

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE NUMÉRICA DO FLUXO EM RESERVATÓRIOS DE
PETRÓLEO**

ANA CAROLINA LOYOLA CAETANO RIOS

ORIENTADOR: MANOEL PORFÍRIO CORDÃO NETO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM GEOTECNIA
PUBLICAÇÃO: G.DM 300/2018 BRASÍLIA/DF: MARÇO/2018**

FICHA CATALOGRÁFICA

RIOS, ANA CAROLINA LOYOLA C.	
Análise Numérica do Fluxo em Reservatórios de Petróleo [Distrito Federal] 2018	
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.	
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental	
1. Fluxo multifásico	2. Modelo Black Oil
2. FEM	4. Volumes de controle
I. ENC/FT/UNB	II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Rios, A. (2018). Análise numérica do fluxo em reservatórios de petróleo. Dissertação de Mestrado, Publicação G.DM - 300/2018, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 85 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Ana Carolina Loyola Caetano Rios

Análise numérica do fluxo em reservatórios de petróleo

GRAU / ANO: Mestre / 2018

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor

Ana Carolina Loyola Caetano Rios

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha gratidão àqueles que tornaram esta realização possível:

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

À Universidade de Brasília, para sempre marcada em mim como um local de crescimento pessoal e acadêmico.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, que me ensinaram com excelência.

Ao meu orientador, pela paciência, orientação dedicada e constantes incentivos que datam desde minha graduação.

Aos meus pais, Max e Regina, pela educação pautada nos estudos, pelo amor incondicional, pela compreensão e pelo suporte às minhas decisões. A Deus, cujos planos me alegram e cujo cuidado me descansa.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO.....	1
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO.....	1
1.2 JUSTIFICATIVA.....	2
1.3 OBJETIVOS.....	2
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	3
CAPÍTULO 2 – FLUXO MULTIFÁSICO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO .	4
2.1 ENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS.....	4
2.1.1 Mecanismos de produção	6
2.1.1 Simulação numérica de reservatórios.....	8
2.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS.....	9
2.2.1 Pressão capilar e molhabilidade	9
2.2.2 Permeabilidade intrínseca e relativa.....	12
2.2.3 Razão de solubilidade.....	14
2.2.4 Fator-volume formação dos fluidos	15
2.2.5 Pressão de ponto de bolha variável	16
2.3 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO: FLUXO EM MEIOS POROSOS	17
2.3.1 Fluxo multifásico e a equação de Richards.....	17
2.3.1.1 A solução analítica de Buckley-Leverett.....	20
2.3.3 Condições de contorno	23
CAPÍTULO 3 – MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÕES DE FLUXO	28
3.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS CONVENCIONAL.....	29
3.2 VOLUMES DE CONTROLE.....	30
3.3 SOLUÇÃO TEMPORAL	32
3.4 ESQUEMAS DE SOLUÇÃO PARA PROBLEMAS DE FLUXO.....	34
3.5 O USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM PROBLEMAS DE	36
FLUXO.....	36
CAPÍTULO 4: SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES	40
4.1 AVALIAÇÃO DO FLUXO COM VOLUMES DE CONTROLE.....	40
4.1.1 Definição dos volumes de controle	40
4.1.2 Avaliação do fluxo	41
4.2 SOLUÇÕES NUMÉRICAS.....	45
4.4.1 Equação de Richards	45

4.4.2 Fluxo bifásico	46
4.4.3 Modelo black oil.....	48
4.5 ASPECTOS SOBRE A NÃO-LINEARIDADE DOS PROBLEMAS	51
4.5.1 Avaliação do erro, reinjeção do resíduo e critérios de parada.....	53
CAPÍTULO 5: IMPLEMENTAÇÃO E VALIDAÇÕES	55
5.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DOS MODELOS NUMÉRICOS.....	55
5.2 VALIDAÇÕES	58
5.2.1 Sobre o FlexPDE.....	58
5.2.2 Validação do módulo não saturado	59
5.2.2 Validação do módulo bifásico.....	67
5.2.1 Solução de Buckley-Leverett	67
5.2.2 Problema bidimensional com pressão capilar	70
5.2.3 Validação do modelo black oil.....	74
5.3 ANÁLISES DE PRODUÇÃO E EFEITOS DE COMPRESSIBILIDADE	78
CAPÍTULO 6: CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS..	84
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Erros obtidos para diferentes intervalos de tempo - módulo não saturado

Tabela 5.2: Características do problema - validação 1 do módulo bifásico

Tabela 5. 3: Características do problema - validação 2 do módulo bifásico

Tabela 5.4: Relações constitutivas para o óleo, conforme Odeh (1981) - Modelo black oil

Tabela 5.5: Relações constitutivas para água e gás, conforme Odeh (1981) - modelo black oil

Tabela 5.6: Permeabilidade relativas para um sistema óleo-gás, em função da saturação do gás, conforme Odeh (1981) – Modelo black oil

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Diagrama de fases para uma mistura de hidrocarbonetos. Fonte. (Ahmed, 2001).

Figura 2.2: Características dos mecanismos de produção de gás em solução (a), de capa de gás (b) e de influxo de água (c). (Rosa *et al*, 2011)

Figura 2.3: Produção de um reservatório com capa de gás

Figura 2.4: Curva de Van Genuchten com diferentes valores para os parâmetros

Figura 2.5: Curva de permeabilidade com óleo como fluido molhante (a) e água como fluido molhante (b)

Figura 2.6: Padrões de molhabilidade encontrados em um reservatório

Figura 2.7: Curva da razão de solubilidade em função da pressão

Figura 2.8: Curva do fator-volume formação do óleo em função da pressão

Figura 2.9: Razão de solubilidade do gás no óleo e fator volume formação do óleo com pressão de bolha variável

Figura 2.10: a) Curva saturação vs distância obtida na solução de Buckley-Leverett; b) método de resolução com a saturação da frente

Figura 2.11: Resultados típicos pela solução de Buckley-Leverett

Figura 3.1: Métodos para definição de volumes de controle: centrados na célula (a) e centrados no vértice (b); e pontos de avaliação de fluxo nas faces. (Szymkiewicz, 2013)

Figura 3.2: Avaliação da velocidade de forma implícita (a), explícita (b) e parcialmente implícita (c), e resíduos de volume correspondentes

Figura 4.1: Definição dos volumes de controle

Figura 4.2: Resíduo de volumes resultante do erro na avaliação de derivadas

Figura 5.1: estrutura do programa

Figura 5.2: Problema de validação para o módulo não saturado

Figura 5.3: Distribuição de pressão ao final da simulação para diferentes intervalos de tempo e comparação com FlexPDE - módulo não saturado

Figura 5.4: Resultados para o problema não saturado pós-processamento (PP) com reinjeção dos resíduos e comparação com FlexPDE

Figura 5.5: Evolução temporal da distribuição de poropressões com e sem pós processamento para intervalo de 3.000 s

Figura 5.6: Resultados do pós-processamento (PP) utilizando malha menos refinada para $\Delta t = 29.000$ s - módulo não saturado

Figura 5.7: resultado do pós-processamento utilizando permeabilidade intrínseca menor, para $dt = 29.000s$

Figura 5.8: Correção dos resultados usando $\Delta t = 14.500$ s com diferentes esquemas de integração no tempo

Figura 5.9: Correção dos resultados usando $\Delta t = 29.000$ s com diferentes esquemas de integração no tempo

Figura 5.10: Domínio utilizado na validação da solução numérica do problema de Buckley-Leverett

Figura 5.11: Validação do problema de Buckley-Leverett

Figura 5.12: Domínio do problema bidimensional bifásico e pontos de monitoramento

Figura 5.13: Curva de pressão capilar: validação 2 do módulo bifásico

Figura 5.14: Saturação de óleo nos pontos de monitoramento - Validação 2 do módulo bifásico

Figura 5.15: Pressão de água nos pontos de monitoramento - Validação 2 do módulo bifásico

Figura 5.16: Distribuição de saturação e de pressão ao final da simulação pelo código em Fortran, à esquerda, e pelo FlexPDE, à direita – Validação 2 do módulo bifásico

Figura 5.17: Saturação de gás vs tempo – validação do modelo black oil

Figura 5.18: Pressão vs tempo - Validação do modelo black oil

Figura 5.19: Distribuição de saturações de óleo ao final da simulação para a) recuperação primária b) injeção de água sem compressibilidade, c) injeção de água com compressibilidade

Figura 5.20: Produção acumulada pela recuperação primária, injeção e injeção com compressibilidade

Figura 5.21: RAO para produção primária, injeção e injeção com compressibilidade

LISTA DE SÍMBOLOS

Subscritos

$\alpha = g, o, w$ - Fases gás, óleo, água

$C = g, o, w$ - Componentes gás, óleo, água

S – Condições standard **Símbolos** a, n –

Parâmetros da curva de Van Genuchten

A – Área da seção transversal

$[B]$ – Matriz de gradientes

B_g – Fator-volume formação do gás

B_o – Fator-volume formação do óleo

B_w – Fator-volume formação da água

c – Critério de convergência

C_{Go} – Composição fracional do componente gás na fase óleo

C_{Oo} – Composição fracional do componente óleo na fase óleo

Δt – Intervalo de tempo

ε_{lim} – Erro tolerável

f_w – Mobilidade fracional da água

\mathbf{g} – Vetor

gravidade M –

Massa \mathbf{n} – vetor

normal

$\{N\}$ – Vetor funções de forma

p_c – Pressão capilar

p_b – Pressão de bolha

p – Pressão

ρ_α – Massa específica da fase α

ρ_{CS} – Massa específica do componente C na fase standard

[M] – Matriz de massa

λ – Mobilidade

[K] – Matriz de fluxo

k_r – Permeabilidade relativa

[k_s] – Tensor de permeabilidades intrínsecas

θ_w – Teor de umidade volumétrica da água

ϕ – Porosidade

RAO – Razão água/óleo

RGO – Razão gás/óleo

\mathbf{R} – vetor de resíduos

R_s - Razão de solubilidade do gás no óleo

S_α – Saturação da fase α

S_{wc} – Saturação crítica da água

S_{wf} – Saturação da água na frente de saturação t

– Tempo

θ – Fator de ponderação para integração no tempo

v – Velocidade V – Volume

μ – Viscosidade

Ψ – Sucção mátrica

γ – Peso específico

q – Vazão injetada/retirada

Q_F – Fluxo que atravessa uma face

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Apesar da tendência mundial de diversificação da matriz energética pela inclusão de fontes renováveis e pouco poluentes, a indústria do petróleo ainda se impõe como um setor fundamental no crescimento de vários países e na garantia de suas atividades. No Brasil, as primeiras perfurações com a descoberta de petróleo se deram em 1939, na Bahia. Porém, foi em 1953, com a criação da Petrobras, que as pesquisas do país no setor alavancaram (Thomas, 2001). Atualmente, o petróleo e seus derivados (tais como óleo diesel, gasolina e gás natural) constituem 37,3% da matriz energética brasileira, segundo o Balanço Energético Nacional publicado pelo Ministério de Minas e Energia (2016). Ainda de acordo com este relatório, a produção nacional de petróleo vem ganhando força nos últimos anos, atingindo um crescimento de 8% em 2015, principalmente graças à operação de plataformas na Bacia de Santos e na Bacia de Campos.

Após a certificação do bom potencial de exploração de um reservatório, a otimização da recuperação de hidrocarbonetos é planejada através do estudo do reservatório e de seus fluidos. As características das rochas e dos fluidos fornecem dados essenciais à simulação do fluxo no reservatório, que consiste na solução numérica de equações diferenciais de conservação de massa aplicadas a meios porosos. No caso de um reservatório de petróleo, este problema se torna complexo pela presença de até três fases na formação (água, óleo e gás) e pelo fato de haver trocas de fases diante dos gradientes de pressão e temperatura. Tais particularidades são representadas nos chamados modelos composicionais, dentre os quais destaca-se na indústria o modelo black-oil, uma simplificação aplicada a reservatórios contendo, inicialmente, apenas óleo com gás dissolvido e água.

A simulação do reservatório fornece resultados que permitem avaliar a produção primária e a efetividade de métodos adicionais de recuperação, como a injeção de fluidos. Além disso, auxilia na decisão por métodos de estimulação, dentre os quais se destaca o faturamento hidráulico. A importância da modelagem do fluxo no reservatório não se limita, entretanto, ao melhoramento da produção. Deve-se ter em mente que o fluxo é um fenômeno acoplado ao comportamento geomecânico da rocha, de forma que a alteração do campo de pressões

está intimamente ligada a fenômenos de deformação tais como a compactação, a subsidência, a reativação de falhas, e a indução sísmica (no caso do fraturamento), por exemplo.

Diante de tais aplicabilidades, justificam-se os estudos em torno da criação de simuladores cada vez mais eficientes e completos para utilização na indústria do petróleo. Muitos estudos recentes exploram a utilização de diferentes métodos numéricos na modelagem de reservatórios. Apesar de trabalhos iniciais utilizarem o método dos volumes finitos, o método dos elementos finitos rapidamente ganhou competitividade na área, principalmente devido a alterações na formulação convencional que o tornaram mais adequado à resolução de problemas de fluxo.

1.2 JUSTIFICATIVA

Estudos em torno da simulação de reservatórios são relevantes pois fornecem informações que auxiliam em tomadas de decisões a respeito da produção, com base em requisitos econômicos e ambientais. Sendo o Brasil um país produtor de petróleo, justifica-se o interesse no tema.

No contexto da Universidade de Brasília, pesquisas na área de petróleo vem sendo desenvolvidas no programa de Geotecnia. Moraes (2016) implementou um código capaz de simular a propagação de fraturas devido ao fraturamento hidráulico e seus efeitos no comportamento do reservatório, e Saba (2017) aperfeiçoou o programa. As análises foram feitas, no entanto, considerando-se fluxo de apenas uma fase. Assim, a criação de um módulo capaz de simular fluxo multifásico e multicomposicional representará mais um avanço nas pesquisas que vêm sendo feitas.

1.3 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo principal desenvolver uma ferramenta para a análise de problemas de fluxo multifásico e do modelo black oil. São objetivos específicos:

- Estudo das técnicas numéricas existentes para a simulação de fluxo multifásico e multicomposicional, com foco no método dos elementos finitos no método dos elementos finitos com volumes de controle;
- Avaliar a eficácia do uso de volumes de controle no cálculo de erros e posterior correção com o método de Newton-Raphson;

- Avaliar a eficiência do método IMPES para a simulação de fluxo bifásico, em comparação com uma formulação totalmente acoplada.
- Simular o aparecimento de gás em reservatórios inicialmente subsaturados com uso do modelo black oil.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este projeto está estruturado em 6 capítulos.

Os Capítulos 2 e 3 contêm o embasamento teórico, sendo que o Capítulo 2 trata do comportamento de reservatórios, das relações constitutivas dos fluidos e das equações diferenciais que descrevem o fluxo. No capítulo 3, estão apresentados métodos numéricos pertinentes à resolução de problemas de fluxo, com descrição do método dos elementos finitos convencional, do método dos volumes de controle e contextualização do uso do método dos elementos finitos e outras técnicas na área de simulação de fluxo multifásico e multicomposicional.

No Capítulo 4, são apresentadas as formulações pelos métodos numéricos selecionados, assim como um método para avaliação e correção dos resíduos, e critérios de erro e de convergência.

No Capítulo 5 é apresentada a estrutura do programa desenvolvido e são expostas as validações realizadas. Além disso, são feitas algumas análises da produção de fluidos.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2 – FLUXO MULTIFÁSICO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO

Neste capítulo estão apresentados alguns dos conceitos que fundamentam a dissertação. Primeiramente, serão introduzidos aspectos básicos de engenharia de reservatórios de petróleo, com foco no comportamento dos fluidos e nos processos e mecanismos de produção. Em seguida, as principais relações constitutivas para a caracterização destes fluidos serão definidas. Tais relações fornecem informações para a resolução das equações de fluxo. As equações para fluxo bifásico serão mostradas, assim como a solução analítica de Buckley-Leverett, muito popular na validação de códigos como o desenvolvido. Por fim, o modelo black oil será descrito matematicamente e duas formulações diferentes serão comentadas: a do pseudogás e o método da troca de variáveis.

2.1 ENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

O petróleo é uma fonte energética constituída principalmente de hidrocarbonetos, que podem estar na fase líquida ou gasosa. São produzidos a partir de transformações químicas da matéria orgânica incorporada aos sedimentos, motivadas pelo aumento da carga sedimentar e da temperatura.

Para que exista o acúmulo de petróleo, é necessário que haja sua migração desde a rocha geradora até uma rocha-reservatório, dotada de porosidade adequada ao recebimento do material. É preciso, ainda, que o material esteja aprisionado dentro do reservatório por armadilhas geológicas de caráter estrutural e/ou estratigráfico. As rochas-reservatório mais comuns são os arenitos e calcarenitos, por serem dotados de porosidade permeável. Carbonatos e folhelhos, porém, também podem constituir reservatórios, quando se apresentam naturalmente fraturados (Thomas, 2001).

Dentro da Engenharia de Petróleo, a área de estudo de reservatórios é aquela que se ocupa das características da rocha, das propriedades de seus fluidos constituintes e da modelagem do fluxo no reservatório, com a finalidade de otimizar a produção dos fluidos de interesse e de previsão do comportamento mecânico da rocha. Os fluidos constituintes nos reservatórios podem ser óleo, gás e água, sendo que esta última é produzida devido a existência de aquíferos ou devido a sua introdução em poços injetores.

A quantidade de fases existentes em um reservatório é definida por suas condições de temperatura e pressão. Em condições de pressão constante, define-se como ponto de bolha a temperatura de ebulição de uma substância e como ponto de orvalho sua temperatura de condensação. No caso de misturas como o petróleo, a análise das fases é feita através de curvas de temperatura em função da pressão, formadas pelos pontos de bolha e de orvalho dos primeiros componentes a trocar de fase. Tais curvas podem ser observadas em diagramas de fases como o apresentado na Figura 1.1, sendo que no espaço entre elas a mistura de hidrocarbonetos encontra-se parte na fase líquida e parte na fase gasosa.

De acordo com as fases da mistura de hidrocarbonetos nos reservatórios, eles são classificados em reservatórios de óleo, reservatórios de gás ou reservatórios que contêm as duas fases em equilíbrio. Os reservatórios de óleo são aqueles que possuem misturas líquidas de hidrocarbonetos. Nestes casos, se a mistura se encontra exatamente em cima da curva dos pontos de bolha, diz-se que o óleo é saturado e está na condição limítrofe para o início da liberação de gases. Por outro lado, caso as condições da mistura estejam à esquerda da curva de pontos de bolha, o óleo é classificado como subsaturado.

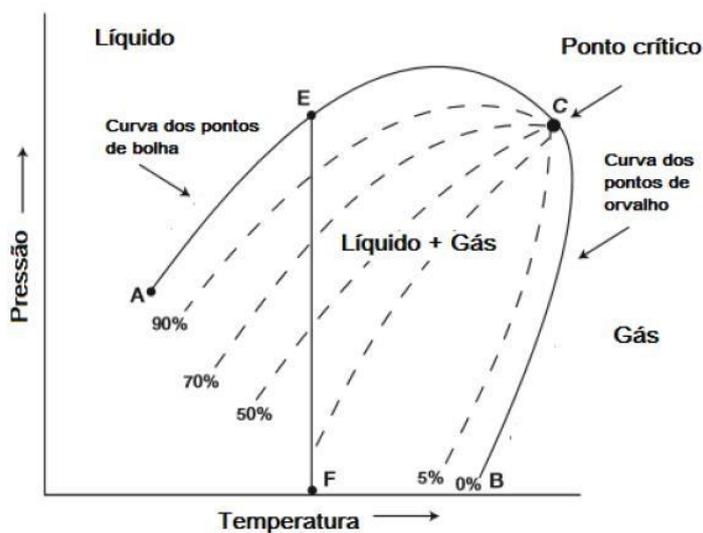


Figura 2.1: Diagrama de fases para uma mistura de hidrocarbonetos. Fonte. (Ahmed, 2001).

O processo de produção dos fluidos envolve gradientes de pressão e de temperatura, que por sua vez estão associados a trocas de fases. A trajetória EF da Figura 1.1 descreve um processo isotérmico de queda de pressão, e percebe-se que, devido às trocas de fases, a

distribuição dos hidrocarbonetos entre as fases se altera. A consideração de trocas de fases é de fundamental importância na estimativa de produção de reservatórios, já que é o volume de óleo nas condições de superfície, e não nas condições de reservatório, que interessa comercialmente.

2.1.1 Mecanismos de produção

Antes que sejam apresentados os mecanismos, devem ser definidos três relações muito comuns na análise de reservatórios, sendo elas:

- Razão gás/óleo (RGO): razão entre vazões de gás e óleo, medidas em condições-padrão
- Razão água/óleo (RAO): razão entre vazões de água e óleo, medidas em condições-padrão
- *Cut* de água: razão entre a vazão de água e a vazão total de líquidos, medida nas condições-padrão.

A produção dos fluidos em um reservatório se deve basicamente a dois fenômenos: a descompressão, que provoca contração dos poros e expansão dos fluidos, e o deslocamento de um fluido pelo outro (Rosa *et al*, 2011). As fases existentes no reservatório, bem como a sua distribuição e as condições de produção, determinam como estes efeitos ocorrerão, sendo atribuídos a mecanismos de produção típicos. Os mecanismos que serão apresentados estão relacionados à recuperação primária dos fluidos, que é aquela devida à energia natural do reservatório, sem métodos de estimulação e de recuperação secundária.

Chama-se mecanismo de gás em solução aos fenômenos que ocorrem durante a produção de um reservatório de óleo contendo gás dissolvido. As características do mecanismo estão ilustradas na Figura 2.2a. Neste caso, inicialmente, a produção ocorre devido à compressão da rocha e à expansão dos fluidos associada à redução de pressão. Quando atingida a pressão de bolha (p_b), a descompressão causa não somente expansões nos fluidos, mas também vaporização parcial dos hidrocarbonetos na fase líquida. Assim, gás começa a se formar durante a produção, que, por ser mais expansível que o óleo, passa a ser o principal responsável pela produção, já que sua expansão desloca os outros fluidos.

A partir do momento, porém, que a saturação de gás aumenta e uma fase contínua se forma, o gás começa a ser produzido rapidamente, devido a sua viscosidade e densidade

baixas. Esta produção provoca quedas de pressão aceleradas, assim como o aumento na razão gás óleo, RGO, que atinge seu valor máximo nesta etapa, como ilustrado na Figura 2.2a. Esta razão decresce logo em seguida, graças à queda na pressão, que provoca redução na produção de gás. Este mecanismo está associado a baixas recuperações finais devido às quedas rápidas de pressão, o que causa o rápido abandono do reservatório e o torna um forte candidato à recuperação secundária de forma precoce.

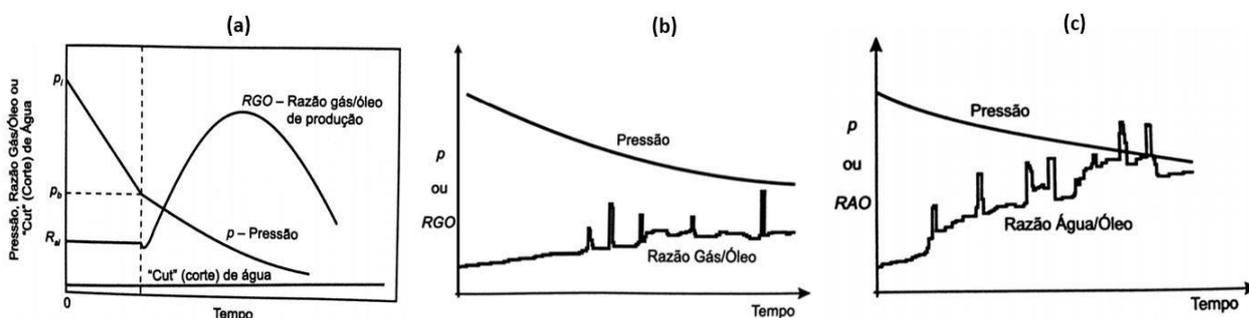


Figura 12.2: Características dos mecanismos de produção de gás em solução (a), de capa de gás (b) e de influxo de água (c). (Rosa *et al*, 2011)

Quando o reservatório se encontra inicialmente com pressão abaixo da pressão de bolha, existe uma fase de gás livre que, por ser menos densa que o óleo, se encontra nas partes superiores da rocha, formando uma zona denominada capa de gás. No mecanismo de capa de gás, o gás se expande à medida que a zona de óleo vai sendo produzida, o que se dá sem grandes reduções de pressão, já que o gás possui alta compressibilidade. Assim, o gás trabalha mantendo as quedas de pressão baixas, e a razão gás/óleo cresce continuamente. A feição de um reservatório contendo capa de gás e as características do mecanismo estão ilustradas nas Figura 2.3 e 2.2b. As reduções instantâneas da RGO na Figura 2.2b indicam intervenções nos poços.

Quando o reservatório se encontra em contato com um aquífero, cria-se um mecanismo de influxo de água. Neste mecanismo, a queda de produção na zona de óleo durante sua produção provoca expansão da água, que invade a zona de óleo, empurrando-o para produção e mantendo a pressão do reservatório. A razão água/óleo, RAO, cresce continuamente, como ilustrado na Figura 2.2.c. Reduções instantâneas nesse valor devem-se ao fechamento ou recompletação de poços que estavam produzindo quantidades excessivas de água.

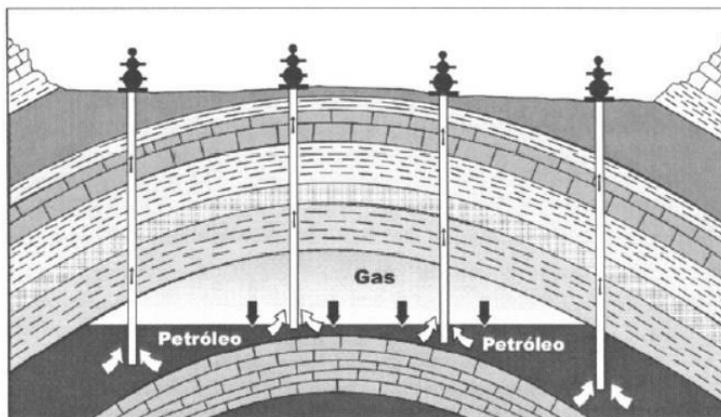


Figura 2.3: Produção de um reservatório com capa de gás. (Willhite,1998)

Mecanismos combinados podem ocorrer quando mais de uma das características citadas acima encontram-se em um reservatório. Costuma-se citar ainda como mecanismo adicional a ação da gravidade, que provoca a segregação de fluidos. Esta segregação pode ser benéfica quando, por exemplo, no mecanismo de gás em produção, parte do gás formado se desloca para a parte do superior do reservatório, formando uma capa de gás secundária. Além disso, em um reservatório sujeito ao influxo de água, a segregação gravitacional pode ser responsável por manter a água sempre abaixo do óleo, de forma que ela não o ultrapasse no deslocamento até os poços. Os efeitos de segregação gravitacional se manifestam quando a permeabilidade vertical da rocha é alta e quando as vazões de produção favorecem sua atuação.

Os mecanismos dos reservatórios costumam ser associados a métodos de recuperação secundária para aumento da recuperação e aceleração da produção. A recuperação convencional se dá pela injeção de fluidos (água e gás natural) para deslocar o óleo. Estes métodos podem falhar caso a viscosidade do fluido injetado seja muito menor que a do óleo, ou caso haja altas tensões superficiais (Thomas,2001). Neste caso, utilizam-se métodos especiais, como métodos térmicos, que visam aquecer o óleo para diminuir sua viscosidade, ou métodos miscíveis, onde fluidos que se incorporam ao óleo são injetados para eliminar tensões superficiais. Além disso, métodos de estimulação como o fraturamento hidráulico também são medidas populares e complementares à recuperação secundária.

2.1.1 Simulação numérica de reservatórios

A obtenção de informações a respeito das propriedades das rochas-reservatório e de seus fluidos, características geológicas, históricos de produção e características da completação fornece meios para a otimização da produção. A introdução destes dados em simuladores computacionais permite que a eficiência dos mecanismos de recuperação do reservatório seja avaliada, e que projetos de métodos secundários e de estimulação sejam feitos.

Assim, a simulação de reservatórios é uma etapa estratégica. Permite que condições de produção sejam estabelecidas ou reavaliadas, assim como torna possível a estimativa da produção e de efeitos mecânicos importantes. As ferramentas computacionais disponíveis podem ser utilizadas em prol de uma exploração de petróleo mais eficiente, econômica e responsável. Assim, estudos dentro da área de simulação de reservatórios são muito relevantes e demandam o entendimento da descrição de fluxo em meios porosos e métodos numéricos, que serão abordados nos próximos tópicos.

2.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

As relações constitutivas apresentadas a seguir são equações adicionais, necessárias à resolução das equações que regem o fluxo em meios porosos. A pressão capilar e a permeabilidade são funções das características do meio e dos fluidos, e suas relações com o grau de saturação serão introduzidas nos problemas a serem resolvidos. A razão de solubilidade do gás e o fator volume formação são propriedades que descrevem a troca de fase e a compressibilidade dos fluidos, e serão introduzidas na solução do modelo black oil.

2.2.1 Pressão capilar e molhabilidade

Quando se considera um meio poroso contendo mais de uma fase, define-se como o fluido molhante aquele que tem a maior molhabilidade e, portanto, encontra-se aderido à superfície sólida. Mais especificamente, o balanço entre forças superficiais e interfaciais do fluido molhante faz com que este tenha um menor ângulo de contato com a superfície.

Como a atração molecular de determinada fase à superfície sólida é distinta de sua atração molecular a outro fluido, desenvolve-se uma interface curvada entre os fluidos, que está associada à existência de uma tensão superficial. Assim, a pressão nas duas fases consideradas é distinta, sendo maior no fluido não-molhante. Define-se essa diferença de

pressão como pressão capilar (p_c), assumida como sendo função unicamente do grau de saturação:

$$p_c = p_n - p_m = p_c(S_\alpha) \quad (2.1)$$

Sendo p_c a pressão capilar, p_n a pressão no fluido não molhante, p_m a pressão no fluido molhante e S_α o grau de saturação dos fluidos.

A resolução dos problemas de fluxo multifásico requer as chamadas curvas de pressão capilar em função do grau de saturação. É bastante complexa e incomum na literatura a obtenção de dados experimentais para sistemas contendo três fases. Assim, uma prática mais corriqueira é a estimativa de dados de pressão capilar a partir de experimentos em sistemas bifásicos, como sugerido por Leverett (1941). A obtenção de pressões capilares em função da saturação em sistemas bifásicos, por sua vez, é mais comumente feita por ensaios de intrusão de mercúrio, de panela de Richards ou centrífuga. Ahmed (2001) comenta que, se por questões de conveniência forem feitos ensaios com sistemas ar-mercúrio ou ar-água, as pressões capilares obtidas devem ser corrigidas de acordo com a tensão superficial dos fluidos no reservatório.

Uma implicação desafiadora do cálculo da pressão capilar reside em definir o fluido molhante e o não molhante. A molhabilidade é uma propriedade complexa que pode influenciar fortemente a produção no reservatório. Apesar de muitos trabalhos avaliarem de forma binária, tratando ou o óleo ou a água como fluido molhante, podem ocorrer reservatórios com padrões de molhabilidade mista, com locais aderidos ao óleo e outros à água. Anderson (1987a) apresenta medidas para variações na pressão capilar em função dos padrões de molhabilidade.

No caso de solos não saturados, em que os fluidos são ar e água, chama-se a diferença de pressão entre eles de sucção mátrica. Van Genuchten (1980) apresentou a seguinte formulação para a curva de retenção de solos não saturados, que descreve a sucção em função do teor de umidade volumétrica:

$$\theta_w = \theta_r + \frac{(\theta_w^n - \theta_{r1}) - 1/n}{n} \quad (2.2)$$

$$[(\Psi/a) + 1]$$

Onde θ_w , θ_r , θ_s são os teores de umidade volumétrico da água, residual e saturado, respectivamente. Ψ é a sucção mátrica. O parâmetro adimensional n controla a inclinação da curva, e a , que tem unidade de pressão, determina ponto de inflexão da equação e está associado à pressão de entrada de ar, a partir da qual o solo passa do estado saturado para o não saturado. Antes da pressão da entrada de ar, a curva tem inclinação constante igual a m_v , o coeficiente de compressibilidade volumétrica.

A Figura 2.4 mostra os efeitos dos parâmetros no formato da curva. Quanto maior n , maior a inclinação após a entrada de ar, o que pode ser interpretado como a existência de um tamanho de poros predominante. Por outro lado, uma curva com inclinações mais suaves indica uma distribuição gradual dos poros do solo. A partir desta explicação, pode-se compreender que a curva de Van Genuchten é uma função que descreve a natureza dos poros do meio. Assim, apesar de ter sido formulada para descrição de solos não saturados, se adequa também a casos de fluxo bifásico, bastando substituir a sucção pela pressão capilar.

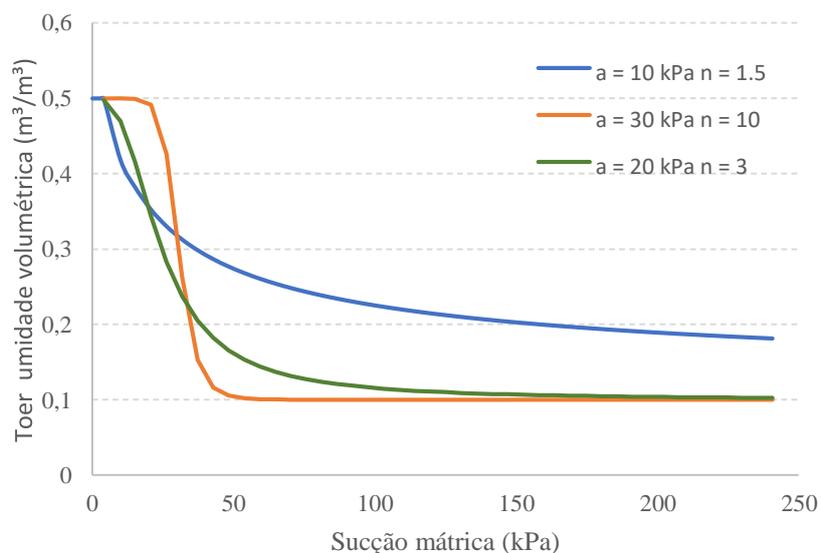


Figura 2.4: Curva de Van Genuchten com diferentes valores para os parâmetros

2.2.2 Permeabilidade intrínseca e relativa

A permeabilidade de um meio poroso contendo mais de uma fase depende do grau de saturação e do histórico de molhagem e secagem. Define-se como permeabilidade absoluta ou intrínseca aquela que é característica apenas do meio, relacionada ao tamanho e distribuição dos poros. É intuitivo imaginar que, caso haja diminuição da quantidade de uma fase no meio, a permeabilidade efetiva a este fluido também diminuirá, já que haverá menor área para passagem de seu fluxo. Assim, costuma-se trabalhar com o conceito de permeabilidade relativa, que é a razão entre a permeabilidade efetiva e a absoluta e costuma ser tratada como função do grau de saturação.

A condutividade hidráulica de determinado meio em relação a uma fase α (k_α) é função da permeabilidade intrínseca (k_s), do peso específico (γ_α) e da mobilidade do fluido, que é dada pela relação entre sua permeabilidade relativa (k_α) e sua viscosidade (μ_α):

$$k_\alpha = \frac{k_s k_{r\alpha}(S_\alpha)\gamma_\alpha}{\mu_\alpha} = k_s \lambda_\alpha \gamma_\alpha \quad (2.3)$$

Chama-se mobilidade, λ_α , da fase a razão entre sua permeabilidade relativa e sua viscosidade. A permeabilidade relativa de um fluido decresce com a diminuição de sua saturação, atingindo valor zero no ponto chamado de saturação residual, para a qual não existe mais continuidade, e, portanto, não há mais mobilidade.

Como a permeabilidade é uma das propriedades de maior interesse no estudo de reservatórios, existem publicações diversas tratando do assunto no contexto de fluxos multifásicos. Leverett e Lewis (1941) fizeram a medição das permeabilidades relativas do óleo, do gás e da água em fluxos bifásicos e trifásicos, chegando à conclusão de que tanto para o gás como para a água a permeabilidade depende apenas do próprio grau de saturação da fase. Quanto ao óleo, sua permeabilidade se desenvolveu de forma mais complexa, variando para a mesma saturação em fluxos trifásicos e bifásicos. Corey *et al* (1956), Oak *et al* (1990), dentre outros, também obtiveram resultados similares para medidas de permeabilidade em sistemas de água, óleo e gás, enquanto Stone (1970) desenvolveu um modelo popular para estimativa da permeabilidade do fluido de

molhabilidade intermediária em um sistema trifásico, a partir de dados de sistemas bifásicos.

A molhabilidade tem um importante papel no comportamento das permeabilidades relativas dos fluidos, já que esta propriedade define como eles estão posicionados no reservatório. O fluido molhante costuma estar presente nos pequenos poros e formar películas que envolvem as superfícies sólidas. O fluido não molhante, por sua vez, localiza-se entre estas finas películas, ocupando o centro dos grandes poros. Assim, para uma mesma saturação de ambos os fluidos, o fluido não molhante possui uma permeabilidade relativa maior do que o molhante, por ocupar áreas maiores dentro dos poros. A Figura 2.5 ilustra este fenômeno com curvas de permeabilidade para meios em que a água e o óleo são os fluidos molhantes em um sistema bifásico. A Figura 2.6 ilustra a distribuição dos fluidos nos poros para diferentes padrões de molhabilidade. Pode-se observar que espaços maiores são ocupados pelo fluido não molhante, no caso de padrões homogêneos. Mais informações a respeito do efeito da molhabilidade na permeabilidade relativa podem ser encontradas no trabalho de Anderson (1987b).

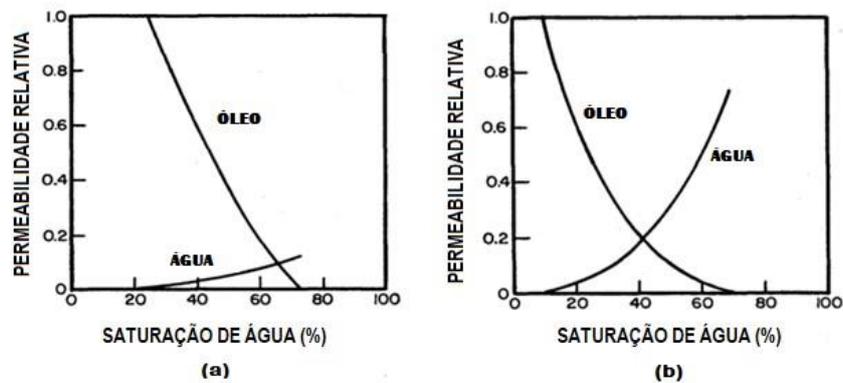


Figura 2.5: Curvas de permeabilidade tendo óleo como fluido molhante (a) e água como fluido molhante (b)

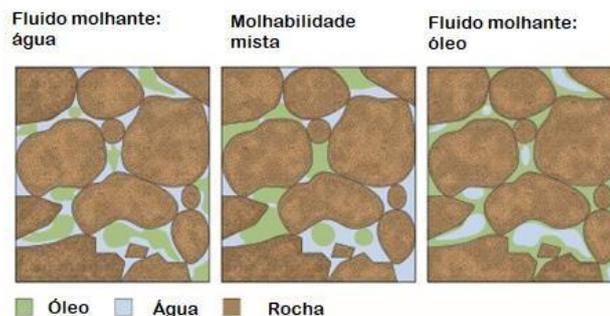


Figura 2.6: Padrões de molhabilidade encontrados em um reservatório

2.2.3 Razão de solubilidade

Nas condições de reservatório, a mistura líquida de hidrocarbonetos constitui em óleo com gás dissolvido. Se levada às condições padrão de temperatura e pressão, parte da mistura continuará na fase líquida, na forma de óleo, enquanto a outra parcela, correspondente ao gás inicialmente dissolvido, se vaporizará. A razão de solubilidade (R_s) exprime a quantidade de gás dissolvido presente no líquido com a seguinte equação:

v_{GS}

$$R_s = v_{os} \quad (2.4)$$

Sendo V_{GS} o volume do gás dissolvido e V_{OS} o volume de óleo nas condições *standard*, também chamado de volume morto, por representar a parcela da mistura líquida que não sofre mudanças de fase fora das condições de reservatório. Ambos os volumes são medidos nas condições padrão. Existem na literatura correlações para a razão de solubilidade, como a de Standing (1947), que a descreve em função da pressão, do grau API (uma medida de densidade do óleo), da densidade do gás e da temperatura. Considerando um processo isotérmico, a curva do parâmetro R_s em função da pressão tem o formato ilustrado na Figura 2.7. Para pressões maiores que a pressão de bolha, como ainda não se iniciou a vaporização e todo o gás continua dissolvido, o valor de R_s é constante. Com a despressurização, o valor deste parâmetro diminui, até que seja reduzido a zero na pressão correspondente às condições-padrão, em que todo o gás inicialmente dissolvido se vaporizou.

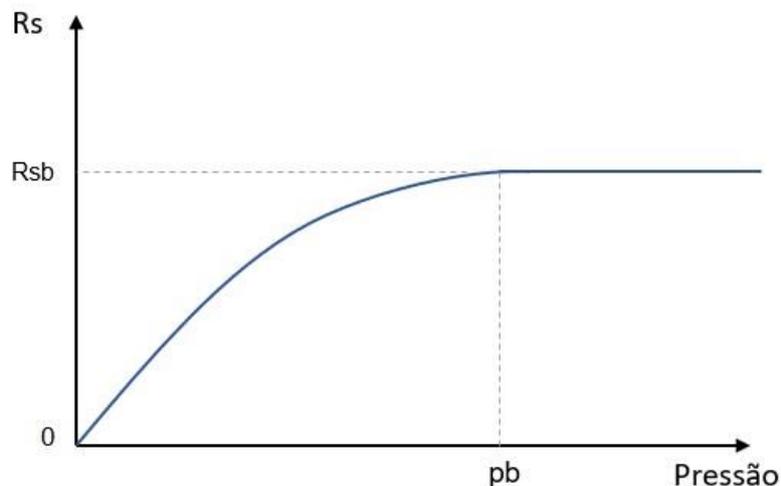


Figura 2.7: Curva da razão de solubilidade em função da pressão

2.2.4 Fator-volume formação dos fluidos

O fator-volume formação de um fluido é a relação entre o volume por ele ocupado nas condições de pressão e temperatura do reservatório e nas condições-padrão. A diferença entre estes volumes ocorre devido à compressibilidade dos fluidos e a eventuais trocas de fases. No caso do óleo, por exemplo, o fator volume-formação B_o é dado por:

$$B_o = \frac{V_{OS}(p,T)}{V_{OS}(p_o,T)} = V_o(p,T) + V_G(p,T) \quad (2.5)$$

Sendo V_{OS} o volume de óleo em condições-padrão, e V_1 o volume da fase líquida nas condições de temperatura (T) e pressão (p) do reservatório, que é por sua vez constituído pelo volume de óleo, V_o , e pelo volume de gás dissolvido, V_G .

Em um problema isotérmico, a descrição de B_o em função da pressão tem um comportamento semelhante ao ilustrado na Figura 2.8. Para pressões acima do ponto de bolha, a mudança de volume do líquido se deve apenas à sua compressibilidade, já que não há troca de fases. Como os líquidos possuem compressibilidades isotérmicas aproximadamente constantes (Rosa *et al*,2011), acima da pressão de bolha a função é linear e seu coeficiente angular é negativo corresponde à compressibilidade do fluido. Para pressões abaixo do ponto de bolha, há duas tendências opostas na variação de volume

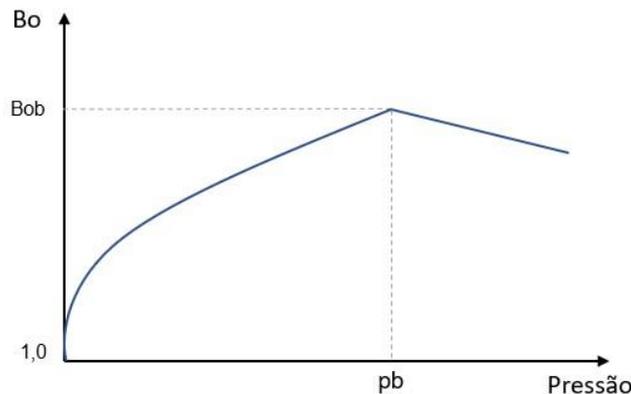


Figura 2.8: Curva do fator-volume formação do óleo em função da pressão

Com a vaporização gradual do gás dissolvido, há uma redução de volume da fase líquida que acompanha a queda de pressão. A despressurização geraria, em contrapartida, um aumento de volume da fase devido à sua compressibilidade. O efeito da compressibilidade do líquido é, no entanto, cada vez menos importante à medida que a pressão diminui, já que esta propriedade é tão menor quanto menor for a quantidade de gás dissolvido. Assim, a tendência geral do fator B_o é de diminuir juntamente com a pressão a partir do ponto de bolha, atingindo valor igual a unidade em condições-padrão.

No caso do gás, o seu fator volume-formação, B_G , dado pela razão entre seu volume nas condições de reservatório, V_G , e seu volume nas condições-padrão, V_{GS} , pode ser obtido através da formulação abaixo, que advém da equação geral para gases ideais, corrigida por um fator Z para a representação de gases reais.

$$B_g = \frac{V_G}{V_{GS}} = \frac{p_s Z T}{T_s p} \quad (2.6)$$

Sendo p_s e T_s a pressão e a temperatura nas condições padrão, empregadas pela ANP (Agência Nacional de Petróleo) com os valores de 1 atm e 20 °C, respectivamente.

O fator volume-formação da água também costuma ser descrito em função da pressão e da temperatura. No entanto, ao contrário do óleo e do gás, a água não apresenta grandes variações de volume em diferentes condições ambientais.

2.2.5 Pressão de ponto de bolha variável

A pressão de ponto de bolha de um reservatório não é uma constante ao longo de toda sua extensão, pois depende da composição dos fluidos e das condições do meio. Pode variar diante de injeções de gás, que se incorporam ao óleo, ou até mesmo devido a efeitos de segregação gravitacional. Muitos trabalhos tratam da simulação de reservatórios diante de uma pressão de bolha variável, tais como os estudos de Thomas *et al* (1976) e Farnstrom *et al* (1987). Valkó e McCain (2002) comparam correlações existentes para a pressão de bolha, dentre as quais se encontra a de Standing (1951), um método gráfico em que a pressão de bolha é obtida a partir da razão de solubilidade, da temperatura e do grau API do óleo.

A variação da pressão de ponto de bolha implica que, quando o reservatório está com pressão acima do ponto de bolha, há uma mudança na razão de solubilidade e no

fator volume formação correspondentes ao estado subsaturado. A Figura 2.9 ilustra o problema. Enquanto há uma curva única para o caso saturado, as funções que descrevem as propriedades em questão, quando o reservatório está subsaturado, se deslocam de acordo com o valor de pressão de ponto de bolha (p_b)

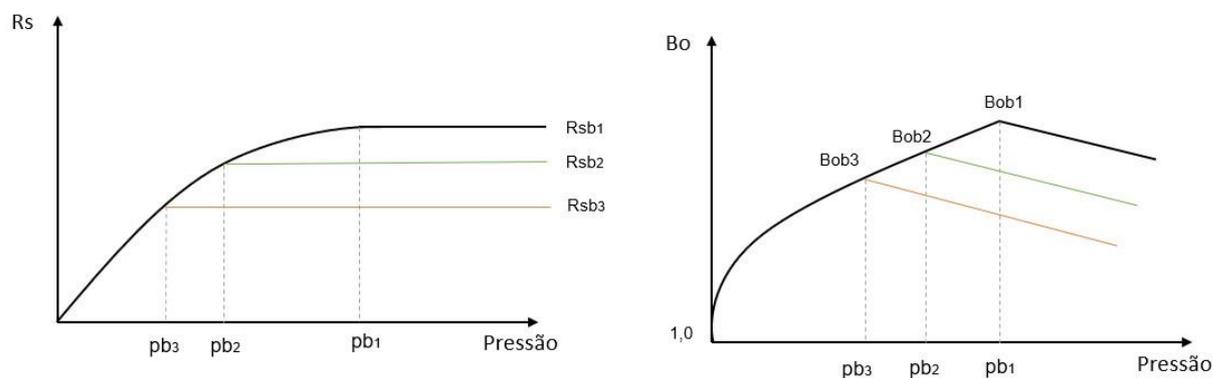


Figura 2.9: Razão de solubilidade do gás no óleo e fator volume formação do óleo com pressão de ponto de bolha variável

2.3 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO: FLUXO EM MEIOS POROSOS

Um meio poroso consiste em uma matriz sólida com espaços vazios que podem ser preenchidos por fases de diferentes fluidos. Uma fase, por sua vez, pode ser definida como uma porção quimicamente homogênea de um sistema, não miscível com as outras porções, das quais se separa por uma interface. (Bachmat, 1990).

A formulação do fluxo em meios porosos a ser utilizada é sustentada pela hipótese do contínuo, o que significa que a análise é feita em uma escala grande suficiente para que se tenha uma região representativa das características médias do meio. As equações que serão apresentadas representam a conservação de massa dos fluidos em um volume de controle fixo no espaço. Introduzindo na equação de conservação a Lei de Darcy e algumas equações de estado, chega-se nas formulações que sustentarão este trabalho.

2.3.1 Fluxo multifásico e a equação de Richards

Como já citado anteriormente, as equações que regem o fluxo são equações de conservação de massa, aplicadas a cada uma das fases presentes no meio poroso. Antes que sejam

descritas, é necessário que seja apresentada a Lei de Darcy, que adaptada para fluxos multifásicos tem a seguinte formulação para uma fase α :

$$\mathbf{v}_\alpha = - \frac{k_\alpha \mu_\alpha^{S_\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}) = - \frac{k_{r\alpha} k_s}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}) \quad (2.7)$$

onde \mathbf{v}_α é o vetor de velocidades da fase, $k_\alpha(S_\alpha)$ é a permeabilidade efetiva, μ_α é a viscosidade, ρ_α é a massa específica, p_α é a pressão atuante no fluido, e \mathbf{g} é o vetor gravidade.

As equações de conservação são formulações de Navier-Stokes aplicadas a um volume de controle fixado no espaço. No caso do fluxo de um fluido, há vazões de entrada e de saída, além do armazenamento do fluido no volume de controle, que devem ser balancear de forma a cumprir com a conservação de massa. A equação da continuidade para uma fase α é descrita pela seguinte formulação:

$$-\nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + q_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \phi) \quad (2.8)$$

Sendo q_α é a vazão injetada (ou retirada) da fase α , t indica tempo e ϕ é a porosidade do meio. Substituindo a velocidade pela Lei de Darcy nesta equação, chegamos a:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho_\alpha k_\alpha k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}) \right] + q_\alpha - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \phi) = 0 \quad (2.9)$$

Costuma-se definir o primeiro termo desta equação como termo de fluxo, por descrever o fluxo que atravessa o domínio, e o último termo como termo de armazenamento, por descrever a variação do armazenamento do fluido nos poros ao longo do tempo.

Um problema de fluxo bifásico, consiste em um sistema com duas equações de conservação como a Equação 2.8. Para que o sistema possa ser solucionado, ele deve estar descrito em função de duas variáveis. Apesar de haver quatro incógnitas no problema, que são a pressão e a saturação de ambas as fases, a introdução de relações adicionais reduz este número a dois.

A pressão de um dos fluidos pode ser descrita em termos da pressão do segundo fluido, através da pressão capilar. Considerando um sistema contendo água e óleo, e selecionando a pressão da água (p_w) como incógnita, por exemplo, a pressão do óleo (p_o), pode ser descrita da seguinte maneira:

$$p_o = p_w + p_{c_{ow}} \quad (2.10)$$

Onde $p_{c_{ow}}$ é a pressão capilar entre os fluidos, e a água é o fluido molhante. Além disso, como a saturação de ambos os fluidos deve somar a unidade, se a saturação do óleo (S_o) for selecionada como variável, pode-se descrever a saturação de água (S_w), como:

$$S_w = 1 - S_o \quad (2.11)$$

Assim, para um sistema bifásico contendo água e óleo, desprezando a compressibilidade dos fluidos, e expandindo a derivada temporal, o sistema de equações é o seguinte:

$$\nabla \cdot [k_{s\mu} k_{ro} (\nabla(p_w + p_{c_{ow}}) - \rho_o g)] + q_o = S_o \frac{\partial(\phi)}{\partial t} - \phi \frac{\partial(S_o)}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot [k_{s\mu} k_{rw} (\nabla(p_w) - \rho_w g)] + q_w = (1 - S_o) \frac{\partial(\phi)}{\partial t} - \phi \frac{\partial(S_o)}{\partial t} \quad (2.13)$$

Onde k_{rw} e k_{ro} são as permeabilidades relativas, e μ_w e μ_o são as viscosidades da água e do óleo, respectivamente. Percebe-se que, somando-se as equações acima, o a derivada temporal da saturação desaparece e pode-se obter a seguinte equação em termos de fluxo total:

$$\nabla \cdot [k_{s\mu} k_{rw} (\nabla(p_w) - \rho_w g)] + \nabla \cdot [k_{s\mu} k_{ro} (\nabla(p_w + p_{c_{ow}}) - \rho_o g)] + \frac{\partial(p\phi_w)}{\partial t} + q_t = 0 \quad (2.14)$$

sendo q_t a vazão total, obtida pela soma da vazão de óleo, q_o e da vazão de água, q_w . O termo $\frac{\partial(p\phi_w)}{\partial t}$ se refere à compressibilidade da rocha. Esta equação é chamada equação de

pressão, e juntamente com uma das equações de conservação, 2.12 ou 2.13, chamada equação de saturação, formam um sistema alternativo para a resolução de fluxos bifásicos. Esse procedimento é muito popular em estudos que envolvem a solução numérica de problemas multifásicos, já que quando as equações são resolvidas de forma iterativa e não simultânea, aumentam a eficiência computacional. Dentre as formulações mais populares para este tipo de problema está o esquema do tipo IMPES (*Implicit*

Pressure – Explicit Saturation), em que a equação de pressão é resolvida avaliando-se a permeabilidade em função das saturações no passo de tempo anterior. As novas pressões calculadas são então introduzidas na equação de saturação, de forma a se calcular novos valores para as saturações. Esses resultados são utilizados novamente na equação de pressão para reavaliação das permeabilidades, e o processo continua até que um critério de convergência seja atingido.

Equação de Richards

Dentro dos problemas de fluxo bifásico, a modelagem de solos não saturados, ou seja, contendo água e ar, pode ser vista como um caso particular. Assume-se que o ar está distribuído nos poros de forma contínua e está conectado à atmosfera, tendo, portanto, pressão constante. Assim, apesar de o problema conter duas fases, a equação de conservação do ar desaparece e tem-se apenas a seguinte equação de conservação para a água:

$$\nabla \left[\frac{k_{sw} k_{rw}}{w} (\nabla(p_w) - \rho_w g) \right] + q_o = - \frac{\partial}{\partial t} (\theta_w) \quad (2.15)$$

Onde o teor de umidade volumétrica, θ_w , pode ser descrito em função da sucção mátrica, Ψ , que, por sua vez, depende apenas da pressão da água, já que a pressão do ar é considerada constante e igual a zero. Assim:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_w) = - \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p_w} \right) \frac{\partial p_w}{\partial t} \quad (2.16)$$

$$\Psi = - p_w \quad (2.17)$$

Logo, o problema é reduzido a uma equação, com uma incógnita: a pressão de água.

2.3.1.1 A solução analítica de Buckley-Leverett

A solução analítica de Buckley-Leverett costuma ser o primeiro problema utilizado na validação de códigos para fluxos bifásicos, vide Blunt e Rubin (1991), Geiger *et al* (2004) e Huber e Helmig (1999). Trata-se de uma solução unidimensional para a injeção de água em um meio contendo, inicialmente, água em uma saturação crítica e óleo. São desconsiderados efeitos de gravidade e pressão capilar.

A Equação 2.14, chamada equação de pressão, define que:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_t = 0 \quad (2.18)$$

Para um problema unidimensional, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} v_t = 0 \quad (2.19)$$

sendo \mathbf{v}_t a velocidade total, dada pela soma das velocidades do óleo (\mathbf{v}_o) e da água (\mathbf{v}_w).

Pode-se definir, então, o gradiente da velocidade da água como:

$$\frac{\partial}{\partial x} v_w = f_w \frac{\partial}{\partial x} v_t + v_t \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} = v_t F_w \frac{\partial S_w}{\partial x} \quad (2.20) \text{ sendo } S_w \text{ a saturação}$$

de água, a fração, $F_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_o}$ e a fração f_w é dada pela relação:

$$(2.21) \quad f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_o} \text{ onde } \lambda_w \text{ e } \lambda_o \text{ são as mobilidades da água}$$

e do óleo.

A equação de conservação de massa para a água está descrita abaixo, onde o gradiente da velocidade foi substituído pela Equação 2.20.

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} S_w + v_t F_w \frac{\partial S_w}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

Manipulando esta equação, chega-se à seguinte formulação:

$$\frac{\partial}{\partial t} x = \frac{v_t F_w(S_w)}{\phi} \quad (2.23)$$

Descrevendo a velocidade em termos da vazão injetada, q , tem-se:

$$v_t = \frac{q}{A} \quad (2.24)$$

sendo a A a área da seção transversal pela qual atravessa o fluxo. A partir das Equações 2.23 e 2.24 chega-se a:

$$\int_0^x dx = \frac{q}{A \phi} \int_0^t F_w(S_w) dt \quad (2.25)$$

$$x(S_w, t) = \frac{F_w(S_w)}{q} t \quad (2.26)$$

Sendo t o tempo decorrido. A equação acima descreve o avanço da saturação da água no eixo x ao longo do tempo. Ela possui a feição ilustrada na Figura 2.10 a. Nota-se que a um valor de x , corresponde mais um valor de saturação

Esta ambiguidade é resolvida por um método gráfico que prevê a saturação da água na frente de saturação. A frente de saturação é a descontinuidade existente na máxima distância alcançada pela água em um tempo t . Este ponto é a fronteira entre a parcela do domínio alcançada pela injeção de água, e a região em que este fluido ainda se encontra em sua saturação residual. A conservação de massa nessa região define que, na frente de saturação, a tangente à curva de mobilidade fracional da água equivale à reta secante entre a saturação crítica e a saturação da frente:

$$F_w(S_w) = s_{fw} f_w(S_w) \quad (2.27)$$

sendo S_{wf} a saturação na frente e S_{wc} a saturação crítica.

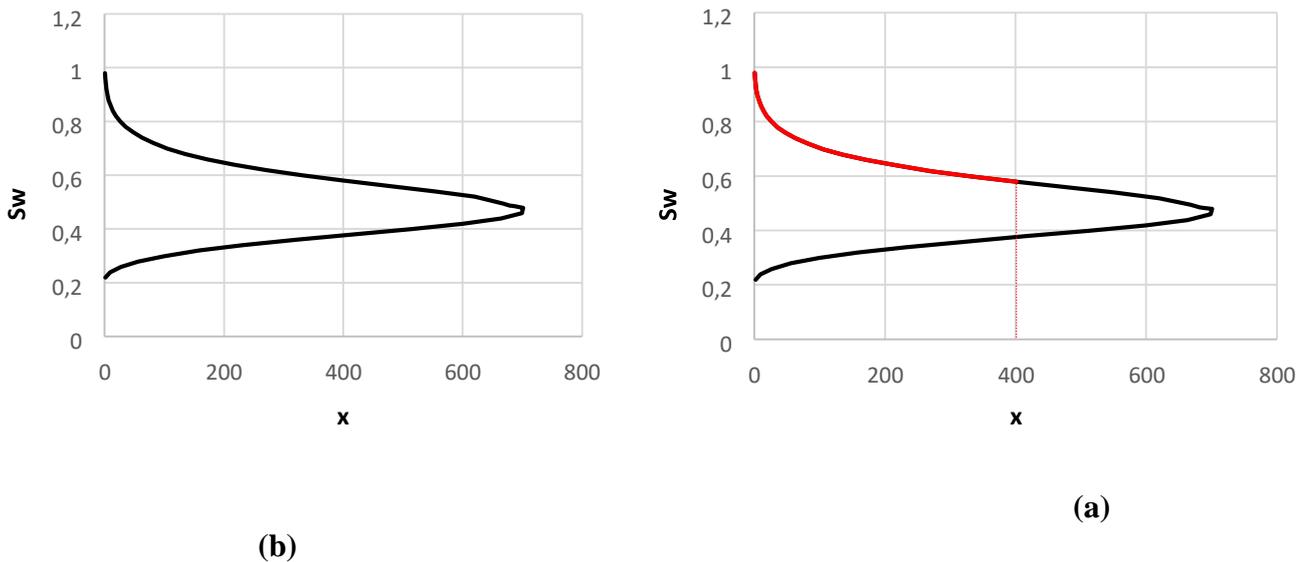


Figura 2.10: a) Curva saturação vs distância obtida na solução de Buckley-Leverett; b) método de resolução com a saturação da frente

Definindo-se uma perpendicular na curva da Figura 2.10 a no ponto da saturação da frente, chega-se à curva final que descreve o avanço da frente de saturação, correspondente à parcela em vermelho na Figura 2.10 b. A partir deste ponto a saturação de água

corresponde a saturação residual. A Figura 2.11 ilustra o tipo de solução obtida e o avanço da frente de saturação ao longo do tempo. A solução apresentada tem validade até o chamado *water breakthrough*, ou seja, até que a frente de saturação atinja o limite do domínio (x_{max}), momento a partir do qual há produção de água, além da produção de óleo. Na Figura 2.11 o momento do *breakthrough* corresponde ao tempo t_b .

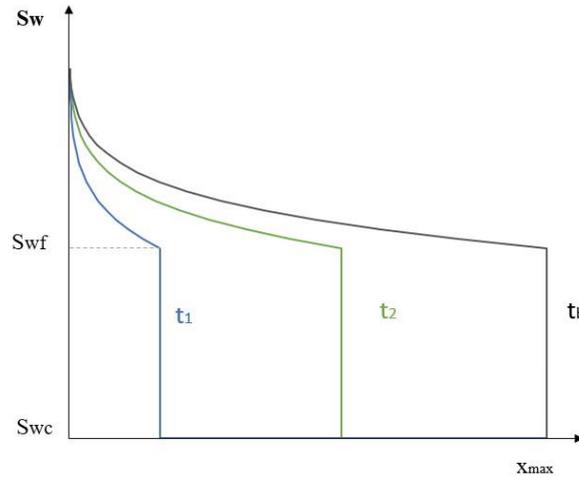


Figura 2.11: Resultados típicos pela solução de Buckley-Leverett

Apesar de o problema de Buckley-Leverett possuir muitas simplificações, é uma importante validação para simuladores de reservatórios, já que ilustra a situação muito comum de injeção de um fluido para mobilização do óleo. Além disso, é um ótimo método para avaliar a capacidade de um código em representar frentes de saturação, já que formulações convencionais de métodos numéricos não são adaptadas à existência de descontinuidades.

2.3.3 Condições de contorno

É também válido ressaltar que para que os problemas matemáticos descritos acima tenham solução única, é necessário que sejam definidas condições de contorno que descrevem as variáveis em certos pontos do domínio. As condições de contorno do tipo essenciais ou de Dirichlet são aquelas que fornecem os valores das próprias variáveis, pressão ou saturação, em determinado ponto do domínio. A pressão de injeção em um poço injetor de um reservatório, por exemplo, se encontra nesta categoria.

As condições de Neumann, também chamadas condições essenciais, são definições das derivadas das variáveis nas fronteiras dos domínios, geralmente escritas em termos de

fluxo na direção normal à uma fronteira. A vazão injetada de um fluido para recuperação secundária de um reservatório, ou a vazão mínima definida em um poço produtor podem ser entendidas como condições deste tipo.

Por fim, as condições de Robin descrevem uma relação entre as derivadas das variáveis e o valor das variáveis. São muito utilizadas em poços produtores. Como frequentemente são desconhecidas tanto a vazão de produção como a pressão e as saturações do reservatório na região do poço, costuma-se descrever a vazão em função destas variáveis primárias, de forma que se obtém um acoplamento entre o fluxo no reservatório e a vazão no poço.

2.4 MODELO BLACK OIL

O conjunto de equações descrito acima pode ser usado para modelar fluxos multifásicos em que não há troca de fases entre os fluidos. Sabe-se que este não é o caso de muitos reservatórios de petróleo. Para que tal limitação seja resolvida, deve ser implementado um modelo em que não mais seja aplicada a conservação de massa em uma fase, mas sim nos componentes das fases presentes no problema. No caso de um reservatório de petróleo, os componentes tratados podem ser os hidrocarbonetos presentes nas fases óleo e gás, o dióxido de carbono, que pode se dissolver na água, e o vapor de água que se incorpora ao gás, por exemplo (Peaceman, 1977).

O modelo black oil é um modelo composicional simplificado de grande importância na indústria do petróleo. Neste modelo existem dois componentes: óleo e gás. É importante que sejam distinguidos nas equações o componente óleo da fase óleo, e o componente gás da fase gás. Assim, serão utilizadas as notações de Peaceman (1977), em que as letras maiúsculas G e O são utilizados como subscritos para os componentes gás e óleo, e as letras minúsculas g e o indicam as fases gás e óleo. Há, ainda, a fase água, referenciada pelo sobescrito w .

O modelo black oil é adequado para a simulação de sistemas de baixa volatilidade, consistindo principalmente de metano e outros componentes pesados (Chen, 2001). Suas formulações são capazes de descrever trocas de massa entre as fases gás e óleo em um reservatório. Considera-se que a água não faz trocas de fase.

Nas condições de pressão e temperatura do reservatório, a fase óleo é formada por uma massa de gás dissolvido, correspondente ao componente gás, e a uma massa de óleo, correspondente ao componente óleo. Podem ser descritas frações composicionais de

massa para cada um dos componentes na fase óleo, que são a razão entre a massa do componente e a massa da fase:

$$C_{Oo} = \frac{W_o}{W_o + W_g} = \frac{\rho_{os} B_o}{\rho_o} \quad (2.28)$$

$$C_{Go} = \frac{W_g}{W_o + W_g} = \frac{R_s \rho_{gs}}{\rho_o} \quad (2.29)$$

onde C_{Oo} e C_{Go} são as frações composicionais dos componentes óleo e gás na fase óleo, respectivamente; W_o e W_g são as massas dos componentes óleo e gás; ρ_{os} e ρ_{gs} são as massas específicas dos componentes óleo e gás, medidas em condições-padrão; ρ_o é a massa específica da fase óleo nas condições de reservatório; R_s é a razão de solubilidade do gás e B_o é o fator-volume formação do óleo.

Diante de quedas de pressão, a fase óleo vaporiza-se parcialmente, liberando o gás dissolvido, de forma que o componente gás, passa a integrar também uma fase de gás livre. Assim, no modelo black oil o componente gás pode ter sua massa distribuída entre duas fases: gás e óleo.

Em condições-padrão, todo o gás dissolvido se vaporiza e está na fase gás, enquanto a fase óleo é formada apenas pelo componente óleo. Pelo fato de o componente óleo ser o óleo residual, deixado após a vaporização completa, ele costuma também ser denominado óleo morto.

As Equações 2.30 a 2.32 descrevem o fluxo dos componentes gás e óleo, e da fase água, respectivamente. Tais equações possuem termos de fluido e de armazenamento semelhantes aos da Equação 2.8. A diferença reside no fato de que, na equação do gás, há um termo de fluxo e um termo de armazenamento para o componente gás em duas fases: óleo e gás. Além disso, a massa das fases é multiplicada pela fração composicional dos componentes, já que estas são equações de conservação de massa para os componentes, e não para as fases.

$$\rho_g \overline{k_{grg}} (\nabla p_g - \rho_g g) + \rho_g R_s \rho_{gs} B_{go} \mu_{kso} (\nabla p_o - \rho_o g) + q_g = \frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho_g S_g + \frac{\phi R_s \rho_{gs} \rho_o S_o}{B_o \rho_o}] \quad (2.30)$$

$$\rho_o \rho_{OS} B_o \rho_o \rho_o k_{r_o} (\nabla p_o - \rho_o g) + q_o = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi \rho_{Bo} S_o}{\rho_{Bo}} \right) \quad (2.31)$$

$$\frac{\rho_w k_{r_w}}{w} (\nabla p_w - \rho_w g) + q_o = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w S_w) \quad (2.32)$$

Considerando que o fator-volume formação das fases relaciona seu volume nas condições de reservatório e nas condições padrão, tem-se que:

$$\rho_w = B_w \frac{\rho_w^S}{w} \quad (2.33)$$

$$\rho_g = B_g \frac{\rho_g^S}{g} \quad (2.34)$$

sendo ρ_w e ρ_w^S as massas específicas da água nas condições de reservatório e nas condições padrão, respectivamente. Além disso, notando-se que as frações composicionais C_{Go} e C_{Oo} devem somar uma unidade, chega-se a:

$$\rho_o = R_s \rho_{GS} B_o + \rho_{OS} \quad (2.35)$$

Substituindo estas massas específicas nas equações 2.30 - 2.32 e dividindo-as por ρ_{GS} , ρ_{OS} e ρ_{WS} , respectivamente, chega-se à forma final do sistema de equações:

$$\frac{k_{r_g}}{g} (\nabla p - \rho g) + \frac{R_s k_{r_o}}{g} (\nabla p - \rho g) + \frac{q_o}{g} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{\rho_{Bo} S_o}{\rho_{Bo}} + \frac{\rho_{OS}}{\rho_{OS}} \right) \right] \quad (2.37)$$

$$\frac{k_{r_w}}{w} (\nabla p - \rho g) + \frac{q_o}{w} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w) \quad (2.38)$$

$$\frac{k_{r_w}}{B_w \mu_w} (\nabla p_w - \rho_w g) + q_o = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)$$

Tais equações não possuem mais unidade de massa, e sim de volume, e podem ser interpretadas como a conservação dos volumes dos componentes medidos em condições padrão.

As equações acima possuem como variáveis as pressões e saturações dos três componentes. Através da pressão capilar é possível eliminar duas das pressões. Diante da equação de estado que determina que a soma das saturações é zero, a saturação de uma das fases pode ser descrita em função das outras.

Neste ponto surge um problema de escolha de variáveis. A pressão de uma fase e a saturação de óleo sempre são escolhidas como incógnitas para o modelo black oil. A escolha da terceira variável, no entanto, não é tão simples. Quando o reservatório se encontra saturado, a saturação de gás é diferente de zero, e pode ser descrito em função da saturação dos dois outros fluidos. Portanto, a terceira variável é naturalmente o grau de saturação da água ou do gás.

Quando o reservatório se encontra subsaturado, no entanto, sabe-se que a saturação de gás é zero, e a saturação de água pode então ser descrita como função da saturação de óleo. Assim, seria redundante selecionar como terceira variável o grau de saturação da água. Apesar disso, alguns autores utilizam o grau de saturação da água ou do gás como terceira variável, em uma técnica chamada de pseudogás (Forsyth e Sammon, 1983). Neste caso, no entanto, as relações constitutivas são manipuladas de forma que a saturação da fase gás seja reduzida a um valor muito pequeno quando o reservatório está saturado. Por este método, sempre há gás no sistema, mesmo quando a pressão está acima do ponto de bolha. Isto implica que há erros de conservação de massa inerentes ao método, que, por outro lado, é fácil de ser programado.

Uma alternativa mais complexa é a formulação com troca de variáveis. Para o reservatório saturado, utiliza-se como incógnitas a pressão de uma fase e a saturação do óleo e de outra fase. Quando, porém, o estado subsaturado é atingido, a terceira variável é trocada, tornando-se em alguns casos a pressão de bolha (Chen, 2003) e em outros a razão de solubilidade (Farnstrom *et al*, 1987). Como já comentado, no estado subsaturado a pressão de bolha, a razão de solubilidade e os fatores-volume formação mudam de acordo com a pressão e a composição dos fluidos.

O método das trocas de variáveis tem implicações nos termos de armazenamento, à direita nas equações 2.36 a 2.38. Quando o reservatório se encontra saturado e sob pressão p , considerando a terceira variável como a saturação da água, S_w , e sabendo que $S_g = 1 - S_w - S_o$, as derivadas são expandidas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_g) + \frac{\partial}{\partial t} (\phi R_s S_o) + S_g \frac{\partial \phi}{\partial t} + R_s S_o \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi S_o \frac{\partial R_s}{\partial t} + \frac{\partial B_o^{-1}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{B_g} + \overline{B_o} \right] = \left[\left(\overline{B_g} + \overline{B_o} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \phi \overline{S_g} \frac{\partial p}{\partial t} + \overline{B_o} \frac{\partial p}{\partial t} + \overline{\phi R_s S_o} \frac{\partial p}{\partial t} \right] \frac{\partial t}{\partial t} +$$

$$\left(\overline{\phi R_s} - \overline{\phi} \right) \frac{\partial S_o}{\partial t} - \overline{\phi} \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\phi B S_o} \right) = \left(\overline{B S_o} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\phi} + \overline{\phi S_o} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{\phi B} \frac{\partial S_o}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \overline{B \phi} \frac{\partial S_o}{\partial t} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\phi S_w} \right) = \overline{S_w} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + \overline{\phi} \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (2.41)$$

Considerando que, para o reservatório subsaturado a terceira variável seja a razão de solubilidade, R_s , e que variações de R_s estejam associadas a mudanças de pressão de bolha que afetam o fator-volume formação do óleo, B_o , e sabendo-se que $S_w = 1 - S_o$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\phi B R_o S_o} \right] = \left[\left(\overline{B S_o} \right) \frac{\partial}{\partial t} \overline{\phi} + \overline{\phi R_s S_o} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \overline{\phi B R_o S_o} \frac{\partial R_s}{\partial t} + \left[\left(\overline{B S_o} \right) + \overline{\phi R_s S_o} \right] \frac{\partial S_o}{\partial t} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\phi B S_o} \right) = \left(\overline{B S_o} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\phi} + \overline{\phi S_o} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \overline{\phi S_o} \frac{\partial B}{\partial t} + \overline{\phi B} \frac{\partial S_o}{\partial t} + \overline{\phi S_o} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial R_s}{\partial t} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\phi S_w} \right) = \overline{S_w} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + \overline{\phi} \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (2.44)$$

Nota-se que neste caso, o termo de armazenamento do componente gás só possui os elementos correspondentes à sua presença na fase óleo, já que a fase gás não existe neste estado de saturação.

O modelo black oil é capaz de descrever o desaparecimento e reaparecimento de gás no reservatório, e é utilizado com grande frequência na simulação da recuperação primária e secundária de reservatórios que contém óleo com gás dissolvido.

CAPÍTULO 3 – MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÕES DE FLUXO

Este capítulo se dedica a apresentação de métodos numéricos e técnicas matemáticas utilizados na resolução de problemas de fluxo multifásico e multicomposicional. Primeiramente, serão apresentados o método dos elementos finitos convencional e métodos que utilizam volumes de controle. Em seguida, serão discutidas a integração no tempo e esquemas de resolução, dentre os quais se encontram o esquema totalmente implícito e a formulação IMPES. Por fim, a evolução dos métodos numéricos para resolução de problemas de fluxo será abordada, com foco no método dos elementos finitos e nas técnicas que adaptaram sua formulação convencional.

3.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS CONVENCIONAL

Diante das ferramentas e métodos matemáticos disponíveis, a solução analítica de equações diferenciais como as apresentadas nem sempre é possível. Para os problemas de fluxo transiente descritos, são utilizadas soluções numéricas que envolvem a discretização do domínio espaço-tempo.

A discretização no espaço é comumente feita através do método das diferenças finitas, do método dos volumes finitos ou do método dos elementos finitos (MEF). Estes métodos consistem em modificar o problema de um número infinito para um número finito de graus de liberdade. No caso do método dos elementos finitos, este consiste na divisão do espaço em elementos de formas geométricas e números de nós estipulados de acordo com a acurácia e a eficiência requeridas na solução.

No método dos elementos finitos, os valores de uma função desconhecida $u(x, y, z, t)$ são aproximadas no espaço (x, y, z) a partir de seus valores nodais, através das chamadas funções de forma. Uma função de forma $N(i)$ é definida de tal forma que seja igual a unidade no nó i e zero nos demais nós.

O fato de haver tais aproximações faz com que as igualdades nas equações de conservação apresentadas não sejam mais zero, mas sim um valor residual, ou seja:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \Psi \quad (3.1)$$

Sendo $\frac{\partial M}{\partial t}$ o termo de armazenamento, M a massa do fluido, $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ o termo divergente do fluxo, ρ a massa específica, \mathbf{v} a velocidade e Ψ o resíduo na conservação.

Para a manipulação deste erro, o método dos elementos finitos vale-se dos chamados métodos dos resíduos ponderados, cuja formulação, apresentada abaixo na Equação 3.2, garante que o erro de aproximação seja distribuído ao longo de todo o domínio de forma equilibrada.

$$\int_W \Psi \cdot Y(x, y, z) dW = 0 \quad (3.2)$$

ou

$$\int_W \frac{\partial M}{\partial t} Y(x, y, z) dW + \int_W \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dW = 0 \quad (3.3)$$

onde Ψ é o resíduo, $Y(x, y, z)$ é uma função de ponderação e W é o domínio da solução. Dentre os métodos dos resíduos ponderados, destaca-se a solução de Galerkin, em que as funções de ponderação são iguais às funções de forma, $Y_{(i)} = N_{(i)}$. Aplicando o teorema da divergência na segunda integral da Equação 3.3, é obtida sua formulação fraca, utilizando a solução de Galerkin:

$$\int_W \frac{\partial M}{\partial t} N_W(x, y, z) dW = 0 \quad (3.4) \quad \int_W \rho \mathbf{v} \cdot \nabla N(x, y, z) dW + \int_{\partial W} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_w N(x, y, z) d\partial W = 0$$

onde ∂W é o contorno do domínio W e \mathbf{n}_w é o vetor normal a esta fronteira.

O último termo desta equação é uma condição de contorno de Neumann e refere-se a uma vazão injetada no domínio. Mais adiante serão descritas as formulações finais para as equações a serem desenvolvidas, mas todas elas baseiam-se no enfraquecimento do termo de fluxo com o teorema da divergência e na adoção do método de Galerkin.

3.2 VOLUMES DE CONTROLE

A discretização do espaço em volumes de controle é uma alternativa ao uso de elementos finitos. As formulações que utilizam volumes de controle, como o método dos volumes finitos e o método dos elementos finitos com volume de controle, não utilizam métodos de ponderação de resíduos. São, portanto, intrinsecamente conservativos, de modo que a velocidade é contínua nas fronteiras entre volumes de controle, o que não acontece nas fronteiras entre elementos finitos.

Os volumes de controle são sempre definidos a partir de uma malha primária e possuem apenas um nó para computação dos resultados. Szymkiewicz (2013) comenta que há dois métodos para a definição dos volumes: transformando os próprios elementos da malha primária em volumes finitos (volumes centrados na célula), como mostrado na Figura 3.1a, ou delimitando fronteiras ao redor dos nós da malha primária (volumes centrados no vértice), conforme Figura 3.1b. As fronteiras entre os volumes de controle são chamadas faces.

A discretização centrada no vértice é uma forma mais natural de representar heterogeneidades, já que as faces não coincidem com fronteiras entre materiais, não contendo descontinuidades nas propriedades.

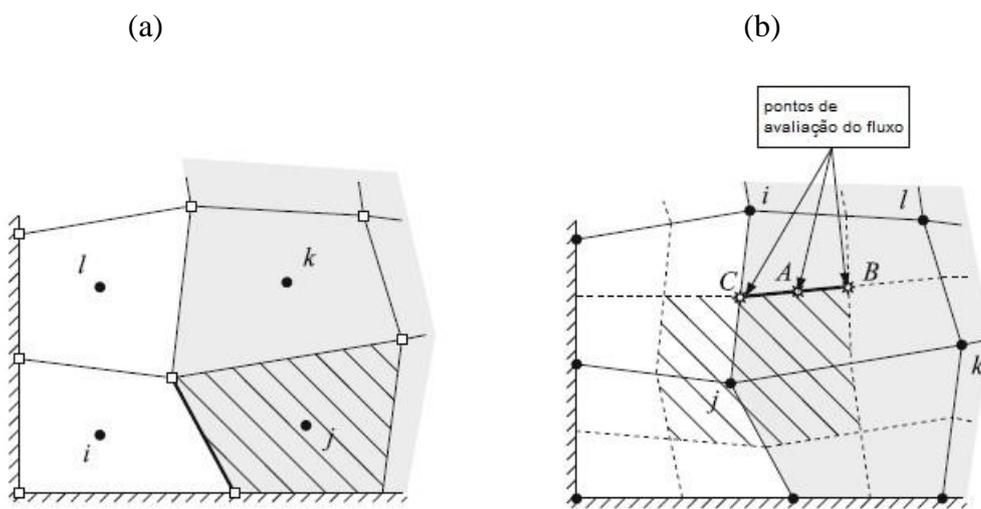


Figura 3.1: Métodos para definição de volumes de controle: centrados na célula (a) e centrados no vértice (b); e pontos de avaliação de fluxo nas faces. (Szymkiewicz, 2013)

O fluxo que atravessa um subdomínio é avaliado nas faces. No tipo de discretização exemplificado pela Figura 3.1.a, o fluxo é avaliado em função da diferença de pressão entre dois nós de volumes adjacentes. No caso dos volumes definidos de forma centrada no vértice, este fluxo é calculado na posição da face a partir de funções dos valores nos nós que circundam o volume de controle. Quando são utilizadas funções de forma, o método se chama método dos elementos finitos com volumes de controle. O local da face em que se avalia o fluxo pode variar, e possíveis posições estão ilustradas na Figura: no meio da face (A) ou nos vértices do volume (C e B).

Neste trabalho volumes de controle centrados no vértice serão utilizados de duas maneiras: para o cálculo de resíduos na conservação e posterior correção dos resultados com o método

Newton Raphson e, no caso do fluxo bifásico, para resolução da equação de saturação com uma técnica IMPES (*Implicit Pressure – Explicit Saturation*). As formulações serão apresentadas no Capítulo 4.

3.3 SOLUÇÃO TEMPORAL

Os métodos de discretização espacial apresentados geram equações que não possuem mais diferenciais considerando o domínio do espaço, mas ainda contam com derivadas das incógnitas em relação ao tempo. Assim, o domínio tempo (t) também deve ser discretizado em intervalos Δt . Os valores de certa função $u(x, y, z, t)$ são estimadas no domínio tempo através de funções de forma lineares.

Para que se chegue ao algoritmo de resolução do problema no domínio tempo, é também aplicado um método de ponderação de resíduos. Dependendo do fator de ponderação selecionado, podem-se obter esquemas de solução do tipo explícitos ou implícitos. A diferença entre tais métodos reside no ponto do intervalo de tempo em que são avaliados os termos de fluxo. As equações de conservação apresentadas possuem termos, como a permeabilidade, o fator-volume formação e a razão de solubilidade, que são descritas em função das variáveis (pressão e saturação). Como as variáveis mudam ao longo do tempo, o momento escolhido para sua avaliação modifica os resultados da solução.

Considera-se um intervalo de tempo Δt que se inicia no tempo t_0 . O uso de funções de forma lineares para interpolar uma variável ao longo tempo implica que a avaliação de um termo $F(u)$ no tempo $t_0 + \theta \Delta t$ é:

$$F(u^{t_0 + \theta \Delta t}) = F(\theta u^{t_0 + \Delta t} + (1 - \theta) u^{t_0}), 0 \leq \theta \leq 1 \quad (3.5)$$

Sendo u uma variável do problema e θ um parâmetro de ponderação no tempo.

Quando $\theta = 0$, tem-se uma formulação do tipo explícita, em que os termos são avaliados no começo do intervalo. Nesse caso, os novos valores para as variáveis são obtidos diretamente de seus valores no passo de tempo anterior. Este tipo de esquema elimina as não linearidades no tempo e tem acurácia de segunda ordem. No entanto, são estáveis apenas para um determinado limite de intervalo de tempo, de forma que a solução temporal pode requerer muitos passos e ser pouco eficiente.

Quando $\theta = 1$, a formulação é chamada totalmente implícita, e os termos são avaliados no fim do intervalo de tempo. Se $0 < \theta < 1$, tem-se um esquema parcialmente implícito, em que os termos são avaliados em função de uma média ponderada dos valores das variáveis no começo e no fim do intervalo. Nestes casos, o cálculo dos termos depende de valores desconhecidos, o que torna o problema não-linear. Apesar de ter resolução mais complexa e possuir acurácia de primeira ordem, métodos implícitos são incondicionalmente estáveis.

Blunt e Rubin (1992) sugerem a utilização de esquemas parcialmente implícitos para soluções de problemas com frentes de saturações, de forma a se obter um meio termo entre a maior acurácia dos métodos explícitos na representação das frentes, e a estabilidade incondicional dos esquemas implícitos. Zienkiewicz e Taylor (2000a) compara soluções com diferentes valores de θ com a solução analítica de um problema de primeira ordem. Os autores mostram que esquemas parcialmente implícitos se aproximam mais da solução exata que as outras formulações, especialmente para grandes intervalos de tempo.

De fato, a utilização de esquemas parcialmente implícitos é mais intuitiva, principalmente para intervalos de tempos maiores. Tomando como exemplo a avaliação da velocidade, a Figura 3.2 mostra sua suposta distribuição ao longo do tempo, e os efeitos de sua avaliação de forma totalmente implícita, explícita e parcialmente implícita. O volume exato passante em um intervalo seria dado pela integração desta curva no tempo. Na Figura 3.2a, a velocidade é aproximada de forma totalmente implícita, calculada a partir de valores de pressão e saturação ao fim do intervalo; na Figura 3.2b é ilustrada uma avaliação explícita, em que a velocidade é avaliada em função do valor das variáveis no começo do intervalo; e a figura 3.2c, por fim, mostra uma avaliação parcialmente implícita do fluxo, em que a velocidade é calculada a partir dos valores das variáveis em algum ponto intermediário do intervalo.

A adoção de uma velocidade para todo o intervalo, pela sua avaliação em um determinado ponto, obviamente gera erros de volume, indicados pelas áreas hachuradas em vermelho. Para intervalos pequenos, como não há grandes mudanças de velocidade, quaisquer tipos de aproximação podem gerar bons resultados. Para tempos maiores, no entanto, a avaliação da velocidade nos extremos do intervalo, como no caso dos esquemas explícitos e totalmente implícitos, pode resultar em uma estimativa insatisfatória do volume, enquanto métodos parcialmente implícitos reduzem este erro.

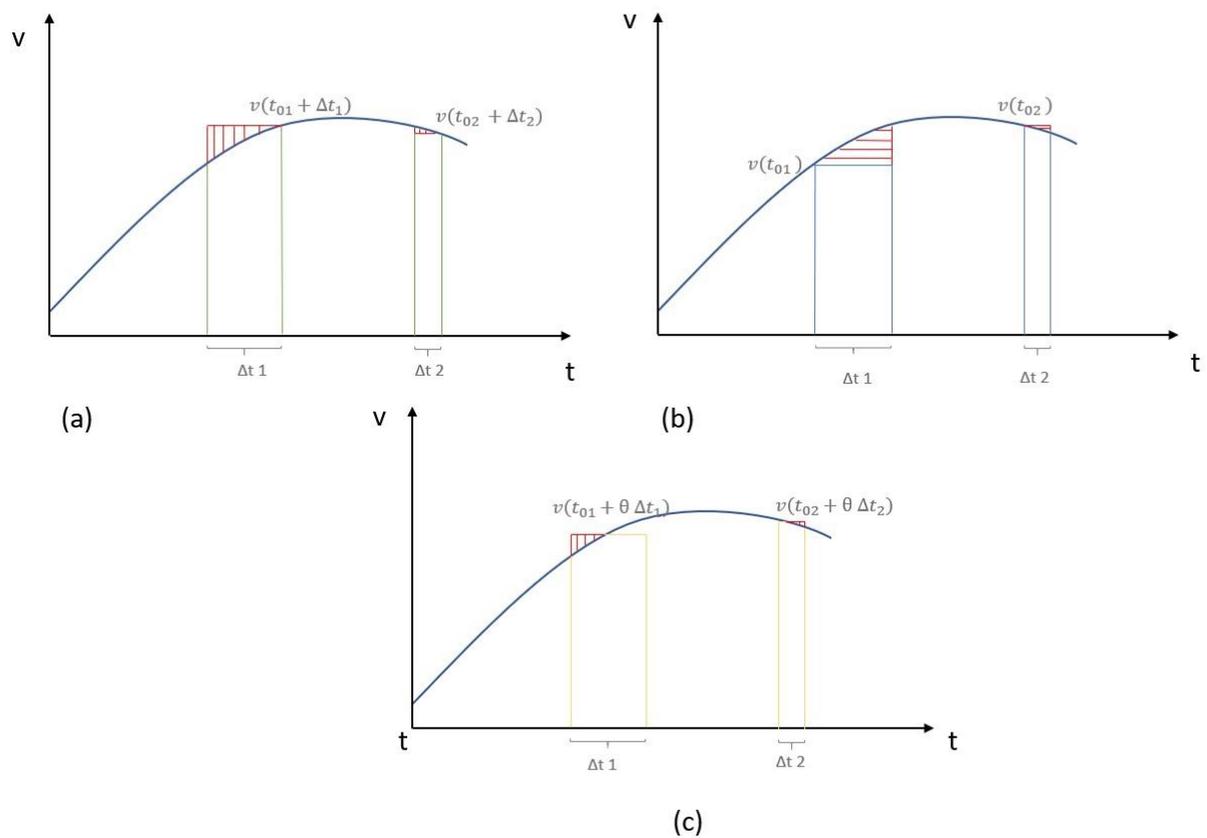


Figura 3.13: Avaliação da velocidade de forma implícita (a), explícita (b) e parcialmente implícita (c), e resíduos de volume correspondentes

3.4 ESQUEMAS DE SOLUÇÃO PARA PROBLEMAS DE FLUXO

Na resolução de problemas multifásicos ou multicomposicionais costuma-se empregar três tipos de esquemas de integração no tempo: formulações totalmente implícitas, implícitas-explícitas (IMEX) e sequenciais.

Esquemas totalmente implícitos são aqueles em que todas as variáveis são resolvidas simultaneamente, de forma implícita. Este tipo de formulação mantém o acoplamento entre as equações do sistema a ser resolvido, que é altamente não linear. O método requer, portanto, o uso de métodos iterativos como o de Newton-Raphson. Apesar de possuírem a vantagem de serem incondicionalmente estáveis, tais métodos podem ser extremamente custosos em termos computacionais quando há muitos graus de liberdade, já que envolvem a resolução de sistemas contendo matrizes de elevadas dimensões.

No caso de um fluxo bidimensional e do modelo black oil, por exemplo, as matrizes quadradas a serem invertidas possuem a ordem de grandeza de duas e três vezes o número de nós, simultaneamente. Sabe-se que a inversão é um procedimento cujo tempo de

computação é uma função cúbica das dimensões de matrizes. Farnstrom *et al* (1987) optaram por uma solução totalmente implícita do modelo black oil e buscaram maior eficiência computacional utilizando o método de Newton Raphson modificado, em que a matriz de derivadas não é atualizada a cada novo passo da iteração.

Os esquemas do tipo IMEX foram desenvolvidos como uma alternativa menos custosa em termos computacionais. Estas formulações eliminam não linearidades tratando-as de forma explícita, enquanto termos lineares são resolvidos de maneira implícita. O esquema de solução denominado IMPES (*Implicit Pressure – Explicit Saturation*) é uma técnica deste tipo, em que o sistema, para um fluxo bifásico, é manipulado da forma já apresentada, resultando em uma equação de pressão e uma equação de saturação resolvidas sequencialmente de forma implícita e explícita, respectivamente. A formulação dispensa o uso de métodos iterativos para tratamento das não linearidades, sendo que a convergência é atingida resolvendo-se as equações de forma cíclica e respeitando-se um intervalo de tempo máximo.

Este método reduz significativamente a quantidade de memória requerida e o tempo de processamento de um passo de tempo. Esta vantagem, porém, vem ao custo de o método ser estável apenas para pequenos intervalos de tempo, o que torna o método clássico vantajoso apenas para problemas com não linearidades moderadas e com até duas fases (Chen *et al*,2006). Critérios de estabilidade foram discutidos por Coats (2001) e novas versões de esquemas do tipo IMPES visando manter a estabilidade com maiores intervalos foram desenvolvidos em trabalhos como os de Kou e Sun (2004) e de Chen *et al* (2004).

No caso do modelo black oil, Chen *et al* (2006) apresenta uma formulação IMPES também contendo uma equação de pressão, resolvida de forma implícita, e uma equação de saturação de uma das fases, resolvida de forma explícita. A variável da terceira equação é obtida de forma explícita e depende do estado de saturação em que se encontra o ponto do reservatório em análise. No caso saturado, a terceira equação computa a saturação de uma segunda fase, enquanto no caso subsaturado, esta é uma equação de pressão de bolha. Os resultados obtidos pelos autores, no entanto, desencorajam o uso desta formulação para o modelo black oil, já que intervalos de tempo muito pequenos deveriam ser usados para eliminar oscilações.

Característica intermediárias entre os esquemas IMPES e as formulações totalmente implícitas são observadas nos chamados esquemas sequenciais. Nestes, o sistema é dividido em equações que são resolvidas sequencialmente, como no IMPES, mas de forma implícita. Assim, formulações sequenciais são mais eficientes, porém menos estáveis que soluções totalmente implícitas e menos eficientes, porém mais estáveis que os esquemas IMPES. Formulações sequenciais foram aplicadas com sucesso por Trangenstein e Bell (1989), Bergamaschi *et al* (1998) e Li *et al* (2003) na resolução do modelo black oil. Chen *et al* (2006) comparam o uso do esquema sequencial com o totalmente implícito na resolução do modelo black oil, mostrando que ambos apresentam resultados comparáveis, sendo que o primeiro toma um terço do tempo e metade da memória computacional do segundo.

3.5 O USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM PROBLEMAS DE FLUXO

O método dos elementos finitos teve pronta aceitação e rápido desenvolvimento de suas técnicas dentro da mecânica dos sólidos. No campo da mecânica dos fluidos, por outro lado, o método foi por muito tempo preterido em relação às formulações por diferenças finitas e suas derivações mais recentes, que utilizam volumes finitos (Zienkiewicz & Taylor, 2000b). Em grande parte, isso se deu pelo fato de a formulação tradicional do método não ser localmente conservativa, ou seja, não obedecer à conservação de massa ao nível dos elementos.

Além disso, a solução convencional de Galerkin resulta no mínimo erro apenas para problemas com matrizes simétricas, o que não é o caso para fluxos compressíveis, em que há termos de aceleração convectiva. Assim, tal método pode apresentar resultados oscilatórios para problemas de difusão-convecção, tão mais insatisfatórios quanto mais importantes são os termos de convecção (Zienkiewicz & Taylor, 2000b). Helmig e Huber (1996) demonstraram a boa adequação do Galerkin convencional a um problema bifásico essencialmente difusivo, assim como sua falta de acurácia para casos em que predominam efeitos capilares.

Apesar das desvantagens citadas, o método dos elementos finitos possui características muito atraentes para a resolução de problemas de fluxo, sendo a mais citada a flexibilidade na discretização do domínio. O método permite malhas totalmente não

estruturadas, ferramentas muito úteis para meios complexos, caracterizados por descontinuidades, como reservatórios de petróleo. Diante disso, surgiram diferentes esforços com o intuito de tornar o método dos elementos finitos competitivo na resolução de problemas de fluxo. Alguns estudos se concentraram no pós-processamento de resultados obtidos com o método convencional, com técnicas de correção que visam a conservação local de massa, dentre elas as formulações de Larson e Niklasson (2004) e Sun e Wheeler (2006), sendo que a primeira foi utilizada por Kees e Farthing (2007) na resolução de problemas estacionários e transientes.

Outra linha de estudos buscou o desenvolvimento de formulações não convencionais do método dos elementos finitos. Métodos do tipo Petrov-Galerkin foram sugeridos por Zienkiewicz *et al* (1976) com a premissa básica de se utilizar funções de ponderação diferentes das funções de forma. As funções de ponderação destes métodos valem-se da técnica de *upwind*. Ou seja, são definidas em função da direção e sentido da velocidade do fluxo, de forma a conferir maior peso aos valores das variáveis dos nós a montante em suas aproximações. Tais métodos foram eficazes em resolver problemas de oscilação e apresentar resultados mais realistas, mas não são sempre acurados, por ainda não serem localmente conservativos. Além disso, não são capazes de representar satisfatoriamente o fluxo ocorrendo em meios com heterogeneidades, o que os torna pouco atraentes para a simulação de reservatórios. Outra técnica de *upwind*, utilizada por Huber e Helmig (1999), denominada *full-upwind Galerkin*, é mais adequada para simulação de meios heterogêneos. Este método utiliza a função de Galerkin, mas realiza o *upwind* na permeabilidade, ou seja, avalia esta propriedade apenas nos nós a montante do ponto analisado.

Ainda no contexto de novas formulações para elementos finitos, podem ser citados o método Galerkin descontínuo e o método dos elementos finitos misto. Ambos são métodos localmente conservativos que ganharam grande popularidade recentemente na área de simulação de fluxos multifásicos e multicomposicionais. O método Galerkin descontínuo é uma formulação estável e de alta ordem de precisão, caracterizada por funções de ponderação descontínuas nas interfaces entre os elementos adjacentes. Foi aplicado na resolução de fluxos compressíveis por Bassi e Rebay (1996) e Hatmann e Houston (2002) e na simulação de fluxo multicomposicional por Hoteit e Firoozabadi (2005). O método dos elementos finitos mistos, por sua vez, é particular por possuir como variáveis primárias a pressão (ou um escalar equivalente) e o vetor de velocidades, que

são aproximadas separadamente e simultaneamente em espaços diferentes por uma formulação intrinsecamente conservativa a nível local. Aarnes (2004) e Krogstad *et al* (2009) utilizaram o método para simulação multiescala de um reservatório de petróleo.

As vantagens e aplicabilidades distintas do método dos elementos finitos e dos volumes finitos levaram também ao desenvolvimento de técnicas que incluem características de ambas as formulações. O chamado método dos elementos finitos com volumes de controle, por exemplo, possui a flexibilidade do método dos elementos finitos, por utilizar suas funções de forma para aproximações no espaço. Mas também preserva o atributo conservativo do método dos volumes finitos, ao resolver as equações de conservação dentro de volumes de controle que são delimitados ao redor dos nós de uma malha primária. O método foi utilizado por Fung e Hiebert (1992), Chen *et al* (2006) e Baliga e Patankar (2012) em problemas bifásicos com injeção de água para estímulo de produção de óleo e por Ghoreishian *et al* (2013) na solução do modelo black oil.

Muitos estudos, ainda, utilizaram combinações dos dois métodos para resoluções de formulações do tipo IMPES (*Implicit Pressure – Explicit Saturation*) e sequenciais. A flexibilidade geométrica do FEM e sua superioridade (em termos de acurácia) na resolução de equações de natureza parabólica são associadas à formulação conservativa do FVM. Assim, a equação de pressão, essencialmente parabólica, é solucionada, com uma formulação implícita, pelo método dos elementos finitos. Os resultados para as pressões nodais e de velocidades nos elementos são introduzidos na equação hiperbólica de conservação de massa, em que os valores de saturação são obtidos de forma explícita através do método dos volumes finitos. Geiger *et al* (2002) utilizaram o método para a resolução de problemas multifásicos em domínios heterogêneos.

O método combinado (FEM- FEV) ganhou popularidade, recentemente, com o uso do método dos elementos finitos misto para resolução da equação de pressão, tendo em vista sua formulação desenvolvida para computar velocidades de forma acurada e sua eficiência computacional. Durlofsky (1993) apresentou uma formulação deste método para fluxos bifásicos e compressíveis e comprovou sua boa adequação a meios complexos. Huber e Helmig (1999), utilizaram a combinação para resolução de problemas multifásicos, dentre eles a solução unidimensional analítica de Buckley-Leverett e um problema bidimensional de injeção de água em um meio contendo, inicialmente, óleo. Os resultados do método combinado, utilizado em uma solução do tipo IMPES, foram comparados com os resultados de uma solução clássica pelo método

dos elementos finitos, com *upwind* nas transmissibilidades. Foi demonstrada a melhor acurácia dos métodos combinados na representação de frentes de saturação e na simulação de meios heterogêneos. Bergamaschi *et al* (1998) utilizaram a combinação na resolução sequencial do modelo black oil, validando-os com os resultados obtidos por Transgestein e Bell (1989). O método dos elementos finitos misto vem sendo escolhido para a solução da equação de pressão, mas Geiger *et al* (2004) mostraram que, o método dos elementos finitos convencional também fornece resultados competitivos para casos de fluxo bifásico, sendo pouco eficiente apenas em casos mais complexos como fluxos tridimensionais.

Mudanças e adaptações nas formulações convencionais estabeleceram o método dos elementos finitos como uma ferramenta eficiente e acurada na área de simulação de reservatórios. Atualmente, grande parte dos estudos se empenha em tornar os métodos já consagrados cada vez mais computacionalmente eficientes e representativos ou em adaptá-los à problemas multiescala.

CAPÍTULO 4: SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES

Diferentes técnicas foram selecionadas para a solução numérica dos problemas de fluxo apresentados. A solução da Equação de Richards foi solucionada de forma implícita com o método dos elementos finitos convencional, com cálculo de resíduos na conservação através de volumes de controle e tratamento das não linearidade com o método de Newton. O fluxo bifásico foi resolvido com um esquema do tipo IMPES, em que a equação de pressão foi solucionada com o método dos elementos finitos e a equação de saturação foi solucionada com o método dos elementos finitos com volume de controle. O modelo *black oil* foi solucionado com utilização de uma formulação totalmente implícita pelo método do pseudogás.

Neste capítulo será primeiramente apresentado método de volumes de controle utilizado para avaliação do resíduo na conservação, no caso do modelo *black oil* e do fluxo não saturado, e para resolução da equação de saturação, no caso do fluxo bifásico. Em seguida, serão descritas as formulações das soluções numéricas. Por fim, avaliações dos erros e critérios de parada serão comentados.

4.1 AVALIAÇÃO DO FLUXO COM VOLUMES DE CONTROLE

Já foi mencionado anteriormente que a utilização de volumes de controle resulta em uma formulação intrinsecamente conservativa. Tal característica foi aproveitada de duas formas neste trabalho: avaliar o erro na conservação resultante das análises pelo método dos elementos finitos e utilizar o método dos elementos finitos com volumes de controle para resolução da equação de saturação 2.12.

4.1.1 Definição dos volumes de controle

Os volumes de controle são definidos a partir dos elementos da malha utilizada para a solução do método dos elementos finitos. São delimitados por faces que atravessam os elementos. No presente trabalho, as faces são segmentos que partem do centroide dos elementos ao ponto médio de seus lados. O volume de controle de um nó é delimitado pelas faces dos elementos aos quais ele pertence. A Figura 4.1 ilustra a malha primária, em preto, e um volume de controle delimitado por oito faces (linhas azuis e tracejadas), referente ao nó central. Um determinado nó pode conter até oito faces ao seu redor,

quando pertencente simultaneamente a quatro elementos. O volume de controle definido pode ser formado por até quatro quadrantes como a área hachurada na Figura. O vetor em vermelho representa o vetor normal à face, que deve ser definido para cada uma das faces que delimitam o volume de controle.

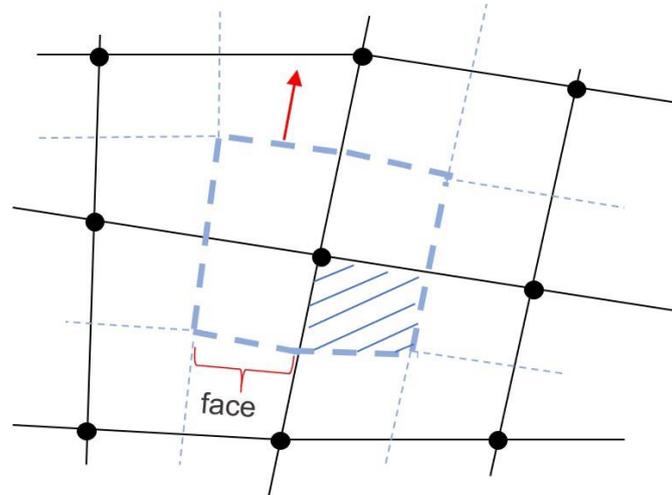


Figura 4.1: Definição dos volumes de controle

4.1.2 Avaliação do fluxo

No caso do fluxo não saturado e do bifásico, a conservação é avaliada em termos de massa. A quantidade armazenada de uma fase α é feita pela avaliação dos termos de armazenamento nos pontos de Gauss pertencentes a cada um dos quadrantes que formam o volume de controle circundante a um nó. Assim:

$$\Delta M_{(i)\alpha} = \sum_{k=1}^4 \rho_{\alpha} V_{qk} (\varphi_{t+1} S_{\alpha^{t+1},k} \Delta t - \varphi_t S_{\alpha^t,k}) \quad (4.1)$$

Δt

Sendo $\Delta M_{\alpha i}$ a variação de massa da fase α para o volume de controle do nó i , Δt o intervalo de tempo, φ a porosidade, ρ_{α} a massa específica da fase α , V_{qk} o volume do quadrante k e $S_{\alpha^{t+1},k}$ e $S_{\alpha^t,k}$ referem-se ao grau de saturação da fase α , avaliado no ponto de Gauss do quadrante, nos tempos t e $t+1$, respectivamente.

No caso da resolução da equação de saturação no fluxo bifásico, a saturação foi considerada constante dentro do volume de controle, assumindo seu valor nodal para todo o subdomínio.

No caso do modelo black oil, assim como nas Equações de conservação 2.36 a 2.38, a conservação dos componentes é avaliada em termos de volume nas condições padrão, da seguinte forma:

$$\Delta \sum_{k=1}^n \Delta V_{tG} = \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{q_k}{B_{g,k}^{t+1}} - \frac{q_k}{B_{g,k}^t} \right) + \left(\frac{q_k}{B_{o,k}^{t+1}} - \frac{q_k}{B_{o,k}^t} \right) \right] \Delta t \quad (4.2)$$

$$\sum_{k=1}^n \Delta V_{tW} = \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{q_k}{B_{w,k}^{t+1}} - \frac{q_k}{B_{w,k}^t} \right) + \left(\frac{q_k}{B_{o,k}^{t+1}} - \frac{q_k}{B_{o,k}^t} \right) \right] \Delta t \quad (4.3)$$

Onde ΔV_C , $C = G, O, W$, é a variação de volume, medido nas condições-padrão dos componentes gás, óleo e água; $B_{\alpha,pg}$ e $Rs_{\alpha,pg}^t$, $\alpha = g, o, w$, são o fator volume-formação das fases e a razão de solubilidade do componente gás no óleo, obtidos em função da pressão no ponto de Gauss.

Esta avaliação do termo de armazenamento para o modelo black oil considera que o ponto avaliado não troca de estado de saturação ao longo do intervalo de tempo. Se o reservatório se encontra subsaturado, a saturação de gás é desprezada. A consideração de trocas dentro de um intervalo significaria quatro casos distintos para a avaliação do termo de armazenamento:

- O nó avaliado permanece subsaturado por todo o intervalo;
- O nó avaliado permanece saturado por todo o intervalo;
- O nó avaliado começa o intervalo subsaturado, mas há aparecimento de gás ao longo do tempo; e
- O nó avaliado começa o intervalo saturado, mas há desaparecimento do gás ao longo do tempo.

A descrição do termo de armazenamento para cada um destes quatro casos foi feita por Farnstrom *et al* (1987) em sua simulação do modelo *black oil* com troca de variáveis.

O cálculo dos termos de fluxo requer a escolha de um local para avaliação do gradiente de pressão e da permeabilidade. Foi escolhido o ponto médio das faces. Para os módulos não saturado e bifásico, o fluxo $Q_{F\alpha}$, atravessando uma face F pode ser aproximada da seguinte maneira:

$$Q_{F\alpha} = \int_F \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{n}_v^j = -|L_F| \rho_\alpha k_s \lambda_\alpha^f ((\nabla p)^f - \rho_\alpha \mathbf{g}) \mathbf{n}_v^j \quad (4.4)$$

Onde \mathbf{v}_α é o vetor velocidade da fase α , substituído na equação pela Lei de Darcy; \mathbf{n}_v^j é o vetor normal à face; L_F é o comprimento da face; λ_α^f é o tensor de mobilidade da fase α , avaliado no ponto médio da face; $(\nabla p)^f$ é o vetor gradiente de pressões, avaliado no ponto médio da face; \mathbf{g} é o vetor gravidade.

Para o modelo black oil, o fluxo de um componente C atravessando a face (Q_{Fc} , $C = G, O, W$) é:

$$Q_{FG} = \int_F \left(\frac{v_g}{B_g} + \frac{R_s v_o}{B_o} \right) \mathbf{n}_v^j = - \int_F \frac{B_o}{|L_F|} k_s \left[\frac{g}{B \lambda_{gf} \rho_g} ((\nabla p)^f - \rho_g \mathbf{g}) + \frac{s_o}{B \lambda_{of} \rho_o} ((\nabla p)^f - \rho_o \mathbf{g}) \right] \mathbf{n}_v^j \quad (4.5)$$

$$Q_{FO} = \int_F \frac{v_o}{B_o} \mathbf{n}_v^j = - \int_F \frac{B_o}{|L_F|} k_s B^{\lambda_{of}} ((\nabla p)^f - \rho_o \mathbf{g}) \mathbf{n}_v^j \quad (4.6)$$

$$Q_{FW} = \int_F \frac{v_w}{B_w} \mathbf{n}_v^j = - \int_F \frac{\lambda_{wf}}{|L_F| k_s B_w} ((\nabla p)^f - \rho_w \mathbf{g}) \mathbf{n}_v^j \quad (4.7)$$

onde B_α^f e R_s^f são o fator-volume formação das fases e a razão de solubilidade, avaliados a partir da pressão no ponto médio da face.

O fluxo total que atravessa um volume de controle é a soma do fluxo que atravessa todas as suas faces. Como as variáveis mudam ao longo do tempo, deve-se selecionar em que ponto do intervalo serão avaliados os termos das equações 4.4 a 4.7, como a mobilidade e o gradiente de pressão. Considera-se que as incógnitas variam linearmente ao longo de um intervalo entre os passos t e $t+I$, que tem início no tempo t_0 e termina no tempo $t_0 +$

Δt . A avaliação do fluxo que atravessa um volume de controle $V_c(i)$ do nó $i (Q_i)$, em um ponto $t_0 + \theta \Delta t$ deste intervalo implica que, conforme a Equação 3.5:

$$Q_i = Q_{i t_0 + \theta \Delta t} = \sum_{F \in V_c(i)} \theta Q_{F t+1} + (1 - \theta) Q_{F t} \quad (4.8)$$

Como já mencionado, quando $\theta = 0$, tem-se um esquema explícito; se $\theta = 1$ o esquema é do tipo totalmente implícito e o fluxo é avaliado ao final do intervalo. Para valores intermediários, tem-se esquemas parcialmente implícitos, sendo que a vazão é avaliada como uma média entre seus valores no começo e no final do intervalo de tempo. No código desenvolvido, é possível que o usuário escolha o valor de θ utilizado para o cálculo de resíduos.

No problema de fluxo bifásico, a saturação é obtida considerando-se a seguinte relação de conservação:

$$\{\Delta M_\alpha\} + \Delta t \{Q_\alpha\} - \{q_\alpha\} = 0 \quad (4.9)$$

No caso da resolução do fluxo não saturado e do modelo black oil, os termos de fluxo e de armazenamento no volume de controle são utilizados para a obtenção de um vetor de resíduos, da seguinte maneira:

$$\{\Delta M_\alpha\} + \Delta t \{Q_\alpha\} - \{q_\alpha\} = \{R_\alpha\} \quad (4.10)$$

onde

$\{\Delta M_\alpha\}$: vetor de variação de massa da fase α ; (m x 1); [M]

$\{Q_\alpha\}$: vetor de fluxo nas faces da fase α pelos volumes de controle; (m x 1); [M][T]⁻¹

$\{R_\alpha\}$: resíduo na conservação de massa para a fase α ; (m x 1); [M]

$\{q_\alpha\}$: vetor de vazões injetadas da fase α ; [M][T]⁻¹

E, para o modelo black oil:

$$\{\Delta V_C\} + \Delta t \{Q_C\} - \{q_C\} = \{R_C\} \quad (4.11)$$

Sendo

$\{\Delta V_C\}$: variação de volume nas condições-padrão do componente C; (m x 1); [L]³

$\{Q_C\}$: vetor de fluxo do componente C pelos volumes de controle; (m x 1); [L]³[T]⁻¹

$\{R_c\}$: resíduo na conservação de volumes-padrão para o componente C; (m x 1); [L]³

$\{q_c\}$: vetor de vazões injetadas do componente C; [L]³[T]⁻¹

4.2 SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção serão apresentadas as formulações numéricas utilizadas para a solução espacial da Equação de Richards (Equação 2.15), de fluxo bifásico (Equações 2.12 e 2.14) e do modelo black oil (Equações 2.36 a 2.28).

A solução temporal de uma variável u foi feita com a seguinte aproximação linear de sua derivada temporal, \dot{u} :

$$\dot{u} = \frac{u^{t+1} - u^t}{\Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad (4.12)$$

Sendo Δt o intervalo de tempo, e u^t, u^{t+1} são os valores assumidos pela variável u nos passos de tempo t e $t + 1$, respectivamente, separados por um intervalo Δt .

É necessário ainda mencionar a linguagem utilizada para as formulações que serão apresentadas. Frequentemente serão utilizados os subscritos α e C nas variáveis, matrizes e algumas propriedades. O subscrito α sempre se referirá às fases existentes no problema, e é utilizado como uma generalização para as letras g, o e w , em referência às fases gás, óleo e água. O subscrito C refere-se aos componentes, que são representados pelas letras G, O e W , em referência aos componentes gás, óleo e água.

4.4.1 Equação de Richards

Em sua resolução pelo método dos elementos finitos, a Equação 2.15 torna-se um problema contendo uma quantidade m de graus de liberdade igual a quantidade de nós no domínio. Para a solução totalmente implícita pelo método dos elementos finitos da equação de Richards chega-se à seguinte formulação para obtenção das pressões em um novo passo de tempo, $t + 1$:

$$[K_w]_{t+1}\{p_w\}_{t+1} + [M]_{t+1}\{\dot{p}_w\} = \{q_w\}_{t+1} + \{G_w\}_{t+1} \quad (4.13)$$

sendo

$$[K_w] = \int_{\Omega} \rho_w \lambda_w [B]^T [k_s] [B] d\Omega: \text{matriz de fluxo da água; (m x m); [M] [L]^2 [T]^{-1} [F]^{-1}}$$

$[B]$: matriz-gradiente das funções de forma; $(2 \times m)$ para um problema 2D; $[L]^{-1}$

ρ_w : massa específica da água; $[M][L]^{-3}$

$[k_s]$: matriz de permeabilidade intrínseca do meio; $(m \times m)$; $[L]^2$

$\lambda_w = [k_{rw}/\mu_w]$ mobilidade da água; $(m \times m)$; $[L]^2 [T]^{-1}[F]^{-1}$

k_{rw} : permeabilidade relativa da água; adimensional μ_w :

viscosidade da água; $[L]^2 [T]^{-1}[F]^{-1}$

$\{p_w\}$: vetor de pressões nodais água; $m \times 1$; $[F] [L]^{-2}$

$[M] = \int_{\Omega} \rho_w \theta_{\partial p} \theta_w \{N\} \{N\}^T d\Omega$: matriz de massa; $(m \times m)$; $[M] [L]^2 [F]^{-1}$

$\theta_w = \phi S_w$: teor de umidade volumétrica da água; adimensional

ϕ = porosidade do meio; adimensional

S_w = grau de saturação da água; adimensional

$\{N\}$ = vetor de funções de forma

$\{q_w\}$: vetor de vazões de água nodais impostas; $(m \times 1)$; $[M] [T]^{-1}$

$\{G_w\} = \int_{\Omega} \rho_w^2 k_s [B]^T [\lambda_w] \{g\} d\Omega$: vetor gravidade da água; $(m \times 1)$; $[M] [T]^{-1}$

$\{g\}$: vetor gravidade; (2×1) ; $[L] [T]^{-2}$

Substituindo a derivada temporal da Equação acima pela aproximação na Equação 4.12, e multiplicando-a por Δt , chega-se à uma formulação final em que a variável é o incremento de pressão:

$$[\Delta t[K]^{t+1} + [M_w]^{t+1}]\{\Delta p\} = \Delta t \{q_w\}^{t+1} + \Delta t \{G_w\}^{t+1} - \Delta t[K]^{t+1}\{p_w\}^t \quad (4.14)$$

O vetor de vazões impostas q_w que aparecerá em todas as formulações corresponde às condições de contorno de Neumann da Equação 3.4.

4.4.2 Fluxo bifásico

O uso da combinação do método dos elementos finitos com métodos de volume de controle é uma técnica consagrada na área de fluxos bifásicos. Assim, será utilizada neste trabalho. A equação de pressão (Equação 2.14) foi resolvida com o Galerkin

convencional, tendo a seguinte formulação para a resolução da pressão em um novo tempo, $t+1$ e uma nova iteração, $n+1$.

$$[K_w + K_o +]_{t+1} \{p_w\}_{t+1, n+1} \pm [K_o]_{t+1} \{p_c\}_{t+1, n} + [M_p]_{t+1} \{p_w\} = \{q_t\}_{t+1} + \{G_w\}^{t+1} + \{G_o\}^{t+1} \quad (4.15) \text{ onde:}$$

$$[K_\alpha] = \int_\Omega \rho_\alpha \lambda_\alpha [B]^T [k_s] [B] d\Omega: \text{matriz de fluxo da fase } \alpha; (m \times m); [M] [L]^2 [T]^{-1} [F]^{-1}$$

$\alpha = w, o$: subscritos das fases água e óleo.

ρ_α : massa específica da fase α ; $[M][L]^{-3}$

$[k_s]$: matriz de permeabilidades intrínsecas do meio; $(m \times m)$; $[L]^2$

$\lambda_\alpha = [k_{r\alpha}/\mu_\alpha]$ mobilidade da fase α ; $(m \times m)$; $[L]^2 [T]^{-1} [F]^{-1}$

$k_{r\alpha}$: permeabilidade relativa da fase α ; adimensional μ_α :

viscosidade da da fase α ; $[L]^2 [T]^{-1} [F]^{-1}$

$[M] = \int_\Omega (S_w + S_o) \frac{\partial \phi}{\partial p} \{N\} \{N\}^T d\Omega$: matriz de massa contendo compressibilidade do meio; $(m \times m)$; $[M] [L]^2 [F]^{-1}$

ϕ = porosidade do meio; adimensional

$\frac{\partial \phi}{\partial p}$: compressibilidade da rocha

S_α = grau de saturação da fase α ; adimensional

$\{N\}$ = vetor de funções de forma

$$\{G_\alpha\} = \int_\Omega \rho_\alpha^2 k_s [B]^T [\lambda_\alpha] \{g\} d\Omega : \text{vetor gravidade da fase } \alpha; (m \times 1); [M] [T]^{-1}$$

$$\{q_t\}^{t+1} = \{q_w\}^{t+1} + \{q_o\}^{t+1}; \text{vetor de fluxo total; } (m \times 1); [M] [T]^{-1}$$

$$\{q_\alpha\}: \alpha = w, o : \text{vetor de vazões de água nodais impostas; } (m \times 1); [M] [T]^{-1}$$

$$\{p_c\} = \text{vetor de pressão capilar; } m \times 1$$

Nestas equações, o vetor de pressões do óleo é descrito em função da pressão da água e da pressão capilar: $\{p_o\} = \{p_w\} \pm \{p_c\}$. Se for o fluido molhante, a pressão do óleo é menor que a da água; caso contrário, a pressão capilar deve ser subtraída da pressão da água. Nota-se que o valor de pressão capilar introduzido na equação de pressão é aquele

correspondente à saturação da iteração anterior. Substituindo a derivada temporal da Equação acima pela aproximação na Equação 4.12, e multiplicando-a por Δt , chega-se a

$$[\Delta t K_w + \Delta t K_o + M_p] \{p_w\}^{t+1} = \pm [K_o]_{t+1} \{p_c\}_{t+1,n} + \{q_t\}_{t+1} + \{G_w\}_{t+1} + \{G_o\}^{t+1} - [\Delta t K_w + \Delta t K_o]^{t+1} \{p_w\}^t \quad (4.16)$$

Os valores obtidos para as pressões nos nós são utilizados para interpolar o valor dos gradientes de pressão no ponto central das faces dos volumes de controle, com uso das funções de forma. A velocidade pode ser avaliada utilizando-se a pressão em um ponto $t + \theta \Delta t$ do intervalo de tempo, sendo $0 < \theta \leq 1$. Assim, o fluxo de óleo em uma face F pode ser obtido por:

$$Q_{Fo} = \int_F \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{n}_{vj} = -|LF| k_s \lambda_{of,n} ((\nabla p_{ot} + \theta \Delta t)_{f,n+1} - \rho_o \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}_{vj} \quad (4.17) \text{ sendo}$$

$p^{t+\theta \Delta t} = \theta p^{t+1} + (1 - \theta) p^t$: pressão de óleo avaliada no tempo $t + \theta \Delta t$ Assumindo uma saturação constante ao longo de todo o volume de controle, equivalente à saturação no nó i , seu incremento pode ser calculado através da conservação de massa do óleo (Equação 2.12) :

$$\phi V_i S_{o,it+1,n+1} = \phi V_i S_{o,it} + \sum_{F \in V_i} \Delta t Q_{Fot+\theta \Delta t,n+1} + \Delta t q_{o,i} \quad (4.18)$$

A resolução é feita nó a nó, de forma explícita, e os valores obtidos para a saturação são utilizados para avaliação das permeabilidades e da pressão capilar na equação de pressão para a próxima iteração.

4.4.3 Modelo black oil

Na simulação do modelo *black oil*, foram desprezados efeitos de pressão capilar, de forma que a pressão em todos os fluidos é a mesma. Foi utilizada a técnica do pseudogás, em que as variáveis são as mesmas para o reservatório no estado saturado e subsaturado: a pressão (p), saturação de óleo (S_o) e saturação de água (S_w).

No modelo black oil, as derivadas temporais presentes nas equações 3.36, 3.37 e 3.38 para os componentes gás, óleo e água podem ser estendidas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S^\alpha B^{\alpha-1}) = \phi B^{-1} \frac{\partial}{\partial t} S^\alpha + \phi S^\alpha \frac{\partial}{\partial t} B^{\alpha-1} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi S^o \frac{\partial}{\partial t} R^s B^{o-1}) = \varphi R B^{-1} \frac{\partial}{\partial t} S^\alpha + \varphi S_o R_s \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial t} B^{o-1} + \varphi S_o B^{o-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial t} R^s \frac{\partial}{\partial t} p \quad (4.20)$$

Sendo $\alpha = g, o, w$ os subscritos para as fases gás, óleo e água, respectivamente, e B_o e R_s são o fator volume formação da fase α e a razão de solubilidade do gás no óleo.

Assim, percebe-se que haverá na formulação derivadas temporais tanto das saturações das fases como da pressão, e que serão necessárias as derivadas do fator volume-formação e da solubilidade em relação à pressão. O modelo black oil é um problema onde o número m de graus de liberdade é igual ao triplo do número de nós. Escrevendo as soluções pelo Galerkin convencional em termos de saturação de água, de óleo e de pressão, tem-se, para as equações de conservação do gás, do óleo e da água:

$$[K_{Gg}]^{t+1} \{p\}^{t+1} + [K_{Go}]^{t+1} \{p\}^{t+1} - [M_g] \{S_w\} + [MP_g] \{p\} + [M_{Go}] \{S_o\} = \{q_g / \rho_{Gs}\} + \{G_g\} \quad (4.21)$$

$$[K_{Oo}]^{t+1} \{p\}^{t+1} + [MP_o] \{p\} + [M_o] \{S_o\} = \{q_o / \rho_{Os}\} + \{G_o\} \quad (4.22)$$

$$[K_{Ww}]^{t+1} \{p\}^{t+1} + [MP_w] \{p\} + [M_w] \{S_w\} = \{q_w / \rho_{Ws}\} + \{G_w\} \quad (4.23)$$

Onde

B_α : fator volume formação da fase α

R_s : razão de solubilidade do gás no óleo

$[K_{Gg}] = \int_\Omega B_g^{-1} \lambda_g [B]^T [k_s] [B] d\Omega$: matriz de fluxo do componente gás na fase gás; (m x m); $[L]^5 [T]^{-1} [F]^{-1}$

$[K_{Oo}] = \int_\Omega B_o^{-1} \lambda_o [B]^T [k_s] [B] d\Omega$: matriz de fluxo do componente óleo na fase óleo; (m x m); $[L]^5 [T]^{-1} [F]^{-1}$

$[K_w] = \int_\Omega B_w^{-1} \lambda_w [B]^T [k_s] [B] d\Omega$: matriz de fluxo da água; (m x m); $[L]^5 [T]^{-1} [F]^{-1}$

$[K_{Go}] = \int_{\Omega} R_s B_o^{-1} \lambda_o [B]^T [k_s] [B] d\Omega$: matriz de fluxo do componente gás na fase óleo (gás dissolvido); (m x m); $[L]^5 [T]^{-1} [F]^{-1}$

$[M_{\alpha}] = \int_{\Omega} \varphi B_{\alpha}^{-1} \{N\} \{N\}^T d\Omega$, $\alpha = w, o, g$: matriz de massa para a fase α ; (m x m); $[L]^3$

$[M_{Go}] = \int_{\Omega} \varphi R_s B_o^{-1} \{N\} \{N\}^T d\Omega - [M_g]$: matriz de massa do componente gás na fase óleo; (m x m); $[L]^3$

$[MP_G] = \int_{\Omega} [\varphi S_o (R_s O \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial p B_o^{-1}} + B_o \frac{\partial \phi}{\partial p R_s}) - \varphi (S_w + S_o) \frac{\partial \phi}{\partial p B_g^{-1}} + (R_s B_o^{-1} S_o +$

$B_g^{-1} (1 - S_w - S_o)) \frac{\partial \phi}{\partial p}] \{N\} \{N\}^T d\Omega$; (m x m); $[L]^5 [F]^{-1}$

$[MP_O] = \int_{\Omega} (\varphi S_o \frac{\partial \phi}{\partial p B_o^{-1}} + B_o^{-1} S_o \frac{\partial \phi}{\partial p}) \{N\} \{N\}^T d\Omega$; (m x m); $[L]^5 [F]^{-1}$

$[MP_w] = \int_{\Omega} (S_w \frac{\partial \phi}{\partial p} - B_w^{-1} + B^{-1} S_w \frac{\partial \phi}{\partial p}) \{N\} \{N\}^T d\Omega$;
(m x m); $[L]^5 [F]^{-1}$

ρ_{Cs} : massa específica do componente C nas condições-padrão; $C = G, O, W$; $[M] [L]^{-3}$
 $\{q_C\}$: vetor de fluxo imposto do componente C ; $C = G, O, W$; (m x 1); $[M] [T]^{-1}$

$\{G_o\} = \int_{\Omega} \rho_k B_k^{-1} k_s [B]^T [\lambda_k] \{g\} d\Omega$: vetor de gravidade do componente óleo; (m x 1);
 $[M] [T]^{-1}$

$\{G_w\} = \int_{\Omega} \rho_k B_k^{-1} k_s [B]^T [\lambda_k] \{g\} d\Omega$: vetor de gravidade da componente água; (m x 1);
 $[M] [T]^{-1}$

$\{G_g\} = \int_{\Omega} (\rho_g B_g^{-1} + \rho_o B_o^{-1} R_s) k_s [B]^T [\lambda_k] \{g\} d\Omega$: matriz de gravidade do componente gás; (m x 1); $[M] [T]^{-1}$

ρ_{α} : massa específica da fase $\alpha = g, o, w$ nas condições de temperatura e pressão do reservatório; $[M] [L]^{-3}$

Manipulando as equações com o intuito de descrever o sistema em função dos incrementos das variáveis tem-se o seguinte sistema de três equações:

$$\begin{bmatrix} -[M_G] & [M_{Go}][KM_G] & \Delta S_w & \{B_G\} \\ [0 & [M_O] & [KM_O]] & \{\Delta S_o\} \\ [M_W] & 0 & [KM_W] & \Delta p & \{B_W\} \end{bmatrix} = \{\{B_O\}\} \quad (4.24)$$

Sendo que

$$[KM_G] = \Delta t [K_{Gg}] + \Delta t [K_{Go}] + [MP_G]; (m \times m); [L]^5 [F]^{-1}$$

$$[KM_O] = \Delta t [K_{Oo}] + [MP_O]; (m \times m); [L]^5 [F]^{-1}$$

$$[KM_W] = \Delta t [K_{Ww}] + [MP_W]; (m \times m); [L]^5 [F]^{-1}$$

$$\{B_G\} = \{q_G/\rho_{GS}\} + \{G_G\} - \Delta t [K_{Gg}] \{p\}^t - \Delta t [K_{Go}] \{p\}^t; (m \times 1); [L]^3 [T]^{-1}$$

$$\{B_O\} = \{q_O/\rho_{Os}\} + \{G_O\} - \Delta t [K_{Oo}]; (m \times 1); [L]^3 [T]^{-1}$$

$$\{B_W\} = \{q_w/\rho_{ws}\} + \{G_w\} - \Delta t [K_w]; (m \times 1); [L]^3 [T]^{-1}$$

ρ_{cs} : massa específica do componente nas condições-padrão. [M] [L]⁻³

4.5 ASPECTOS SOBRE A NÃO-LINEARIDADE DOS PROBLEMAS

Observa-se que as formulações apresentadas acima possuem matrizes que são funções dos valores das variáveis em um novo passo de tempo $t+1$. Além disso, na solução espacial existe uma interdependência dos valores das variáveis em nós conectados em um mesmo elemento. Por este motivo os problemas são não-lineares no tempo e no espaço.

Todas as formulações apresentadas acima podem ser interpretadas como a solução de sistemas lineares do tipo $[A]^{t+1}\{u\} = \{b\}^{t+1}$, em que A é uma matriz $m \times m$ contendo as matrizes de massa e de fluxo, u é um vetor de variáveis $m \times 1$, b é um vetor $m \times 1$ de volumes, e m é o número de graus de liberdade. A avaliação de $[A]$ no novo passo de tempo $t+1$ não é possível porque estes são justamente os valores desconhecidos que devem ser obtidos.

Assim, esta matriz é calculada a partir dos valores das variáveis no passo de tempo anterior, que são conhecidos. Esta estratégia acarreta em erros que devem ser corrigidos. No caso do IMPES, a conservação é sempre obedecida, e os erros resultantes da avaliação da saturação no intervalo de tempo anterior são corrigidos pela resolução das duas

equações de forma sequencial. Assim, a não linearidade é tratada reintroduzindo os novos valores obtidos de uma equação na outra, reavaliando $[A]$ até que seja atingido um determinado grau de convergência dos resultados.

No caso das formulações acopladas utilizadas para a equação de Richards e o modelo black oil, existe um erro de conservação, advindo da própria natureza do método dos elementos finitos e das não linearidades. A Figura 4.2 ilustra como a avaliação da matriz $[A]$ no intervalo de tempo anterior acarreta em resíduos de volume. A curva pode ser interpretada como o volume injetado (externo) para um intervalo Δt que começa no passo n e termina no passo $n + 1$. A formulação descrita pela curva azul é totalmente conservativa, de forma que a soma dos termos de fluxo e armazenamento, avaliados a partir da variável u , se igualam ao volume injetado. A avaliação da derivada no começo do intervalo, porém, leva a estimativa do valor da variável u no passo $n + 1$ a pontos fora da curva, de forma que existe um resíduo R na conservação de volume. Este resíduo pode também ser medido em massa.

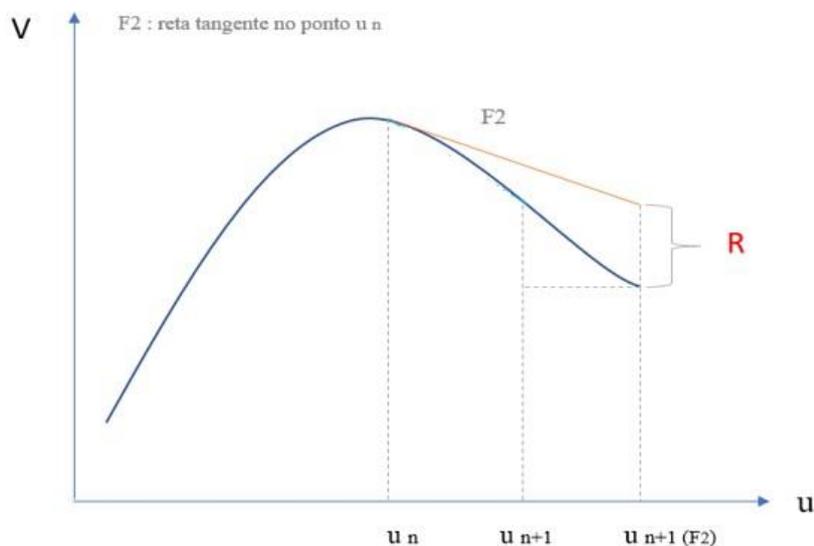


Figura 4.2: Resíduo de volumes resultante do erro na avaliação de derivadas

Uma solução para este problema é reaplicar o resíduo pelo método de Newton Raphson. Em um processo iterativo, os resíduos são injetados no vetor $\{b\}$. Incrementos são obtidos para as variáveis do problema, e com seus novos valores as matrizes são reavaliadas e os resíduos são calculados novamente. Este processo se dá até que seja atingido um erro aceitável.

Ainda sobre a Figura 4.2, percebe-se que a curva ilustrada fornece um critério para o cálculo dos resíduos. É necessário compreender que esta curva muda de acordo com o esquema de integração no tempo selecionado. Esquemas de integração implícitos, parcialmente implícitos e explícitos fornecem critérios de conservação diferentes. Os primeiros definem que a variação no armazenamento de massa deve se igualar ao fluxo avaliado ao final do tempo. Em esquemas parcialmente implícitos, a conservação é definida igualando-se o termo de armazenamento ao fluxo avaliado em um ponto intermediário do intervalo de tempo. Esquemas explícitos avaliam as variáveis de fluxo ao começo do intervalo de tempo.

Assim, o valor do resíduo calculado depende do valor de θ em seu cálculo. Como já foi discutido neste trabalho, esquemas parcialmente implícitos são mais acurados que esquemas totalmente implícitos, principalmente para grandes intervalos de tempo. Neste caso $0 < \theta < 1$ (Equação 3.5), e o valor ideal de θ varia de acordo com o problema. A formulação programada permite que o usuário selecione o valor θ para o cálculo do resíduo e da matriz para reinjeção pelo método de Newton. Assim, apesar de a resolução por elementos finitos ser feita de forma totalmente implícita, a correção de seus resultados é feita baseada em um cálculo de resíduo flexível quanto ao esquema de integração no tempo. Pode-se, assim, escolher de qual formulação de conservação os resultados devem se aproximar.

4.5.1 Avaliação do erro, reinjeção do resíduo e critérios de parada

O resíduo obtido na conservação de massa e volumes-padrão deve passar por algum tipo de critério de aceitabilidade. O erro ε é calculado a partir da comparação entre a norma do vetor de resíduos, \mathbf{R} , e do vetor de fluxo injetado nos nós, \mathbf{q} , e deve ser menor que um limite ε_{lim} estabelecido:

$$\varepsilon = \frac{\|\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{q}\|} \leq \varepsilon_{lim} \quad (4.25)$$

Caso se encontre fora do limite aceitável, o resíduo é reaplicado com o uso do método de Newton-Raphson para correção das variáveis de pressão e saturação, conforme a equação:

$$\{\Delta u\} = - [J_{NR}]^{-1} \{R\} \quad (4.26)$$

Sendo

$\{\Delta u\}$: vetor de incrementos (correções) nas variáveis do sistema; (m x 1)

$[J_{NR}]$: matriz Jacobiana de derivadas dos resíduos em relação às variáveis; (m x m)

No caso da formulação IMPES, não há reinjeção. O critério de parada, c é definido com base na convergência dos resultados, comparando a norma do vetor de grau de saturações de duas iterações subseqüentes, n e $n + 1$. Quando a diferença entre as normas alcançar um valor estabelecido, as iterações são finalizadas e inicia-se próximo passo de tempo.

Assim:

$$c = \frac{\|S_{nw+1}\| - \|S_{nw}\|}{\|S_{nw}\|} \leq \epsilon_{lim} \quad (4.27)$$

É válido, ainda, ressaltar que formulações do tipo IMPES são estáveis e convergem apenas para um tamanho limite de intervalo de tempo. Coats (2001) apresenta a seguinte formulação geral para o cálculo do intervalo de tempo máximo, Δt_{lim} :

$$\Delta t_{lim} = \min \left(\frac{\phi V^i}{F_i} \right)$$

(4.28) sendo F_i uma função das vazões injetada/retiradas e das propriedades dos fluidos e do material poroso; ϕ é a porosidade e V^i é o volume do subdomínio a que pertence o nó i . Para o caso de soluções unidimensionais e sem pressão capilar, como é o caso da solução de Buckley-Leverett, o tamanho limite do intervalo, Δt_{lim} , é dado por:

$$\Delta t_{lim} = \min \left(\frac{\phi V^i}{q f_o} \right) \text{ sendo } f_o = \lambda \frac{w^{\lambda+o}}{w^{\lambda+o} \lambda_o}, \text{ e } \lambda_o \text{ e } \lambda_w \text{ são as} \quad (4.29)$$

mobilidades do óleo e da água.

CAPÍTULO 5: IMPLEMENTAÇÃO E VALIDAÇÕES

Neste capítulo, serão apresentadas as principais funcionalidades do código desenvolvido e as validações realizadas para os três módulos: não saturado, bifásico e modelo black oil. No módulo não saturado, será demonstrada a eficácia do método de reaplicação de resíduos utilizado e alguns aspectos relacionados a sua estabilidade. No módulo bifásico, foram feitas validações para a solução analítica de Buckley-Leverett e para um problema bidimensional contendo pressão capilar. Por fim, foi demonstrada a eficiência do código para o modelo black oil em simular o aparecimento de gás diante de quedas de pressão. Além das validações, são também feitas ao final do capítulo algumas análises no que concerne a produção de reservatórios subsaturados.

5.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DOS MODELOS NUMÉRICOS

O código desenvolvido foi escrito na linguagem Fortran com o intuito de ser posteriormente compatibilizado com o programa de análise de propagação de fraturas desenvolvido por Moraes (2016) e Saba (2017). Para a montagem da malha, foi utilizado o software GID 12.0 (<http://www.gidhome.com>). As malhas foram montadas com

elementos quadriláteros. Após a geração da malha, dois arquivos principais eram gerados: um contendo a conectividade dos nós e outro contendo suas coordenadas cartesianas. Na Figura 5.1 é apresentado um fluxograma com as principais funções do programa e sua sequência de solução. Os três módulos desenvolvidos (não saturado, bifásico e black oil) possuem os componentes presentes na Figura, que estão detalhados a seguir.

- INPUT: neste arquivo, estão as rotinas destinadas à leitura de dados como: conectividade e coordenadas dos nós, e seu armazenamento em matrizes; condições iniciais e condições de contorno e seu armazenamento em vetores; propriedades dos fluidos e da rocha: permeabilidade intrínseca, massas específicas e viscosidades dos fluidos.
- MAT-OP: possui rotinas para operações matriciais diversas: inversões, cálculo do determinante, soma, subtração e multiplicação.
- MFEM: nesta componente do programa são montadas as matrizes básicas de uma formulação por elementos finitos, incluindo: o vetor de funções de forma para elementos quadráticos, a matriz jacobiana e seu determinante e a matriz de gradientes [B].
- CONST_REL: este arquivo possui as sub-rotinas destinadas a ler informações básicas de equações constitutivas e calcular propriedades. Estão incluídas a equação de Van Genuchten para cálculo da sucção, no módulo não saturado, e da pressão capilar, no módulo bifásico; a função para cálculo da permeabilidade relativa; funções (em função da pressão) para cálculo do fator volume formação, da razão de solubilidade e da viscosidade, para o caso do Black Oil.
- M1EL: nesta componente estão descritas as montagens das matrizes de massa e de fluxo para um elemento. As integrações numéricas são feitas utilizando-se quatro pontos de Gauss.
- GLOBAL: a partir da conectividade e das matrizes obtidas para cada elemento, faz a montagem das matrizes globais.
- SYSTEM: no modelo black oil, posiciona as matrizes globais de forma a montar um sistema do tipo $[A]x = \{b\}$, em que [A] é uma matriz quadrada $m \times m$, sendo m o número de graus de liberdade. A matriz [A], no caso do módulo black oil, é obtida posicionando-se as matrizes globais de forma a se ter sistemas como descritos na Equação 4.24. Além disso, em todos os módulos esta é modificada

de forma que todas as variáveis desconhecidas estejam no vetor $\{x\}$, e as variáveis impostas estejam no vetor $\{b\}$.

- SOLUTION: O sistema linear $[A]\{x\} = \{b\}$ é resolvido para o novo passo de tempo.
- CV_CONNECT: armazena a conectividade para a definição dos volumes de controle. Mais precisamente, esta rotina computa a quantos e quais elementos um nó pertence, e quais faces e quadrantes formam seu volume de controle.
- CV_GEOMETRY: armazena, para todos os nós, o comprimento de todas as faces que o envolvem, assim como as coordenadas do vetor unitário normal a ele.
- CV_INTERPOL: Nesta matriz, os vetores com resultados obtidos pelo método dos elementos finitos são importados, de forma que sejam interpolados no ponto médio das faces: gradientes de pressão, permeabilidade e quaisquer outras propriedades que sejam funções das variáveis,
- CV-SOLUTION: calcula o resíduo na conservação de massa/volumes padrão, ou a saturação no caso do IMPES.
- ERROR: calcula as normas das Equações 4.25 e 4.27 e computa o erro.
- NEWTON: caso o erro não seja tolerável, monta a matriz jacobiana para reinjeção do resíduo pelo método de Newton, realiza sua inversão e calcula novos valores para variáveis.
- OUTPUT: transcrição dos resultados em um arquivo txt e em um arquivo compatível com o software GiD.

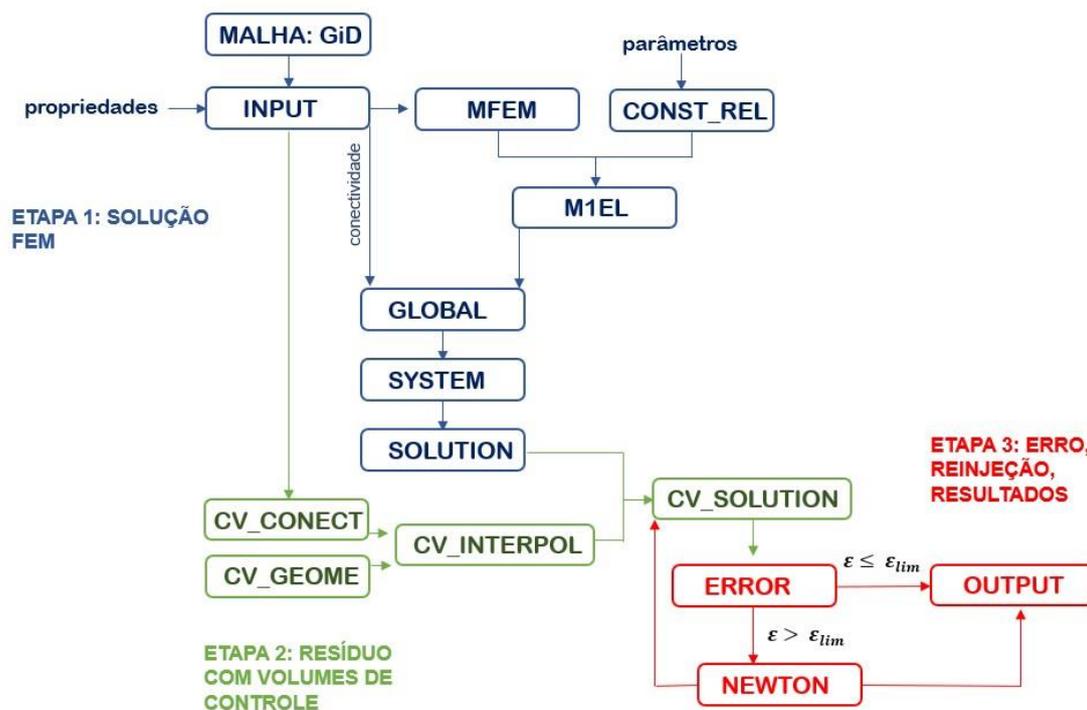


Figura 5.1: Elementos do programa desenvolvido

5.2 VALIDAÇÕES

5.2.1 Sobre o FlexPDE

Algumas validações foram feitas utilizando o software FlexPDE, uma consagrada ferramenta para a resolução de sistemas de equações diferenciais pelo método dos elementos finitos. A partir da descrição da geometria do domínio, das equações regentes, de valores iniciais e condições de contorno, o software realiza a solução espacial e temporal das variáveis indicadas. A solução espacial é feita por um esquema sofisticado de malhas adaptativas, o que significa que o programa refina a malha com base em um critério de erro que pode ser modificado pelo usuário. O erro espacial é obtido pelo programa de forma análoga à utilizada neste trabalho, com a diferença que uma malha secundária de volumes de controle não é estabelecida. O FlexPDE utiliza a própria malha de elementos finitos e calcula resíduos para os nós através da avaliação dos fluxos nos elementos circundantes, em sua integridade. A solução no tempo é feita com esquemas implícitos, também de forma adaptativa, já que a ordem da aproximação varia ao longo da solução. O tamanho do intervalo de tempo também é modificado de acordo com o erro temporal.

5.2.2 Validação do módulo não saturado

Apesar de o objetivo principal deste trabalho ser a simulação de fluxo multifásico e multicomposicional, a resolução da equação de Richards pode ser vista como um caso particular destes problemas. É, portanto, uma boa forma de validar parte dos outros módulos, já que possuem características em comum. Além disso, a resolução de casos particulares simples é um bom método para se obter informações mais fáceis de serem interpretadas e extrapoladas para problemas mais complexos.

O problema de fluxo não saturado utilizado na validação está descrito na Figura 5.2. Uma coluna de dimensões 1 m x 10 m foi discretizada em dez elementos quadráticos regulares de dimensões 1 m x 1 m. O nível da água forma inicialmente uma coluna de 1 m. A distribuição inicial de poropressões, p_w é aquela obtida para um problema hidrostático em que $p_w = \gamma_w (y - H)$, sendo $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$ o peso específico da água, e H o desnível entre o nível de referência (N.R.) e o de água (N.A.). Para que haja fluxo, é necessário criar uma perturbação nas condições hidrostáticas. Foi, então, imposta uma pressão igual a zero no topo da coluna.

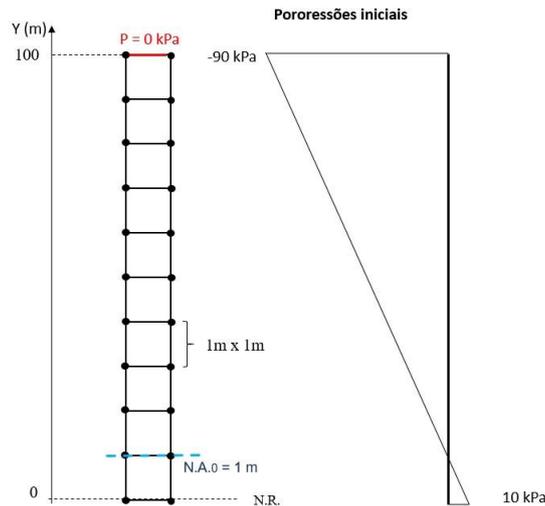


Figura 5.2: Problema de validação para o módulo não saturado

Acima do nível de água, o solo encontra-se não saturado. Devido a efeitos de tensão superficial que já foram mencionados ao se revisar o conceito de pressão capilar, atua uma sucção mátrica no material. A sucção é definida pela diferença entre as pressões do ar e da água, sendo este primeiro considerado igual a zero. A máxima sucção que atua no domínio é de 90 kPa.

Para a descrição da sucção mátrica, foi utilizada a curva de Van Genuchten (1980) (Equação 2.2). Foram adotados $a = 10 \text{ kPa}$, $n = 1,5$, $\theta_r = 0,1$, $\theta_s = 0,5$ e $m_v = 0.095/\text{kPa}$. A derivada da umidade volumétrica em relação à pressão da água é requerida na solução do problema (vide Equação 4.13) e foi obtida de forma analítica.

A permeabilidade intrínseca adotada foi de $1 \times 10^{-9} \text{ m}^2$, e a viscosidade da água é $1 \times 10^{-3} \text{ Pa. s}$. A permeabilidade relativa da água, k_{rw} , foi calculada em função do teor de umidade volumétrica, θ_w , da seguinte forma:

$$k_{rw} = \left(\frac{\theta_w - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^2 \quad (5.1)$$

O problema descrito foi simulado tanto no FlexPDE como no programa desenvolvido. O tempo simulado foi de 87.000 s (aproximadamente um dia). A Figura 5.3 ilustra a distribuição de pressão ao longo da profundidade, ao final da simulação. Estão apresentados os resultados obtidos pelo FlexPDE, que possui uma formulação temporal adaptativa, e pelo código em Fortran para diferentes intervalos de tempo constantes utilizados. Como esperado, quanto maior o intervalo de tempo adotado, maiores os erros. A avaliação do termo de fluxo de forma totalmente implícita se torna cada vez menos realista quanto maior é o intervalo de tempo, já que há maiores mudanças de pressão e saturação.

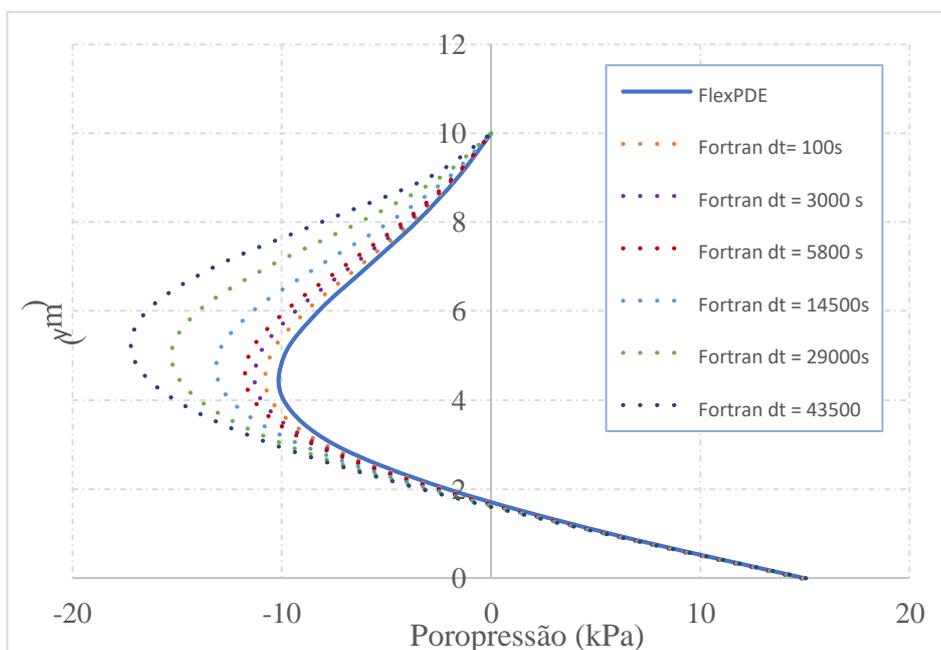


Figura 5.3: Distribuição de pressão ao final da simulação para diferentes intervalos de tempo e comparação com FlexPDE - módulo não saturado

Na Tabela 5.1 estão os erros obtidos pela Equação 4.25, a partir do cálculo dos resíduos de volumes de controle, para o último intervalo das simulações feitas com diferentes intervalos de tempo. O fato de o erro ser maior para os maiores intervalos de tempo, que apresentam resultados mais distantes dos obtidos pelo software de validação, indicam que o critério é coerente.

Tabela 5.4: Erros obtidos para diferentes intervalos de tempo - módulo não saturado

Δt	ε
100 s	2,535e-02
3.000 s	3,074e-02
5.800 s	2,541e-02
14.500 s	0,163
29.000 s	1,560
43.500 s	5,590

Os resíduos e a matriz de derivadas para sua reinjeção foram calculados utilizando avaliação parcialmente implícita das variáveis, com $\theta = 0,5$. A reinjeção da massa residual foi feita com o método de Newton, com o intuito de corrigir os resultados obtidos na Figura 5.3. Os resultados para o final da simulação estão apresentados na Figura 5.4. A sigla PP indica pós processamento, como referência à reaplicação do resíduo com o método de Newton. Foi adotado $\varepsilon_{lim} = 0.005$. Para a simulação em que foi utilizado intervalo de 3.000 s, estão apresentadas na Figura 5.5 as distribuições de pressão ao longo do tempo, antes e depois do pós-processamento (PP) com volumes de controle.

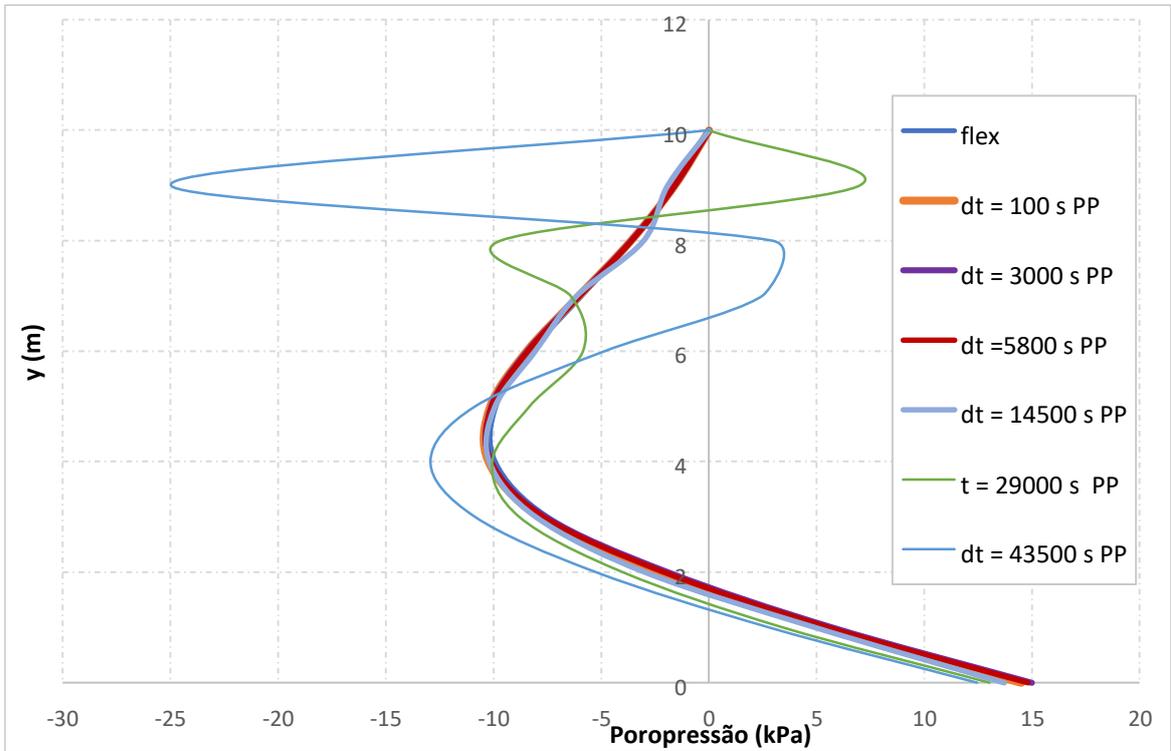


Figura 5.4: Resultados para o problema não saturado pós-processamento (PP) com reinjeção dos resíduos e comparação com FlexPDE

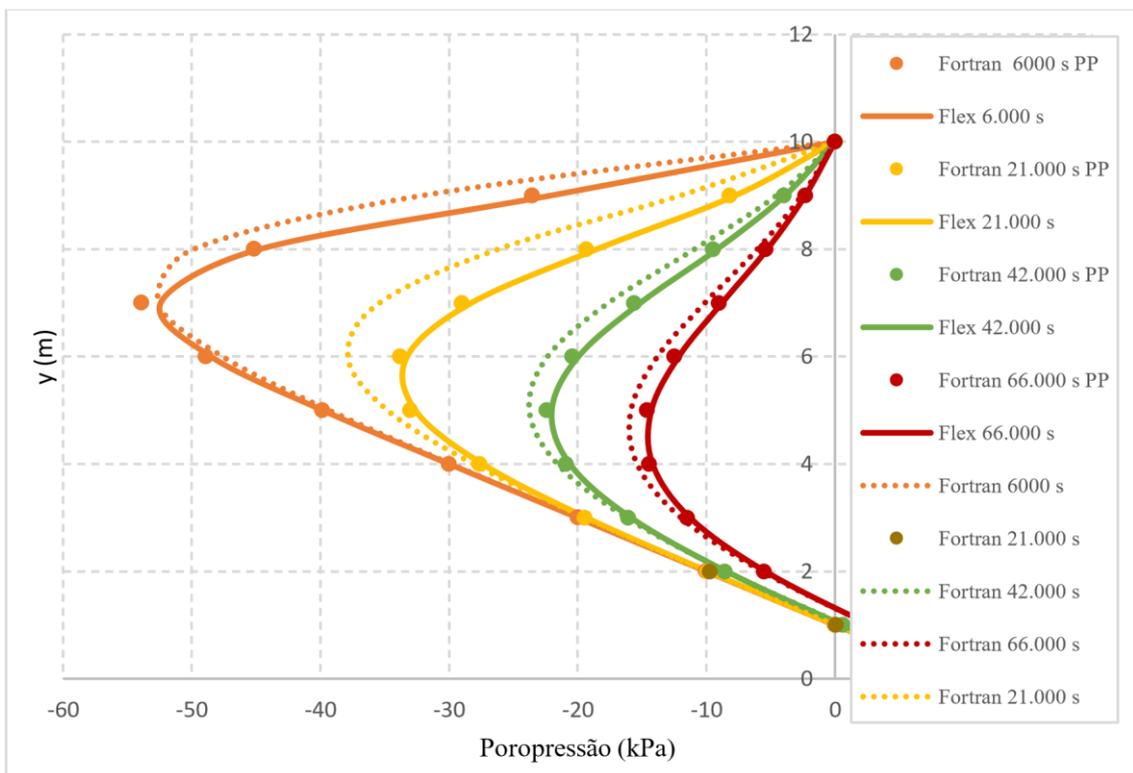


Figura 5.5: Evolução temporal da distribuição de poropressões com e sem pós processamento para intervalo de 3.000 s

Observa-se na Figura 5.4, que para intervalos de tempo de até 14.500 s, os resultados foram satisfatoriamente corrigidos com base em critérios de conservação local. Para as simulações que utilizaram três intervalos de 29.000 s e dois de intervalos de 43.500 s, no entanto, a distribuição de poropressões após a reinjeção adquiriu uma feição instável e diferiu muito significativamente dos resultados esperados.

Os processos matemáticos utilizados podem explicar este comportamento. Primeiramente, deve-se lembrar que o resíduo injetado para grandes intervalos de tempo é elevado. Este resíduo, por sua vez, foi calculado pelos termos de fluxo e armazenamento das Equações 4.1 e 4.4, e sua reinjeção é feita com uso de uma matriz de derivadas destes termos em relação à pressão. Assim, por um lado, uma grande vazão injetada implica em um alto gradiente de pressão, em função do termo de fluxo. Quanto menor o espaço entre os nós, maior é a variação de pressão entre eles para que seja atingido este gradiente, o que pode explicar em parte as variações abruptas observadas na Figura 5.4.

Além disso, no que concerne o termo de armazenamento, as derivadas da curva de retenção podem variar intensamente em pequenos intervalos de pressão, principalmente para sucções na ordem de grandeza trabalhada no problema. Assim, a avaliação de sua derivada em função dos primeiros resultados, associada a uma grande massa a ser injetada, é capaz de gerar variações grandes de pressão. As novas pressões obtidas fornecerão novas derivadas, que devido à natureza da curva de retenção, podem ter tendências completamente diferentes daquelas previamente obtidas, propagando o erro de forma irreversível. Assim, uma avaliação errônea da matriz jacobiana da Equação 4.26, associada a uma grande massa a ser injetada, pode resultar em soluções incoerentes.

Existem critérios para adoção de um intervalo máximo que o calculam em função do tamanho da malha, da permeabilidade e da inclinação da curva de retenção. A própria Equação 4.29, que define um critério de estabilidade para o IMPES, se adequaria ao caso, se introduzidos os efeitos de pressão capilar. Por este critério, o tamanho máximo do intervalo é proporcional ao tamanho da malha, pela questão do gradiente de pressão mencionada acima. Além disso, o limite é inversamente proporcional à permeabilidade e a vazão, já que a redução nestes valores significaria um volume residual menor a ser injetado para um mesmo intervalo.

Uma forma de tornar as variações de pressão menos abruptas, então, seria aumentar a distância entres os nós, ou seja, o tamanho do elemento. A troca dos quatro elementos

superiores da malha da Figura 5.2 por um elemento de dimensões 4 m x 1m, mantendo todas as outras características do problema, resulta nos dados apresentados na Figura 5.6. Foram utilizados intervalos de 29.000 s novamente.

Observa-se que o resultado sem correções obtido com a malha mais grossa se aproxima mais da solução obtida no FlexPDE do que os resultados referentes ao mesmo intervalo de tempo e malha mais refinada. Além disso, neste caso, a correção dos valores com uso de volumes de controle foi bem-sucedida. Tais resultados são curiosos por não serem muito intuitivos. O aumento da malha não costuma ser associado a melhores resultados. Mas uma simples análise do problema mostra que este pode ser um recurso adequado e estratégico, já que uma simulação contendo três passos de tempo e sete elementos chegou a resultados semelhantes aos de simulações contendo uma malha mais refinada e intervalos de tempo menores. É claro que o tamanho dos elementos deve ser aumentado sem que haja comprometimento da qualidade dos resultados e sem perda de detalhes essenciais. Mas os resultados obtidos são importantes por mostrarem que existe uma relação ótima entre tamanho da malha e tamanho do intervalo de tempo.

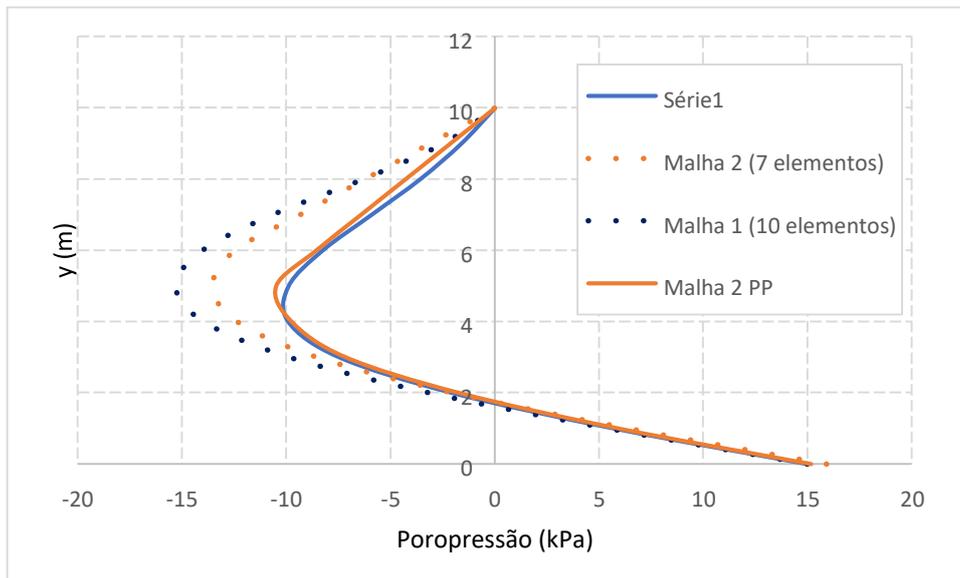


Figura 5.6: Resultados do pós-processamento (PP) utilizando malha menos refinada para $\Delta t = 29.000$ s - módulo não saturado

A Figura 5.7 mostra os efeitos da redução da permeabilidade intrínseca no problema. Adotando $k_s = 5 \times 10^{-10}$, metade do valor estipulado anteriormente, e utilizando a malha da Figura 5.2, contendo 10 elementos, percebe-se que os pós processamento aproxima a solução da simulação do FlexPDE, apesar de um pequeno padrão de oscilação. A redução

da permeabilidade significa redução nos resíduos obtidos, permitindo, portanto, maiores intervalos de tempo sem que haja mau comportamento dos resultados.

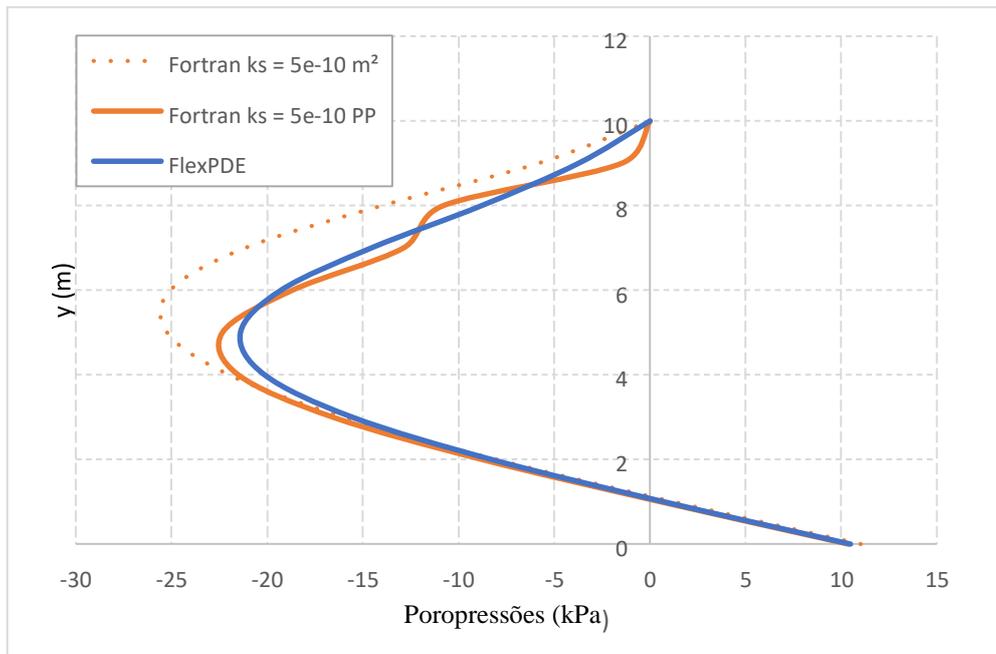


Figura 5.7: resultado do pós-processamento utilizando permeabilidade intrínseca menor, para $dt = 29.000s$

Outra questão que pode ser explorada é o esquema de integração no tempo. Métodos totalmente implícitos foram apresentados como incondicionalmente estáveis. Esquemas parcialmente implícitos são menos estáveis que esquemas totalmente implícitos, porém mais acurados. Diferentes valores de θ (theta) foram utilizados para cálculo dos resíduos e posterior reinjeção pelo método de Newton para duas simulações: a que utilizou intervalo de 14.500 s e a que utilizou intervalo de 29.000 s. Os resultados estão apresentados nas Figuras 5.8 e 5.9.

Nota-se que para o intervalo de 14.500 s (Figura 5.8), esquemas parcialmente implícitos com $\theta > 0.5$ apresentaram correções mais acuradas e ainda estáveis. Uma pequena oscilação no resultado para $\theta = 0.5$ na altura de 8 m indica que, para este intervalo de tempo, este valor de θ é o limiar para a estabilidade. De fato, quando se utiliza um valor de 0,4, os resultados já se apresentam instáveis, já que neste caso a solução se aproxima mais de um esquema explícito, que não é sempre estável, do que de uma formulação totalmente implícita. Os resultados para a formulação totalmente implícita, utilizando $\theta = 1.0$, são de fato menos acurados que os resultados parcialmente implícitos que se mostraram estáveis.

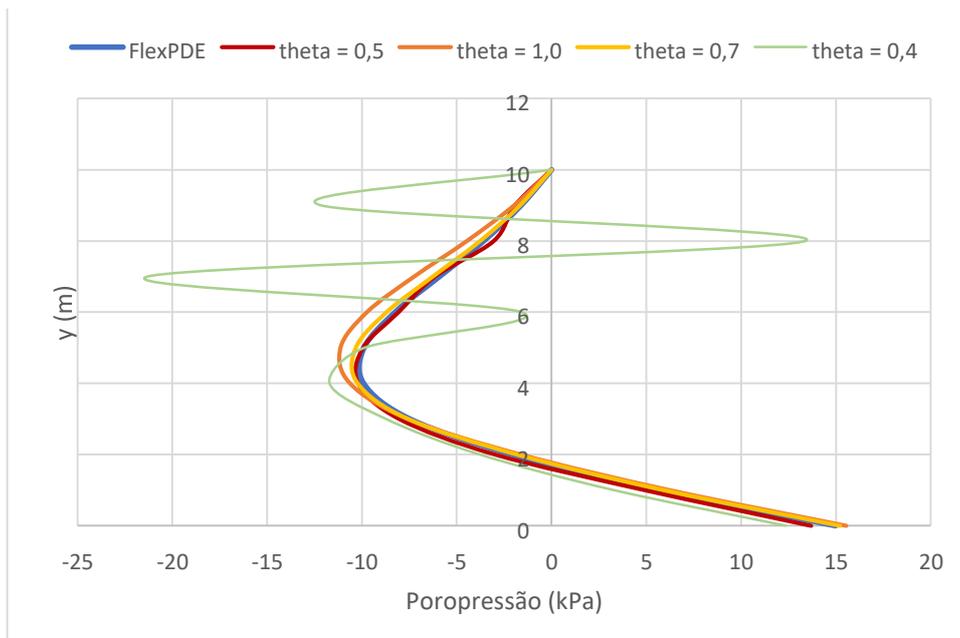


Figura 5.8: Correção dos resultados usando $\Delta t = 14.500$ s com diferentes esquemas de integração no tempo

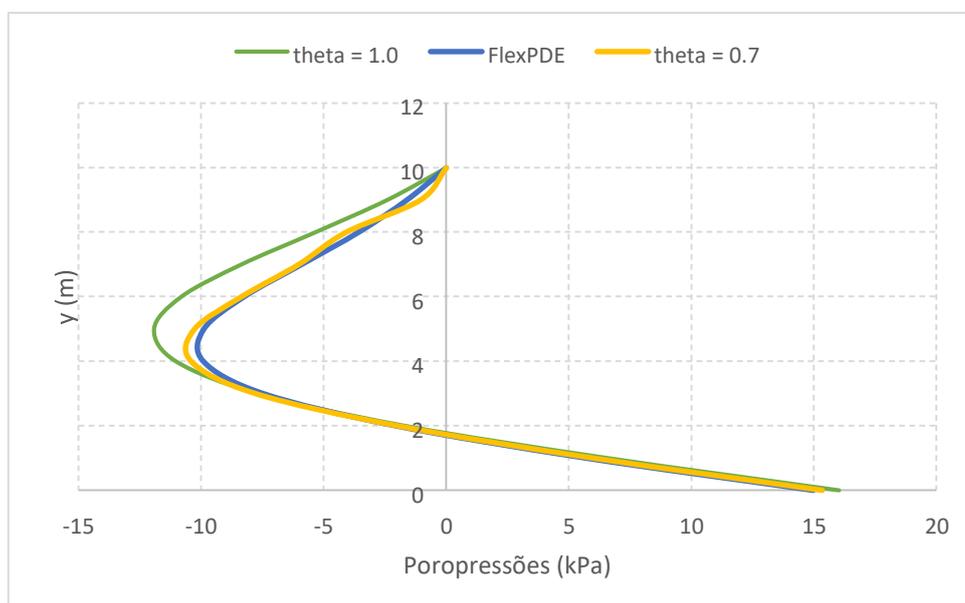


Figura 5.9: Correção dos resultados usando $\Delta t = 29.000$ s com diferentes esquemas de integração no tempo

No caso da Figura 5.9, nota-se que aumentando o valor de θ para 0,7, tem-se uma significativa melhora em relação aos resultados da Figura 5.4, em que foi utilizado $\theta = 0.5$. Um pequeno padrão de oscilação indica que valor maiores que 0,7 seriam mais

adequados. Uma formulação totalmente implícita resultou em uma correção mais estável, porém menos acurada.

Diante de tais resultados, conclui-se que existe um valor de θ ideal, função do intervalo de tempo e das características do problema, que resulta em uma relação ótima entre acurácia dos resultados e estabilidade.

5.2.2 Validação do módulo bifásico

5.2.1 Solução de Buckley-Leverett

A solução analítica de Buckley-Leverett é frequentemente utilizada na validação de códigos para fluxo bifásico. Apesar de desprezar efeitos capilares, gravitacionais e ser um problema unidimensional, representa um fenômeno característico na simulação de reservatórios, que é a existência de frentes de saturação devido à injeção de água.

O domínio utilizado está ilustrado na Figura 5.10. Possui extensão de 500 m e largura de 1m, contendo inicialmente saturação de óleo de 0,8 e saturação de água de 0,2, correspondente a sua saturação residual. Foram utilizados 100 elementos com dimensões 5 m x 1 m na discretização.

A vazão injetada (q_{inj}) é de 0,002 m³/s, com saturação de óleo igual a zero na linha 1 (L1). Foram impostas vazão de água nula e saturação de óleo 0,8 na linha 2 (L2). Estas condições de contorno correspondem a injeção até o momento do *breakthrough* da água, em que apenas óleo está sendo produzido.

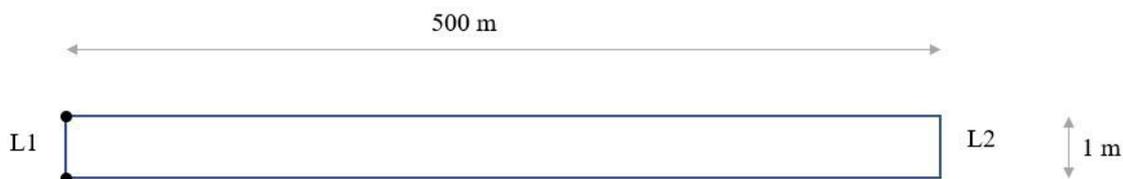


Figura 5.10: Domínio utilizado na validação da solução numérica do problema de Buckley-Leverett

A Tabela 5.2 apresenta as características do problema, incluindo propriedades dos fluidos e das rochas: permeabilidade intrínseca (k_s) porosidade (ϕ), viscosidade da água (μ_w) e do óleo (μ_o).

Tabela 5.5: Características do problema - validação 1 do módulo bifásico

Condições iniciais		
$S_o = 0,8$		
$p_w = 100 \text{ kPa}$		
Condições de contorno		
$L1 : q_{inj} = 0,002 \frac{m^3}{s}, S_o = 0,0$		
L	$\frac{m}{s}, S_o = 0,8$	$2 : q_w = 0,0$ — ³
Propriedades		
$\phi = 0,4$		
$k_s = 1 \text{ E} - 09 \text{ m}^2$		
$\mu_w = 0,001 \text{ Pa} \cdot \text{s}, \mu_o = 0,01 \text{ Pa} \cdot \text{s}$		

As curvas de permeabilidade relativa têm as seguintes formulações:

$$k_{rw} = (S_w - S_{w,res})^3 \quad (5.2)$$

$$k_{ro} = (1 - S_w)^2 (1 - S_w^2) \quad (5.3)$$

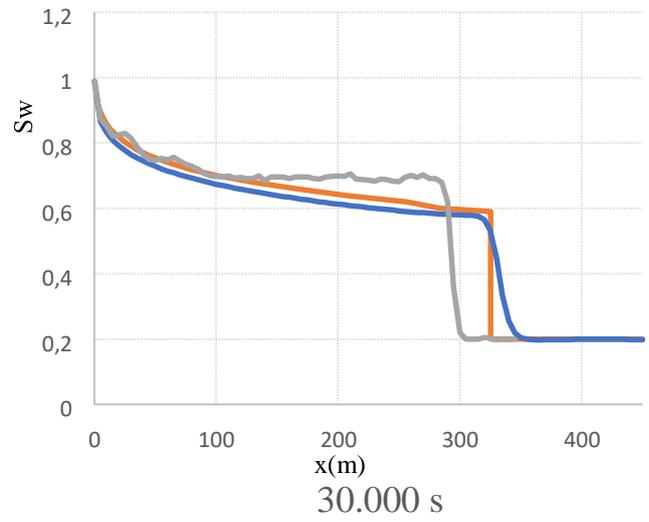
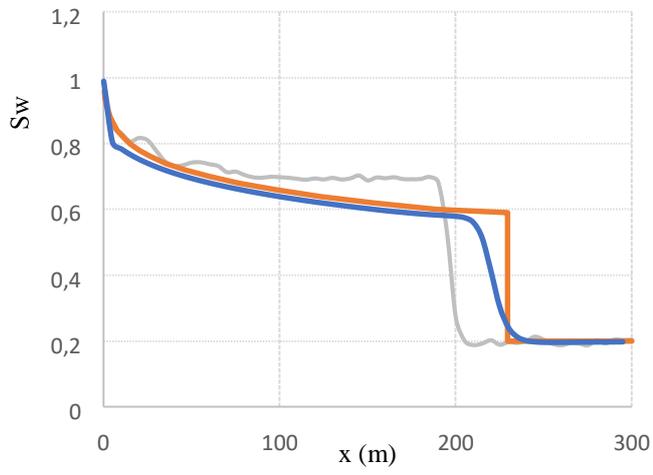
O intervalo de tempo utilizado foi o intervalo máximo calculado com a Equação 4.29 e resultou em 250 s. O critério c de parada da Equação 4.27 foi de 0.01. Foram comparadas duas soluções: uma utilizando *upwind* na mobilidade, ou seja, avaliando esta propriedade apenas nos nós de montante; e outra em que a mobilidade foi calculada a partir da interpolação das saturações nas faces. Os resultados obtidos e sua comparação com a solução analítica estão apresentados na Figura 5.11.

Os resultados na Figura revelam que sem o *upwind* na permeabilidade, uma leve oscilação é observada. Uma malha menor deveria ser utilizada para diminuir as variações de saturação ao longo um volume de controle e tornar a solução mais estável. Além disso, a não utilização da técnica gera resultados que superestimam o valor de S_w e não são capazes de prever a posição da frente de saturação

A utilização do *upwind* tornou o código capaz de prever com precisão tanto a posição da frente quanto as saturações, sem oscilações. Na região da frente os resultados

apresentarem uma leve inclinação que não possui sentido físico e que pode ser reduzida com o refinamento da malha.

20.000 s



45.000 s

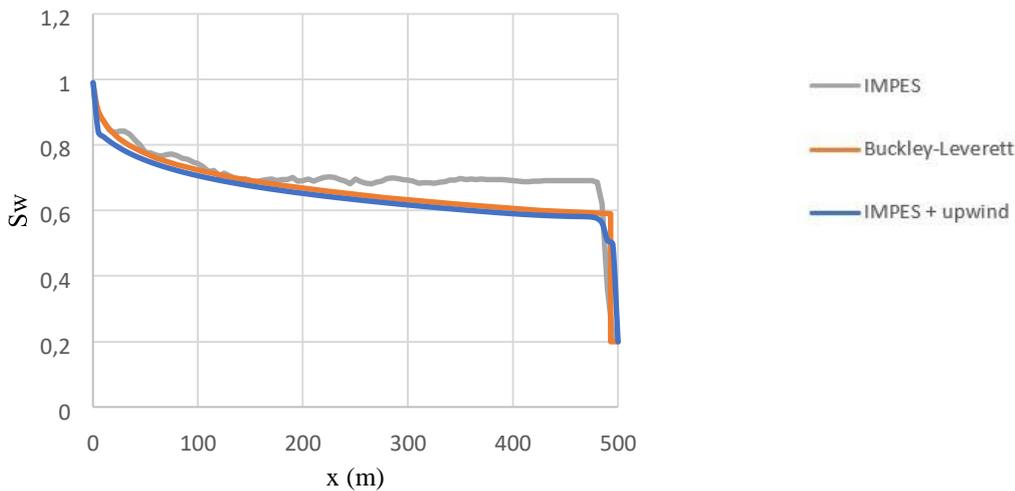


Figura 5.11: Validação do problema de Buckley-Leverett

5.2.2 Problema bidimensional com pressão capilar

O problema de Buckley-Leverett validou o código na resolução de um caso bifásico, unidimensional e sem pressão capilar. A capacidade do programa de solucionar problemas bidimensionais e contendo pressão capilar foi avaliada utilizando como base de comparação resultados obtidos pelo software FlexPDE.

O domínio do problema, a malha utilizada e as condições de contorno estão descritas na Figura 5.12. Trata-se de uma região com dimensões 100 m x 100 m e prolongações de 2 m x 10 m que simulam áreas de injeção e de produção. Inicialmente, a pressão é de 1MPa e a saturação de óleo é 0,8. Na linha 1 (*L1*) foram definidas como condições de contorno uma pressão de injeção de 3 MPa e saturação de óleo de 0,1, correspondente a sua saturação residual. Na linha 2 (*L2*) foi definida pressão de produção de 1MPa e a vazão específica de óleo, q_o , foi definida em função de sua saturação e sua pressão, p_o , como:

$$q_o = -k_o(S_o) \frac{\partial p_o}{\partial x} \quad (5.4)$$

Como a linha 2 é vertical, o fluxo normal a ela depende apenas do gradiente da pressão em relação ao eixo x . Este tipo de condição de contorno foi apresentado na seção 2.3.3 como condição de Robin. Como o esquema de resolução é do tipo IMPES, essa vazão é introduzida na equação de saturação do óleo a partir das pressões previamente obtidas na equação de pressão e das saturações calculadas no passo de iteração anterior. Os pontos

A, B, C, D e E, cujas coordenadas estão apresentadas na Figura, foram selecionados para o monitoramento da pressão e da saturação.

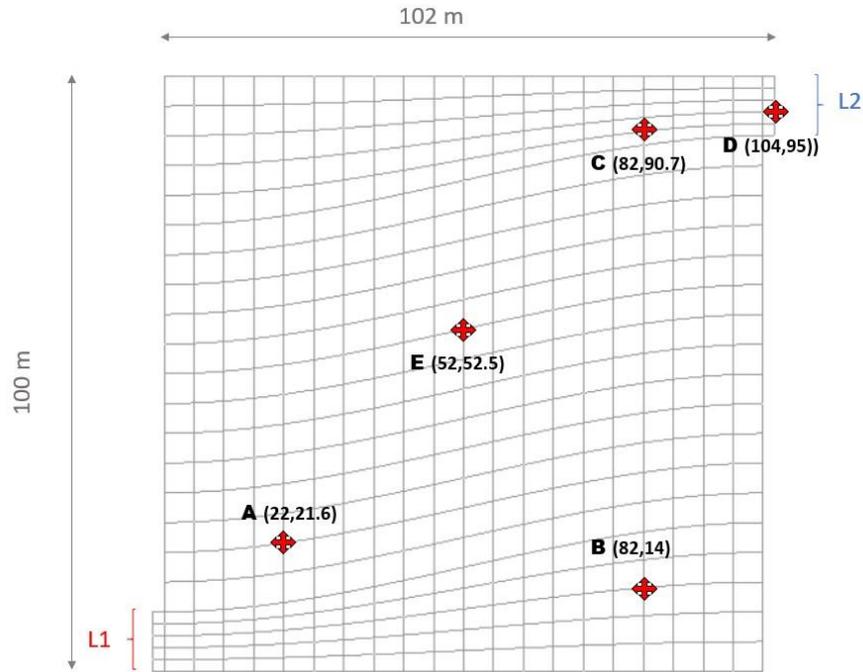


Figura 5.12: Domínio do problema bidimensional bifásico e pontos de monitoramento. A Tabela 5.3 apresenta as características do problema.

Tabela 5. 6: Características do problema - validação 2 do módulo bifásico

Condições iniciais	
$S_o = 0,8$	
$p_w = 1 \text{ MPa}$	
Condições de contorno	
$L1 : p_w = 3 \text{ MPa}, S_o = 0,1$	
$L2 : p_w = 1 \text{ MPa}, q_o = -k_o(S_o) \frac{\partial p}{\partial x}$	p^o
Propriedades	
$\phi = 0.3$	
$k_s = 5 \text{ E} - 10 \text{ m}^2$	
$\mu_w = 0,001/\text{Pa} \cdot \text{s} , \mu_o = 0,01/\text{Pa} \cdot \text{s}$	

As curvas de permeabilidade relativa têm as seguintes formulações:

$$k_{rw} = (S_w)^2 \quad (5.5)$$

$$k_{ro} = (S_o - 0,1)^2 \quad (5.6)$$

A curva de pressão capilar é uma equação de Van Genuchten para saturações de água a partir 0,2, com parâmetros $a = 50 \text{ kPa}$ e $n = 3$. Para saturações fora do intervalo mencionado, a curva de pressão capilar torna-se uma reta que chega ao valor máximo de 160 kPa para saturação de água nula. A curva está ilustrada na Figura 5.13.

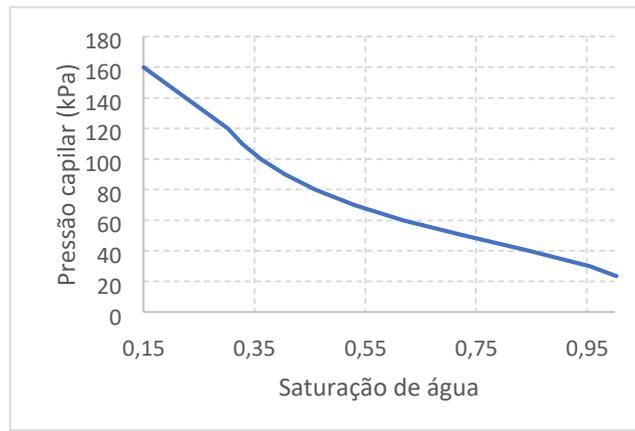


Figura 5.13: Curva de pressão capilar: validação 2 do módulo bifásico

O tempo de simulação é 50.000 s e o critério da equação 4.27 é 0,01. A equação de saturação foi resolvida utilizando $\theta = 0.5$. Como este problema apresenta não linearidades adicionais em relação à solução de Buckley-Leverett, foi selecionado um intervalo de tempo conservador de 10 s para garantir a estabilidade. Foi utilizado *upwind* na permeabilidade, devido aos bons resultados que esta técnica forneceu no caso anterior. A comparação dos resultados para a pressão e a saturação nos pontos de monitoramento estão apresentados nas Figura 5.14 e 5.15.

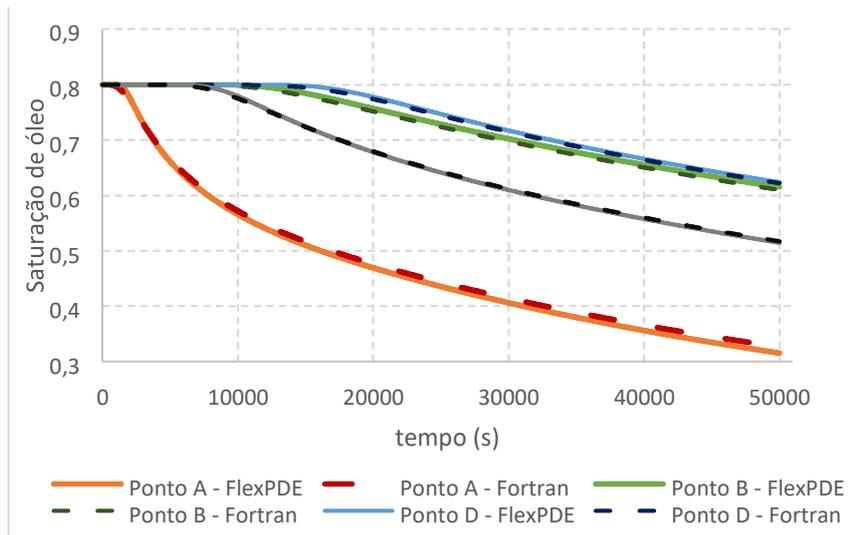


Figura 5.14: Saturação de óleo nos pontos de monitoramento - Validação 2 do módulo bifásico

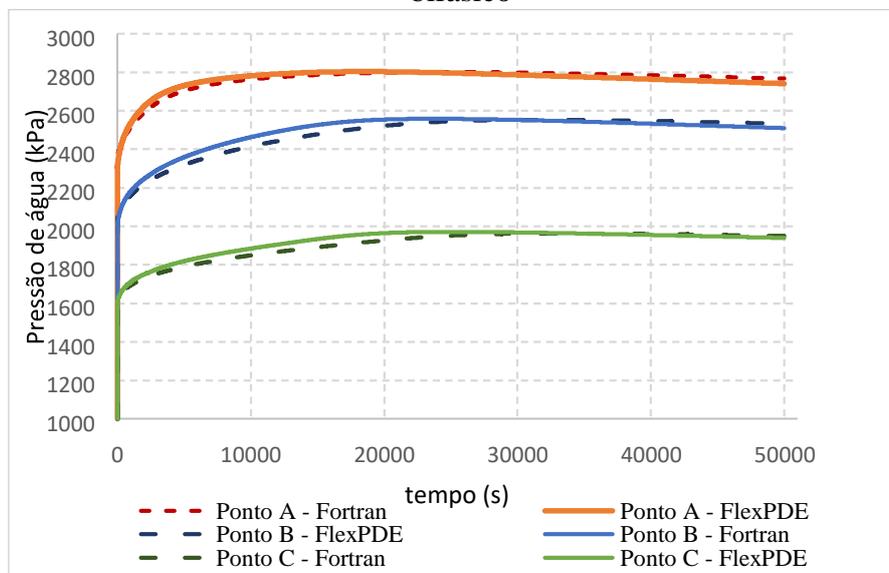


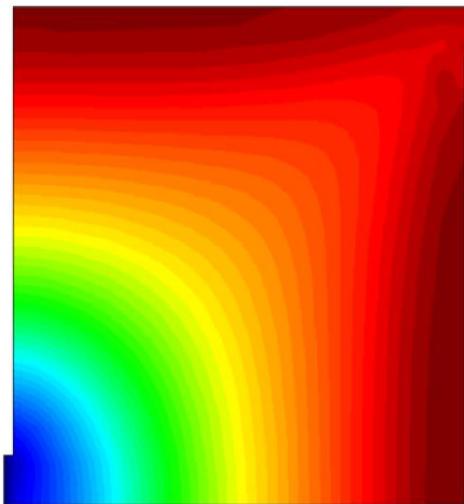
Figura 5.15: Pressão de água nos pontos de monitoramento - Validação 2 do módulo bifásico

A Figura 5.16 apresenta a distribuição espacial de pressões e de saturação de óleo ao final das simulações pelo FlexPDE e pelo código em Fortran. Observa-se que uma boa precisão foi também observada na distribuição espacial das variáveis, o que conclui a validação do módulo bifásico.

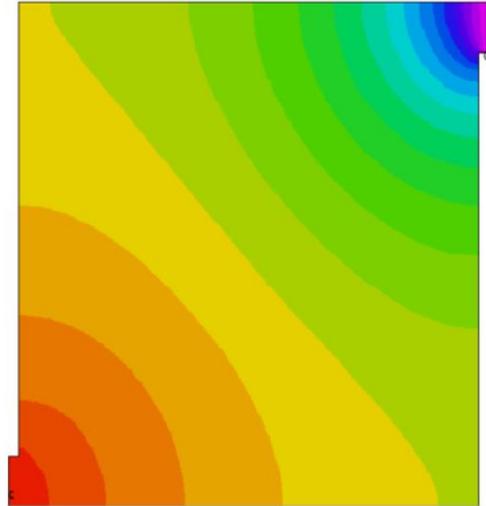
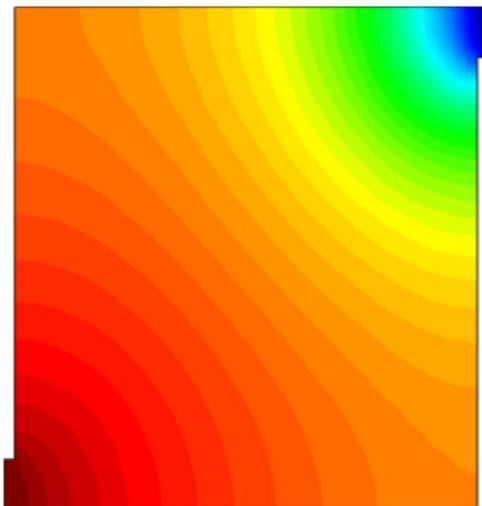
Figura 5.16: Distribuição de saturação e de pressão ao final da simulação pelo código em Fortran, à esquerda, e pelo FlexPDE, à direita

5.2.3 Validação do modelo black oil

SATURAÇÃO DE ÓLEO :



PRESSÃO DE ÁGUA:



Escala : E3

O FlexPDE não lida bem com as não linearidades do modelo black oil em casos complexos. Aproximando-se da pressão de bolha, que é o ponto em que algumas relações constitutivas mudam de tendência, sua formulação adaptativa leva a intervalos de tempo muito pequenos, que tornam a simulação custosa ou a interrompem, caso seja atingido um limite mínimo. É possível, no entanto, simular um caso simples, essencialmente

unidimensional, para validar a capacidade do código desenvolvido em simular o aparecimento de gás.

O domínio do problema é uma coluna como a apresentada na Figura 5.2, com dimensões 100 m x 1.000 m. A pressão inicial 2.200 psi, a saturação inicial de óleo é 0,88 e a de água é 0,12, equivalente a sua saturação residual. A pressão de bolha é constante e igual a 2.000 psi. A porosidade é igual a 0,4 e foi desconsiderada a compressibilidade do meio. No topo da coluna, foi imposta pressão igual a 1.000 psi. Além disso, foi também introduzida, no topo da coluna, a seguinte condição para as vazões de óleo (q_o) e de água (q_w) :

$$q_o = - B_o^{-1} k_o(S_o) \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.7)$$

$$q_w = - B_w^{-1} k_w(S_w) \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.8)$$

A introdução do fator-volume formação do óleo, B_o , faz com que a vazão seja medida nas condições padrão.

Foi adotado $k_s = 5e - 10 \text{ m}^2$. As relações constitutivas para os fluidos foram retiradas de Odeh (1981) e estão descritas nas tabelas abaixo. A Tabela 5.4 apresenta dados para o fator-volume formação, a razão de solubilidade e a viscosidade do óleo no estado saturado e subsaturado. As Tabela 5.5 apresenta estes dados para a água e para o óleo. Na Tabela 5.6 encontram-se dados para a permeabilidade relativa do óleo (k_{ro}) e do gás (k_{rg}). A permeabilidade relativa da água é zero, de forma que ela sempre estará em sua saturação residual durante o problema.

Tabela 5.5: Relações constitutivas para o óleo, conforme Odeh (1981) - Modelo black oil

ÓLEO SATURADO				ÓLEO SUBSATURADO	
Pressão (psi)	B_o	μ_o (cp)	R_s (scf/stb)	B_o	Viscosidade (cp)
14,7	1,062	1,040	1,0		1,040
264,7	1,150	0,975	90,5		0,975
514,7	1,207	0,910	180,0		0,910

1014,7	1,295	0,830	371,0		0,830
2014,7	1,435	0,695	636,0		0,695
2514,7	1,500	0,641	775,0		0,641
3014,7	1,565	0,594	930,0		0,594
4014,7	1,695	0,510	1270,0	1,695	0,510
5014,7	1,827	0,449	1618,0		0,449
9014,7	2,357	0,203	2984,0	1,579	0,203

Tabela 5.6: Relações constitutivas para água e gás, conforme Odeh (1981) - modelo black oil

ÁGUA			GÁS	
Pressão (psi)	μ_w (cp)	B_w	μ_o (cp)	B_o
14,7	1,0400	1,0140	0,0080	0,1667
264,7	0,9750	1,0403	0,0096	0,0121
514,7	0,9100	1,0395	0,0112	0,0063
1014,7	0,8300	1,0380	0,0140	0,0032
2014,7	0,6950	1,0350	0,0189	0,0016
2514,7	0,6410	1,0335	0,0208	0,0013
3014,7	0,5940	1,0320	0,0228	0,0011
4014,7	0,5100	1,0290	0,0268	0,0008
5014,7	0,4490	1,0258	0,0309	0,0006
9014,7	0,2030	1,0130	0,0470	0,0470

Tabela 5.7: Permeabilidade relativas para um sistema óleo-gás, em função da saturação do gás, conforme Odeh (1981) – Modelo black oil

S_g	k_{rg}	k_{ro}
0,00	0,000	1,000
0,00	0,000	1,000
0,02	0,000	0,997

0,05	0,005	0,980
0,12	0,025	0,700
0,20	0,075	0,350
0,25	0,125	0,200
0,30	0,190	0,090
0,40	0,410	0,021
0,45	0,600	0,010
0,50	0,720	0,001
0,60	0,870	0,000
0,70	0,940	0,000
0,85	0,980	0,000
1,00	1,000	0,000

Quatro pontos do domínio foram selecionados para a validação. O ponto A tem coordenadas (100 m, 900 m). O ponto B tem coordenadas (100 m, 500 m). O ponto C tem coordenadas (100m, 300 m), e o ponto D está nas coordenadas (100 m, 0 m). O tempo de simulação foi 40.000 s, com intervalo de tempo de 100 s. Na Figura 5.17 estão apresentados os resultados para a pressão nos pontos de interesse, e a Figura 5.18 apresenta resultados para a saturação de gás.

Percebem-se nos resultados aumentos rápidos na saturação de gás assim que a pressão de bolha é atingida. O ponto A, mais próximo da condição de contorno, atinge a pressão de bolha no começo da simulação e logo começa a produzir gás. As simulações pelas duas ferramentas mostram que o ponto B atinge a pressão de bolha aproximadamente aos 5.000 s, o ponto C aos 10.000 s e o ponto D aos 20.0000 s. Antes disso a saturação de gás é praticamente nula, na ordem de grandeza de 10^{-5} . Assim, mostra-se que a técnica do pseudogás é capaz de fornecer resultados realistas. Notam-se discrepâncias em relação aos resultados obtidos pelo FlexPDE. Isso pode ser explicado pelo fato de correções de resíduos não terem sido realizadas, e pelo FlexPDE possuir malhas e intervalos de tempo adaptativos. Os valores, porém, foram próximos o bastante para indicar coerência e qualidade nos resultados, já que a maior diferença observada no grau de saturação é de aproximadamente 0,02.

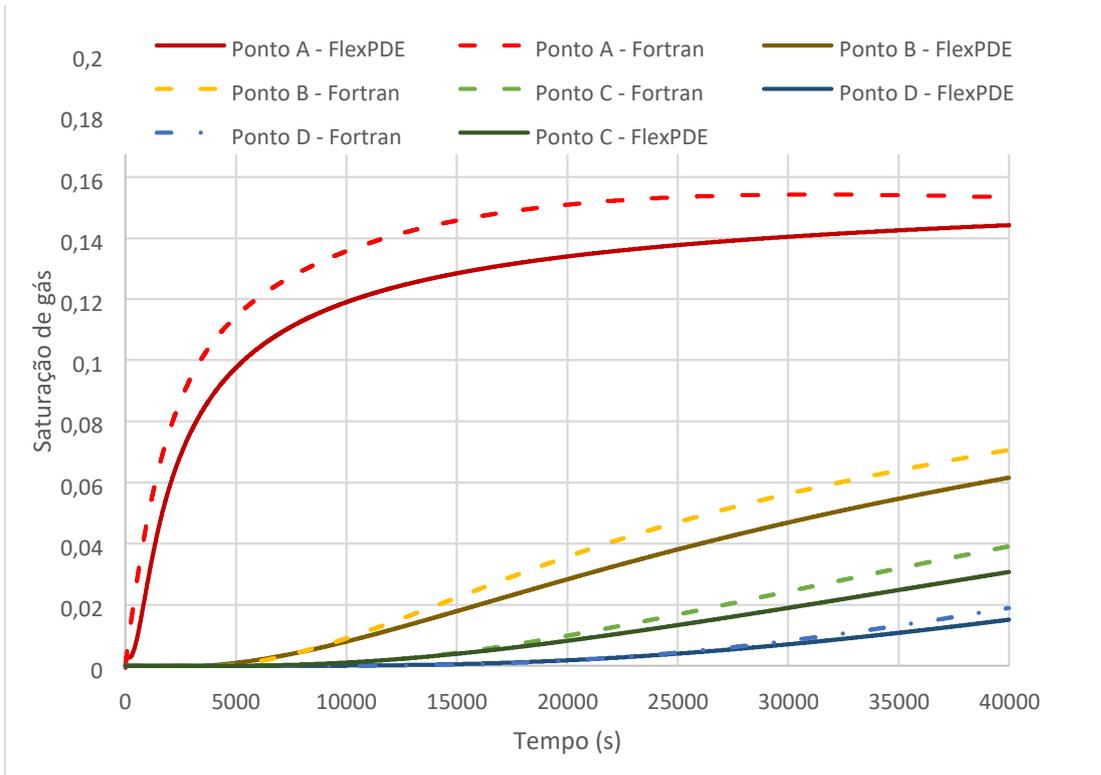


Figura 5.17: Saturação de gás vs tempo – validação do modelo black oil

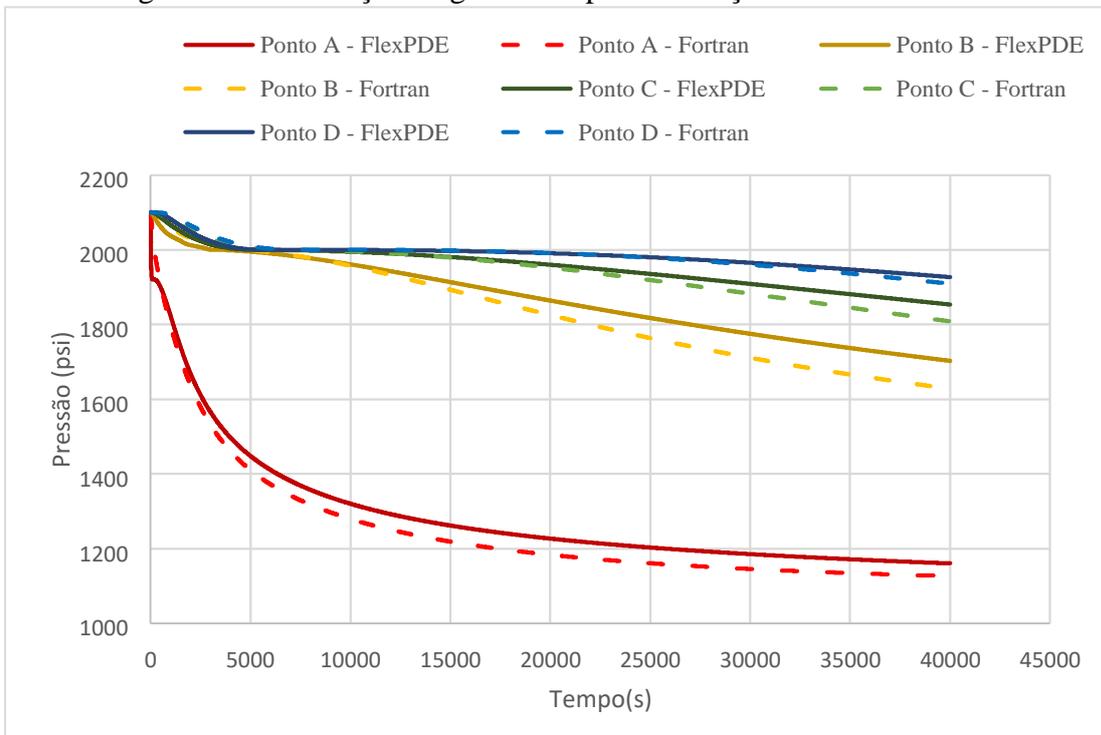


Figura 5.18: Pressão vs tempo - Validação do modelo black oil

5.3 ANÁLISES DE PRODUÇÃO E EFEITOS DE COMPRESSIBILIDADE

As validações apresentadas anteriormente apresentaram o comportamento das variáveis essenciais, pressão e saturação, para alguns problemas de fluxo. Como, porém, na

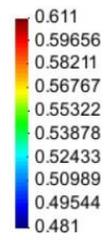
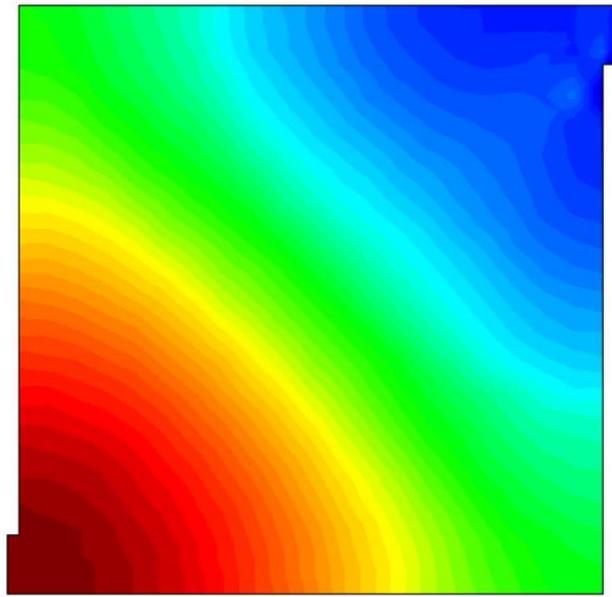
engenharia de reservatórios, a avaliação da produção é de grande interesse, esta seção se dedica a mostrar o comportamento das vazões em casos típicos de produção.

Todas as simulações realizadas nesta sessão foram feitas com o domínio da Figura 5.12, mantendo as localizações de injeção e produção.

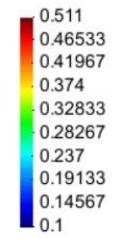
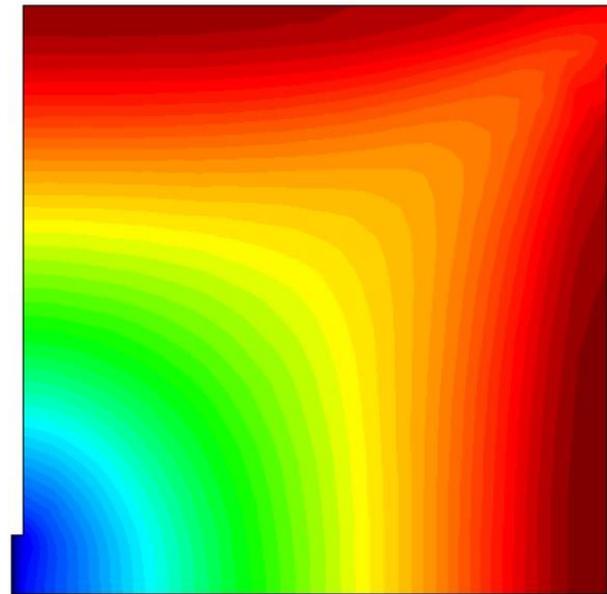
Considera-se um reservatório subsaturado ao longo de toda a produção. Assim, foi utilizado o módulo bifásico do programa. Inicialmente, a pressão é 2,5 MPa e a saturação de óleo é 0,88. A compressibilidade da rocha é $1 \times 10^{-6} / kPa$. Foram adotadas a permeabilidade intrínseca e a viscosidade da água da Tabela 5.3, e as permeabilidades relativas das Equações 5.2 e 5.3. A permeabilidade intrínseca utilizada é alta quando consideradas permeabilidades de campo de reservatórios, mas foi selecionada de modo a acelerar os resultados, já que apenas o comportamento da produção é de interesse nessa análise. O tempo de simulação utilizado foi de 185.000 s.

Inicialmente, a produção foi simulada sem injeção, e com pressão de produção de 1,7 MPa. Neste caso, a produção de fluidos deve-se unicamente à compressão da rocha e expansão dos fluidos. Em seguida, aplicou-se pressão de 3 MPa ao mesmo caso. Com o intuito de discriminar os efeitos da compressibilidade, duas simulações foram feitas para o problema de injeção: uma considerando a compressibilidade da rocha, e outra desprezando este parâmetro.

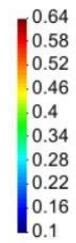
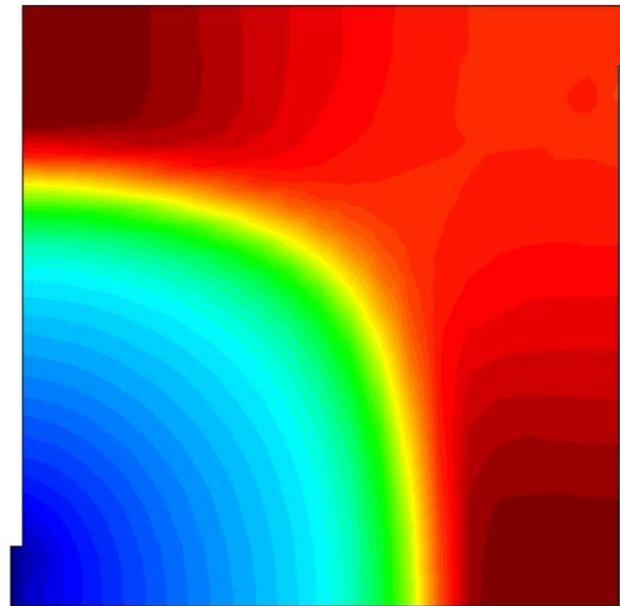
A Figura 5.19 ilustra a distribuição espacial da saturação de óleo, ao final da simulação, para produção sem injeção de água. A Figura 5.19 b ilustra a mesma distribuição, para a simulação de injeção de água sem considerar a compressibilidade da rocha. A Figura 5.19 c ilustra a distribuição de saturações para a injeção com consideração da compressibilidade. Percebe-se primeiramente, que a injeção acelera a produção significativamente, já que a na Figura 5.19 b ilustra uma distribuição de saturações de óleo que varia de 0,1 a 0,5, enquanto na Figura 5.19 a este intervalo vai de 0,48 a 0,6.



(A)



(B)



(C)

78 Figura 5.19: Distribuição de saturações de óleo ao final da simulação para a) recuperação primária b) injeção de água sem compressibilidade, c) injeção de água com compressibilidade

Nota-se, também, comparando-se a Figura 5.19 c com a Figura 5.19 b, que a compressibilidade da rocha contém o avanço da frente de saturação, não permitindo que a água empurre o óleo com a mesma agilidade de um caso sem compressão dos poros. Como a porção superior direita do domínio é mais próxima do local de produção, a pressão nessa região é menor, e, portanto, também o tamanho dos poros. Por este motivo, a frente de saturação, a Figura 5.19 c, está retida exatamente nesta região, em comparação com a Figura 5.19 b.

A Figura 5.20 corrobora com essa explicação, mostrando que a desconsideração da compressibilidade superestima a produção cumulativa ao longo do tempo.

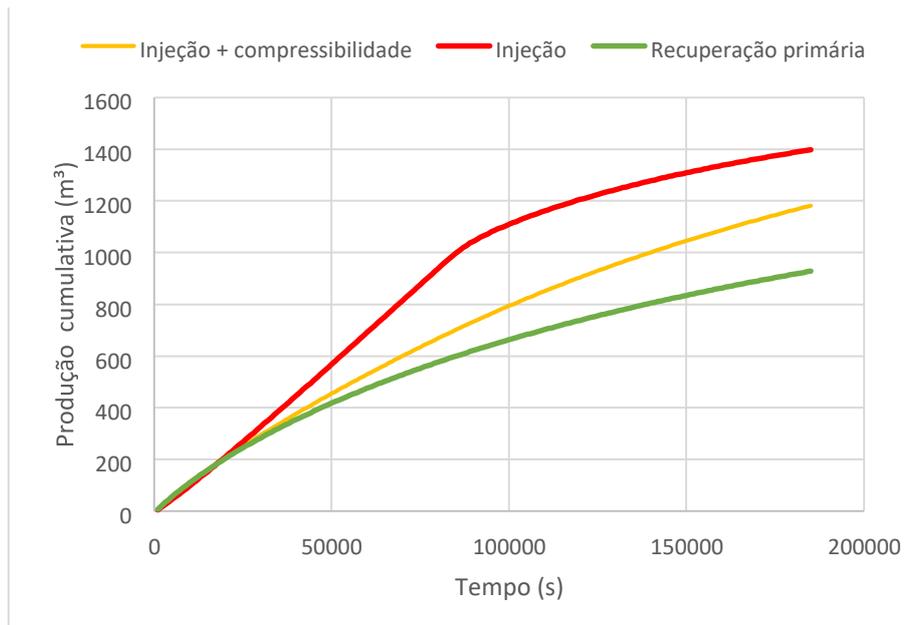


Figura 5.20: Produção acumulada pela recuperação primária, injeção e injeção com compressibilidade

A Figura 5.21 ilustra a razão óleo/água, RAO, para os três casos. No caso da recuperação primária a RAO cresce continuamente no tempo simulado. Este crescimento se daria até que um pico, a partir do qual a RAO decresce devido à baixa quantidade de água remanescente no reservatório. Apesar de, inicialmente, a água se encontrar em sua saturação crítica, o processo de decompressão da rocha provoca expansão desse fluido, em direção à produção. Percebe-se que na Figura, que para um caso de injeção, a razão RAO cresce repentinamente, no momento do *water breakthrough*. A consideração da compressibilidade, no entanto, retarda o tempo de *breakthrough*, mantendo baixa RAO por

mais tempo. Como já foi mostrado, o efeito da compressibilidade deixa o avanço da frente de saturação menos ágil.

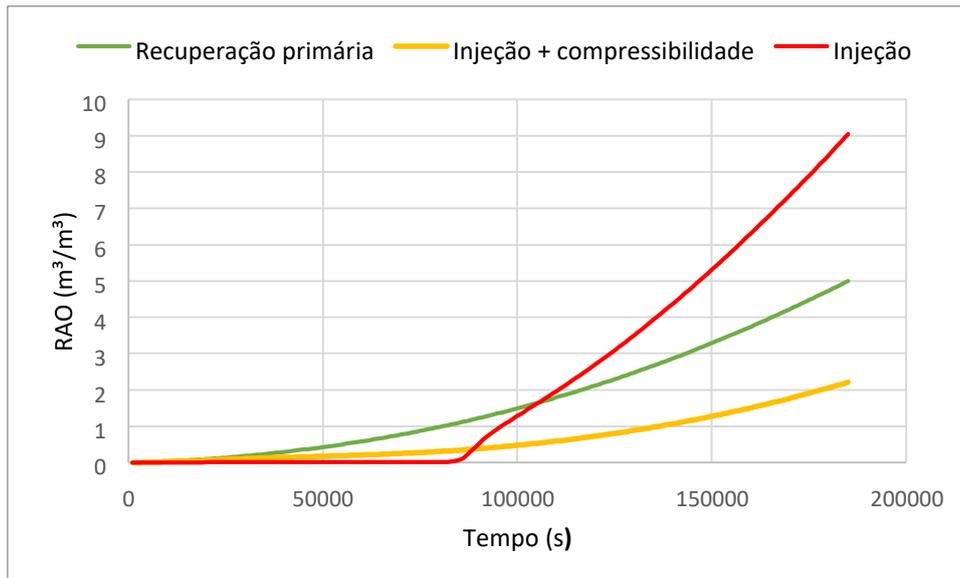


Figura 14: RAO para produção primária, injeção e injeção com compressibilidade

Estes resultados, além de ilustrarem, de forma simplificada, o comportamento típico da recuperação primária e secundária (com injeção de água) de um reservatório subsaturado, também demonstram a importância da compressibilidade do meio nas análises de fluxo. Apesar de neste trabalho a compressibilidade ter sido considerada apenas por sua derivada temporal no termo de armazenamento, sua representação acurada envolveria o acoplamento com as equações de equilíbrio e a descrição da permeabilidade em função da porosidade.

CAPÍTULO 6: CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

A revisão bibliográfica exposta e os resultados apresentados levam às seguintes conclusões:

- O método dos elementos finitos é eficiente na resolução de problemas de fluxo, e suas vantagens levaram ao desenvolvimento de diversas técnicas que adaptam sua formulação convencional. Uma delas, que é o esquema do tipo IMPES, se mostrou acurada e eficiente na representação de fluxos bifásicos.
- Os resultados para a validação do módulo não saturado mostram que o cálculo de resíduos com o uso de volumes de controle é um excelente método para avaliar erros de conservação local. A reaplicação desse resíduo deve ser feita diante de um critério de estabilidade bem definido, que relaciona o tamanho do intervalo de tempo, o tamanho dos elementos da malha, as propriedades dos fluidos e do domínio, e o fator de ponderação utilizado na integração no tempo.
- Ainda sobre a reinjeção dos resíduos no módulo não saturado, estes mostram que esquemas de integração parcialmente implícitos são mais acurados, porém menos estáveis, que esquemas totalmente implícitos.
- O *upwind* da permeabilidade se mostrou uma técnica estável e necessária à qualidade da representação de frentes de saturação.
- A técnica IMPES demonstrou ótimo potencial na resolução de fluxos bifásicos. Apesar de ser estável apenas para intervalos de tempo limitados, realiza soluções rápidas por reduzir as dimensões da matriz a ser invertida, se comparada com um esquema totalmente implícito.
- O método do pseudogás para simulação do modelo black oil, apesar de estar relacionado a erros de conservação, se mostrou eficiente em representar o aparecimento de gás quando atingida a pressão de bolha.
- O método totalmente implícito se mostrou pouco eficiente, em termos computacionais, na simulação do modelo black oil. Esquemas sequenciais seriam mais adequados e ágeis.

As sugestões para pesquisas futuras são:

- Adaptar o programa à resolução de problemas tridimensionais e fazer seu acoplamento com o comportamento mecânico;
- Acoplar o programa desenvolvido ao código de simulação de propagação de fraturas implementado por Morais (2016) e Saba (2017);
- Implementar, no modelo black oil, uma formulação sequencial para sua resolução.
- Tornar a formulação do modelo black oil localmente conservativa, pelo método de avaliação de resíduos apresentado ou pela implementação de uma formulação pelo método dos elementos finitos misto ou Galerkin descontínuo;
- Adaptar o código à resolução de problemas multiescala.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHMED, T. (2001) Reservoir Engineering Handbook. Butterworth-Heinemann, Woburn, Massachusetts, EUA, 2 ed. 1191 p.
- AARNES, J.E. (2004). On The Use Of a Multiscale Finite Element Method For Greater Flexibility and Increased Speed or Improved Accuracy in Reservoir Simulation. Multiscale Model. Simul. 2(3), 421-439.
- ANDERSON, W.G. (1987a) Wettability Literature Survey – Part 5: Effects of wettability in capillary pressure. Journal of Petroleum Engineering 39(11), 16 p
- ANDERSON, W.G. (1987b) Wettability Literature Survey – Part 4: Effects of wettability on relative permeability. Journal of Petroleum Engineering 38(10), 18 p
- BACHMAT, Y., BEAR, J. (1990) Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media. Kluwer Academic Publishers, Volume 4.
- BALIGAR, B.R., PATANKAR, V. (2012) A control-volume finite element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer. Numerical Heat Transfer 3(6): 245 – 261.
- BASSI, F. REBAY, S. (1997) High-Order Discontinuous Finite Element Solution of the 2D Euler Equations. Journal of Computational Physics 138, 251-285.
- BERGAMASCHI, L., MANTICA, S., MANZINI, G. (1998) A mixed finite element – finite volume formulation of the black oil model. SIAM Journal on Scientific Computing 20 (3), 970-997, 28 pp.
- BLUNT, M., RUBIN, B. (1992) Implicit Flux Limiting Schemes for Petroleum Reservoir Simulation. Journal of Computational Physics 102 (1), 194-210.
- CHEN, Z., EWING, R.E. (1997) Comparisons of Various Formulations of Three-Phase Flow in Porous Media. Journal of Computational Physics 132 (2), 362-373.
- CHEN, Z. (2001) Formulations And Numerical Methods Of The Black Oil Model In Porous Media. SIAM Journal on Numerical Analysis, 38(2), pp. 489-514.
- CHEN, Z. HUAN, G., LI, B. (2004) An Improved IMPES Method for Two-Phase Flow in Porous Media. Transport in Porous Media 54: 361-376.
- CHEN, Z. HUAN, G., MA, Y. Computational Methods for Multiphase Flow in Porous Media. (2006). SIAM, 549 p.
- COATS, K.H. (2001) IMPES Stability: The Stable Time Step. SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas.
- COREY, A. T., RATHJENS, C. H., HENDERSON, J. H., WYLLIE, M. R. J. (1956) Three-Phase Relative Permeability Journal of Petroleum Technology 8 (11)
- DURLOFSKY, L.J. (1993) A Triangle Based Mixed Finite Element – Finite Volume Technique for Modelling Two-Phase Flow Through Porous Media. Journal of Computational Physics 105, p 252-266.
- EYMARD, R., SONIER, F. (1994) Mathematical and Numerical Properties of Control Volume Finite-Element Scheme for Reservoir Simulation. Society of Petroleum

Engineers Reservoir Evaluation and Engineering 9 (4)

FARNSTROM, K.L., ERTEKIN, T. (1987) A Versatile, Fully Implicit, Black Oil Simulator With Variable Bubble-Point Option, SPE California Regional Meeting, 8-10 April, Ventura, California

FORSYTH, P., SAMMON, P.H. (1984) Gas Phase Appearance and Disappearance In Fully Implicit Black Oil Simulation. Society of Petroleum Engineering Journal 24 (5), 3 p.

FUNG, L.S., HIEBERT, A.D., NGHIEM, L.X. (1992) Reservoir Simulation With a Control-Volume Finite-Element Method. Society of Petroleum Engineers Reservoir Evaluation and Engineering 7 (3)

GEIGER, S., MATTHAI, S., NIESSNER, J., HELMIG, R. (2009) Black Oil Simulations for Three-Component, Three-Phase Flow in Fractured Porous Media. Society of Petroleum Engineers Journal 14 (2)

GHOREISHIAN, S.A. Application of control volume based finite element method for solving the black oil fluid equations. Petroleum Science 10(3): 361-372

HARTMANN, F., HOUSTON, P. (2002) Adaptive Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for the Compressible Euler Equations. Journal of Computational Physics 2(10), 508-532.

HOTEIT, H., FIROOZABADI, A. (2005) Multicomponent Fluid Flow by Discontinuous Galerkin and Mixed Methods in Unfractured and Fractured Media. Water Resources Research (41) 11

HUBER, R., HELMIG, R. (1999) Multiphase Flow in Heterogeneous Porous Media: a Classical Finite Element Method Versus an Implicit Pressure-Explicit Saturation – Based Mixed Finite Element- Finite Volume Approach. International Journal for Numerical Methods in Fluids 29 (8): 899-920.

KALUARACHCHI, J.J., PARKER, J.C. (1989). An Efficient Finite Element Method for Modelling Two-Phase Flow. Water Resources Research 25(1): 43-54.

KEES, C.E., FARTHING, M.W. (2007) Locally conservative, stabilized finite element methods for variably saturated flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 197, 51-52, p. 4610-4625.

KROGSTAD, S., HAUGE, V.L., GULBRANSEN, A.F. (2009) Adjoint Multiscale Mixed Finite Element Methods. 9 SPE Reservoir Simulation Symposium held in The Woodlands, Texas

LARSON, M.G., NIKLASSON, A.J. (2004) Analysis of Nonsymmetric Discontinuous Galerkin Method for Elliptic Problems: Stability and Energy Error Estimates. SIAM J. Num. Anal., 42(1), 252-264

LEE, S.H., WOLFSTEINER, C., TCHELEPI, H.A. (2008) Multiscale Finite-Volume Formulation For Multiphase Flow in Porous Media: Black Oil Formulation of Compressible Three-Phase Flow With Gravity. Computational Geosciences (12) 3, 351366.

- LEVERETT, M.C. (1941) Capillary behavior in porous solids. *Trans. AIME. Pet. Eng. Div.*, 142: 152-169.
- LEVERETT, M. C., and LEWIS, W. B. (1941) "Steady Flow of Gas-Oil-Water Mixtures Through Unconsolidated Sands", *Trans. AIME*, 142, 107.
- LI, B., CHEN, Z., HUAN, G. (2003) The sequential method for the black-oil reservoir simulation on unstructured grids. *Journal of Computational Physics* 192, p 36-72.
- KOU, J., SUN, S. (2004) On Iterative IMPES Formulation For Two-Phase Flow With Capillarity in Heterogeneous Porous Media. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 1(1): 20-40
- Ministério de Minas e Energia (2016) Balanço Energético Nacional – Ano base 2015
- MOORTGAT, J., SUN, S., FIROOZABADI, A. (2011) Compositional Modeling Of Three-Phase Flow With Gravity Using Higher-Order Finite Element Methods. *Water Resources Research* (47) 5
- MORAIS, L. P. (2016). Análise hidromecânica do problema de Fraturamento Hidráulico. Dissertação de Mestrado, Publicação G.DM- 268/2016, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 110p
- OAK, M.J., BAKER, L.E., THOMAS, D.C. (1990) Three-Phase Relative Permeability of Berea Sandstone. *Journal of Petroleum Technology* 42 (8)
- PAO, W.K.S., LEWIS, R.W. (2002) Three-Dimensional Finite Element Simulation of Three-Phase Flow in a Deforming Fissured Reservoir. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (191) 23-24, 2631-2659
- PEACEMAN, D.W. (1977) *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Developments in Petroleum Science, 6. Elsevier Scientific Publishing Company
- PEERY, J.H., HERRON, E.H. (1969) Three-Phase Reservoir Simulation. *J. Pet. Technol.*, 21: 211-220; *Trans. Am. Inst. Min. Metall. Pet. Eng.*, 246: 211-220.
- ROSA, A.J., CARVALHO, R.S., XAVIER, J.A. (2011) *Engenharia de Reservatórios de Petróleo*, Editora Intrínseca, Rio de Janeiro.
- SABA, J.G.S. (2017) Análise do problema de fraturamento hidráulico utilizando o método dos elementos finitos estendido. Dissertação de Mestrado, Publicação G.DM-283/2017, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 108p.
- STANDING, M.B. (1947) A pressure-volume-temperature correlation for mixtures of California oil and gases. *Drilling and production practice*. API, 275-287.
- SUN, S.Y., WHEELER, M. F., A posteriori error estimation and dynamic adaptivity for symmetric discontinuous Galerkin approximations of reactive transport problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (7-8) (2006) 632–652.
- STONE, H. L. (1970) "Probability Model for Estimating Three Phase Relative Permeability", *Journal of Petroleum Technology* 22 (02)

SZYMKIEWICZ, A (2013) Modeling Water Flow in Unsaturated Porous Media – Accounting for Nonlinear Permeability and Material Heterogeneity. GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences, Springer.

THOMAS, J.E. (2001) Fundamentos de Engenharia de Petróleo. Petrobrás. Rio de Janeiro: Interciência.

THOMAS, L.K., LUMPKIN, W.L., REHEIS, G.M. Reservoir simulation of variable bubble-point problems. Society of Petroleum Engineers Journal, 253(01).

TRANGENSTEIN, J.A., BELL, J. (1989) Mathematical structure of the black oil model for petroleum reservoir simulation. SIAM J. Appl. Mat. Met. 49 (3): 749-783

VALKÓ, P.P., McCAIN Jr, W.D. Reservoir oil bubblepoint pressures revisited; solution gas-oil ratios and surface gas specific gravities. (2003) Journal of Petroleum Science and Engineering 37 (2003) 153-169.

VAN GENUCHTEN, M.T. (1980) A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Society in America Journal, 44(5), 8 p.

ZIENKIEWICZ, O.C., CHRISTIE, I., GRIFFITHS, D.F., MITCHELL, A.R. (1976) Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. International Journal for Numerical Methods in Engineering 10(6) : 1389-1396.

ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. (2000a). The Finite Element, Volume 1 – The Basis. Method.Butterworth-Heinemann, Oxford, United Kingdom, 5 ed., 689p.

ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. (2000b). The Finite Element, Volume 3: Fluid Dynamics. Method.Butterworth-Heinemann, Oxford, United Kingdom, 5 ed., 334p.