrons associado a  $N$  tempos próprios. O limite contínuo desta equação foi formulado por Tomonaga para um campo relativístico definido na região do espaço-tempo envolvida por uma hipersuperfície tridimensional  $\sigma$  com uma direção temporal atrelada a cada um dos pontos da hipersuperfícies. Esta extensão geométrica da formulação de muitos tempos de Dirac, é equivalente à representação de interação da mecânica quântica desenvolvida por Schwinger [20].

Como salientamos na seção anterior, a não integrabilidade da equação de Tomonaga-Schwinger deve-se a falta de definição de uma topologia para a foliação de hipersuperfícies de três dimensões. Entretanto, se for implementado um processo perturbativo do tipo Nash para geração de subvariedades, então é possível substituir a derivada funcional pela derivada no tempo. Tal procedimento continua inviável em Relatividade Geral, por conseqüência da covariância generalizada. Entretanto, no caso de brana-mundo, não temos essa limitação. O espaço-tempo 4-dimensional (a brana-mundo) será uma evolução

descrita pela mesma equação de Tomonaga-Schwinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial y^a} = \hat{\mathcal{H}}_a \Psi, \quad (5.1)$$

a qual dá à  $\mathcal{H}_a$  a interpretação de um operador translacional para a dimensão extra  $a$ . A construção de  $\mathcal{H}_a$  já foi vista na seção (3.2) e o operador  $\hat{\mathcal{H}}_a$  é obtido a partir da expressão clássica (3.26), com uso do princípio de correspondência  $g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu}$  e  $p_{\mu\nu(a)} \rightarrow \hat{p}_{\mu\nu(a)}$ .

Já comentamos que aqui estamos com uma simplificação decorrente da condição  $[\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b] = 0$ , que equivale à  $[\hat{\mathcal{H}}_a, \hat{\mathcal{H}}_b] = 0$ . Entretanto é possível considerar uma extensão desse resultado para o caso mais geral, incluindo a rotação entre as normais.

O estado quântico final é dado pela superposição dos  $N$  estados separados  $\Psi_a$ ,  $\Psi = \sum B^a \Psi_a$ . Onde  $\Psi$  representa a flutuação quântica da subvariedade no "bulk" na escala ( $TeV$ ) de energia, envolvendo todas as dimensões extras e sujeita a incertezas quânticas. A probabilidade que essa brana-mundo esteja no estado  $\Psi$  é

$$\|\Psi\|^2 = \int \Psi^\dagger \Psi \delta y \delta v \quad (5.2)$$

e para um observador confinado na brana-mundo, os valores quânticos esperados para métrica e a curvatura extrínseca da brana-mundo são dados por

$$\langle \Psi | \hat{g}_{\mu\nu} | \Psi \rangle = \int \Psi^\dagger \hat{g}_{\mu\nu} \Psi \delta y \delta v, \quad \langle \Psi | \hat{k}_{\mu\nu} | \Psi \rangle = \int \Psi^\dagger \hat{k}_{\mu\nu} \Psi \delta y \delta v. \quad (5.3)$$

Em um exercício simples, como por exemplo o modelo de universo FRW, podemos escolher as condições de contorno nestas quantidades para uma brana-mundo inicial  $y^a = 0$  para determinar a solução final que representará o estado quântico do universo.

### 5.3 Conclusões e Perspectivas

Mostramos que o princípio de Einstein-Hilbert aplicado a geometria do bulk e mais as condições diferenciáveis de imersão são suficientes para determinar as estruturas clássicas

e quântica da brana-mundo em  $D$ -dimensões. O princípio fundamental foi o uso do teorema de Nash para tornar possível a geração de qualquer subvariedade imersa a partir de uma seqüência contínua de perturbações infinitesimais em uma subvariedade imersa inicial ao longo das dimensões extras aplicado ao formalismo ADM. Usando perturbações clássicas imersas, e os princípios básicos da teoria de branas-mundo construímos uma estrutura canônica semelhante a formulação canônica ADM, com a diferença que o Hamiltoniano não se anula.

A quantização da brana-mundo foi descrita através da equação de Tomonaga-Schwinger definida para subvariedades brana-mundo, calculada para cada dimensão extra. Como resultado de uma teoria de perturbação clássica, a equação de Tomonaga-Schwinger torna-se integrável. A definição de derivada funcional foi implementada, com respeito a uma teoria de campo quadridimensional, através de um método perturbativo bem definido na estrutura da brana-mundo. Esse é um resultado importante do trabalho, mas ele necessita ser aplicado, como nos itens a seguir.

1) A gravitação da brana-mundo prediz a geração de mini buracos negros de vida curta em laboratórios na escala  $TeV$  de energia, resultantes da colisão próton-próton [38]. Contudo, usando gravitação quântica semi-clássica, sabe-se que a unitariedade quântica não necessariamente é válida durante a evaporação de buracos negros. De outra forma, usando integrais de caminho euclidiana, pode-se mostrar que a unitariedade é restaurada com a adição da correspondência  $ADS/CFT$  no âmbito da teoria de cordas em  $AdS_5 \times S^5$  [37].

Desde que a geração de mini buracos negros na escala  $TeV$  é possível somente no contexto de branas-mundo, o processo perturbativo se inicia um espaço-tempo de Minkowski onde o experimento, uma colisão próton-próton, é realizado e onde os prótons são definidos. Depois dessa colisão o espaço-tempo se deforma, originando um buraco negro de Schwarzschild ou de Reissner-Nordstrom. Finalmente, depois de um período curto de evaporação, o espaço-tempo deve voltar a forma de Minkowski, ou um outro espaço-

tempo, porém deixando uma subvariedade remanescente. A descrição destes processos pode começar com perturbações clássicas em concordância com o teorema de imersão de Nash, mas a unitariedade deve ser resolvida no nível quântico. A unitariedade quântica implicitamente assumida na equação de Tomonaga-Schwinger deve ser consistente com o teorema de evaporação de buracos negros.

2) A descrição acima da teoria quântica de brana-mundo é baseada quase que inteiramente na teoria geral de subvariedades diferenciáveis. Isto sugere uma teoria quântica de subvariedades quadridimensionais. Esta teoria quântica começaria com perturbações clássicas de geometrias imersas, mas no fim teria-se uma versão quântica do teorema de imersão de Nash, incluindo as flutuações da imersão como descritas pela equação de Tomonaga-Schwinger. Esta teoria poderia ser particularmente interessante quando o bulk tivesse dimensão maior que cinco, onde a terceira forma fundamental comporta-se similarmente à um campo de calibre com respeito ao grupo de isometrias das dimensões extras. A identificação da terceira forma fundamental como um campo de calibre é uma idéia antiga, mas que nunca foi trabalhada seriamente [39].

3) Uma continuação natural desse trabalho é a construção de um exemplo simples em cosmologia. Por exemplo, o modelo padrão FRW tem imersão diferenciável em cinco dimensões, e portanto teríamos apenas uma equação de Tomonaga-Schwinger. Então, em vez de se apelar para campos escalares no estudo de processos inflacionários, poderíamos contar com um campo tensorial derivado da curvatura extrínica. Classicamente já foi verificado que a curvatura extrínica produz efeitos inflacionários consistentes com a observação [42]. Resta saber se os efeitos quânticos podem também explicar a inflação primordial. O resultado poderá ser comparado com os resultados de Cosmologia Quântica [40].

# Apêndice A

## Imersão de Variedades

Para um breve histórico da teoria de imersões começaremos com o ano de 1868, quando Riemann publica sua teoria de superfícies abstratas definidas intrinsecamente [31]. Logo depois Schläfli [27] conjecturou que uma variedade Riemanniana com métrica analítica e positiva pode ser imersa localmente e isometricamente como uma subvariedade de um espaço Euclidiano de dimensão  $n(n+1)/2$ . Em 1926, Janet [32] mostrou que variedades Riemannianas bidimensionais com uma métrica analítica poderiam ser localmente e isometricamente imersas. Em 1927, Cartan [44] estendeu o resultado de Janet para variedades  $n$ -dimensionais  $D = \frac{n(n+1)}{2}$ . Em 1931, Burstin [28] completou a prova de Janet-Cartan e estendeu o resultado para o caso em que o espaço imerso era uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional com métrica analítica e definida positiva, ele também mostrou que as equações de Gauss-Codazzi-Ricci são as condições de integrabilidade da imersão isométrica. Um problema de imersão isométrica, interessante, foi considerado por Campbell em 1927 [25]: Quantas dimensões extras são necessárias para realizar uma imersão local e isométrica de uma variedade Riemanniana em uma espaço com tensor de Ricci nulo? Ele mostrou que apenas uma dimensão extra seria suficiente, o que foi provado mais tarde por Magaard [29], porém usando a condição de analiticidade. Em 1956, Nash [23] mostrou como fazer a imersão isométrica de variedades Riemannianas

sem precisar da restrição da analiticidade da métrica definida positiva. Clarke [30] e Greene [26] estenderam o teorema de Nash para métricas com assinaturas indefinidas.

A seguir apresentaremos alguns conceitos básicos em teoria de imersão de variedades. Estes conceitos facilitarão o entendimento do conteúdo deste trabalho.

## A.1 Imersões Isométricas

Sejam  $\mathcal{M} = (M^n, g)$ ,  $\bar{\mathcal{M}} = (\bar{M}^m, \bar{g})$  variedades Riemannianas de dimensões  $n$  e  $m \geq n$ , respectivamente. Uma aplicação diferenciável  $f : U \subset M^n \rightarrow \bar{M}^m$ , onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $M^n$ , será chamada uma imersão local de classe  $C^k$  para  $k \geq 1$  se

- i.  $f$  é diferenciável de classe  $C^k$ ;
- ii.  $df_p : T_p(M^n) \rightarrow T_{f(p)}(\bar{M}^m)$  é injetiva para todo  $p \in U$ .

Aqui  $T_p(M^n)$  denota o espaço tangente à  $M^n$  no ponto  $p$ . Uma imersão  $f$  bijetora é chamada de mergulho (embedding).

Uma *imersão isométrica local* é uma aplicação  $f : U \subset M^n \rightarrow \bar{M}^m$  que preserva a distância para todo  $p \in U$ , ou seja

$$g_p(v, w) = \bar{g}_{f(p)}(df(v), df(w)), \quad (\text{A.1})$$

para todo  $v_p, w_p \in T_p(M^n)$ , onde  $\bar{g}$  denota a métrica de  $\bar{M}^m$ . Se uma mesma imersão isométrica puder ser caracterizada para todos os pontos  $p \in M^n$ , então teremos uma imersão isométrica *global*.

Sejam  $x^\alpha (\alpha = 0, 1, \dots, n-1)$  e  $\mathcal{X}^A (A = 1, 2, \dots, m)$  coordenadas locais de  $M^n$  e  $\bar{M}^m$ . A aplicação  $f$  é dada por

$$\mathcal{X}^A = \mathcal{X}^A(x^\alpha), \quad (\text{A.2})$$

onde o posto de  $\left\| \frac{\partial \mathcal{X}^A}{\partial x^\alpha} \right\| = n$ . Em  $\mathcal{X}^A(x^\alpha)$  ambas as informações estão contidas: a geometria intrínseca de  $\mathcal{M}$  e sobre a situação de  $\mathcal{M}$  como um subconjunto de  $\bar{\mathcal{M}}$  levando



a geometria extrínica. Considerando as bases ortonormais locais  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right\}$  e  $\left\{\frac{\partial}{\partial \mathcal{X}^A}\right\}$  de  $T_p(M^n)$  e  $T_{f(p)}(M^m)$  respectivamente, as componentes dos tensores métricos de  $\mathcal{M}$  e  $\bar{\mathcal{M}}$  são definidas por

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = g_{\alpha\beta} \quad \bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{X}^A}, \frac{\partial}{\partial \mathcal{X}^B}\right) = \bar{g}_{AB}. \quad (\text{A.3})$$

A equação (A.1), em coordenadas locais, é

$$g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{AB} \frac{\partial \mathcal{X}^A}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{X}^B}{\partial x^\beta} = \bar{g}_{AB} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B, \quad (\text{A.4})$$

onde denotamos  $\frac{\partial \mathcal{X}^A}{\partial x^\alpha}$  por  $\mathcal{X}_{,\alpha}^A$ .

Alguns resultados referentes a imersão isométrica local de variedades Rimannianas já foram obtidos, entre estes resultados podemos citar dois teoremas, o primeiro devido a Friedman [24] e o segundo devido a Greene [26].

**Teorema 1.** Qualquer variedade Rimanniana  $M^4(p, q)$  com métrica analítica, localmente, pode ser analiticamente e isometricamente imersa em  $\bar{M}^m(r, s)$  onde  $m \geq \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $r \geq p$ ,  $s \geq q$ .

Especificamente, qualquer espaço-tempo  $M^4(1, 3)$ , localmente, pode ser analiticamente e isometricamente imerso em  $\bar{E}^{10}(r, s)$ ,  $r \geq 1$ ,  $s \geq 3$ .

**Teorema 2.** Qualquer variedade Rimanniana  $M^4(p, q)$  com uma métrica de classe  $C^\infty$ , localmente, pode ser  $C^\infty$  e isometricamente imersa em  $\bar{M}^m(r, s)$  onde  $m \geq \frac{n(n+3)}{2}$ ,  $r \geq p$ ,  $s \geq q$ .

Especificamente, qualquer espaço-tempo  $C^\infty$ , localmente, pode ser  $C^\infty$  e isometricamente

imerso em  $\bar{E}^{14}(r, s)$ ,  $r \geq 1$ ,  $s \geq 3$ . Este teorema é uma generalização do teorema de Nash [23], originalmente feito para métrica euclidiana.

## A.2 Equações de Gauss-Codazzi-Ricci

Aqui serão apresentadas as equações fundamentais da teoria de subvariedades. As equações de primeira ordem, as chamadas fórmula de Gauss e fórmula de Weingarten definem os objetos básicos para o estudo de subvariedades: as três formas fundamentais (respectivamente a métrica, a curvatura extríntrica e a conexão normal). As equações fundamentais de segunda ordem são chamadas de equações de Gauss, Codazzi e Ricci, representando generalizações para alta dimensionalidade das equações de Frenet que nos são familiar da geometria diferencial de curvas. A segunda forma fundamental, a conexão normal e as condições de integrabilidade dada pelas equações de Gauss-Codazzi-Ricci determinam localmente uma subvariedade.

Primeiro trataremos as equações fundamentais de primeira ordem, as quais serão usadas para construir a segunda forma fundamental e a conexão normal.

Se  $f : U \subset M^n \rightarrow \bar{M}^m$  é uma imersão local. O espaço tangente a  $\bar{M}^m$  pode ser decomposto na soma direta

$$T_p(\bar{M}^m) = T_p(M^n) \oplus T_p^\perp(M^n). \quad (\text{A.5})$$

Onde  $T_p^\perp(M^n)$  é o espaço normal a  $M^n$  no ponto  $p$ . Portanto, vetores  $v_p \in T_p(\bar{M}^m)$  podem ser escritos como  $v_p = v_p^T + v_p^\perp$ , isto é, a soma das partes tangentes e normais a  $M^n$ . Sejam  $\bar{X}, \bar{Y}$  campos vetoriais em  $\bar{M}^m$  e extensões dos campos vetoriais  $X, Y$  de  $M^n$ , então pela construção de  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  como extensões de  $X$  e  $Y$ , tem-se  $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} \equiv \bar{\nabla}_X Y$ . Pode-se decompor  $\bar{\nabla}_X Y$  em sua parte tangente  $(\bar{\nabla}_X Y)^T$  e sua parte normal  $(\bar{\nabla}_X Y)^\perp$

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\perp. \quad (\text{A.6})$$

Lembrando que  $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} \equiv \bar{\nabla}_X Y$ . Então a conexão Levi Civita  $\bar{\nabla}$  de  $M^n$  é dada por

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T, \quad (\text{A.7})$$

e a segunda forma fundamental de  $\alpha : T_p(M^n) \times T_p(M^n) \rightarrow T_p^\perp(M^n)$  é definida como

$$\alpha(X, Y) := (\bar{\nabla}_X Y)^\perp. \quad (\text{A.8})$$

Desta forma decomposição ortogonal (A.6) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad (\text{A.9})$$

a qual é chamada a *fórmula de Gauss*. A fórmula de Gauss e o fato de a torsão de  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla$  serem nulas implica que a segunda forma fundamental é um campo tensorial simétrico com valores no fibrado normal de  $M^n$  ( $T^\perp(M^n) = \cup_{p \in M^n} T_p^\perp(M^n)$ ).

Considere  $\xi$  um campo vetorial de  $M^n$  e decomponha  $\bar{\nabla}_X \xi$  em suas componentes tangente e normal. A parte normal induz uma conexão  $\nabla^\perp$  em  $T^\perp(M^n)$ , chamada de *conexão normal* em  $M^n$ . Nós agora definimos

$$A_\xi X := -(\bar{\nabla}_X \xi)^T. \quad (\text{A.10})$$

O campo tensorial  $A_\xi$  é conhecido como *operador forma de  $M^n$  na direção  $\xi$*  e está relacionado com a segunda forma fundamental  $\alpha$  pela equação

$$\langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle. \quad (\text{A.11})$$

E finalmente a decomposição ortogonal de  $\bar{\nabla}_X \xi$  é dada por

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi, \quad (\text{A.12})$$

conhecida como a *fórmula de Weingarten*.

Nós agora deduziremos as três equações de segunda ordem, conhecidas como as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Para isto relacionaremos  $R$  e  $\bar{R}$  com os invariantes

extrínsecos  $\alpha$ ,  $A$  e  $\nabla^\perp$ . Sejam  $X, Y, Z$  campos vetoriais em  $M^n$ . Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten obtemos

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\
 &= \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)) - \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \alpha(X, Z)) \\
 &\quad - (\nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z)) \\
 &= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y, Z)} X + \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) \\
 &\quad - \nabla_Y \nabla_X Z - \alpha(Y, \nabla_X Z) + A_{\alpha(X, Z)} Y - \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) \\
 &\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - \alpha(\nabla_X Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z) \\
 &= R(X, Y)Z - A_{\alpha(Y, Z)} X + A_{\alpha(X, Z)} Y \\
 &\quad + \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z). \tag{A.13}
 \end{aligned}$$

A componente tangencial de  $\bar{R}(X, Y)Z$  é dada por

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^T = R(X, Y)Z - A_{\alpha(Y, Z)} X + A_{\alpha(X, Z)} Y \tag{A.14}$$

e a normal por

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z). \tag{A.15}$$

A equação (A.14) é chamada de *equação de Gauss* e (A.15) de *equação de Codazzi*.

Agora consideremos a decomposição ortogonal de  $\bar{R}(X, Y)\xi$ , onde  $\xi$  é um campo vetorial normal, como já foi dito antes. Usando novamente as fórmulas de Gauss e Weingarten, nós obtemos

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(X, Y)\xi &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \xi - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \xi - \bar{\nabla}_{[X, Y]}\xi \\
 &= \bar{\nabla}_X(-A_\xi Y + \nabla_Y^\perp \xi) - \bar{\nabla}_Y(-A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi) + A_\xi[X, Y] - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi \\
 &= -\nabla_X(A_\xi Y) - \alpha(X, A_\xi Y) - A_{\nabla_Y^\perp \xi} X + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi \\
 &\quad + \nabla_Y(A_\xi X) + \alpha(Y, A_\xi X) + A_{\nabla_X^\perp \xi} Y - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi \\
 &\quad + A_\xi \nabla_X Y - A_\xi \nabla_Y X - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi \\
 &= (\nabla_Y A)_\xi X - (\nabla_X A)_\xi Y + R^\perp(X, Y)\xi + \alpha(Y, A_\xi X) - \alpha(X, A_\xi Y),
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

onde

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi \tag{A.17}$$

é o tensor de curvatura do fibrado normal com respeito a conexão normal  $\nabla^\perp$ , chamado de *tensor de curvatura normal de  $M^n$* . A parte normal de  $\bar{R}(X, Y)\xi$  é chamada de *equação de Ricci*

$$(\bar{R}(X, Y)\xi)^\perp = R^\perp(X, Y)\xi + \alpha(Y, A_\xi X) - \alpha(X, A_\xi Y). \tag{A.18}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] P. A. M. Dirac Phys. Rev. 114, 924, (1959)
- [2] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc London A 246 333 (1958)
- [3] P. A. M. Dirac, *Relativistic quantum mechanics*, Proc. Roy. Soc London A 136, 453 (1958),
- [4] C. Rovelli review hist Arnowitt, S. Deser and C. Misner, *The Dynamics of General Relativity*. In *Gravitation: An introduction to Current Research*, L. Witten, Ed. John Willey & Sons, p. 227, (1962)
- [5] Charles W. Misner, Rev. Mod. Phys. 29, 497, (1957).
- [6] I. Antoniadis et al, Phys. Lett. *ibid* B246, 377, (1990); B346, 257 (1998).
- [7] K. Akama, *Pregeometry*, in Gauge Theory and Gravitation, Lecture notes in Physics 176 (Springer Verlag (1983)), hep-th/0001113;
- [8] V. A. Rubakov & M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. 125B, 136, (1983);
- [9] M. Visser, Phys. Lett. 159B, 22 (1985), hep-th/9910093.
- [10] N. Arkani-Hamed et Al, Phys. Lett. B429, 263 (1998), Phys. Rev. Lett. 84, 586, (2000)
- [11] L. Randall & R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83, 4690 (1998); *ibid* 83, 3370 (1999)

- [12] P. Horava & E. Witten, Nuc. Phys. B475, 94 (1996);
- [13] R. A. Hulse & J. H. Taylor, *Discovery of a Pulsar in a Binary System*, Astrophys. J. 195, L51-L53 (1975);
- [14] A. Ashtekar, *Lectures in Non-Perturbative Canonical Gravity*, World Scientific, (1996);
- [15] O. Klein, Nature, 118, 516, (1996);
- [16] K. Kučhar *Time and Interpretations of Quantum Gravity*. In Proc. 4<sup>th</sup> Canadian Conference on General Relativity. World Scientific, (1991).
- [17] C. J. Isham. *Canonical Quantization and the Problem of Time*. NATO Advanced Studies Institute. Salamanca (1992).
- [18] S. Hojman, K. Kučhar & C. Teitelboim, Ann. of Phys. 96, 88, (1976)
- [19] S. Tomonaga, Progr. Theor. Phys. 1, 27 (1946);
- [20] J. Schwinger, Phys. Rev. 74, 1439 (1948);
- [21] G. Veneziano, Nuovo Cimento 57A, 190 (1968);
- [22] Y. Nambu, Lectures at the Copenhagen Symposium,(1948);
- [23] J. Nash, Annals of Maths. 63, 20 (1956);
- [24] A. Friedman, J. Math. Mech. 10, 625 (1961);
- [25] J. E. Campbell, *A Course of Differential Geometry*. Clarendon Press, Oxford. Sections 150-154 (1956);
- [26] R. Greene, Memoirs Am. Math. Soc 97, (1970);
- [27] L. Schläfli, Ann. di Mat. 2<sup>a</sup> Série 5, 170 (1871);

- [28] C. Burstin, *Rec. Math. Moscou* 38, 74 (1931);
- [29] L. Maggard, Ph. D. Thesis, Kiel (1963);
- [30] C. J. Clarke, *Proc. Roy. Soc. London* A314, 417 (1970);
- [31] B. Riemann, *Abh. Königl. gesellsch.* 13, 1 (1868);
- [32] M. Janet, *Ann. Soc. Polon. Math.* 5, 38 (1926);
- [33] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*. Princeton U. P. Princeton, N.J. (1966)
- [34] K. Nishijima, *Fields and particles*, W. A. Benjamin eds. (1973)
- [35] S. W. Hawking, *Black hole explosions*. *Nature* 248 (1974) 30
- [36] G. Landsberg, *Black holes at future colliders and beyond*, *J. Phys. G* 32 337 (2006)
- [37] S. W. Hawking, *Information loss in black holes*, *Phys. Rev. D* 72 084013 (2005)
- [38] S. Dimopoulos e G. Landsberg, *Black holes at the LHC*, *Phys. Rev. Lett.* 87 161602 (2001)
- [39] Y. Ne'emann, *Embedded space-time e particle symmetries*, *Rev. Mod. Phys.* 37 227 (1965)
- [40] N. Pinto Neto e outros, *The Accelerated Expansion of the Universe as Quantum Cosmological Effect*, *Phys. Lett. A* 315 36 (2003)
- [41] M. D. Maia, II ESCOLA DE COSMOLOGIA E GRAVITAÇÃO - CBPF, 1980
- [42] M. D. Maia, E. M. Monte, J. M. F. Maia, J. S Alcaniz, *Class.Quant.Grav.* 22 (2005) 1623-1636
- [43] S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* 7, 2850 (1973); P. C. W. Daves, *J. Phys. A: Gen. Phys.* 8 609 (1975); W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* 14, 870 (1976)



- [44] E. Cartan, Ann. Soc. Pol. Mat 6, 1, (1927); M. Janet, Ann. Soc. Pol. Mat 5, (1928)
- [45] Goroff, M. H. and A. Sagnotti, Nucl. Phys. B 266, 709, (1986)
- [46] Hartle, J. and Hawking, S., *Wave function of the universe*, Phys. Rev. D 28, 2960-2975, (1983)
- [47] Vilenkin, A., *Quantum cosmology the initial state of the universe*, Phys. Rev. D 39, 888-897, (1988)
- [48] Parker, L., Phys. Rev. D 3, 346, (1971)
- [49] Maldacena, J.M., *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Adv. Theor. Math Phys. 2, 231, (1998)
- [50] M. B. Green, J. Schwarz, e E. Witten, *Superstring Theory*. Cambridge University Press, 1987
- [51] M. D. Maia, Class. Quant. Grav. 6, 173 (1989); E. M. Monte & M. D. Maia, J. Math. Phys. 37, 1972 (1996) A. Pérez-Lorenzana, AIP Conf. Proc. 562, 53 (2001); B. Carter, Int. J. Theor. Phys. 40, 2099, (2001).
- [52] J. Rosen. Rev. Mod. Phys. 37, 204, (1965).