



Universidade de Brasília – UnB
Faculdade de Educação – FE
Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGE

Tese de Doutorado

**Análise praxeológica de produções de estudantes de
graduação: um estudo a partir do problema do ponto mais
visitado**

Rogério César dos Santos

Brasília

2017



Universidade de Brasília – UnB
Faculdade de Educação – FE
Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGE

**Análise praxeológica de produções de estudantes de
graduação: um estudo a partir do problema do ponto mais
visitado**

Rogério César dos Santos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação, Universidade de Brasília – PPGE/FE/UNB, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Educação, desenvolvida sob a orientação do Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo.

Brasília
2017



Universidade de Brasília – UnB
Faculdade de Educação – FE
Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGE

TESE DE DOUTORADO

**Análise praxeológica de produções de estudantes de graduação: um estudo
a partir do problema do ponto mais visitado**

Rogério César dos Santos

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo – FE/UnB
Orientador

Prof. Dr. Geraldo Eustáquio Moreira – FUP/UnB
Membro

Prof^a Dra. Regina da Silva Pina Neves – MAT/UnB
Membro

Eronдина Barbosa da Silva – UCB
Membro

Antônio Villar Marques de Sá – FE/UnB
Suplente

Brasília, 2017

Que a Educação esteja a serviço do bem comum.

Agradecimentos

Agradeço às seguintes pessoas e instituições, também responsáveis pela conclusão deste trabalho:

- * Meu orientador Cleyton Hércules Gontijo, pela intensa dedicação prestada na elaboração desta tese.
- * Minha companheira Mônica e filhos João Paulo, Igor e Guilherme pelo constante suporte e compreensão.
- * Minha mãe Rosa e meu pai Jaime, minha sogra Zilma e suas filhas pelos apoios logísticos nos momentos necessários.
- * Universidade de Brasília e Faculdade de Educação pela oportunidade de formação ofertada.
- * Amigos, família, parentes e colegas de curso, pelo constante incentivo.
- * Professores das disciplinas do curso pelos ensinamentos partilhados.
- * Departamento de Matemática pelas formações na Graduação e no Mestrado.
- * Professores da banca de qualificação e de defesa de tese: Regina Pina, Geraldo Eustáquio e Erondina Barbosa pelas correções, sugestões e incentivos dados.
- * Colegas de trabalho, alunos e ex-alunos meus pela torcida para o sucesso do trabalho.

Resumo

Esta tese tem por objetivo analisar, por meio da análise praxeológica e da teoria das representações semióticas, as produções de alunos de nível superior na resolução do problema do ponto mais visitado por caminhos e também analisar o entendimento dos estudantes sobre as novas propriedades do Triângulo de Pascal que oriundam deste problema. Tanto o problema do ponto mais visitado quanto as novas propriedades do Triângulo de Pascal, trabalhados pelos estudantes participantes da pesquisa, foram recentemente introduzidos por Santos e Castilho (2013) e Melo e Santos (2014), respectivamente. As produções dos alunos foram ponderadas sob o ponto de vista das representações semióticas de Duval (1996). A metodologia utilizada para a análise das produções dos alunos foi a Análise Praxeológica de Yves Chevallard (1999). As conclusões foram as seguintes: a resolução do problema do ponto mais visitado, introduzido através de uma situação adidática, propiciou aos alunos de nível superior resgatarem e solidificarem seus conhecimentos em combinatória e em probabilidade; os alunos abordaram o problema convertendo adequadamente, com o auxílio gradual do pesquisador, os registros das representações semióticas: o geométrico, o algébrico e o registro por extenso; a ludicidade envolvida em parte das atividades aplicadas serviu como fonte importante de motivação; foi possível constatar que os alunos compreenderam a essência do problema do ponto mais visitado e compreenderam, também, as novas propriedades do Triângulo de Pascal que surgem a partir dele. Por fim, foi permitido concluir que a análise praxeológica de Chevallard auxilia o professor a entender mais profundamente em que patamar de conhecimentos em matemática os estudantes se encontram naquele momento.

Palavras-chave: Análise praxeológica. Resolução de problemas. Problema do ponto mais visitado. Representações Semióticas. Lúdico.

Abstract

This thesis aims to analyze the productions of higher education students in solving the problem of the most visited point by paths, through praxeological analysis and of the theory of semiotic representations, and also to analyze the students' understanding of the new properties of Pascal's Triangle that originate from this problem. Both the problem of the most visited point and the new properties of Pascal's Triangle, worked by the students participating in the research, were recently introduced by Santos and Castilho (2013) and Melo and Santos (2014), respectively. The students' productions were weighted from the point of view of the semiotic representations of Duval (1996). The methodology used for the analysis of the students' productions was the Praxeological Analysis of Yves Chevallard (1999). The conclusions were as follows: solving the problem of the most visited point introduced through a non-didactic situation allowed the students of higher education to rescue and to solidify their knowledge in combinatorial analysis and in probability; the students approached the problem by properly converting the registers of semiotic representations, with the gradual aid of the researcher: the geometric, the algebraic and the register in full; the playfulness involved in part of the activities applied served as an important source of motivation; it was possible to verify that the students understood the essence of the problem of the most visited point and also understood the new properties of Pascal's Triangle that arise from it; finally, it was possible to conclude that the praxeological analysis of Chevallard helps the professor to understand more deeply in what level of knowledge in mathematics the students are in that moment.

Keywords: Praxeological analysis. Problem solving. The problem of the most visited point. Semiotic representation. Playfulness.

LISTA DE SIGLAS

Anped - Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação

BA – Bahia

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

DF – Distrito Federal

EM – Educação Matemática

ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

FUP – Faculdade Planaltina da Universidade de Brasília

GO – Goiás

ICMI – Comissão Internacional de Instrução Matemática

PAM – Passeios Aleatórios da Mônica

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PFC – Princípio Fundamental da Contagem

PISA –Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

PNLDEM –Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio

TAD – Teoria Antropológica do Didático

TD – Transposição Didática

TSD – Teoria das Situações Didáticas

UnB - Universidade de Brasília

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Grade 5 por 5 de caminhos	10
Figura 2 - Os caminhos passam por pontos com uma coordenada inteira no problema do ponto mais visitado.....	12
Figura 3 - Problema de Mont Hall das 3 portas	26
Figura 4 - Resultados da busca por combinatória superior	29
Figura 5 - Os passeios aleatórios da Mônica.....	38
Figura 6 - O triângulo didático.....	45
Figura 7 - Gráfico da função $f(x)=x^{1/\ln x}$	53
Figura 8 - Figura relativa à primeira atividade do estudo piloto	66
Figura 9 - A primeira atividade: quantos caminhos saem de A e chegam em B = (3,3)?	67
Figura 10 - que possuem a mesma quantidade de caminhos: F e G, E e H, D e I, C e K, Q e J, P e O, L e N, A e B.....	68
Figura 11 - Pontos mais visitados no quadrado 4 por 4	70
Figura 12 - Cálculos da quantidade de caminhos para cada ponto.....	93
Figura 13 - Quantidades de caminhos em cada ponto.....	94
Figura 14 - Cálculo do número de caminhos pelo ponto cental	94
Figura 15 - Indicação dos pontos vizinhos de A e de B (digitalização pouco legível)	94
Figura 16 - Indicação do ponto D.....	95
Figura 17 - Cálculos das quantidades de caminhos para cada ponto	95
Figura 18 - Sacola com as bolinhas a serem retiradas pelos alunos.....	100
Figura 19 - Cada aluno retirava duas bolinhas para formar o início de um caminho aleatório. 100	
Figura 20 - Cada caminho formado por cada aluno, até o ponto (1,1).....	101
Figura 21 - Tabela para o cálculo de quantos caminhos passam por cada ponto da diagonal ..	105
Figura 22 - Triângulo de Pascal desenhado no quadro e seu correspondente no quadrado	106
Figura 23 - Ilustração da propriedade do Triângulo.....	107

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Palavras-chaves: Combinatória + Superior.....	29
Quadro 2 - Palavras-chaves: Triângulo de Pascal + Ensino.....	31
Quadro 3 - Palavras-chaves: probabilidade +superior	31
Quadro 4 - Palavras-chaves: praxeológica + matemática. Trabalhos relacionados ao livro didático.....	32
Quadro 5 - Palavras-chaves: praxeológica + matemática. Trabalhos relacionados à atuação do professor.....	34
Quadro 6 - Palavras-chaves: praxeológica e matemática. Temas diversos.	35

LISTA DE TABELA

Tabela 1 - Tipo de reforço necessário para a disciplina de Estatística.....	77
-----------------------------------------------------------------------------	----

SUMÁRIO

Conteúdo

1	Introdução	8
1.1	Apresentação do autor	8
1.2	O surgimento do problema do ponto mais visitado.....	9
1.3	Divisão dos capítulos da tese	12
1.4	Justificativa	13
1.5	Dificuldades no ensino de Matemática	13
1.6	A matemática como objeto de desejo de estudo.....	18
1.7	Combinatória e Probabilidade: aspectos conceituais e educacionais	20
1.8	Enunciado da tese.....	27
1.9	Objetivos geral e específicos.....	27
1.10	Estado da arte	28
2	Referencial Teórico	41
2.1	Educação Matemática – aspectos históricos	41
2.2	Didática da Matemática.....	44
2.3	Teoria das situações didáticas	45
2.4	Representações Semióticas	49
2.5	Resolução de Problemas.....	51
3	O problema do ponto mais visitado.....	57
4	Metodologia	59
4.1	Tipo de Pesquisa	59
4.2	Teoria Antropológica do Didático.....	62
4.3	Metodologia da Análise Praxeológica.....	63
4.4	Estudo piloto	65
5	A condução da pesquisa	75
5.1	Caracterização da instituição.....	75
5.2	Perfil dos estudantes participantes da pesquisa de campo	76
5.3	Descrição das atividades aplicadas na pesquisa de campo.....	78
6	Análise dos Resultados.....	79
7	Conclusões	109
8	Referências.....	117
	APÊNDICE I – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido	132
	APÊNDICE II – Questionário para caracterização dos estudantes	134

APÊNDICE III – Registros digitalizados das atividades realizadas pelos alunos, referentes ao último dia de aplicação.....	136
APÊNDICE IV – Uma proposta de aplicação do problema do ponto mais visitado no Ensino Básico.....	143

1 Introdução

Neste capítulo será feita a apresentação do autor e de sua trajetória até o instante do surgimento do problema combinatório que norteia o trabalho desta pesquisa. Também serão abordadas principalmente as motivações que levaram à elaboração do presente trabalho, com observações acerca do ensino de Matemática e do ensino de Análise Combinatória. Além disto, este capítulo se dedicará a estabelecer os objetivos da tese e também realizar o levantamento do estado da arte sobre os temas envolvidos no trabalho.

1.1 Apresentação do autor

Nasci e cresci em Brasília, Distrito Federal (DF). No Ensino Fundamental ainda não tinha clareza sobre qual assunto eu tinha mais facilidade em trabalhar. Foi no Ensino Médio que percebi que a Matemática me era a mais familiar das disciplinas da escola. Era não apenas a que eu mais compreendia, mas também a que mais me dava satisfação em me dedicar. Após o término da Educação Básica, entrei na universidade para cursar o bacharelado em Matemática. Durante os estudos, trabalhei em escolas públicas e particulares do DF, ministrando aulas de Matemática e Física nos ensinos fundamental e médio. No meio da graduação, solicitei a troca de habilitação para licenciatura, e me formei em 2001. Em seguida, fui aprovado no concurso para professor efetivo da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal – SEEDF e ingressei na carreira do magistério da Educação Básica, porém, logo em seguida, para surpresa de muitos, pedi exoneração do cargo para que pudesse me dedicar ao mestrado. Ingressei, então, no mestrado em Matemática – Geometria Diferencial, concluindo-o no ano de 2003. Neste mesmo ano, comecei a trabalhar como professor de Matemática no ensino superior.

Antes de entrar para o quadro de professores da Universidade de Brasília em 2009, no campus de Planaltina – FUP/UnB, já me era prazeroso, desde o ano de 2006, escrever artigos sobre a Matemática ensinada tanto na Educação Básica quanto a ensinada em cursos de graduação e submetê-los para revistas científicas nas áreas de Ensino, Educação Matemática e Matemática, sendo que parte dos artigos era publicada, outra parte - a maioria - recusada pelos comitês. Um dia, ao mostrar um dos artigos publicados para um colega de profissão, no caminho para o trabalho no ônibus, o mesmo não se mostrou empolgado e comentou que estes artigos não dão dinheiro...

Talvez o colega não estivesse num bom dia naquele momento, porém, sua observação me fez perceber o quanto aqueles trabalhos me faziam feliz, afinal, o único pagamento que me satisfaz é o prazer de leitura que os resultados matemáticos e suas aplicações ao ensino proporcionam a quem está lendo, assim como me sinto quando me deparo com resultados maravilhosos que o universo artístico matemático e seu viés educacional dispõem, sejam eles de nível médio ou superior, de outros autores.

De fato, eu não sabia se os artigos poderiam me render algum lucro financeiro no futuro, o lucro da satisfação interior era mais do que suficiente. Contrariamente, os artigos acabaram por influenciar minha vida financeira, pois, no concurso que prestei em 2009 para professor da UnB, utilizei-os na prova de títulos, o que me auxiliou na aprovação do mesmo. Mesmo após entrar na Universidade, jamais cessou esta minha paixão por esta área do conhecimento, e pretendo continuar escrevendo sobre Matemática e suas aplicabilidades à Educação Matemática.

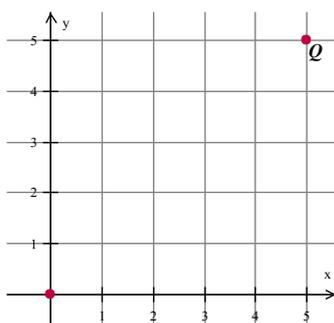
Percebo, por experiência própria e analisando revistas na área de Matemática pura, de Ensino e de Educação Matemática, que é possível que desenvolvamos uma Matemática nova, inédita, usando simplesmente ferramentas de nível básico ou de graduação, e que há belas maneiras de a trabalharmos em sala de aula. Desperta tanta emoção, creio, quanto desenvolver Matemática em pesquisa de ponta. O problema do ponto mais visitado é um exemplo disto, além de ser também campo frutífero para a área de Educação. Como este problema surgiu é o tema do próximo tópico.

1.2 O surgimento do problema do ponto mais visitado

Em 2013, enquanto professor de Cálculo e de Estatística Básica no *campus* Planaltina da UnB, deparando-me com o clássico problema de nível médio de se contar caminhos no plano cartesiano, não poderia imaginar que me viria à mente um problema que renderia ótimos e inesperados frutos: a publicação de artigos em revistas na área de Ensino de Matemática, a descoberta de uma inédita propriedade do Triângulo de Pascal, a oportunidade de entrada para o doutorado na Faculdade de Educação da Universidade de Brasília, a possibilidade de aplicação do problema em sala de aula sob a ótica da Educação Matemática e, desdobramentos do problema para o nível superior e até de pós-graduação.

O problema que estava contemplando inicialmente era o seguinte: quantos percursos existem, em um plano cartesiano, da origem $(0,0)$ até o ponto $Q = (5,5)$, caminhando-se somente para a direita ou para cima?

Figura 1 - Grade 5 por 5 de caminhos



Fonte: construção própria no software livre Winplot¹.

Esta questão pode ser encontrada em livros de Ensino Médio no capítulo de Análise Combinatória e também em certames como vestibulares ou concursos de admissão em órgãos públicos. A resposta para ela é a Combinação de 10 elementos, tomados 5 a 5, pois, se considerarmos 10 passos que precisam ser dados até o ponto Q , devem ser escolhidos, *em qualquer ordem*, 5 passos que serão dados para cima (ou então para a direita), e, por isso, o uso da combinação de 10, 5 a 5. Enfim, são $\frac{10!}{5!5!} = 252$ percursos até o ponto Q .

Então, pensei em como poderíamos nos aprofundar nesta empreitada. Questionei: existe um ponto de coordenadas inteiras, que não a origem nem o ponto final Q , pelo qual passam mais caminhos? Certamente, para o caso considerado 5 por 5, teria que existir este ponto mais visitado. Mas, será que este ponto seria o mesmo para qualquer ponto final do tipo (N, N) ? Neste momento, não tinha ideia da resposta, nem em como prová-la. E menos ainda no que renderia este estudo. O problema de encontrar o ponto se passaria então a se chamar de *o problema do ponto mais visitado*.

Analisando vários casos particulares, com o auxílio da planilha eletrônica Excel para fazer as contas, pude conjecturar que o ponto $(1,1)$ é o mais visitado, bem como o seu simétrico $(N - 1, N - 1)$, para todo $N > 1$. Com a ajuda do colega José Eduardo Castilho, publicamos um artigo provando que, de fato, para todo N , este é o ponto mais visitado por caminhos (SANTOS; CASTILHO, 2013). Para a demonstração, foi utilizado o Princípio de Indução, juntamente com as ferramentas da Análise Combinatória. É interessante destacar que, pela intuição, não seria o ponto $(1,1)$ o mais visitado por caminhos, e sim algum ponto localizado mais ao centro da malha quadrangular de percursos, como pude constatar perguntando informalmente para

¹ O site oficial do software é: <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>.

conhecidos, alunos e professores de Matemática. A Matemática mostra-se, neste caso, como em várias outras situações, adversa à intuição humana.

Em seguida, tendo o professor Antônio Luiz de Melo como parceiro, publicamos outro artigo com as novas propriedades do Triângulo de Pascal (MELO; SANTOS, 2014), que se originaram a partir do primeiro artigo supracitado. Foi uma descoberta ao acaso, ou, usando os termos da Estatística, aleatória, pois nunca havíamos pensado que chegaríamos tão longe. São propriedades do Triângulo envolvendo desigualdades entre resultados de operações de seus elementos.

As ideias e verificações da prova feitas pelo professor Castilho foram de fundamental importância para o trabalho do primeiro artigo. Também o foram os *insights* do professor Antônio Luiz, ao encontrar as demonstrações das novas propriedades originadas do problema. O matemático raramente consegue seguir sua jornada sozinho. Ideias e resultados de colegas ou de desconhecidos são importantíssimos para que o mesmo possa descobrir seus teoremas e resultados. A evolução do conhecimento é feito de tentativas, erros, acertos, novas tentativas e diálogos.

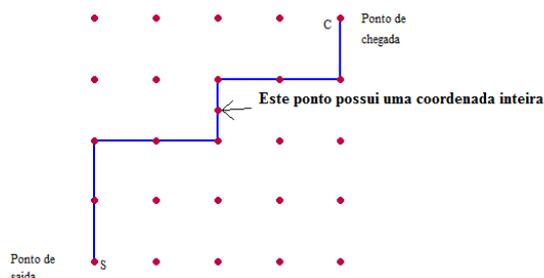
Depois de publicados esses dois artigos, deparei-me com alguns trabalhos em Educação Matemática que tratam de um problema muito semelhante ao do problema do ponto mais visitado. São trabalhos que têm utilizado o problema dos percursos como fonte de ideias a serem implementadas em sala de aula, tanto no quesito de estimular a criatividade, quanto em promover o aprendizado autônomo do aluno, e também na utilização do computador como recurso para se chegar a conjecturas e conclusões (FERNANDEZ; FERNANDEZ, 1999; FERREIRA, 2011; KATAOLA, 2010; NAGAMINE; HENRIQUES; UTSUMI; CAZORLA, 2011).

Aproveitei as ideias destes trabalhos para a presente pesquisa, apesar de existirem diferenças substanciais no problema proposto. Nesta pesquisa, busca-se o ponto mais visitado por percursos que partem da origem $(0,0)$ e chegam em um único ponto final (N,N) . Já no problema que fora implementado nos trabalhos acima referidos procura-se o ponto mais visitado por caminhos que partem da origem $(0,0)$ e chegam em uma diagonal da malha quadriculada. Além disto, ao contrário dos trabalhos citados, esta tese se propõe a analisar produções de alunos de nível superior, sendo este mais um fator de diferenciação entre as pesquisas.

É de suma importância também que não se confunda o tema de nosso trabalho com a geometria do táxi, assunto já consagrado como conteúdo paradidático aplicado

em escolas e cursos superiores (GUSMÃO; SAKAGUTI; PIRES, 2017). Na geometria do táxi, onde a distância entre dois pontos do plano *não* é calculada pelo Teorema de Pitágoras, todos os pontos do plano são levados em conta, mesmo que tenham ambas as coordenadas não inteiras, enquanto que no problema do ponto mais visitado, os caminhos só seguem por sobre pontos que possuem pelo menos uma coordenada inteira, conforme ilustrado:

Figura 2 - Os caminhos passam por pontos com uma coordenada inteira no problema do ponto mais visitado



Fonte: Elaboração própria.

No problema do ponto mais visitado, um caminho não passa por pontos como $(\frac{1}{2}, \pi)$, o que poderia vir a acontecer na geometria do táxi.

Ressalta-se que o fato de termos conduzido uma pesquisa sustentada pela Análise Praxeológica e pela Teoria das Representações Semióticas no contexto da resolução do problema ponto mais visitado por caminhos com estudantes da educação superior consiste em uma significativa diferença entre a pesquisa desta tese e os demais trabalhos.

A seguir, a divisão dos capítulos da tese.

1.3 Divisão dos capítulos da tese

O capítulo 1 está sendo dedicado a apresentar o enunciado da tese, os objetivos, a justificativa, o surgimento do problema do ponto mais visitado, o estado da arte correspondente ao tema desta pesquisa, as considerações com relação ao Ensino de Matemática e ao ensino de Combinatória.

O capítulo 2 será dedicado ao referencial teórico da pesquisa, onde serão levantadas as teorias relacionadas à temática desta tese.

O capítulo 3 será dedicado à explicação formal do problema do ponto mais visitado e suas possibilidades de aplicação em sala de aula.

O capítulo 4 discorrerá sobre a metodologia de trabalho, o qual inclui a análise praxeológica de Chevallard (1999), além dos aspectos da pesquisa qualitativa e do

estudo de caso. Será relatado também neste capítulo o estudo piloto que fora realizado em uma turma de graduação em 2015.

O capítulo 5 contém a descrição da condução da pesquisa em campo.

No capítulo 6 será feita uma análise praxeológica das produções dos alunos na resolução do problema mais visitado, isto é, a análise dos dados.

No capítulo 7, a conclusão e indicações de possíveis desdobramentos desta pesquisa.

A seguir, a justificativa da presente tese.

1.4 Justificativa

A presente pesquisa se justifica pela pouca produção acadêmica existente sobre o método de resolução de problemas no ensino de análise combinatória e de probabilidade no Ensino Superior, e menos ainda com relação à aplicação didática do problema do ponto mais visitado apresentado na introdução desta tese, à luz das teorias do Antropológico do Didático de Chevallard e das Representações Semióticas de Duval.

A seguir, serão levantadas questões relacionadas às dificuldades existentes no ensino de Matemática, cuja realidade estimula o desenvolvimento de trabalhos como o desta tese.

1.5 Dificuldades no ensino de Matemática

O ensino de Matemática padece de alguns entraves para favorecer a aprendizagem. Em parte, pelo fato de grande parte dessa disciplina ser pouco vista ou utilizada no dia a dia das pessoas (KNIJNIK; DUARTE, 2010). Desta forma, torna-se difícil convencer o estudante de sua importância em aplicações futuras naquilo em que trabalhará ou estudará, tanto na fase jovem quanto na adulta. Tal distanciamento pode ser superado em alguns casos, nos quais a Matemática é imediatamente reconhecida no universo familiar e social do estudante, como no estudo das porcentagens, da álgebra elementar, da proporcionalidade, da estatística, da combinatória, da probabilidade, da geometria euclidiana, da matemática financeira, dentre outros temas. Outros tópicos, por exemplo, a divisão de polinômios, as equações trigonométricas, os números complexos e a geometria analítica constituem-se temas que não são explorados no cotidiano da maioria dos cidadãos/cidadãs da sociedade. São temas que possuem apenas o potencial de serem explorados na fase adulta do estudante, dependendo da área em que o mesmo irá empreender em sua vida.

Isto, associado ao fato de que o aluno é compulsoriamente levado a estudar todos estes assuntos, até quando o mesmo já identificou, no auge do Ensino Médio, que optará por atividades ligadas ao campo das Ciências Sociais e Humanas em sua futura profissão, pode verdadeiramente desmotivá-lo aos estudos desta ciência, inflando os índices de reprovação/evasão em Matemática. Uma questão surge no decorrer desta análise: será mesmo necessário incluir todos os tópicos previstos do Ensino Médio para *todos* os estudantes do nível médio? Não haveria um meio de flexibilizar os tópicos de interesse a serem trabalhados nesta faixa etária?

Um estudante que possui claramente em sua cabeça que trabalhará com música poderia ser poupado de alguns assuntos que são deveras específicos da Matemática, bem como de outras matérias, e se dedicar, por exemplo, em estudar instrumentos, aulas de canto e sonorização. O tempo não permite que o estudante aprofunde em ambas as modalidades: aquilo que a escola obriga e o objeto de sua paixão.

Tal questionamento relaciona-se diretamente com a reforma do Ensino Médio realizada em 2017, com alterações na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 9.394/2016, bem como com a discussão da Base Nacional Comum, em processo de elaboração.

Outros fatores corroboram para o fracasso no processo de ensino-aprendizagem em Matemática (IMENES, 1990), tais como: formação inadequada dos professores; a falta de incentivo do Estado ao professor da educação básica; o apego dos professores a métodos convencionais de ensino, como: apresentação de conceitos, mostra de exemplos e resolução de exercícios como única metodologia de ensino adotada (SKOVSMOSE, 2000); a falta de diálogo entre professor e aluno; a equivocada popularização de que a Matemática é difícil e inacessível a pessoas “normais”; a desconexão da Matemática com a sua própria história em sala de aula e a formalização da apresentação do conteúdo destoante com a forma de criação da Matemática. Acrescenta-se a estes a realidade de turmas com número excessivo de alunos em sala, o que compromete a interação aluno-professor. Todos estes pontos precisam ser analisados pela sociedade para uma transformação da qualidade do processo de ensino e aprendizagem no Brasil.

No que diz respeito à formação dos professores, os cursos de graduação deveriam favorecer, além do conhecimento técnico-científico específico da Matemática, a aprendizagem de saberes relacionada ao exercício da docência. Segundo Moreira e David (2013) há uma diferença entre o saber escolar, o saber científico e o saber

docente. O saber escolar carrega consigo aspectos da necessidade de se aprender aquele conteúdo, da necessidade de se ir além daquele conhecimento. Tendo isto em vista, o aluno estaria mais receptivo quando levado à aquisição dos novos conhecimentos. O salto dos números racionais para os números reais, como exemplo, deveria ser feito de acordo com a evolução da humanidade, com as novas necessidades da sociedade, para que o aluno se convença das aplicações deste novo conhecimento, mesmo que no saber científico estas questões já sejam devidamente definidas. Seria de grande valia para o sucesso do processo de ensino e aprendizagem que os professores tivessem isto em conta.

Moreira e David (2013) ainda salientam que o professor deveria estar atento aos seguintes conhecimentos: conhecimento do conteúdo; conhecimento curricular envolvendo os programas e materiais curriculares; conhecimento pedagógico geral com referência especial aos princípios e estratégias de manejo de classe e de organização; conhecimento pedagógico do conteúdo que é específico dos professores; conhecimento das características cognitivas dos alunos; conhecimento do contexto educacional e dos alunos e, conhecimento dos fins educacionais bem como dos seus propósitos históricos e valores. A matemática é vista, desta forma, não apenas como um conteúdo a ser ensinado, mas como o resultado de uma prática docente na escola (MOREIRA; DAVID, 2013).

Fiorentini e Lorenzato (2006) diferenciam o matemático do educador matemático, opinando que o primeiro estaria interessado na Matemática como um fim e o segundo teria a visão de que a Matemática é um meio para se formar o cidadão, priorizando a educação *pela* matemática, ao invés de *para* a matemática. Eles lamentam que haja dois grupos disjuntos de profissionais, os matemáticos que não estariam preocupados com as questões pedagógicas e o educador matemático. O educador matemático é um profissional que lida com questões como: a) Qual o melhor método de ensino: a explicação teórica ou resolução de problemas? b) Por que os alunos possuem dificuldades em algebrização? c) Como ensinar conteúdos que possuem ligação com o cotidiano do estudante? Por isto, Fiorentini e Lorenzato (2006) defendem uma aproximação dos dois tipos de profissionais, para que possam unir seus objetos de pesquisa com vistas a uma educação matemática de qualidade.

A recente solidificação do campo de estudo em Educação Matemática pode ser o motivo do distanciamento ainda existente entre os matemáticos e os educadores matemáticos (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). Nas décadas de 50 e 60 os estudos

com relação ao ensino de matemática eram voltados majoritariamente para estudantes da Educação Infantil. A Educação Matemática se consolidou como campo de pesquisa entre os anos 70 e 80, porém ainda com uma tendência tecnicista com respeito à atuação do professor.

A formação do professor foi sendo problematizada com o desenvolvimento gradual das pesquisas em Educação. A partir de 1980 as pesquisas qualitativas passaram a fazer parte das metodologias dos pesquisadores juntamente com as quantitativas, com enfoque nas questões de modelagem, etnomatemática, resolução de problemas, currículo, etc (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). Atualmente as comunidades de Educação Matemática, com suas pesquisas, possibilitam ao professor sua constante formação no que diz respeito às problematizações relativas à sala de aula, tais como: informática e ensino, ensino de álgebra, pensamento geométrico, epistemologia da matemática, educação estatística, saberes docentes, desenvolvimento profissional de professores de matemática, dentre outros.

A partir de 1990 a identidade do professor de matemática começa a ser problematizada, tanto em relação às suas concepções de ensino e de avaliação quanto aos conhecimentos em Matemática que os professores possuíam ou deveriam possuir. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006) os professores têm protestado contra o distanciamento entre a pesquisa em Educação e a sala de aula, ou seja, a pouca interação entre o pesquisador universitário e o professor da Educação Básica e que, para que se possa amenizar este problema, muito tempo e dedicação teriam que ser empregados para que o professor possa ser um pesquisador ao manter um constante relacionamento com a comunidade científica, o que seria considerado o ideal para uma permanente formação do profissional.

Gatti e Nunes (2009) apontam que os cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil possuem características que podem comprometer a qualidade da formação do professor nesta disciplina. Na pesquisa realizada pelas autoras, há cursos de licenciatura que primam por um aprofundamento nos conteúdos específicos da Matemática como campo de conhecimento sem considerar os desafios do processo de ensino e aprendizagem em salas de aula da educação básica, enquanto há cursos que não conseguem conectar os aspectos pedagógicos aos assuntos específicos da disciplina a ser ensinada, deixando este trabalho quase que exclusivamente para o licenciando. Elas apontam discrepâncias entre as horas dedicadas à formação específica em Matemática e a formação para a docência, afetando assim a formação do professor, como o Estágio e

a elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso, ambas comprometidas pela fragilidade dos projetos políticos pedagógicos das licenciaturas em geral. Gatti e Nunes (2009) salientam também que as universidades têm relegado aos que se dedicam ao ensino uma categorização inferior com relação às atividades de pesquisa na Pós-Graduação.

A falta de uma formação adequada compromete o movimento de transformação do saber científico para o saber escolar que é desenvolvido em sala de aula. Esta transformação, que precisa ser cuidadosamente trabalhada nas licenciaturas, é chamada Transposição Didática – TD (CHEVALLARD, 1999; VALENTE, 2004). Por sinal, o modelo da Transposição Didática – TD – de Chevallard expandiu-se para outras disciplinas além da Matemática.

Segundo Valente (2004), pais, cientistas, instâncias políticas e órgãos públicos teriam o dever de adaptar e reorganizar os saberes escolares a partir dos saberes científicos, de acordo com a teoria da TD de Chevallard. Porém, nesse momento surge uma questão: o professor teria um papel passivo neste processo? Ele não faria a transposição didática, apenas a aplicaria em suas aulas?

Chervel (CHERVEL; COMPERE, 1999), um crítico da teoria da Transposição Didática de Chevallard, defende que a escola deveria possuir papel criativo importante na constituição dos saberes. Defende também que o teórico da Educação Yves Chevallard desconsidera o papel do professor na criação da transposição didática, que o professor já receberia a transposição já realizada, e este teria apenas o trabalho de adequá-la às aulas. No entanto, há autores que conseguem vislumbrar em Chevallard seu reconhecimento frente ao papel criador da escola e do professor, como aponta Leite (2004).

A presente tese pode ser um exemplo no qual o professor teria a liberdade de transpor conteúdos para o contexto da sala de aula. O problema do ponto mais visitado e as recentes propriedades do Triângulo de Pascal daí resultante foram aplicados em sala na pesquisa desta tese, e tiveram aceitação e a devida compreensão por parte dos alunos, mesmo sendo um assunto não previsto na ementa correspondente à disciplina.

Outra crítica à TD refere-se à fonte do saber escolar: o saber científico deveria ser o único saber a ser transposto para a escola, defenderia Chevallard (LEITE, 2004). Outras áreas como a gastronomia ou a pesca não entrariam no rol dos saberes a serem escolarizados. No entanto, novamente esta poderia ser outra interpretação equivocada das ideias de Yves Chevallard. O mesmo não estaria propenso a limitar sua metodologia

de transposição para o saber científico, apesar de que o mesmo focara seus estudos no campo da Matemática.

Dando continuidade às questões de ensino de matemática, no tópico seguinte será levantada a questão da motivação para o estudo da Matemática.

1.6 A matemática como objeto de desejo de estudo

Com relação à motivação para o estudo da Matemática, o aluno não deve ser estimulado apenas pela aplicação imediata e prática desta disciplina. Como é sabido, a história nos mostra que a matemática aplicada ao mundo físico corresponde a apenas uma parcela da Matemática produzida pela humanidade, fato que deve continuar por um longo tempo ainda, dada a rapidez com que esta disciplina se amplia e desenvolve dia a dia (HARDY, 2000). É uma ciência sempre à frente de seu tempo.

Após conhecer as aplicações que a Matemática proporciona às diversas áreas do conhecimento, é de fundamental importância que os padrões e as demonstrações sejam apresentados aos estudantes, para que os mesmos possam apreciá-los como uma arte, uma poesia, uma música, que ele próprio pode, porventura, vir a descobrir e criar, fazendo-os entender que a Matemática também é uma área que tem campo próprio de trabalho. Encorajar os estudantes neste sentido é de grande valia ao processo de ensino e aprendizagem. Isto inclui também a motivação pela criação de ideias matemáticas originais.

Conjecturar faz parte do trabalho do cientista, arriscando-se, inclusive, ao erro. Afinal, pensar numa conjectura ousada pode dar mais frutos do que seguir por caminhos seguros, porém limitados (BICUDO, 2002). O estímulo à prática da demonstração de uma proposição leva o aluno a conhecer o processo de fazer matemática, isto é, da prova, que inclui o uso da lógica, de conceitos primitivos e de outras provas para a construção de uma nova demonstração. A demonstração não anda em círculos, como os verbetes de um dicionário no qual uma definição depende de outras definições em uma relação cíclica infinita. Ao contrário, a demonstração parte de axiomas pré-estabelecidos e de conceitos aceitos sem definição, para se chegar a novas propriedades e novas definições que podem ser feitas por sistemas lógicos, e tal noção é fundamental para que o aluno entenda de fato o que é a Matemática (BICUDO, 2002). Segundo Bicudo (2002), é crucial que se entenda que a Matemática não pode ser toda baseada no sistema empírico, isto é, da observação. Ela necessita de algo que confirme definitivamente aquele assunto, de uma prova infalível e incontestável para qualquer afirmação. A

conjectura nada mais é do que uma suspeita de veracidade de certa afirmação, que anseia pela prova que está sendo buscada pelo matemático. O problema do ponto mais visitado, objeto de estudo desta tese, serve de exemplo. O ponto (1,1) é o mais visitado em quadrados, fato já provado por Santos e Castilho (2013), porém fora conjecturado antes através de contas feitas com o auxílio do computador. Já em retângulos, a prova ainda não fora encontrada. Porém, simulando em computadores, pode-se verificar que o ponto (1,0) é o mais visitado nos casos M por N com $M > N$. Fez-se também a simulação para todos os retângulos possíveis até a ordem 150 por 149, no software livre *Máxima*. O programa processou os dados por uma noite inteira e foi permitido concluir, nestes casos, que o referido ponto (1,0) é o mais visitado em tais retângulos. Assim, foi possível conjecturar que o ponto (1,0) é o mais visitado. Pretende-se, em breve, publicar esta experimentação, entretanto, ainda busca-se a prova, se é que ela existe.

A demonstração nos cursos de Licenciatura em Matemática tem sido causa de incômodo entre estudantes e professores. Segundo Neves, Baccarin e Silva (2013), a prática da prova tem sido relegada, em maior grau, aos cursos de bacharelado, por não se acreditar que ela pode desempenhar um papel na formação do licenciando:

[...] entendemos que as demonstrações foram e são instrumentos importantes para e na produção de conhecimento matemático e podem se transformar, também, em instrumentos importantes para a prática discente e docente em sala de aula seja na Educação Básica, seja na licenciatura em matemática (NEVES; BACCARIN; SILVA, 2013, p. 176).

Os autores ainda salientam que os estudantes dos cursos de licenciatura em Matemática se tornam meros expectadores das demonstrações já existentes quando não são incentivados a pensar por si próprios sobre os problemas matemáticos. Estendo, naturalmente, para as licenciaturas em geral, como em Ciências Naturais, curso fonte da pesquisa desta tese. Neves, Baccarin e Silva (2013) realizaram uma pesquisa na qual se verificou que os licenciandos em Matemática tinham dificuldades na arte da argumentação, isto é, no trabalho de se demonstrarem proposições. A pesquisa conclui afirmando que o processo pode se tornar um círculo vicioso, onde professores universitários propagam suas dificuldades em demonstrações para seus estudantes.

E, afinal, a Matemática é descoberta ou inventada? Ela existe independentemente do homem ou ela é inventada pelo homem? Se fosse inteiramente inventada, duas pessoas em continentes diferentes criariam suas próprias Matemáticas, mas sabe-se que não é assim. A música é um exemplo de algo inventado pelo homem. É

bastante improvável que duas pessoas componham exatamente a mesma música. Já os padrões da Matemática, por serem algo exterior à vontade humana, são universais e imutáveis. Porém, as notações, os símbolos e letras utilizadas em suas provas podem se alterar neste cenário. Mas os resultados e teoremas são essencialmente os mesmos.

Um fato em particular que ilustra isto foi a descoberta do Cálculo Diferencial no século XVII, atribuída a Leibniz e a Newton, porém um sem o conhecimento do outro. Descobriram os mesmos resultados, obviamente utilizando símbolos e caminhos distintos nas provas dos referidos objetos matemáticos. Hoje a notação está uniformizada, porém o caminho da prova fora construído pelo homem.

No problema do ponto mais visitado, o fato deste ponto em quadrados ser o (1,1) não mudaria se duas pessoas o descobrissem de forma independente. Talvez as notações e símbolos utilizados nas demonstrações fossem distintos, mas nunca seria possível encontrar outro ponto que não o (1,1).

Importante é o aluno perceber que proposições podem ainda ser desvendadas, e que nem tudo está documentado nos livros. A Matemática tem espaço para novas descobertas, desde o nível médio até o superior, e sempre terá, ao que tudo indica. Basta que se leiam textos que trazem descobertas de nível médio e superior, inéditas, para que se convença disto.

Um campo no qual a matemática é propícia ao desenvolvimento de questões desafiadoras é a Análise Combinatória, ferramenta de resolução do problema do ponto mais visitado. Na próxima seção serão delineadas algumas considerações com relação a este conteúdo, seus aspectos conceituais e educacionais.

1.7 Combinatória e Probabilidade: aspectos conceituais e educacionais

Um dos primeiros conceitos em combinatória é o de fatorial. A notação que conhecemos $n!$ (fatorial de n), foi introduzida por Christian Kramp (KRAMP,1808) em seu livro "*Elements d'arithmétique universelle*".

Definição: O *fatorial* de um número inteiro $n \geq 2$, simbolizado por $n!$, é o produto

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1.$$

Propriedade fundamental do fatorial: $n! = n \cdot (n - 1)!$, para $n \geq 3$. Esta propriedade pode ser provada da seguinte maneira: se $n \geq 3$, vale, pela definição de fatorial acima,

$$(n - 1)! = (n - 1)(n - 2) \dots 1,$$

logo, multiplicando ambos os lados por n ,

$$n! = n(n - 1) \dots 1 = n(n - 1)!.$$

Definição: $1! = 1$, e $0! = 1$. A motivação para estas definições decorre da propriedade fundamental $n! = n \cdot (n - 1)!$: forçando-a valer para $n = 2$, tem-se:

$$2! = 2 \cdot (2 - 1)! \Leftrightarrow 2 \cdot 1 = 2 \cdot (1)! \Leftrightarrow$$

$$2 = 2 \cdot 1! \Leftrightarrow 1! = 1.$$

Agora, fazendo-a valer para $n = 1$ na expressão $n! = n \cdot (n - 1)!$, tem-se:

$$1! = 1 \cdot (1 - 1)! \Leftrightarrow 1 = 1 \cdot (0)! \Leftrightarrow$$

$$1 = 0! \Leftrightarrow 0! = 1.$$

Destacados o conceito de fatorial e sua propriedade fundamental, será apresentado a seguir o princípio fundamental da contagem, aceito como axioma, utilizado para se encontrar o número de resultados possíveis de um experimento que é executado em etapas sequenciais.

Princípio fundamental da contagem (axioma): Se um evento E ocorre em m etapas, e cada etapa pode ocorrer de p_i maneiras, então, a quantidade de maneiras que o evento E pode ocorrer é o produto $p_1 p_2 \dots p_m$.

Este princípio permite que se calcule o número de sequências que se podem formar com n objetos, conforme será definido a seguir:

Definição: Dados n objetos, qualquer sequência de p destes n objetos é um *arranjo* tomado p a p . O número de arranjos de n objetos, tomados p a p , pela propriedade fundamental da contagem vista logo acima, é igual a

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!} = A_{n,p}.$$

Nota-se que o arranjo pode ser estendido para todos $0 \leq p \leq n$.

Há situações em que é necessário que se conte a quantidade de grupos que podem ser formados, a partir de n objetos, sendo que a ordem dos elementos do grupo não importa, conforme a seguinte definição e a proposição seguintes:

Definição: O valor $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, $0 \leq p \leq n$, é chamado de combinação de n , p a p .

Proposição: Dados n objetos, $n \geq 1$, a combinação $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ corresponde à quantidade de escolhas possíveis de p objetos, dentre os n , onde $1 \leq p \leq n$, sem que a ordem dos objetos seja levada em conta.

Demonstração: Dados os n objetos, sabe-se que uma única escolha de p objetos pode gerar um total de $p!$ arranjos ou sequências. Porém, nota-se que existem $A_{n,p}$ sequências possíveis de p objetos dentre os n . Assim, por regra de três:

$$\begin{array}{r} \text{Número de combinações} \\ 1 \text{ --- } p! \\ x \text{ --- } A_{n,p}, \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Número de arranjos gerados} \\ 1 \text{ --- } p! \\ x \text{ --- } A_{n,p}, \end{array}$$

isto é, $x = \frac{A_{n,p}}{p!} = C_{n,p}$.

A seguir, serão abordados os fundamentos da probabilidade. Dado um experimento, o conjunto Ω de seus possíveis resultados é chamado de espaço amostral. Um *evento* é qualquer subconjunto de Ω . Dado um evento A de Ω , a *probabilidade* de A é definida como sendo a razão $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$, onde $n(X)$ é o número de elementos de X .

Agora será definida a probabilidade condicional, que calcula a chance de um evento A ocorrer condicionado ao fato que outro evento B ocorreu.

Definição: Dados dois eventos A e B , onde $P(B) \neq 0$, a *probabilidade condicional* de A dado B , denotada por $P(A/B)$, é:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Definição: Dois eventos A e B com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ são ditos *independentes* se:

$$P(A/B) = P(A), \text{ e } P(B/A) = P(B).$$

Proposição: Se dois eventos A e B são independentes, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, então $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Demonstração: por hipótese,

$$P(A/B) = P(A),$$

logo,

$$P(A)P(B) = P(A/B)P(B) = P(A \cap B).$$

Observa-se que, se A é o conjunto vazio, então $P(A) = 0$ e $A \cap B = \phi$. Logo, $P(A \cap B) = P(\phi) = 0 = 0 \cdot P(B) = P(A)P(B)$, o que motiva a seguinte

extensão da definição de independência para os conjuntos vazios: eventos de probabilidade nula são independentes de qualquer evento.

A análise combinatória, a probabilidade e a estatística são assuntos que permeiam toda a educação básica, do primeiro ano do ensino fundamental até o final do ensino médio. Nos anos iniciais do ensino fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) preveem o trabalho com análise combinatória e probabilidade em toda sua extensão, como se pode verificar nestes trechos do documento:

[...] importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos (BRASIL, 1997; p. 21).

O texto propõe a abordagem da probabilidade e da estatística com o objetivo, principalmente, de se tratar a informação, esta tão acessível a todos nestes tempos em que a tecnologia permite a divulgação de dados de maneira ampla, porém, muitos não a compreendem adequadamente por falta de conhecimentos apropriados para interpretá-la. Nos primeiros anos do ensino fundamental, os PCN enfatizam que a abordagem não deve ser dada por meio de fórmulas ou definições formais, naturalmente, e que a probabilidade deve permitir ao aluno perceber a gama de eventos aleatórios presentes na vida de todos, e que poderiam passar assim despercebidos. Também, o assunto é útil ao estudante no sentido de favorecê-lo perceber como se fazem previsões, além de auxiliarem a observar mais atentamente repetições de eventos em sua volta. Por fim, auxiliar o aluno a compreender e a construir gráficos.

Os PCN destinados aos anos finais do ensino fundamental, também não enfatizam o assunto de combinatória e probabilidade com base em fórmulas (BRASIL, 1998). Porém, o aluno já será capaz de entender o funcionamento do Princípio Fundamental da Contagem, o princípio multiplicativo. Nesta faixa etária, o aluno já poderá lidar com agrupamentos de objetos e calcular probabilidades por meio de uma razão e do levantamento do espaço amostral, além de iniciar o estudo de eventos equiprováveis. O uso de simulações seria bastante ilustrativo para se introduzirem tais noções.

No ensino médio, além de se fortalecer o que já fora estudado no ensino fundamental, já podem ser introduzidas as fórmulas clássicas da análise combinatória

Neste nível há como associar os conceitos da probabilidade ao estudo das leis da hereditariedade, por exemplo, mostrando ao aluno as aplicações práticas deste conteúdo.

De acordo com a pesquisa de Rocha e Borba (2010), professores têm se atentado para este tipo de abordagem no ensino de combinatória, priorizando a autonomia do aluno frente às situações-problema que são introduzidas para o ensino deste tema, de acordo com cada etapa de aprendizado. Tal atitude revela a importância do professor em acreditar no potencial de seus alunos em produzir conhecimento, em detrimento da mera exposição do assunto pelo docente. As autoras ainda salientam a importância que deve ser observada no acolhimento das diferentes respostas e resoluções apresentadas pelos alunos a fim de valorizar suas produções e orientar as suas aprendizagens.

A análise combinatória possui esta característica, isto é, suas questões podem, em geral, ser resolvidas de várias formas diferentes, utilizando-se ora a fórmula, ora a contagem manual, ora o princípio multiplicativo. Rocha e Borba (2010) também observaram, através de entrevistas com professores de Matemática, que a aula dialogada e de forma questionadora seria um dos caminhos para o aprendizado da combinatória e da probabilidade. Destacam também, como resultado de suas pesquisas em campo, que alguns enunciados de questões podem confundir o estudante, por parecerem dúbios.

Em combinatória, de fato, a interpretação do problema pode ser um obstáculo. O clássico problema de se dividir um grupo de pessoas em times pode gerar dúvidas e erros de interpretação, como mostra a situação seguinte: como dividir seis pessoas em três times de dois jogadores em cada, considerando: a) os times têm nomes, b) os times não têm nome? A resposta para o item a) é: $C_{6,2} \times C_{4,2} \times C_{2,2} = 90$. Já a resposta do item b) é: $\frac{90}{3!} = 15$. Tal exemplo ilustra uma das dificuldades conceituais que a combinatória proporciona, por uma sutil modificação aparentemente irrelevante no enunciado.

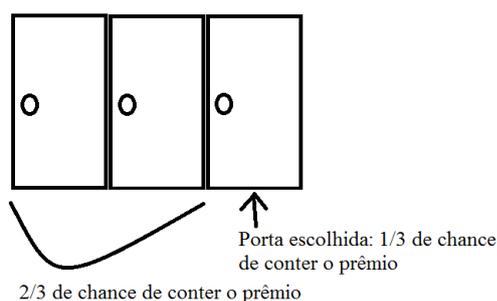
A análise combinatória carece de uma atenção especial no que diz respeito aos detalhes, como ilustra o exemplo do parágrafo anterior. De fato, quando o aluno ou o professor foca somente no método e na técnica, questões podem ser resolvidas de forma equivocada (KLYMCHUK, 2015). Na ânsia em se usar diretamente o princípio multiplicativo ou alguma fórmula, detalhes da questão podem ser ignorados. Klymchuk (2015) realizou uma pesquisa com professores de Matemática com relação à atenção dos mesmos na resolução de questões em assuntos diversos. Concluiu-se que a técnica prevalecera sobre a atenção aos detalhes. Várias questões foram erroneamente

resolvidas pelos participantes da pesquisa, como no cálculo de integrais cujo integrando não estava sequer definido no intervalo de integração, ou em equações logarítmicas com as condições de existência não satisfeitas. Em combinatória, tal situação é frequente, por exemplo, quando se resolve equivocadamente uma questão pelo princípio multiplicativo na qual a ordem não é importante, ou quando não são levados em consideração os casos nos quais o problema se impõe a se separar por casos, etc.

O problema do ponto mais visitado não está de acordo com a nossa intuição geral do que seria a sua solução. Ao ser confrontado com a sua intuição matemática, o aluno poderá ser instigado a procurar por soluções algébricas do problema, para que o mesmo possa se convencer de que a solução eventualmente não é a que ele estava esperando intuitivamente. Isto é comum em probabilidade. Um dos mais famosos problemas que vão contra a nossa intuição matemática é o conhecido problema do aniversário. Entre 23 pessoas, a chance de que haja pelo menos uma coincidência de data de aniversário no grupo é de, surpreendentemente, 50,7% (ABREU, 1990), considerando o dia e mês de nascimento, não o ano. Através de experiências realizadas em sala de aula, pude constatar que a grande maioria das pessoas tende a crer que esta chance deveria ser baixíssima, em torno de 1%.

Outro problema famoso no qual somos confrontados com nossa intuição é o problema de Mont Hall, ou problema das três portas. Trata-se de um jogo no qual o apresentador sabe previamente atrás de qual porta está o prêmio, e quais das outras duas estão vazias. O participante escolhe uma porta e, pelas regras, o apresentador é obrigado a revelar-lhe uma das portas vazias, que não seja a que foi escolhida pelo jogador. Neste momento, o jogador deve decidir se continua com a porta inicialmente escolhida, ou se troca pela outra porta que ficou fechada, e só depois o mediador abre a porta escolhida. A pergunta é: a chance de vitória se altera ou não, se o participante resolve trocar de porta?

Figura 3 - Problema de Mont Hall das 3 portas



Fonte: Elaboração própria.

De acordo com a intuição comum, parece que as chances são iguais, mudando ou não a porta. Mas, como pode ser explicado de várias formas distintas, as chances de vitória aumentam se o participante trocar de porta. Uma maneira rápida de ver isto é que sua chance de acertar a porta premiada é de $1/3$, inicialmente. Logo, a chance de o prêmio estar nas outras duas, é de $2/3$. Daí, como uma destas outras duas portas será aberta, uma que esteja vazia, então a outra que não foi aberta carrega toda para si os $2/3$ de chance de possuir o prêmio. Enfim, por isso, é melhor trocar de porta.

Uma análise minuciosa da possibilidade de se ganhar no jogo da Mega-Sena mostra que também aí a intuição humana falha. A probabilidade de se ganhar na Mega-Sena é de $\frac{1}{C_{60,6}} = \frac{1}{50.063.860}$ (SANTOS, 2014). O denominador é o número de combinações de 60 elementos, tomados 6 a 6. A comparação deste resultado com o jogo da moeda revela o quão podemos nos enganar na matemática: no jogo da moeda, ela é lançada por 23 vezes, e o participante ganha se, em todas as vezes, a moeda cair com a face *cara* voltada para cima. Em geral, simulando com meus alunos, não conseguimos passar da terceira ou quarta jogada. Em casos raros, da quinta, quem dirá chegar na 23ª. Assim, alguns sempre dizem que a Mega-Sena parece ser mais fácil. Ora, efetuando o cálculo, mostro a eles que a Mega-Sena é bem mais difícil. A chance de se ganhar no jogo da moda é bem mais alta do que na Mega-Sena. Essa chance equivale a:

$$\frac{1}{2^{23}} \cong \frac{1}{8.400.000}$$

Por estes e outros exemplos percebe-se que a Análise Combinatória é um campo reconhecidamente complexo e que pode acarretar dúvidas e confusões. Fórmulas de arranjo e de combinação são, por vezes, aplicadas equivocadamente. Resultados são previstos quase sempre em desacordo com a intuição comum (LIMA, 2013). Interpretações incorretas são frequentes entre os alunos no momento de resolver os problemas (ANNIN; LAI, 2010).

Tecidas, portanto, as considerações sobre a Combinatória e o ensino desta disciplina, no tópico a seguir enunciada a tese.

1.8 Enunciado da tese

Para que se pudessem alcançar os objetivos desta tese, foi investigado, à luz da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard (1999) e da Teoria das Representações Semióticas de Raimund Duval (1996), o modo pelo qual estudantes de nível superior resolvem, em casos particulares, o *problema do ponto mais visitado*, apresentado na seção 1.2. Esperava-se que os alunos pudessem utilizar seus conhecimentos em Matemática para solucionar o referido problema, e que conseguissem ir além: gerar o conhecimento matemático necessário à sua resolução a partir de mediações realizadas pelo professor e pelos próprios pares, numa situação adidática orientada.

A realização da presente pesquisa permitiu que a tese fosse destrinchada em quatro subteses, a serem defendidas neste trabalho: a) a pouca bagagem matemática de parte dos estudantes que chegam à graduação enseja a proposição de estratégias diferenciadas para o ensino desta disciplina no ensino superior; b) o trabalho pedagógico orientado pela metodologia de resolução de problemas e por meio do apelo ao lúdico favorece a aprendizagem matemática; c) as análises das representações semióticas permitem o professor averiguar as lacunas existentes na bagagem de conhecimento do aluno e enseja uma ação reparadora para esta situação e, d) a análise praxeológica se constitui em uma ferramenta útil para o professor poder acompanhar com maior propriedade o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos.

Os objetivos da presente pesquisa serão descritos na seção 1.9.

1.9 Objetivos geral e específicos

O objetivo geral do presente trabalho foi realizar uma análise praxeológica tanto da resolução quanto da aplicação do problema do ponto mais visitado, por alunos de disciplinas de Estatística Básica de cursos de graduação de uma universidade pública.

Os objetivos específicos foram os seguintes:

1- Analisar as soluções do problema do ponto mais visitado apresentadas pelos estudantes, identificando as quatro vertentes da praxeologia de Chevallard (1999): a *tarefa* a ser desempenhada, a *técnica* a ser utilizada para o problema, a *tecnologia* que corresponde a uma explicação desta técnica e a *teoria*, mais abrangente e que explica esta tecnologia.

2- Verificar se os estudantes estavam aptos a vincular a resolução do referido problema ao Triângulo de Pascal.

3- Analisar como os estudantes lidam com o tratamento e a conversão de registros, sob a luz da Teoria das Representações Semióticas de Duval (1996), nas soluções apresentadas do problema do ponto mais visitado.

No tópico 1.10 será apresentado o estado da arte referente aos principais temas ligados a esta pesquisa.

1.10 Estado da arte

A pesquisa com relação ao estado da arte destaca-se por seu caráter inventariante do que se tem produzido nas áreas acadêmica e científica com relação ao tema de investigação (FERREIRA, 2002). O estado da arte é motivado, em geral, pelo sentimento de não se conhecerem completamente as pesquisas de determinado campo de conhecimento.

As pesquisas deste formato objetivam conhecer o que fora construído para depois investigar o que ainda não fora objeto de investigação, e também têm por objetivo agrupar o volume de conhecimentos adquiridos para que possam ser divulgados para a sociedade. Tais pesquisas, em geral, informam o que se pretendeu investigar, indicam o percurso metodológico realizado na pesquisa, descrevem os resultados, e, em geral, possui estilo verbal conciso, descritivo e impessoal.

Segundo Silva e Carvalho (2014), o estado da arte caracteriza-se por ser uma revisão bibliográfica sobre a produção de certo tema de alguma área de conhecimento. Essa revisão identifica: quais teorias estão sendo levantadas, quais procedimentos de pesquisa são usados nestas construções, o que falta discutir, quais referenciais teóricos estão sendo utilizados nos embasamentos das pesquisas, e qual a contribuição das pesquisas para a ciência e a sociedade.

Devem-se levar em conta os recortes temporal, espacial, temático, e quanto às fontes. Geralmente, quando são feitas pesquisas usando a internet, por meio de buscas a partir de palavras-chave, há o risco de, ao eleger as palavras, algumas referências afins ficarem de fora dos resultados da pesquisa.

Para que se pudesse levantar o que há de produção em termos de dissertações e teses relacionadas aos principais assuntos abordados nesta tese, realizei algumas pesquisas na *Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD* e na internet em geral. Os recortes foram: quanto ao tempo, a partir do ano de 1997 (ano em que

foram publicados os PCN para os anos iniciais do ensino fundamental); quanto ao espaço, a internet; quanto ao tema, foram pesquisados os assuntos matemática, ensino superior, análise combinatória, probabilidade e praxeologia; quanto às fontes, a biblioteca digital BDTD e a ferramenta de buscas Google.

Numa primeira busca, procurando trabalhos relacionados ao ensino de análise combinatória em nível de graduação (Ensino Superior), utilizei as palavras-chaves *Combinatória* e *Superior*. Os tópicos sugeridos dentro dos resultados foram os mostrados na figura 4:

Figura 4 - Resultados da busca por combinatória superior



Fonte: Print screen da página da BDTD na internet.

Destes, relacionam-se com o tema desta tese os tópicos *Combinatória* (2 trabalhos) e *Análise Combinatória* (2 trabalhos), em destaque na figura 4. Observa-se que nenhum tópico relacionado à Educação ou ao Ensino aparece. Estes quatro trabalhos estão organizados em ordem cronológica no quadro 1, em ordem cronológica:

Quadro 1 - Palavras-chaves: Combinatória + Superior

Ano	Tipo	Universidade	Autor(a) / ano	Título
2006	Mestrado em Ensino de Ciências	Universidade Federal Rural de Pernambuco	José de Arimatéa Rocha	Investigando a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios em licenciandos em matemática
2015	Mestrado em Educação	Universidade Federal da Bahia	Jean Lázaro da Encarnação Coutinho	Matemática para o Ensino do Conceito de Combinação Simples
2015	Doutorado em Educação	Universidade Estadual de Campinas	Rodrigo Medeiros dos Santos	Estado da Arte e História da Pesquisa em Educação Estatística em Programas Brasileiros de Pós-Graduação
2016	Mestrado Profissional	Universidade Estadual Paulista	Maurizio Marchetti	Lineamentos de Análise

	em Matemática	Júlio de Mesquita Filho		Combinatória
--	------------------	----------------------------	--	--------------

Destes quatro, dois apresentam sugestões de atividades e questões acerca da Análise Combinatória para serem aplicadas em sala. Em um deles o problema dos caminhos aparece numa das questões propostas, porém na clássica abordagem de se contarem as possíveis rotas em quadrados, retângulos e malhas alternativas com buracos, por exemplo, sem a investigação do ponto mais visitado. No outro é proposta uma alternativa para o ensino de Combinação Simples, através de ideias advindas de uma revisão de literatura, sem a aplicação das atividades em sala, mostrando diversas formas de se comunicar o conceito de combinação simples.

Com respeito aos outros dois trabalhos, em um deles o autor investiga a aprendizagem, em resolução de problemas combinatórios, dos estudantes de graduação em licenciatura em Matemática, constatando que o método de ensino no qual os alunos agem como se professores fossem faz com que o aprendizado se torne mais efetivo se comparado ao método tradicional de ensino. Já no outro trabalho é apresentado um levantamento das pesquisas realizadas em programas de pós-graduação nas bases da CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, da BDTD e dos currículos cadastrados na plataforma Lattes, acerca da Educação Estatística. O autor faz uma categorização das pesquisas realizadas pelos programas a respeito do assunto e faz um levantamento quantitativo dos trabalhos, por eixo temático. Ele tece algumas conclusões: a) há fragilidade na formação do professor, no que se refere ao conteúdo de probabilidade; b) há pouco incentivo à pesquisa dos livros didáticos no assunto de probabilidade e estatística e, c) seriam necessárias pesquisas que abordassem as questões de ensino de conteúdos mais avançados, tais como Análise Multivariada de Dados, Processos Estocásticos, Análise de Séries Temporais e Métodos não-paramétricos.

Estes foram, portanto, os trabalhos encontrados sob as palavras-chaves combinatória e superior. Dois deles se ocupando em dar sugestões de atividades relacionadas à análise combinatória, um deles tratando da melhor metodologia de ensino para este assunto e o outro trazendo um estado da arte sobre a Educação Estatística nos programas de Pós-Graduação do Brasil.

Finda esta primeira busca, procurei em seguida as palavras-chaves Triângulo de Pascal e Ensino, encontrando sete trabalhos na base da BDTD, conforme apresentado no quadro a seguir em ordem cronológica.

Quadro 2 - Palavras-chaves: Triângulo de Pascal + Ensino

Ano	Tipo	Universidade	Autor(a)	Título
2013	Mestrado Profissional em Matemática	Universidade Federal de Juiz de Fora	FREITAS, Evandro de	O uso de matriz de transição para o cálculo de probabilidade em jogos
2013	Mestrado Profissional em Matemática	Universidade Federal da Paraíba	RABAY, Yara Silva Freire	Estudo e aplicações da geometria fractal.
2013	Profissional em Matemática	Universidade Federal da Paraíba	SILVA, Salatiel Dias da	Estudo do binômio de Newton
2014	Mestrado Profissional em Matemática em	Universidade Federal de Goiás	SOUZA, Dorgival Fidellis de	Modelos binomiais: caracterização e aplicações
2015	Mestrado Profissional em Matemática em.	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul	BARBOSA, Elton Fernandes	Sequências aplicáveis para o ensino médio
2015	Mestrado Profissional em Matemática	Universidade Federal do Ceará. Fortaleza.	SILVA, Márcio Rebouças	Números binomiais: uma abordagem combinatória para o ensino médio. Dissertação
2016	Mestrado Profissional em Matemática em	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro	ROSADAS, Vitor Dutra Soares	Triângulo de Pascal

Todos eles fazem um tratamento com ênfase maior na matemática envolvida na Análise Combinatória e oferecem sugestões de questões e problemas relacionados à Combinatória e/ou ao Triângulo de Pascal, sem referência ou alusão às teorias Educacionais. Não constam nestes sete trabalhos aplicações de atividades em sala de aula no Ensino Superior, bem como o problema dos percursos.

Fazendo, então, a terceira busca com as palavras-chaves *Probabilidade e Superior*, foram encontrados diversos trabalhos. Dentre eles, do ano de 1997 para cá, destaca-se apenas um, por possuir uma aproximação ao tema desta tese, apresentado no quadro 3.

Quadro 3 - Palavras-chaves: probabilidade +superior

Ano	Tipo	Universidade	Autor(a)	Título
2002	Mestrado em Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	SOUZA, Cibele de Almeida	A distribuição binomial no Ensino Superior

Neste trabalho, Souza (2002) apresentou uma proposta de uma sequência didática para o ensino da distribuição Binomial numa turma de graduação em Administração. Após as análises das reações e respostas dos alunos perante as atividades propostas, a autora constatou algumas dificuldades enfrentadas pelos estudantes: não compreensão da linguagem matemática da probabilidade; a falta de traquejo com as porcentagens, e, principalmente, o apego dos alunos ao contrato didático a que estavam acostumados ao longo de suas vidas escolares, contrato este caracterizado pela ênfase em se adquirir notas para aprovação em detrimento ao espírito de aprendizado. A presente tese se assemelha ao trabalho de Souza (2002), porém com a diferença fundamental que lá as questões eram previamente encaixadas no modelo já estabelecido, a saber, o modelo da Distribuição Binomial. Nesta tese, o problema do ponto mais visitado é apresentado sem que o aluno saiba, inicialmente, que se trata de uma questão de combinatória ou probabilidade. Espera-se que os resultados da aplicação das atividades previstas nesta tese demonstrem que os alunos sejam capazes de se desvencilhar dos moldes escolares limitadores historicamente construídos.

Estes foram os trabalhos relacionados ao ensino-aprendizagem de Combinatória e Probabilidade no Ensino Superior. Fiz, também, uma busca por dissertações ou teses que versassem mais diretamente sobre o problema do ponto mais visitado, ainda no BDTD. Busquei pelos seguintes grupos de palavras-chaves: *Caminhos + Plano + Matemática*, depois, *Rotas + Plano + Matemática*, em seguida, *Trajetórias + Ponto + Matemática* e, por último, *Ponto Mais Visitado*. Com estas buscas, verificou-se que não constam quaisquer trabalhos relacionados ao problema desta tese, isto é, acerca do ponto mais visitado por caminhos no plano cartesiano.

Numa penúltima busca no BDTD, realizei a procura pelas palavras-chaves *praxeológica e Matemática*, na qual foram encontrados 24 trabalhos, que foram divididos e estão relacionados nos quadros 4, 5 e 6, agrupados por três grandes temas: os relacionados ao livro didático (15), os relacionados à atuação do professor (5) e os relacionados a outros temas (documentos oficiais, dinâmica de sala de aula e outros) (4). Em cada quadro a seguir, as obras estão em ordem cronológica de acordo ainda com o subtema.

Quadro 4 - Palavras-chaves: praxeológica + matemática. Trabalhos relacionados ao livro didático

Ano	Tipo	Universidade	Autor(a)	Título
Tema: Livro didático. Subtemas: Álgebra, Funções, Cálculo				
2005	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade	CRUZ, Eliana da Silva	A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental: um estudo sob a

		Católica de São Paulo		ótica da organização praxeológica
2007	Mestrado Profissional em Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	MATEUS, Pedro	Cálculo Diferencial e Integral nos livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica
2007	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	CARVALHO, Cláudia Cristina Soares	Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do ensino médio
2008	Mestrado em Educação	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul	NOGUEIRA, Rosane Corsini Silva	A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica
2016	Mestrado em Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	CHAVES, Adiel Praseres	Função quadrática: análise em termos de contextos, de organizações matemáticas e didáticas propostas em livros didáticos de ensino médio
Tema: Livro didático. Subtemas: Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória				
2007	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	FRIOLANI, Luis Cesar	O pensamento estocástico nos livros didáticos do ensino fundamental
2008	Mestrado Profissional em Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	NETO, Fernando de Simone	Análise do letramento estatístico nos livros didáticos do ensino médio
2015	Doutorado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda	Análise combinatória: organizações matemáticas e didáticas nos livros escolares brasileiros no período entre 1895-2009
Tema: Livro didático. Subtema: Geometria Analítica				
2010	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	VARELLA, Márcia	Prova e demonstração na geometria analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos
2015	Doutorado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	COSTA, Acylena Coelho	Geometria analítica no espaço: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos
Tema: Livro didático. Subtema: Geometria				
2008	Mestrado em Educação Científica e Tecnológica	Universidade Federal de Santa Catarina	MAIA, Cristini Kuerten	A organização praxiológica do objeto triângulo nos livros didáticos da 7ª série do ensino fundamental Maia (2008)
2010	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	ORDEM, Jacinto	Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique
Tema: Livro didático. Subtemas: outros				
2008	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	NAKAMURA, Keiji	Conjunto dos números irracionais: a trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas escolares
2009	Mestrado em Educação	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul	ABREU, Vanja Marina Prates de	A calculadora como recurso didático nos anos iniciais do ensino fundamental
2014	Mestrado em Educação	Universidade Federal de	BUSE, Andrei	Um olhar diferenciado sobre a cinemática no ensino médio

	Científica e Tecnológica	Santa Catarina		
--	--------------------------	----------------	--	--

Esses foram os 15 trabalhos encontrados com respeito ao livro didático, sob as palavras-chaves praxeológica e matemática. Os autores de tais dissertações e teses dedicaram-se à análise da praxeologia utilizada em livros didáticos de Matemática dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior. Cada trabalho delimitava um tema de pesquisa. Os temas foram: funções, demonstrações, conjuntos numéricos, estatística, geometria analítica, geometria euclidiana, análise combinatória, números irracionais, Cálculo e cinemática.

Segundo os autores dos trabalhos listados, em alguns livros didáticos de Matemática os aspectos levantados nas análises praxeológicas eram questionáveis, enquanto em outros se mostraram satisfatórios. Os aspectos analisados foram: a) a tecnicidade da maneira de tratar os conteúdos; b) a oportunização ao aluno da prática da demonstração; c) a adequação aos parâmetros curriculares; d) a insuficiência dos assuntos abordados nos livros; e) o nível cultural em detrimento ao nível funcional de conhecimento que o livro proporciona; f) o privilégio do uso algébrico em detrimento do geométrico; g) a praxeologia como apoio ao docente; h) a evolução das obras no decorrer do tempo; i) a adequação das ilustrações como apoio ao entendimento dos conceitos matemáticos; j) o uso da calculadora em sala de aula; k) a articulação entre os registros semióticos; l) a exposição formal em detrimento à exposição contextualizada.

Em geral, a análise praxeológica realizada nos 15 trabalhos mostraram fragilidades e também aspectos positivos dos livros didáticos e, em geral, ofereciam alternativas de melhora para os mesmos com respeito a vários aspectos e dimensões que podem ser consideradas numa análise crítica-construtiva de um livro enquanto apoio didático no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Como continuação da listagem das obras encontradas ainda sob as palavras-chaves praxeológica e matemática, na BDTD, no quadro 5 estão as teses e dissertações que versam sobre a atuação do professor, em ordem cronológica.

Quadro 5 - Palavras-chaves: praxeológica + matemática. Trabalhos relacionados à atuação do professor

Ano	Tipo	Universidade	Autor(a)	Título
2004	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	GONÇALVES, Mauro César	Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica
2006	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São	MORAIS, Tula Maria Rocha	Statistical thinking an study: components and skills.

		Paulo		
2010	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	VERAS, Cláudio Monteiro	A estatística nas séries iniciais: uma experiência de formação com um grupo colaborativo com professores polivalentes
2011	Mestrado em Educação em Ciências e Matemática	Universidade Federal do Pará	MESQUITA, Flávio Nazareno	As dinâmicas praxeológicas e cognitivas e a construção do conhecimento didático do professor de matemática
2012	Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas	Universidade Federal do Pará	PEREIRA, José Carlos de Souza	Análise Praxeológica de conexões entre aritmética e álgebra no contexto do desenvolvimento profissional do professor de matemática

As quatro dissertações realizaram uma análise praxeológica da atuação docente na disciplina de Matemática. Foram analisados os temas: grupo colaborativo em cursos de formação de professores; a evolução das concepções de professores de Matemática no desenrolar do tempo; as concepções de professores com respeito ao pensamento estatístico; a atuação do professor no ensino de funções e, os conflitos praxeológicos do professor no ensino de polinômios.

As pesquisas mostraram que a prática docente é influenciada pela prática de seus próprios professores de graduação, e que os tipos de abordagens na prática da sala de aula são por vezes transformados com o passar do tempo, à medida que o professor muda sua visão acerca da praxeologia adotada na aula. Além disto, há por vezes um conflito praxeológico dos conceitos matemáticos na transição entre a fase de graduação e a fase profissional do professor de Matemática.

Em geral, os trabalhos retrataram certa ruptura de visão da Matemática que o professor tem na passagem da universidade para o trabalho na escola, apesar de a sua prática docente ser fortemente influenciada pelas aulas que assistiu no curso superior.

No quadro 6 serão listados os últimos trabalhos encontrados na BDTD sob as palavras-chaves praxeológica e matemática, sendo estes acerca de temas diversos.

Quadro 6 - Palavras-chaves: praxeológica e matemática. Temas diversos.

Ano	Tipo	Universidade	Autor(a)	Título
2007	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	SILVA, Júlio César da	Conhecimentos estatísticos e os exames oficiais: SAEB, ENEM e SARESP
2007	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	GOULART, Amari	O discurso sobre os conceitos probabilísticos para a escola básica
2010	Mestrado em Educação	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	SANTOS, Paulo Avelino dos	A modelagem como proposta para a introdução à probabilidade por meio dos passeios aleatórios da

		Paulo		Mônica
2015	Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica	Universidade Federal de Pernambuco	MENDES, Hermam do Lago	Os números binários: do saber escolar ao saber científico

Dois dos quatro trabalhos do quadro 6 trataram da influência das instâncias oficiais como o ENEM e os PCN na prática docente, bem como da adequação dos livros didáticos aos documentos oficiais orientadores. Conclui-se que deveria haver uma maior paridade entre o que se trabalha em sala com o que se espera do estudante de acordo com os PCN e de acordo com o que se espera do mesmo numa prova do ENEM.

Já na dissertação de Mendes (2015) o autor se propõe a estudar os números binários sob três olhares: o saber escolar, o saber a ser ensinado e o saber científico, sob a orientação metodológica da Teoria Antropológica do Didático. O autor conclui que os números binários são produzidos na ciência Matemática e incluídos em diretrizes estaduais e nacionais como sendo unidades de informação na informática.

Por fim, na dissertação de Santos (2010) o autor aplica a sequência didática dos passeios aleatórios da Mônica a uma turma de 8º ano, e, invertendo a praxeologia comum, analisa as implicações deste tipo de intervenção no processo de aprendizagem de probabilidade por parte dos alunos, considerando, para tanto, a Teoria Antropológica do Didático. Este é, dentre todas as 24 obras analisadas sob as palavras-chaves praxeológica e matemática, a que mais se aproxima da metodologia utilizada nesta tese.

Em geral, estes 24 trabalhos mostraram, por si sós, a importância de se realizar uma Análise Praxeológica em pesquisas em Educação Matemática, seja ela focada sobre livros didáticos, sobre professores, instrumentos oficiais ou em situações didáticas.

Três outras considerações puderam ser levantadas, analisando-se estas 24 obras com relação à análise praxeológica aplicada à Matemática. Inicialmente, percebe-se que, com relação ao livro didático, há a possibilidade de novas pesquisas com relação à praxeologia de outros temas não investigados, como: aritmética, números complexos, frações, geometria espacial, divisibilidade, ou qualquer outro tópico não listado. O campo para a pesquisa da análise praxeológica sobre livros brasileiros de matemática é, portanto, amplo.

Também, e ainda com relação aos trabalhos encontrados sobre o livro didático, percebe-se que eles apresentam variações quanto aos enfoques dados. Assim, uns poderiam ser complementados quanto à questão do conteúdo, outros melhorados quanto

à adequação junto aos documentos oficiais, enquanto outros poderiam conter explicações mais detalhadas com relação às técnicas de se resolverem problemas e questões em matemática.

Tendo em vista que a maior parte dos trabalhos ligados à praxeologia na matemática era sobre a análise de livros didáticos, destaca-se que o campo para a pesquisa sob esse referencial é grande em outras instâncias, como os documentos oficiais, a formação inicial e continuada de professor, a metodologia aplicada na sala de aula, dentre outras possibilidades.

Procurando, por último, pelas palavras chaves *praxeologia* e *matemática*, ou seja, alterando apenas a palavra *praxeológica* por *praxeologia* no BDTD, foram encontrados mais alguns trabalhos, mas que possuem abordagens e conclusões afins aos 24 trabalhos acima relacionados, o que tornaria repetitiva uma análise das obras encontradas: Dantas (2007), Rossini (2006), Menezes (2010), Barbosa (2015), Motta (2006), Barbosa (2011), Rodrigues (2005), Silva (2009), Inafuco (2006), Carvalho (2012), Araújo (2009) e Netto (2014). Todos eles mostram a importância de se trabalhar com a análise praxeológica como ferramenta de pesquisa educacional no campo da Matemática.

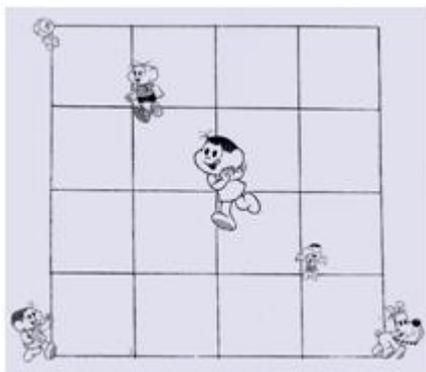
Terminada a busca pelas dissertações e teses no BDTD, passei a procurar por trabalhos no Google, incluindo outras dissertações e teses que não estão catalogadas no banco consultado, anais de eventos e artigos científicos. Por possuírem uma aproximação maior ao problema do ponto mais visitado, os trabalhos encontrados serão apresentados com maior destaque e detalhamento nos parágrafos a seguir.

Os trabalhos de Fenandez e Fernandez (1999), de Ferreira (2011), e de Ferreira, Kataoka e Karrer (2012) trazem propostas de atividades para o ensino da distribuição binomial e da probabilidade, baseadas no problema dos passeios aleatórios da Mônica (ou Carlinha, nos segundo e terceiro trabalhos), um problema bastante semelhante ao problema desta tese, com a diferença que os percursos lá terminam em algum ponto da diagonal principal da malha quadricular, e não no ponto (N, N) , como o é no problema do ponto mais visitado. Pela semelhança do problema do ponto mais visitado com a sequência didática dos Passeios Aleatórios da Mônica, vale a pena detalhar o que é há de comum nestes três trabalhos.

A ideia do problema nesses três trabalhos é encontrar o amigo da Mônica (ou da Carlinha) que possui maior chance de ser visitado por ela, numa escolha aleatória de

caminhos. Os amigos encontram-se fixos na diagonal do quadrado, conforme mostra a figura 5.

Figura 5 - Os passeios aleatórios da Mônica



Fonte: Fernandez e Fernandez (1999).

Para a escolha do caminho, a personagem Mônica (ou Carlinha) lança uma moeda para decidir se o próximo passo será dado para a direita ou para cima. Os três trabalhos concluem então que a utilização de um experimento ou de um jogo para a aprendizagem da combinatória e da probabilidade pode ser uma ferramenta muito útil ao professor de Matemática, em qualquer nível de ensino, devido ao aumento de maturidade probabilística percebido com as atividades desenvolvidas.

Ainda com relação a buscas no Google, foi encontrado o artigo de Bayer, Bittencourt, Rocha e Echeveste (2005), que traz várias sugestões de atividades para o ensino de probabilidade no ensino médio, dentre elas o mesmo problema dos passeios aleatórios da Mônica. Os autores tecem a seguinte conclusão:

É necessário que sejam produzidos materiais que sirvam de apoio didático para as aulas de matemática, bem como aproximar o professor dos conteúdos de probabilidade e estatística, sua história, sua evolução, importância e essencialmente sua aplicação em situações reais (BAYER; BITTENCOURT; ROCHA; ECHEVESTE, 2005, p. 12).

Já o artigo de Nogueira (2014) também traz as contribuições do problema dos passeios aleatórios da Carlinha para o aprendizado da probabilidade, em turmas do nono ano do ensino fundamental. O autor opta por não apresentar uma conclusão acerca do seu trabalho, antes termina declarando esperar que as atividades descritas a respeito dos passeios aleatórios da Carlinha possam ajudar os estudantes no entendimento da probabilidade básica.

O artigo de Nagamine, Henriques, Utsumi e Cazorla (2011), analisa, por meio da Teoria Antropológica do Didático, a sequência didática *Passeios Aleatórios da Mônica*, na Educação Básica. Conclui-se que a atividade proposta, dos passeios aleatórios,

inverte a ordem usual do processo de ensino e aprendizagem, de *teoria* → *prática* para: *prática* → *teoria*, algo que precisaria ser mais valorizado e buscado nas interações aluno-professor, por proporcionar maior autonomia dos estudantes.

A diferença fundamental entre o problema analisado nesta tese e o dos passeios da Mônica (ou da Carlinha) é que lá a direção do passo (para a direita ou para cima) é sorteada lançando-se uma moeda. No problema do ponto mais visitado, deve-se usar uma urna com N bolas de uma cor (passos para cima) e N bolas de outra cor (passos para a direita). A cada retirada de bola, *sem reposição*, a direção do passo é escolhida de acordo com a cor da bola sorteada. Logo, a probabilidade de se dar o passo para a direita ou para cima vai mudando com o passar do tempo, ao contrário do que ocorre no caso da personagem Mônica nos trabalhos citados anteriormente. Além disto, desta forma garante-se que cada percurso possível possui a mesma chance de ser escolhido (SANTOS, no prelo). Outras três características desta tese que a fazem diferenciar dos trabalhos descritos acima são: o público alvo: alunos de nível superior; o próprio ineditismo do problema do ponto mais visitado e, as análises das representações semióticas realizadas sobre as produções dos alunos.

Num outro artigo, Silva (2017) faz alusão à associação do problema de se contar caminhos passando por pontos com o Triângulo de Pascal, porém na abordagem clássica, sem a introdução das propriedades do Triângulo trabalhadas nesta pesquisa. A referência se dá no seguinte trecho do artigo, instigando o leitor a verificar sua afirmação:

[...] você sabia que, ao traçarmos “diagonais” ligando os pontos que estão a uma mesma “distância” de B – o ponto de chegada dos caminhos –, então o número de caminhos partindo de cada ponto dessa diagonal até B formará uma determinada linha do triângulo de Pascal? Verifique (SILVA, 2017. p. 19).

Além destes trabalhos encontrados no Google, constam também artigos meus, de cunho mais abstratos e demonstrativos, todos relacionados ao problema do ponto mais visitado. O primeiro, *O problema do ponto mais visitado*, de Santos e Castilho (2013), já mencionado anteriormente, resolve matematicamente o problema do ponto mais visitado para o caso geral, e corresponde ao problema central desta tese. Outro, também já mencionado, *Desigualdades no Triângulo de Pascal*, de Melo e Santos (2014), demonstra as propriedades do Triângulo de Pascal que surgem como consequência imediata da resolução do problema do ponto mais visitado. O terceiro, *O problema do ponto mais visitado e a cadeia do viajante* (SANTOS, 2016a), mostra as possibilidades

de resolução do problema por meio de matrizes, usando ferramentas da Teoria da Probabilidade de nível superior. O quarto e último, *Um estudo probabilístico sobre caminhos em reticulados quadrados* (SANTOS, 2016b), mostra como a probabilidade de um ponto ser visitado depende do tamanho N do quadrado.

Em termos gerais, o estado da arte aponta para um caminho amplo a ser ainda percorrido, pois o problema e seu desdobramento possuem potencial de aplicação em sala de aula sob diversos aspectos, e, em todos eles, são passíveis de serem analisados sob a perspectiva da teoria da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard.

2 Referencial Teórico

Neste capítulo serão discutidos temas relacionados à Educação Matemática, Didática da Matemática, Teoria das Situações Didáticas, Teoria das Representações Semióticas e Resolução de Problemas.

2.1 Educação Matemática – aspectos históricos

Mundialmente, um dos acontecimentos que favoreceu a consolidação da Educação Matemática como ramo da Educação foi o surgimento, no Congresso Internacional de Matemáticos realizado em 1908 na cidade de Roma, da Comissão Internacional de Instrução Matemática – ICMI – tendo como líder o notável matemático Felix Klein (D’AMBRÓSIO, 2004). Segundo D’Ambrósio (2004, p. 72), com relação às ideias desta comissão: “Klein defende uma apresentação nas escolas que se atenha mais a bases psicológicas que sistemáticas. Afirma que o professor só terá sucesso se apresentar as coisas de uma forma intuitivamente compreensível.”

É antiga, portanto, a preocupação com o processo de ensino desta disciplina, em termos mundiais.

Júlio César de Melo e Sousa, o Malba Tahan, nascido em 1895 e falecido em 1974, então professor de Matemática, se tornara um dos grandes responsáveis pelo progresso da Educação Matemática no Brasil (MICHAILOFF, 2009). Por meio de seus diversos livros publicados relacionados a problemas, contos e curiosidades em matemática, como por exemplo a notável obra “O homem que calculava”, disseminou no país uma visão amigável da Matemática como ciência que desperta interesse, possuindo aspecto lúdico e possibilidades de aplicações. Euclides Roxo foi outro estudioso da época que também se preocupou com a disseminação da boa didática no ensino da Matemática, nesta mesma época.

Na década de 50, no Brasil, ainda prevalecia o ensino tradicional, com sua rigorosidade e a ênfase à memorização (FERNANDEZ; MENEZES, 2002). Foi um período no qual as instituições que se dedicavam à Matemática se expandiam e, com isso, ela começa a ser institucionalizada, porém, não era uma preocupação central o modo como se ensinava a matemática, mas o conteúdo em si. Nesta década de 50, a corrida espacial forçava os países a se dedicarem cada vez ao estudo das Ciências, o que fez surgir a chamada Matemática Moderna, movimento proveniente de discussões acerca do ensino desta disciplina, e que acabou chegando ao Brasil.

O início dos anos 70 foi marcado então por este movimento internacional, que incluiu a produção de livros didáticos. A Matemática Moderna fora caracterizada por fundamentar-se na Teoria dos Conjuntos. No entanto, não considerava, de maneira apropriada, os conhecimentos que os alunos traziam para a escola (D'AMBRÓSIO, s/d). Ela começou então a ser criticada por possuir um currículo universal e por ser descompassada com a vida cotidiana dos estudantes.

Segundo Fernandez e Menezes (2002) surgiram congressos no Brasil que visavam discutir o Ensino de Matemática durante as décadas de 50, 60 e 70. Como fruto desta ampla discussão, na década de 80 iniciaram-se os cursos e programas dedicados ao estudo dos aspectos educacionais no campo desta disciplina. O cume deste processo foi a criação, em 1988, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM – quase concomitante com os Encontros Nacionais de Educação Matemática – ENEM, com variadas linhas de pesquisa acerca desta temática, com ênfases desde a pré-escola até o Ensino Superior, nas instâncias municipal, estadual e federal, e com o surgimento de escolas de aplicação, onde as metodologias de ensino propostas pelos investigadores puderam ser testadas. Linhas de pesquisas estas não apenas no âmbito da sala de aula: elas incluem atualmente financiamento educacional, as avaliações em larga escala, as políticas governamentais, a inclusão social, a formação inicial e continuada de professores e o currículo, por exemplo.

Dentre as correntes que surgiram nas décadas de 70 e 80, destaca-se uma que valorizava a Matemática da vida ordinária, conhecida por Etnomatemática, formulada por D'Ambrósio para mostrar como diferentes grupos culturais concebem a matemática. A Etnomatemática também era chamada de Matemática Materna, numa referência à Língua Materna, aquela trazida do berço, ou ainda de Matemática Espontânea. A Etnomatemática seria um campo dentro da Educação que leva em conta a Matemática do comerciante, do pedreiro, da costureira, e que permite ao estudante usar esta ciência para resolver os problemas do seu povo.

Uns afirmam que o campo Educação Matemática se trata de um campo interdisciplinar, envolvendo conceitos e metodologias de outras ciências. Outros restringem a Educação Matemática à elaboração de metodologias alternativas de ensino. Porém, com o status de ciência ainda em construção (CARNEIRO, 2000).

Fiorentini e Lorenzato (2006) afirmam que a área tem passado por fases de consolidação. Até o ano de 1960 não havia uma configuração clara do que seria a Educação Matemática – EM. Nessa fase, professores de Matemática limitaram-se a

pensar na composição de conteúdos nos livros didáticos, em detrimento à pesquisa em campo em sala de aula. As pesquisas em educação limitavam-se ao ensino primário. Na segunda fase, anos 70 e 80, houve uma valorização da Educação como meio de modernização do Estado, o que acarretou uma crescente preocupação com o processo de ensino da Matemática. Pesquisas quantitativas e qualitativas eram utilizadas pelos investigadores, porém, os aspectos epistemológicos e psicológicos ainda eram pouco explorados. Na fase três, anos 80 e 90, percebe-se o surgimento de uma comunidade de educadores matemáticos. Em 1984 é criado o primeiro programa brasileiro de mestrado na área. A cognição dos estudantes, as metodologias de ensino, a etnomatemática, a modelagem, a resolução de problemas, a formação de professores e o uso de jogos se tornaram temas de pesquisa. A própria pesquisa educacional passaria por mudanças metodológicas em todas as etapas. Na quarta fase, início dos anos 90, novos temas surgiram, como: o ensino de geometria, ensino da álgebra, filosofia da matemática, didática da matemática, currículo escolar, informática educativa, formação continuada de professores, história da matemática associada ao ensino, etc. A Educação Matemática passa a compor grupos de trabalho reconhecidos pela Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (Anped). Nos anos 2000 e 2001 foi criada a área de ensino de ciências e matemática, independentemente da Educação, na CAPES.

Carneiro (2000) aponta que em vários pontos o foco da EM converge: preocupação em favorecer o desenvolvimento de competências nos estudantes para a prática da cidadania, estímulo à autonomia do aluno, o uso da resolução de problemas como estratégia para o ensino e aprendizagem da Matemática, uso de tecnologias, dentre outros. Outra das preocupações encontradas na pesquisa em Educação é a indissolubilidade entre a pesquisa, a extensão e o ensino dentro das universidades brasileiras, que, nas últimas décadas teria focado seus investimentos majoritariamente na pesquisa, relegando à sala de aula um plano inferior em importância nas instituições superiores.

A preocupação com o currículo também aumentou a partir dos movimentos de mudança no ensino da Matemática. Bem antes, até o ano de 1856, a Matemática era vista apenas nos últimos anos do então curso secundário (GODOY; SANTOS, s/d). A partir daí a Matemática passou a ser ensinada também nos primeiros anos do curso secundário. Até 1929, a Matemática não era uma disciplina, ela era trabalhada de forma compartimentada em quatro áreas: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. A partir de então ela passou a ser, por decreto, uma disciplina escolar. Segundo Godoy e

Santos (s/d) por volta de 1931 a Matemática integrou o currículo de todo o curso fundamental e, nos cursos complementares, constava na primeira série para candidatos aos cursos de Farmácia, Odontologia e Medicina e nas duas séries para os candidatos a cursar Engenharia e Arquitetura. Já em 1942, a Matemática foi inserida nas quatro séries do Curso Ginásial e nas três séries das etapas do Clássico e Científico.

Já nos anos 60, com o início do Movimento da Matemática Moderna no Brasil, houve uma reestruturação em termos da linguagem utilizada nos livros didáticos. Nos anos 70 foi elaborada uma proposta governamental de ensino de funções tendo como ponto de partida situações do dia a dia. A Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 1986 era fazer com que a Matemática tivesse dupla função: aplicações práticas e melhoramento de raciocínio lógico. Por fim, a Lei de Diretrizes e Bases propôs que o currículo pudesse se adequar às desigualdades regionais, tendo como eixos a contextualização e a interdisciplinaridade, a partir de uma base nacional comum e uma parte diversificada para atender às demandas de cada região do país.

2.2 Didática da Matemática

A Educação Matemática é uma grande e recente área de pesquisa em Educação. “Seu objeto de estudo é a compreensão, a interpretação e a descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis de escolaridade, tanto na sua dimensão teórica, quanto prática” (MACHADO, 2017, p. 1).

A partir da década de 60, como já salientado anteriormente, devido à crise na qualidade do processo de ensino e aprendizagem em Matemática que vigorava na época, foram introduzidas alterações no ensino da Matemática, com novos programas, metodologias, conteúdos e currículos, inclusive para a formação de professores. Assim, a Didática da Matemática surge como uma das formas de se entenderem os fenômenos da prática em educação. Ela estuda os processos de ensino e de aprendizagem do conhecimento matemático, em particular no ambiente acadêmico. Como um de seus objetivos, a Didática da Matemática preocupa-se em conectar a teoria com a prática, dentro do universo matemático.

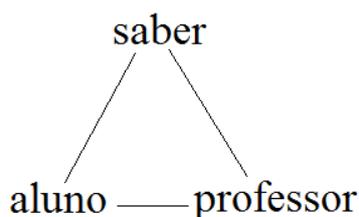
Algumas teorias da Didática da Matemática que chegaram ao Brasil, por influência francesa, se destacam: a teoria das Representações Semióticas de Duval; a teoria da Transposição Didática de Chevallard; a teoria dos Obstáculos Epistemológicos de Bachelard; a teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud; as teorias das Situações Didáticas e do Contrato Didático de Brousseau; a teoria da Engenharia Didática de

Artigue e a teoria da Dialética-Ferramenta-Objeto de Regine Douady. A presente tese fundamenta-se, em particular, nas teorias das Situações Didáticas de Brousseau e das Representações Semióticas de Duval, pelo fato de o problema a ser trabalhado em sala de aula permitir constantemente a transposição de um tipo de registro – algébrico – a outro – registro geométrico, e também pela própria condução da pesquisa, que enseja a análise da relação entre a teoria e a prática (praxeologia) envolvidas na resolução do problema. Estes serão o ferramental teórico e metodológico para o desenvolvimento da tese.

2.3 Teoria das situações didáticas

A Teoria das Situações Didáticas – TSD se preocupa, dentre outras coisas, em analisar as relações existentes entre o professor, o aluno e o saber, o chamado *triângulo didático*, segundo Brousseau (1986).

Figura 6 - O triângulo didático



Fonte: Elaboração própria.

Nestas relações, há de se evitar a mera exposição dos conceitos matemáticos sem a participação ativa dos estudantes, característica da *concepção transmissiva* do processo de ensino e aprendizagem, na qual há uma assimilação passiva de informação. Em contrapartida, a concepção *construtivista* se preocupa com que o aluno aprenda por si só, ao ser submetido a um meio apropriado de aprendizagem. Aqui, o erro numa questão matemática é encarado não apenas como falta de conhecimento, mas como potencial para um novo aprendizado. Caberia ao professor se envolver com as tentativas do aluno de maneira a levá-lo a aprender por si só, a criar Matemática a partir de problemas.

Nessa concepção, o professor é levado a pensar mais detalhadamente em suas escolhas e decisões, sejam decisões de preparação de aula, sejam decisões do que fazer após a aplicação das atividades. Lima (2009) defende, por exemplo, que no ensino fundamental, vários dos conceitos em Matemática deveriam ser inicialmente transmitidos através de situações *não* matemáticas.

O objetivo, na concepção de Brousseau, é sempre transformar os *saberes* em *conhecimentos* (D'AMORE, 2007). Os *saberes* correspondem aos conteúdos exteriores ao indivíduo, encontrados em livros e em todo tipo de arquivo acadêmico. Os *conhecimentos* são os *saberes* após serem apropriados e interiorizados pelo indivíduo. Os conhecimentos são as ferramentas com as quais o estudante pode abordar diversos problemas análogos, reproduzindo as técnicas conhecidas. Os saberes se transformam em conhecimentos a partir da interação do aprendiz com o meio, o ambiente, o chamado *milieu*.

A TSD fornece para o professor a possibilidade de superação de obstáculos epistemológicos de seus estudantes, que muitas vezes podem passar despercebidos. No momento que o aluno se depara com uma "perturbação", o professor pode contribuir para a adaptação do novo conhecimento com a escolha apropriada de um problema que permita o entendimento dos novos conceitos, muitas vezes, podendo-se usar até mesmo a epistemologia espontânea do docente, aquela que o mesmo carrega consigo pela sua própria experiência e intuição (D'AMORE, 2007).

Nos entrelaçamentos entre o saber, o professor e o aluno tem-se uma relação *assimétrica*, pois o professor detém a maior parte do conhecimento acadêmico que será trabalhado em todo o processo de ensino e aprendizagem. É justamente essa assimetria que justifica a existência de um campo de estudo dedicado à *Didática*, já que é conferida ao professor a tarefa de pensar no planejamento das aulas (RICARDO; SLONGO; PIETROCOLA, 2003). O professor se vê diante de um verdadeiro paradoxo, quando inicia uma temática para a turma: não pode explicitar toda sua intenção para que não atrapalhe o autoaprendizado do aluno, mas deve também intervir a tempo para não romper com o *contrato didático*.

O contrato didático é uma série de acordos entre professor e alunos, explícitos ou não, que permite exatamente a adequação das condições de aprendizado do conteúdo a ser visto naquele período letivo (RICARDO; SLONGO; PIETROCOLA, 2003). Neste contrato, não é desejável que o professor simplesmente apresente ao aluno o conhecimento pronto, mas que o saber possa ser apropriado pelo aluno, que deseja e se apropria daquele conhecimento, em geral, através de um problema. O contrato consiste em uma série de atitudes do aluno que são esperados pelo professor, e também uma série de atitudes do professor que são esperadas pelos alunos.

O contrato didático estabelece, portanto, uma *situação didática*. Numa situação didática, o aluno é instigado a lembrar dos conhecimentos que possui previamente para

resolver os problemas que lhes são apresentados (TEIXEIRA; PASSOS, 2013). Por isso mesmo, uma das características da situação didática é que o tempo de sua execução não pode ser estipulado *a priori*, já que o tempo de apropriação do conhecimento de cada aluno é particular.

No entanto, quando o aluno se depara com uma situação diferente daquelas que rotineiramente são trabalhadas em sala de aula, o professor não terá controle sobre as variáveis que estarão envolvidas. A estas variáveis, chamam-se de *situação adidática*. Naturalmente, quando o aluno não for capaz de resolver um problema numa tal situação, o professor poderá indicar caminhos para a sua resolução, tornando-a assim uma situação didática. Nesse momento, é importante que o professor se policie quanto à quantidade de informações que devem ser fornecidas ao aluno, a fim de que o processo lhe permita adquirir independência gradativa. O aluno, interagindo com o problema, desenvolve novos saberes a partir de suas próprias experiências e ideias.

Numa situação adidática, o conteúdo é apreendido por meio de uma adaptação a um meio em que o aluno é inserido, o *milieu*. O *milieu* é, portanto, um fator de desequilíbrio e desconforto. O aluno passa a resolver o problema por uma necessidade sua, e não da escola ou do professor. Ao se depara com uma situação adidática, o estudante se vê no lugar do pesquisador, tendo que formular uma conjectura, testar hipóteses, construir modelos, provar resultados, de alguma forma se livrar daquele fator de desconforto. Um exemplo de como se pode fazer introduzir esta perturbação seria a propositura de problemas que contenham dados em excesso, não apenas os dados estritamente necessários para a resolução da questão, o que força o aluno a usar o senso crítico na hora da abordagem do problema. Ou ainda quando o professor introduz questões com dados insuficientes, gerando também uma perturbação na análise do problema. Trata-se de uma perturbação do contrato didático, mas não a sua ruptura. Em questões que os dados são insuficientes, por vezes os alunos criam uma resposta equivocada apenas para satisfazer o desejo do professor, que, pensa-se, espera dos alunos uma resposta definitiva ao problema.

Daí a importância de se evitarem cláusulas endurecidas no contrato didático. É o que ocorre, por exemplo, quando uma questão do tipo $(x - 1)(x - 3) = 0$ é apresentada, e o aluno, pensando ter a obrigação de resolver usando o assunto visto naquele momento, não exita em transformar a equação numa equação do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ para então encontrar os valores de x pela fórmula resolvente das equações do segundo grau, ao invés de igualar os dois fatores entre parênteses a

zero. Tal consideração faz pensar em qual tipo de aluno se quer formar (RICARDO; SLONGO; PIETROCOLA, 2003).

O professor tem o papel de não apenas mostrar aplicações ou contextualizações da Matemática, mas também introduzir o sentido inverso, qual seja, a *descontextualização*, no sentido de ajudar o aluno a obter resultados universais e replicáveis aos vários contextos possíveis, quando da abstração daquele conhecimento (POMMER, 2008). O professor se vê no papel de um verdadeiro artista na escolha do problema motivador, aquele problema que irá instigar o interesse do aluno em construir o conhecimento esperado.

Na situação didática, algumas fases tornam-se evidentes (POMMER, 2008). A *devolução* é a fase inicial, quando o aluno é chamado a se responsabilizar pela resolução de certo problema. A *ação* é o momento em que o aluno inicia a resolução do problema, simula caminhos e tentativas. Na *formulação*, o aluno conversa com o problema sem, no entanto, explicitar necessariamente uma linguagem matemática formal, e pode até criar termos para explicar os procedimentos adotados na resolução. É também a etapa na qual o aluno dialoga com outros colegas e estabelece com eles trocas de informações a respeito da resolução obtida do problema.

A *validação* ocorre quando o aluno precisa mostrar sua resolução através de uma simbologia adequada e uma formalização matemática apropriada. É apenas na última etapa, a *institucionalização*, que o professor revela ao aluno sua intenção didática inicial, incorporando o conhecimento adquirido no universo teórico constituído historicamente, que ficará ao alcance de todos para quando for necessário utilizá-lo em outros contextos.

Segundo Pommer (2008), nas situações didáticas, há de se considerar ainda o *milieu* aliado e o *milieu* antagonista. O primeiro refere-se às situações nas quais o aluno resolve um problema a partir de modelos apresentados previamente, de cunho repetitivo. Já o segundo refere-se às situações nas quais não há dicas ou fórmulas prontas para se abordar o problema, aquele que irá causar uma desordem inicial no aluno.

Nas situações didáticas, os erros têm um papel que não pode ser negligenciado. Em verdade, o erro constitui-se conhecimento que até certo ponto produz acerto, mas que no momento seguinte torna-se falho. O erro é necessário para desencadear o processo de aprendizado (OLIVEIRA; ARRUDA; SILVA; CAMARGO, 2012). Em

geral, observa-se que o tipo de avaliação que a escola adota pode influenciar na visão que se tem sobre os equívocos cometidos pelos estudantes em tarefas escolares:

Desse modo, a valorização do erro pelo professor depende de sua concepção sobre a avaliação e do tipo de avaliação que ele realiza junto a seus alunos. Se for uma avaliação classificatória, sua atenção está na resposta correta e não em uma reflexão sobre o erro cometido. Em uma avaliação voltada para a formação, o erro não se esgota na resposta apresentada pelo aluno, ou seja, o olhar do professor e suas ações dirigem-se para o conhecimento a ser construído pelo aluno (CELESTE, 2008; p. 22).

O erro ocorre devido a vários obstáculos no processo de ensino-aprendizagem, dentre eles, destacam-se quatro: a) obstáculo epistemológico: dificuldade de entendimento do conceito matemático. Este obstáculo pode ser recente ou historicamente construído; b) obstáculo didático: más escolhas do professor no método de ensino; c) obstáculo psicológico: quando o conteúdo entra em conflito com a intuição e os desejos do aluno e, d) obstáculo ontogênico, que são as limitações físicas do aluno, de acordo com sua fase de desenvolvimento.

O obstáculo epistemológico pode ser encarado como conhecimento, na medida que o desconforto gerado pelo desconhecido gera um movimento na direção do aprendizado. O obstáculo epistemológico é, portanto, uma resistência de um saber não-adaptado. Não há como escapar de tal obstáculo, pois o mesmo não depende da didática implementada ou da maturidade do aluno (IGLIORI, 2015).

À medida que se identificam os obstáculos, o professor pode alterar o contrato didático a fim de orientar seu programa de aulas para a superação dos mesmos. Desta forma, percebe-se que o contrato didático não precisa ser rígido.

No decorrer das aulas, o professor também aprende. Ao aplicar uma situação didática em classe, o professor terá condições de, ao final, tirar conclusões com relação à eficiência das variáveis colocadas, à viabilidade de reaplicação, às mudanças dos métodos empregados, aos conhecimentos que podem ser adquiridos pelos alunos, etc.

Dentro de uma situação didática pode-se observar como os alunos percebem o conteúdo que está sendo trabalhado. Esta percepção pode ser notada, dentre outros, pelos tipos de registros que os estudantes produzem, conforme será visto na próxima seção.

2.4 Representações Semióticas

Representação semiótica é um registro de um objeto ou um fato em matemática (DUVAL, 1996). Pode ser um registro algébrico, matricial, geométrico, dentre inumeráveis outros possíveis. Segundo Pantoja, Campos e Salcedos (2013), as

representações semióticas podem se transformar, e isto pode ocorrer de dois modos: o primeiro por *tratamento*, quando se mantém o tipo de registro. Ao se manipular uma equação até chegar a outra equivalente, está-se meramente *tratando* a sua representação algébrica, e quando se altera a escala de um gráfico, está-se também *tratando* a sua representação gráfica. O outro tipo de transformação é a *conversão*, quando se trocam os registros semióticos. Porém, desde que não seja meramente uma passagem sem o devido entendimento.

Quando, a partir da equação $x^2 + y^2 = r^2$, se traça a respectiva circunferência, há aí uma conversão de um registro semiótico em outro. Isto, desde que se saiba que aquela equação provém do Teorema de Pitágoras no cálculo da distância de um ponto ao centro do círculo, e não meramente a plotagem de pontos do plano no gráfico por memorização, processo considerado de *codificação*, e não de *conversão*. De fato, quando o aluno não consegue converter um registro em outro, ele tende a confundir o objeto com seu símbolo, sem distinguir as duas coisas.

Cada representação semiótica possui o seu tipo de tratamento adequado. O tratamento da representação $1/2 + 1/5$ é diferente do tratamento da representação $0,5 + 0,2$, do mesmo objeto. É comum que as frações sejam erroneamente tratadas da mesma maneira que os números decimais, apenas somando as componentes das frações, sem a preocupação de se igualar antes os denominadores. Muitas vezes, um problema é mais facilmente resolvido quando se escolhe o melhor registro para tratá-lo.

Duval (2012) defende que uma das atividades mais importantes para que o aluno possa converter naturalmente as representações semióticas é a atividade de variar um parâmetro e, a partir daí, verificar a variação ou não variação de algum elemento em outra representação semiótica. Por exemplo, variando-se o coeficiente angular da reta na representação algébrica de uma função afim, é possível verificar a variação do gráfico desta função.

Duval ainda pondera que o ideal é que o aluno seja capaz de converter um problema colocado por extenso (representação em língua portuguesa) para sua representação que melhor possa ser tratada, e, no fim, converter os resultados novamente na representação em linguagem corrente. Desta forma, ele terá atestado seu total entendimento do que está fazendo. Segundo a teoria de Duval, o objeto e a sua representação são inseparáveis. Não há como o aluno se apropriar do entendimento (chamado de noesis) de um objeto matemático sem o seu registro (chamado de semiose). Por outro lado, não há como o aluno captar o sentido de um signo ou registro

(a semiose) se o mesmo não possui o objeto em uma representação mental (a noesis). A semiose é uma poderosa ferramenta para o entendimento pleno de conceitos matemáticos (DUVAL, 2012).

O problema que está sendo analisado nesta tese se apoia intimamente neste contexto. O problema dos caminhos, visualmente entendido, pode ser resolvido ou abordado de várias maneiras, desde as geométricas (contagem manual dos percursos), passando pela análise combinatória (contagem de caminhos por meio de fórmulas), pelo princípio de indução (generalização do resultado). São todas representações semióticas de um mesmo objeto ou problema. A representação computacional também é possível para quadrados de tamanhos pré-fixados, com a vantagem de se poder trabalhar com quadrados maiores, já que as contas podem ser feitas rapidamente pelo software.

Na seção 2.5 será abordado o tema da resolução de problemas, que compreende o modo pelo qual será executada a presente pesquisa junto aos alunos.

2.5 Resolução de Problemas

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), a resolução de problemas é tratada como um método recomendado no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Segundo o documento, só há problema quando a solução não está disponível de forma imediata, o aluno deve construí-la. O que para um aluno é um problema, para outro pode não ser, dependendo da etapa escolar de cada um (BRASIL, 1998). Nos PCN de Matemática dos anos finais do ensino fundamental, é recomendado que a resolução de problemas seja utilizada como ponto de partida para a atividade de Matemática, pois proporciona uma participação mais ativa do aluno na construção do conhecimento.

No processo de ensino há uma diferença entre estimular os estudantes a pensar e a fazê-los reproduzir esquemas prontos para resolver questões matemáticas (VALDÉS, 2010). Afinal, há a possibilidade do aluno não só aprender a Matemática, mas de fazê-la. Há muito tempo autores têm apresentado propostas de trabalho que buscam uma participação ativa dos estudantes. Um exemplo foi Maria Montessori (1870 – 1952) (FERNANDES; ARAÚJO, 2014), que abordou o tema da independência do aluno no aprendizado da Matemática, em como instigá-lo a procurar pelas proposições através de tentativas inicialmente braçais de se alcançar um padrão, uma resposta. A resolução de problemas seria um caminho para se atingir tal autonomia. Com relação à valorização do pensamento autônomo do aluno perante não apenas a Matemática, mas também às

demais disciplinas, há também amparo nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica:

Concretamente, o projeto político-pedagógico das unidades escolares que ofertam o Ensino Médio deve considerar:

...

IX – capacidade de aprender permanente, desenvolvendo a autonomia dos estudantes (BRASIL, 2013, 178).

Problemas são tipos de questões que demandam ingredientes próprios para serem resolvidos, como por exemplo: tempo de preparação, criatividade, insight (STERNBERG, 2008), organização e heurística (LESTER, 2013; POLYA, 1995). Ao contrário do que são as questões de puro algoritmo ou de aplicação direta de fórmulas ou contas. Segundo Gontijo (2007), a estratégia de resolução de problemas no ensino de Matemática suscita o trabalho com a intuição, a dedução, a validação de processos, a capacidade de argumentação e de comunicação, desperta a criatividade e a autonomia do aluno. Em uma situação diversificada, o aluno é levado a relacionar diferentes conhecimentos para a abordagem do problema (GONTIJO, 2007).

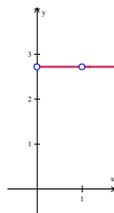
No contato com a resolução de problemas, o estudante passa a caminhar sempre à frente de seu desenvolvimento (SUKOW, s/d). Cada bom problema pode gerar outro. Tanto a criação quanto a resolução do problema exigem semelhante trabalho intelectual por parte do aluno e do professor. Em particular, os problemas em aberto fazem transparecer a criatividade de quem o resolve (SUKOW, s/d).

Cabe constatar que uma questão aparentemente improdutiva pode ser transformada em problema. O exercício de Cálculo 1: *mostre que a função $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$ é constante* ilustra bem isto. Sua solução seria: aplica-se o logaritmo em ambos os membros da equação: $\ln f(x) = \frac{1}{\ln x} \ln x = 1$. Logo, aplicando a exponencial nos dois lados, $f(x) = e^1 = 2,718 \dots$, constante. Esta questão poderia ser transformada em um *problema*, da seguinte forma: *indique o máximo de características que você conseguir listar a respeito da função $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$* . Neste caso, poderia o aluno começar por encontrar o domínio: $x > 0$ e $x \neq 1$.

Também, pelo fato de a variável independente estar no expoente, estará o estudante instigado a aplicar o logaritmo nos dois membros da equação, como feito logo acima, e encontrar o conjunto imagem, a saber, o conjunto unitário $\{e\}$. Isto é, ele irá *descobrir* que a função é constante, pois não lhe fora dito no enunciado, o que poderá proporcionar-lhe o prazer da descoberta. Afinal, a função fornecida não parece ser uma

função constante, a princípio. Também, poderá construir o gráfico desta função, que se mostrará contínua em seu domínio, mas aparentemente descontínua em $x = 0$ e em $x = 1$:

Figura 7 - Gráfico da função $f(x)=x^{1/\ln x}$



Fonte: Elaboração própria.

O aluno poderá estar interessado também no conceito de função contínua, motivado pelo gráfico assim construído. Afinal, esta seria uma função contínua? Ou seria uma função com descontinuidade removível? Ou descontínua? Abrir-se-ia para uma discussão com a classe e com o professor. É uma questão que exige do aluno o resgate de sua memória matemática para lidar com uma situação sem um caminho certo a seguir. Enfim, da forma como é colocada uma questão, a mesma pode se tornar um frutuoso problema.

Um dos precursores do estudo sobre resolução de problemas, Polya (1977) estabelece quatro etapas para esta metodologia de ensino: compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano; e retrospecto. Na compreensão do problema, está incluída a identificação das incógnitas e dos dados fornecidos, bem como o questionamento em relação à adequação dos mesmos. Também nesta etapa, cabe a verificação se o problema pode ser reformulado por outras palavras. No estabelecimento do plano, é preciso verificar a possibilidade de se adotarem estratégias já foram utilizadas em problemas semelhantes, se o problema pode ser simplificado, se cabe o esboço de figuras, se há uma fórmula, se há simetria, se pode ser feito por tentativa e erro, se há possibilidades a eliminar, se há um padrão, etc. Na execução do plano, é necessário ir verificando cada passo, persistindo no procedimento escolhido. Caso não se chegue a uma conclusão, troca-se o plano. No retrospecto, é importante verificar as contas, verificar os resultados, descartar respostas que sejam incompatíveis com as hipóteses do problema e observar se o método empregado pode ser de valia para outros problemas semelhantes. Também é interessante verificar, nesse momento, se o problema resolvido suscita ou enseja a formulação de outros problemas que daí podem ser derivados.

Existem técnicas ou estratégias eficazes na resolução de um problema, entre elas, podemos citar: tentativa e erro; busca por padrões; resolução de um problema mais simples (particularização); trabalhar em sentido inverso partindo da resposta (muito usado em desenho geométrico); simulação a partir de uma situação prática; desenho; cálculo formal e, narrativa (COUTINHO; BARBOSA; CONCORDIDO; COSTA, 2016).

A metodologia de resolução de problemas inverte a ordem definição – propriedades – exemplos – problemas, para: problema – definição – propriedades – exemplos – mais problemas. Uma possível estratégia de aplicação da resolução de problemas pelo professor junto a seus alunos seria a execução dos seguintes passos: proposição do problema à turma; leitura individual do mesmo; leitura em grupos; resolução do problema; acompanhamento e incentivo por parte do professor; anotação das diferentes soluções na lousa; discussão com a turma toda; busca de um consenso; formalização do conteúdo trabalhado com a inserção das definições e teoremas e, proposição de novos problemas (ONUCHIC, 2013).

Na resolução de um problema, caso a solução não surja, pode ser de utilidade esquecê-lo por um período, e retomá-lo em um tempo posterior. A lacuna pode ser de algumas horas, ou de alguns dias e mesmo de alguns anos. É o momento de incubação, quando trabalha o inconsciente. Após este período, normalmente vem o momento da iluminação, do *insight* (HÉLIE; SUN, 2010), que é o instante em que se manifesta espontaneamente a solução do problema, ou então quando surge alguma consideração não levantada anteriormente e que pode auxiliar na resolução do problema. Hélie e Sun (2010) afirmam que os problemas que não possuem algoritmos claros de resolução ensinam o aparecimento de *insights* por parte de quem irá resolvê-los.

Neste contexto, tão importante quanto encontrar a solução do problema é o aprendizado por este gerado durante sua resolução (POFFO, s/d), afinal, problema não é o conteúdo, e sim o meio de se trabalhar o conteúdo. Obviamente, tal metodologia demanda um trabalho maior do professor, que terá que procurar ou criar questões apropriadas para cada conceito a ser apreendido pelo alunado, no sentido de dar oportunidade ao estudante de manifestar suas ideias e, desta forma, solidificar ainda mais o conhecimento construído (POFFO, s/d).

Alterar a metodologia de aula para uma estratégia de resolução de problemas pode gerar uma resistência por parte da turma, num primeiro momento. Sukow (s/d) sugere que, inicialmente, não se usem textos longos nos enunciados, e que as reações

negativas dos estudantes não desestimulem o professor. Também, a frequente interrupção dos trabalhos ocasionados pela curta duração das aulas não deve desanimar o professor. A proposta de se alterar o contrato vigente comum traz a esperança de que o aluno se torne mais autônomo e participativo em sala.

2.5.1 Experiências com resolução de problemas em sala de aula

A experiência relatada por Cury e Silva (2008) mostra como a resolução de problemas pode ser útil na identificação de lacunas de aprendizado dos alunos. Em um experimento executado em uma turma do 5º ano do ensino fundamental, na disciplina de Matemática, as autoras constataram erros cometidos não só na resolução do problema, mas também na realização das operações básicas que deveriam já ser de conhecimento dos estudantes.

Segundo Cury e Silva (2008), após a aplicação de resolução de problemas na referida turma, pôde-se verificar que um problema não rotineiro enseja também uma maior discussão com os alunos a respeito das soluções do mesmo. E, além disto, possibilita aos alunos desenvolver habilidades que podem ser utilizadas em outras áreas, além da Matemática. Também, permite que se trabalhe a matemática com maior entendimento do que está sendo estudado, em contraste com a forma mecanizada de resolução de exercícios que não exige muitas vezes o devido entendimento.

Segundo Loehr, Fyfe e Rittle-Johnson (2014), a resolução de problemas ativa o conhecimento prévio e ajuda o aluno a focar no que realmente é importante no problema. Além disso, segundo os autores, enseja a oportunidade do estudante errar com produtividade. Também, diminui a ilusão do conhecimento que o aluno pode ter. Explorar o problema antes da exposição do conteúdo faz com que o aluno dedique maior atenção à entender a teoria do que quando a explicação é realizada antes da resolução dos problemas. Os autores realizaram uma pesquisa com crianças, na qual diferenciaram a metodologia de primeiro instruir, depois explorar, da metodologia de primeiro explorar, depois instruir. Inicialmente, os alunos que receberam primeiro a instrução pareceram resolver com mais facilidades os problemas propostos do que os alunos que resolveram os problemas antes da instrução. No entanto, enfatizam os autores, a aplicação posterior de uma atividade após os procedimentos adotados permitiu a verificação de que os alunos que exploraram primeiro e depois foram instruídos saíram-se melhor na atividade pós-instrução, do que os alunos que foram instruídos primeiro.

Coutinho, Barbosa, Concordido e Costa (2016) executaram uma pesquisa com alunos do 9º ano do ensino fundamental, na qual utilizaram-se de resolução de problemas para o estudo das equações do segundo grau. Após serem expostos a mais de um método de resolução de uma equação quadrática (fórmula resolutiva, completamento de quadrados e método geométrico) os alunos foram convidados a resolverem problemas relacionados à área de retângulos em contextos de costuras de tapetes, onde os mesmos tiveram que determinar inicialmente qual medida seria considerada a incógnita do problema, depois montar a equação do segundo grau, e, por fim, resolverem-na pelos métodos apresentados.

Os autores consideraram que o método utilizado foi o de ensinar *por meio* de resolução de problemas, em detrimento do ensinar *para* a resolução de problemas ou do ensinar *sobre* a resolução de problemas. Concluíram também:

Como resultado dessas atividades, foi possível perceber a preferência dos alunos pela praticidade da aplicação da fórmula de Bhaskara. Em geral, os alunos não queriam ter que pensar em estratégias para solucionar os problemas e, mesmo quando a resolução pela fórmula é mais longa do que se utilizassem outro método, a maioria dos estudantes não deixa de usá-la. Apesar dessa evidência, consideramos importante a apresentação dos três métodos, por disponibilizar uma gama maior de maneiras para resolver essas equações (COUTINHO; BARBOSA, CONCORDIDO; COSTA, 2016, p. 267).

O trabalho também foi fundamental ao chamar a atenção para a importância de se ensinar a partir de uma situação-problema, o que, segundo os autores, contribuiria para um aprendizado mais efetivo.

A resolução de problemas foi a maneira pela qual a pesquisa foi executada na presente tese. Em particular, foi proposta aos alunos a resolução do problema do ponto mais visitado, apresentada no próximo capítulo.

3 O problema do ponto mais visitado

O problema que foi resolvido pelos alunos participantes desta pesquisa é um problema de cunho combinatório e que ensaja o trabalho com probabilidade, probabilidade condicional, eventos independentes, combinações, dedução, raciocínio lógico, etc.

O problema do ponto mais visitado trata de encontrar o ponto pelo qual passam mais percursos que saem da origem $(0,0)$ e chegam ao ponto (N,N) , ou, equivalentemente, o ponto que possui a maior chance de ser atravessado por um caminho escolhido ao acaso da origem ao ponto (N,N) . Há várias maneiras de encontrar o referido ponto, dependendo do nível escolar em que a atividade é apresentada, isto é, dependendo da ferramenta cognitiva que se dispõe para a sua abordagem.

Em todos os níveis de ensino, o problema mostra-se interessante por, primeiramente, não ser um problema do estilo exercício de fixação, ao contrário, ele desperta no estudante o desafio de ter que enfrentá-lo sem uma sugestão de estratégia a utilizar. Também, é interessante por ter uma solução não intuitiva. Por último, por apresentar várias formas de resolução.

No Ensino Fundamental, o problema pode ser resolvido por contagem mecânica dos caminhos que passam por cada ponto do plano, para casos particulares da ordem N do quadrado. Por exemplo, em um quadrado 3 por 3, podem-se contar quantos percursos da origem $(0,0)$ até $(3,3)$ passam pelo ponto $(1,0)$, depois quantos passam pelo ponto $(0,1)$, depois por $(2,1)$, ..., $(3,2)$ e $(2,3)$, e, assim, determinar qual deles é o *ponto campeão* de caminhos. As crianças podem também vir a descobrir certos padrões que podem ser identificados na contagem, por exemplo, elas podem perceber que os pontos abaixo da diagonal secundária da matriz possuem as mesmas quantidades de caminhos que os pontos simetricamente localizados acima da diagonal (SANTOS; CASTILHO, 2013).

No Ensino Médio e na Educação Superior, é possível abordá-lo por meio da análise combinatória, também em casos particulares da ordem N da matriz. Conforme descrito na introdução desta tese, a quantidade de percursos total é a combinação $C_{2N,N} = \frac{2N!}{N!N!}$. Analogamente, conclui-se que a quantidade de caminhos que chegam até um ponto (x,y) do plano é a combinação $C_{x+y,x} = C_{x+y,y} = \frac{(x+y)!}{x!y!}$. Já a quantidade de percursos que partem do ponto (x,y) e chegam ao ponto final (N,N) é a combinação

$$C_{N-x+N-y, N-x} = C_{N-x+N-y, N-y} = \frac{(N-x+N-y)!}{(N-x)!(N-y)!}$$

Logo, conclui-se que a quantidade $c(x, y)$ de caminhos que partem da origem $(0,0)$ e chegam ao ponto final (N, N) , passando pelo ponto (x, y) , é o produto $c(x, y) = C_{x+y, x} C_{2N-x-y, N-x}$. Os alunos participantes desta pesquisa, que são alunos de graduação de disciplinas de Estatística Básica, foram estimulados descobrir que o valor máximo de $c(x, y)$ se dá no ponto $(1,1)$. Inicialmente, contando os percursos manualmente, porém, em seguida, usando a expressão de $c(x, y)$, para cálculo da quantidade de caminhos em cada ponto $(x, y) \neq (0,0)$, $(x, y) \neq (N, N)$.

Na presente pesquisa, não foi solicitado aos alunos que provem este fato para todo N , apenas que constatem para casos particulares, e que demonstrem a capacidade de utilizar seus conhecimentos e até mesmo sua intuição na resolução do problema. A prova matemática utiliza-se de indução, conteúdo não visto pelos participantes da pesquisa em nenhum momento do curso que frequentam.

No próximo capítulo, será detalhado o ferramental metodológico para a análise dos dados desta pesquisa.

4 Metodologia

Os participantes foram alunos de graduação da Universidade de Brasília, *campus* de Planaltina, da disciplina de Estatística Básica. A pesquisa de campo se deu com a aplicação de sequências adidáticas e didáticas que tiveram como objetivo principal a resolução do problema do ponto mais visitado. Na próxima seção, veremos em qual tipo de pesquisa se encaixa a desta tese, segundo: a fonte de informações; a natureza dos dados e, os procedimentos de coleta. O método utilizado na análise dos dados será destrinchado na seção 4.3 Metodologia da Análise Praxeológica.

4.1 Tipo de Pesquisa

A presente pesquisa se classifica, segundo a fonte de informações, pela pesquisa de campo. Segundo a natureza dos dados, qualitativa. Segundo os procedimentos de coleta, o estudo de caso. Segundo a metodologia, a *análise praxeológica* dos dados coletados. Os dados foram coletados a partir das produções escritas dos alunos, e os critérios para a coleta foi a identificação dos tipos de registros semióticos usados pelos mesmos e também do arcabouço teórico-prático utilizado nas respostas fornecidas nas tarefas propostas.

4.1.1 Pesquisa de Campo – segundo a fonte de informações

A pesquisa de campo é usada para se obter informações acerca de um problema ou de uma hipótese a ser comprovada, e também para descobrir relações entre fenômenos (PRODANOV; FREITAS, 2013). Ela possui algumas fases: primeiro, uma pesquisa bibliográfica sobre o assunto para se verificar a existência de trabalhos já realizados sobre o tema, e também para se criar um modelo teórico de referência. Em seguida, a determinação de uma técnica de se coletarem os dados e a definição da amostra. Enfim, o estabelecimento de técnicas de registro e de análise dos dados.

Na pesquisa de campo, a intenção é o aprofundamento dos problemas postos, e não na distribuição de características da população. Desta forma, o estudo de campo permite maior flexibilidade e seus objetivos podem ser reformulados no decorrer da pesquisa. O estudo de campo estuda um único grupo ou comunidade e se preocupa mais com a observação do que com a interrogação.

4.1.2 Pesquisa Qualitativa – segundo a natureza dos dados

A pesquisa qualitativa se caracteriza por valorizar a descrição e as percepções pessoais do pesquisador (CHIAPETTI, 2010). Neste tipo de pesquisa, muitas vezes as informações são subjetivas. Ela é mais indicada para que se investiguem os fenômenos humanos. A pesquisa qualitativa é exploratória e permite que os indivíduos ajam livremente e respondam de forma espontânea às perguntas do pesquisador. Abre-se espaço, portanto, para interpretações. A coleta de dados deve ser feita pelo próprio pesquisador no local onde se deseja obter informações.

Esta tese propõe, portanto, a realização de uma pesquisa qualitativa, pois, além de não ter um caráter generalista, não pretende realizar uma exploração estatística das observações efetuadas.

Chiapetti (2010) afirma que, na pesquisa qualitativa, os dados, em geral, revelam aspectos dos sujeitos envolvidos, como percepções, valores, opiniões, conhecimento acumulado, visões de mundo, sejam elas conscientes ou inconscientes. Segundo a autora, numa pesquisa qualitativa, valoriza-se mais o como, o processo. Os resultados são importantes, mas não são a parte principal. A pesquisa deve ser transferível, isto é, mesmo não sendo de caráter generalista, ela faz o pesquisador imaginar o estudo em outras situações ou outros locais.

As pesquisas qualitativas podem ser exploratórias, descritivas e explicativas. As exploratórias envolvem o estudo de situações até então desconhecidas (CHIAPETTI, 2010). Nas de cunho descritiva, tenta-se descrever, com novos olhares, realidades já conhecidas. Já as explicativas tentam estabelecer relações de causa e efeito dos fenômenos. Esta tese se assemelha mais ao tipo exploratório, pela ausência de trabalhos relacionados à análise praxeológica em conjunto com a de representação semiótica, sobre produções de alunos de nível superior, no ensino de análise combinatória, pela metodologia de resolução de problemas, especificamente com relação à resolução do recente problema do ponto mais visitado.

Segundo Chiapetti (2010) na pesquisa qualitativa podem-se coletar os dados das seguintes formas: observação, entrevista ou análise documental. No momento das análises dos dados, primeiro o pesquisador escolhe e seleciona os documentos a serem analisados. Depois, o material é submetido a um estudo aprofundado orientado pelas hipóteses formuladas e também pelo referencial teórico. Nesta parte, as ideias são codificadas, classificadas e sintetizadas. Por fim, realiza-se a interpretação, a reflexão, a conexão das ideias e a busca por resultados concretos.

4.1.3 Estudo de Caso – segundo os procedimentos de coleta

O estudo de caso, cujo principal instrumento de trabalho é o próprio pesquisador, com sua perspicácia observadora, visa conhecer uma unidade social, tais como um aluno, um partido, uma disciplina, um curso, dentre outros (PONTE, 2006). Trata-se de uma investigação que se debruça sobre uma situação em particular, que, sob certo ponto de vista, possui caráter único ou raro, para que se tenha uma compreensão de certo fenômeno. Um caso pode servir de contraexemplo, quando se nega aquilo que era tido como certo, que se acreditava ser diferente. Também, o caso pode ser um exemplo positivo, quando se quer mostrar uma situação bem sucedida. Em quaisquer das situações, o estudo de caso deve ser analisado sob os aspectos históricos, bem como deve ser analisado a partir do contexto no qual está inserida a situação a ser explorada, já que os fatores externos e também os fatores anteriores são potencialmente influenciadores nas situações.

Segundo Ponte (2006) um subcaso é um aspecto específico dentre de um caso que se deseja estudar. Como ilustração, uma metodologia de ensino pode ser o caso a ser analisado, enquanto a resposta de um determinado aluno a esta metodologia pode ser um subcaso, e este ser o objeto de estudo. Por outro lado, pode-se querer estudar também os casos múltiplos, isto é, vários estudos de caso que podem ser comparados depois. Como ilustração, um pesquisador em Educação Matemática pode querer investigar uma metodologia de formação tanto em grupos de alunos quanto em situações individuais, e tirar conclusões comparativas.

Ponte (2006) salienta que o estudo de caso possui natureza empírica e baseia-se no trabalho de campo ou em análise documental, e busca uma análise completa do objeto de estudo. No estudo de caso o pesquisador deve buscar ser neutro no que for possível, isto é, este deve manter um distanciamento da realidade a se estudar, para obter o máximo de imparcialidade nas análises dos resultados. Ademais, o estudo de caso pode ser qualitativo ou quantitativo, ou misto. O caráter misto pode fornecer mais evidências das conclusões que se vão tirar após o estudo.

No estudo de caso não se é permitido, em geral, que se generalizem as observações efetuadas. Apesar desta aparente lacuna no método, o estudo de caso proporciona algo que os estudos generalistas não permitem, às vezes, a compreensão a fundo do objeto de pesquisa. O estudo de caso permite, portanto, que se formulem hipóteses de trabalho, que se podem testar em novas investigações (PONTE, 2006). Em um estudo de caso alguns critérios devem estar claros: o objeto de estudo está bem

definido, isto é, está bem delimitado? O estudo evidencia ou indica claramente qual seria o aspecto fundamental do caso? O estudo acrescenta conhecimento?

Caracterizado, portanto, o tipo de pesquisa realizada no presente trabalho, no próximo tópico será descrita a teoria na qual se baseia o método de pesquisa desta tese: a Teoria Antropológica do Didático.

4.2 Teoria Antropológica do Didático

Segundo Santos e Menezes (2015) a Teoria Antropológica do Didático (TAD) propõe a elaboração de um pensamento unificado com relação aos fenômenos didáticos e tenta explicar a forma como os conteúdos acadêmicos são trabalhados em sala de aula, no processo de ensino e aprendizagem. Ela estuda a relação do homem perante o saber matemático.

Segundo a TAD há de se analisar as relações entre os *objetos*, as *pessoas* e as *instituições*, que incluem os professores (CHEVALLARD, 1999). Existem três possíveis relações entre estes três entes: entre pessoas e objetos, entre pessoas e instituições, e entre objetos e instituições. Os objetos são, no campo da didática, conteúdos acadêmicos, as pessoas são os alunos e as instituições são as escolas.

Em geral, as instituições são dispositivos sociais que determinam a forma como as coisas devem ser feitas e pensadas pelas pessoas, com relação aos objetos da natureza (SANTOS; MENEZES, 2015). Isto é, em geral, a relação entre as pessoas e os objetos é influenciada pela relação entre a instituição e o objeto e pela relação entre a pessoa e a instituição. No campo da didática, a relação entre as pessoas e a instituição é o contrato didático, um conceito da teoria das situações didáticas de Brousseau. Este interfere, naturalmente, na relação dos alunos com os componentes escolares. Neste sentido, cuidados devem ser tomados para que o aluno não seja estimulado apenas a se sujeitar aos caprichos da instituição, sem se preocupar com o real aprendizado dos conteúdos acadêmicos. De outra forma, o aluno irá procurar formas de satisfazer as necessidades da instituição que não condizem com as relações esperadas entre ele e a escola. Os objetivos não seriam alcançados.

Pessoa é um conceito que se subdivide em estágios. O estágio indivíduo é quando a pessoa não está, ainda, relacionada com alguma instituição. O estágio sujeito é quando a pessoa está *sujeita* a alguma instituição. O estágio pessoa se dá quando o indivíduo se relaciona com várias instituições distintas. Quando a pessoa entra numa instituição, sua relação com os objetos pertencentes a ela deve mudar, de acordo com o

esperado pela instituição, para que haja aprendizado. Isto é, há aprendizado quando as relações entre pessoas e objetos estão em conformidade com as relações entre a instituição e os objetos. Neste caso, a pessoa é considerada então um *sujeito adequado*.

Para se constatar tal progressão é que existem as avaliações institucionais (CHEVALLARD, 1999). No entanto, sem o devido cuidado, a avaliação, sendo parte do contrato didático estabelecido na relação entre pessoa e instituição, pode vir a prejudicar a relação entre pessoa e objeto, no sentido que a pessoa irá se preocupar mais em se adequar à avaliação institucional do que procurar aperfeiçoar sua relação com os objetos.

Os objetos são classificados em ostensivos e não ostensivos (ALMOULOU, 2007). Os ostensivos são os objetos manipuláveis, e os não ostensivos são as noções matemáticas, os conceitos e as propriedades. Os ostensivos são aqueles que se podem ver ou enxergar. Os não ostensivos são aqueles que existem institucionalmente. Como ilustração, a propriedade da existência do elemento inverso da adição no conjunto dos números reais é um objeto não ostensivo. A utilização dele na resolução de uma equação, como $x + 1 = 4$, é um objeto ostensivo, que seria a devida manipulação da representação do conceito matemático, em uma analogia do que ocorre na representação semiótica de Duval. A preocupação do professor deve ser a de mostrar ambas as realidades ao aluno. Ambas coexistem nos momentos de toda organização matemática.

A Teoria Antropológica do Didático dá suporte ao método que será empregado para a análise dos dados desta tese: o método da Análise Praxeológica, descrito no próximo tópico.

4.3 Metodologia da Análise Praxeológica

Segundo Yves Chevallard (1999), as organizações associadas a um saber são de dois tipos: as organizações matemáticas e as didáticas. As matemáticas são o universo matemático e as didáticas referem-se ao modo de construir esse universo para o aluno. A passagem das primeiras para as segundas é chamada de transposição didática (ALMOULOU, 2007). Nesta passagem, seis momentos são destacáveis: o momento em que o aluno toma contato com as tarefas próprias do universo matemático; o momento em que técnicas são apresentadas para que se possam executar as tarefas; o momento em que as técnicas são explicadas por um aparato tecnológico; o momento em que a técnica é aplicada em diferentes tarefas; o momento da institucionalização do saber através da teorização do assunto e, o momento da avaliação de todo o processo.

Os momentos não possuem necessariamente esta ordem. Ao professor cabe pensar uma organização didática que permita o aluno alterar sua relação com uma dada organização matemática, introduzindo novas técnicas para a realização de tarefas, ou ampliando o aparato teórico-tecnológico do conteúdo que se está estudando. O objetivo final é fazer com que o saber construído passe a fazer parte da cultura da instituição (ALMOULOU, 2007).

Na instituição, as tarefas são executadas por um modo de fazer. O fazer matemática baseia-se na relação entre a prática e o campo conceitual, cada uma delas com suas subdivisões (BARBOSA; LIMA, 2014):

- A *prática* é composta pela *tarefa* e pela *técnica* (o saber fazer).
- Já o *campo conceitual*, pela *tecnologia* e pela *teoria*.

Tais definições se relacionam da seguinte forma: a tarefa é executada através de uma técnica. Esta técnica está amparada pela tecnologia, que, por sua vez, está embasada numa teoria que a generaliza. Este esquema foi denominado, portanto, de *praxeologia*, *práxis* significando prática, e *logos* significando a razão. Assim, são considerados dois blocos: o saber-fazer (técnico/prático) e o saber (tecnológico/teórico) (CHEVALLARD, 1999).

Uma situação ilustra bem este conceito: para a *tarefa* de se encontrar o valor de x da equação $3x = 12$, usa-se a *técnica* de se dividir ambos os membros da igualdade por 3. Esta técnica, por sua vez, está amparada pela *tecnologia* da propriedade do elemento inverso multiplicativo, isto é, ao se operar um número com ele mesmo pelo elemento inverso da multiplicação, obtém-se o elemento neutro da multiplicação, 1, que agora estaria multiplicando x em nossa equação. Tal tecnologia, por sua vez, está baseada numa *teoria*, a teoria de Corpos, da Álgebra, que determina duas realidades: que os números racionais não nulos possuem elemento inverso multiplicativo, e que os racionais possuem o elemento neutro da multiplicação.

Uma teoria pode ser a base para várias tecnologias (BESSA DE MENEZES, 2010). Cada tecnologia pode justificar várias técnicas, e cada técnica pode ser usada para vários tipos de tarefas. Também, para a execução de uma determinada tarefa, podem-se ser utilizadas subtarefas. A dupla tarefa-técnica sempre amparada pelo par tecnologia-teoria.

Segundo Bessa de Menezes (2010) a praxeologia tarefa-técnica-tecnologia-teoria é chamada de *pontual* quando formada por uma tarefa que dependa apenas de uma única técnica para sua execução. A praxeologia será *local* quando uma tarefa é executada por

várias técnicas, porém amparadas por uma única tecnologia. Ela será *regional* quando, para a realização de uma tarefa, é exigida a execução de outras tarefas, sendo estas amparadas por tecnologias diversas, porém sob uma única teoria. A praxeologia será *global* quando a execução de uma tarefa exige a participação de mais de uma teoria.

Uma organização matemática local deve responder questões que não podem ser respondidas por uma organização pontual (BESSA DE MENEZES, 2010). A construção de uma organização local requer a consideração de diversas técnicas de realização de tarefas. Algumas características de uma organização local: integração dos tipos de tarefas, diferentes técnicas para escolher, independência do objeto ostensivo, existência de tarefas reversíveis, interpretação do resultado de aplicações das técnicas, existência de tarefas em aberto. Na organização local a técnica deve progredir, novas questões matemáticas fazem surgir diferentes técnicas, e a concepção parte-todo deve ser *institucionalizada*.

Bessa de Menezes (2010) ainda salienta que o gênero *tarefa* é caracterizado por um verbo, como *calcule*, *estime*, *monte*, etc. Já o *tipo de tarefa* é uma especificação, como o cálculo das raízes de uma determinada equação, ou a montagem de um gráfico. Uma técnica será *superior* à outra técnica quando for capaz de executar um número maior de tarefas. Como ilustração, a técnica de se resolver uma equação do segundo grau pela sua fórmula resolutive é superior à técnica de soma e produto, pois esta última se aplicaria a casos particulares da equação. O surgimento de uma técnica deve-se à falta de uma maneira de se resolver uma determinada questão.

Segundo o autor, na análise praxeológica, o saber matemático, tanto do ponto de vista da organização matemática quanto da organização didática, possui níveis ou locais, na seguinte ordem: sociedade, escola, pedagogia, disciplina, domínio, setor, tema, objeto. Tal compreensão faz-se necessária para o bom desempenho do trabalho do professor.

O estudo piloto descrito a seguir constitui-se num exemplo de aplicação da metodologia da Análise Praxeológica que se pode realizar numa pesquisa de campo com estudantes.

4.4 Estudo piloto

Ao fim do ano de 2015 realizei um estudo piloto com respeito ao tema desta pesquisa enquanto professor de uma de minhas turmas da Faculdade Planaltina da Universidade de Brasília – FUP, com objetivo também de realizar uma análise

praxeológica dos resultados das atividades que seriam aplicadas aos alunos, não ainda com intuito de realizar uma pesquisa. Sendo assim, não foi feita uma caracterização dos indivíduos como normalmente se faz numa pesquisa acadêmica. De forma ampla, a turma que trabalhei no estudo piloto era composta por 17 alunos, sendo a maioria de cursos diurnos do campus de Planaltina da Universidade de Brasília, e de uma turma minha no período de verão. Este estudo serviu como uma prévia da pesquisa em si. A atividade consistiu na resolução do problema do ponto mais visitado e posterior análise das produções dos alunos, tendo por base a análise praxeológica de Chevallard.

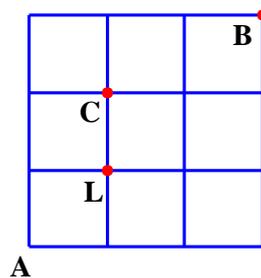
Na turma havia alunos que fizeram a disciplina Estatística Básica do curso e outros que não a fizeram. A proposta foi constatar a evolução conceitual de cada um destes dois grupos de alunos no decorrer dos trabalhos, quando deparados com o problema do ponto mais visitado que, *a priori*, não se tinha ideia de como resolvê-lo.

Para a análise das produções dos alunos, os estudantes foram denotados por:

- N (de *não*) aqueles que *não* fizeram a disciplina “Estatística” até aquele momento, na universidade, que foram três alunos.
- S (de *sim*) os que já fizeram a disciplina, que foram 11, e
- I (de *indeterminado*) os três que não declararam se já fizeram ou não a disciplina de Estatística.

Tarefa 1: quantos caminhos passam pelo ponto C?

Figura 8 - Figura relativa à primeira atividade do estudo piloto



Fonte: Elaboração própria.

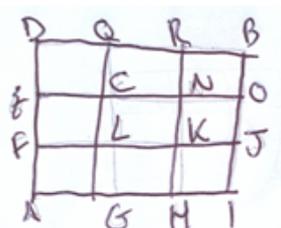
Para esta primeira tarefa, será denominada *Técnica 1* a técnica de se contar manualmente os percursos de A até B, trajetória por trajetória, passando pelo ponto C. A tecnologia utilizada por esta técnica 1 se baseia na ideia de que os caminhos contáveis são aqueles que vão para cima ou para a direita. E a teoria envolve apenas a noção

elementar de contagem de objetos ou elementos (no caso, de percursos passando pelo ponto C).

Já a *Técnica 2* surgida nas respostas desta questão é a técnica de se contar os caminhos contando primeiro a quantidade de rotas até determinado ponto, depois o número de caminhos deste ponto até o ponto final, e em seguida multiplicando os dois resultados. A tecnologia envolvida nesta técnica é a de contar caminhos até C, depois de C até o final, e depois multiplicar uma quantidade pela outra. A teoria envolvida nesta técnica 2 é o Princípio Fundamental da Contagem – PFC, que postula que o número total de resultados de um experimento é o produto dos resultados em cada etapa do mesmo.

A seguir, as realizações dos alunos. Retomando, portanto, a tarefa 1 era encontrar quantos caminhos existem, de (0,0) a (3,3), passando por C:

Figura 9 - A primeira atividade: quantos caminhos saem de A e chegam em B = (3,3)?



Fonte: Produção de um estudante - Arquivo pessoal do pesquisador

Alunos N:

Nesta tarefa, todos os três que não fizeram a disciplina de Estatística usaram a mesma Técnica 1 (contagem manual), sendo que apenas um dos três chegou no resultado correto, conseguindo contar todos os percursos possíveis passando por C, que são 9 caminhos.

Alunos S:

Dos 11 que fizeram a disciplina Estatística, cinco foram pela Técnica 1 (contagem manual) e quatro usaram a técnica 2 (PFC).

Alunos I:

Dos três que não declararam se fizeram a disciplina de Estatística, um fez pela técnica 2.

Grata foi a minha surpresa ao ouvir de um dos alunos naquele momento: “*Eu contei quantos percursos chegam a C, e somei com a quantidade que chegam ao ponto final... Mas os caminhos são independentes..., então não devo somar, e sim multiplicar!*” Este *insight* foi um avanço, um salto dado pelo aluno na obtenção da

resposta correta ao problema, ao deduzir qual a operação aritmética que deveria ser feita. Foi a prova que o *milieu*, o problema dificultador, serve sim como meio pelo qual o aluno avança intelectualmente quase que sozinho utilizando seus conhecimentos prévios, consolidando as suas aprendizagens para além da repetição por meio do uso memória. Naturalmente, o que o referido aluno chamou de independente não é o termo consagrado pela literatura ao se definirem as etapas de um experimento, mas foi o suficiente para se perceber que o mesmo entendeu e sabia perfeitamente o que estava fazendo. Foi a concretização do momento da validação, da teoria de Brousseau, no qual o aluno externaliza o seu ponto de vista a respeito do problema.

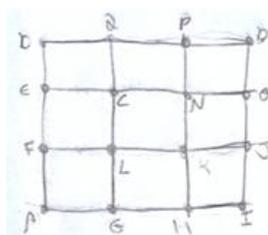
Tarefa 2: por qual ponto passam mais caminhos?

Nesta altura, revelei para os alunos que ainda não haviam percebido a possibilidade de se usar a técnica 2, isto é, o Princípio Fundamental da Contagem – PFC, para se contar os percursos passando por cada ponto.

Desta forma, esperava-se que os mesmos utilizassem esta ferramenta para encontrarem o ponto mais visitado dentre todos os possíveis pontos da tábua quadrada.

Nesta tarefa surgiu ainda a técnica *Técnica 3*, que consiste em o aluno observar que a quantidade de caminhos que passam por determinado ponto é a mesma pelo ponto simétrico em relação à diagonal principal do quadrado, e também a mesma pela diagonal secundária. A tecnologia a ela associada é contar quantos caminhos passam por um dado ponto e a seguir atribuir ao ponto simétrico esta mesma quantidade. A teoria que confirma a simetria, usada pelo aluno, fora executada de cunho intuitivo, porém, posteriormente confirmada pelo professor durante a atividade. A figura 10 mostra a simetria dos pontos com relação à quantidade de percursos que passam por cada um deles.

Figura 10 - que possuem a mesma quantidade de caminhos: F e G, E e H, D e I, C e K, Q e J, P e O, L e N, A e B.



Fonte: Produção de um estudante - Arquivo pessoal do pesquisador

Vamos aos registros desta atividade, ainda para o quadrado 3 por 3, na determinação do ponto mais visitado por percursos.

Alunos N:

Desta vez, todos os 3 que não fizeram a disciplina Estatística usaram a técnica 2 (o PFC), como fora sugerido a eles, para se encontrar o ponto mais visitado por caminhos. Todos chegaram à resposta correta, o ponto L ou o ponto N.

Alunos S:

Dois dos 11 alunos que fizeram Estatística não encontraram os pontos mais visitados. Nove encontraram os pontos mais visitados L e N, sendo que oito usaram a técnica 2 (PFC) e um a técnica 3 (simetria do quadrado).

Alunos I:

Dos três não declarantes, um conseguiu chegar aos pontos L e N, e também percebeu as devidas simetrias do quadrado.

Tarefa 3: num quadrado 4 por 4, quantos caminhos passam pelo ponto F = (1, 1)?

Neste instante, eu mostrei que a quantidade de percursos que passam por um ponto qualquer (x, y) é o produto (SANTOS; CASTILHO, 2013):

$$c(x, y) = \frac{(x + y)!}{x! y!} \cdot \frac{(N - x + N - y)!}{(N - x)! (N - y)!}$$

O cálculo da quantidade de caminhos através desta fórmula seria a técnica 4, mais apropriada neste caso, devido ao tamanho do quadrado, 4 por 4. A tecnologia envolvida nesta tarefa é o conceito de permutação com elementos repetidos. A teoria é o Princípio Fundamental da Contagem. O uso desta fórmula seria a técnica 4.

Nesta situação, expliquei-lhes que o primeiro fator multiplicativo da fórmula de $c(x, y)$ corresponde à quantidade de caminhos que chegam em (x, y) , e o segundo fator de $c(x, y)$ é a quantidade de caminhos que saem de (x, y) e chegam em (N, N) .

Alunos N:

Dos três que não fizeram Estatística, um acertou a quantidade de caminhos que passam por (1,1) na malha 4 por 4.

Alunos S:

Dos 11 que fizeram, nove chegaram aos 40 percursos pela mesma técnica 4 de se utilizar a fórmula de $c(x, y)$.

Alunos I:

Apenas um dos não declarantes conseguiu chegar aos 40 caminhos passando por F, pela mesma técnica 4 (fórmula).

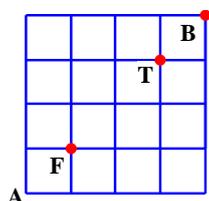
Tarefa 4: Por qual ponto passam mais caminhos, numa tábua 4 por 4?

Neste caso, esperava-se que os alunos utilizassem novamente a técnica 4 (fórmula).

Alunos N:

Dos três, um chegou aos pontos mais visitados $F = (1,1)$ e $T = (3,3)$, simétricos.

Figura 11 - Pontos mais visitados no quadrado 4 por 4



Fonte: Elaboração própria

Alunos S:

Dos 11, oito chegaram aos pontos F e T, e a maioria já estava percebendo a simetria do quadrado em relação à diagonal secundária da matriz. Os outros três não conseguiram resolver. Destes oito, apenas um não percebeu a simetria do quadrado, isto é, fez a contagem para todos os 25 pontos da tábua para se concluir por qual ou quais pontos passam mais percursos.

Alunos I:

Apenas um chegou aos pontos F e T, e este percebeu a simetria do quadrado.

O pesquisador revelou à turma que, de fato, o ponto $(1,1)$ é o mais visitado, independentemente do tamanho N por N do quadrado.

Tarefa 5: Qual a probabilidade de se passar pelo ponto $F = (1,1)$, ao se escolher um caminho aleatoriamente, no quadrado 4 por 4?

Nesta tarefa, primeiro os alunos foram orientados a calcular a probabilidade aplicando o conceito de independência de eventos, e também o conceito de probabilidade da união de eventos. Solicitei que os mesmos imaginassem uma urna com bolas azuis (passos para cima) e brancas (passos para a direita). Cada bola retirada

correspondia a um passo. Desta forma, no quadrado 4 por 4, a chance de se passar pelo ponto $F = (1,1)$, é a mesma de se retirar uma bola branca e depois uma azul, ou então de se retirar uma azul e depois uma branca:

$$\frac{4}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{32}{56} = 57,1\%.$$

Esta seria a técnica 5, portanto, na obtenção da probabilidade de se passar pelo ponto $(1,1)$. A tecnologia associada corresponde a multiplicar a probabilidade em cada passo sorteado pelas bolas, e somar as chances de se começar indo para cima ou para a direita. A teoria envolve o conceito de independência de eventos, quando se multiplicam as chances de cada passo dado, e o conceito de probabilidade da união de dois eventos disjuntos, que é a soma das probabilidades.

A técnica 6 desta tarefa, alternativa à técnica 5, consiste em contar o total de caminhos de A a B, 70, depois dividir a quantidade das rotas que passam por F, 40, pelo total 70. A técnica 6 requer a tecnologia e a teoria da técnica 1, com o acréscimo de que a teoria envolvida agora é mais ampla, isto é, incluindo o conceito de probabilidade de um evento com elementos equiprováveis dada pela fórmula

$$\frac{n(Fav)}{n(Tot)},$$

onde $n(Fav)$ é o número de resultados favoráveis, e $n(Tot)$ o número total de resultados do experimento. Em outras palavras, a técnica 6 seria a da probabilidade frequentista.

Alunos N:

Um aluno usou o que foi sugerido, e usou a técnica 5 (independência de eventos e eventos disjuntos).

Outro aluno deste grupo calculou a probabilidade pela técnica 6 (frequentista).

Alunos S:

Oito alunos chegaram à porcentagem correta de 57,1%, pela técnica 5. Os outros 3 também acertaram, e usaram a técnica 6.

Alunos I:

Apenas um aluno chegou aos 57,1%, e foi pela técnica 5.

Pôde-se perceber a partir destas análises que a proporção de estudantes que acertaram as questões nos grupos dos alunos N e I foi menor do no grupo S, talvez pelo

fato de que neste último grupo o assunto de análise combinatória e probabilidade já terem sido visto por eles.

Ao fim destas atividades fizemos o seguinte experimento de natureza lúdica: desenhei uma tábua de pontos no quadro e pedi para que dois alunos escolhessem um ponto que seria visitado por um caminho a ser sorteado.

Coloquei em um copo quatro bolinhas brancas e quatro azuis, de mesmos formatos, tamanhos e pesos, e pedi para que um terceiro estudante pegasse sem olhar uma bolinha por vez, sem reposição. A cada bolinha branca retirada, dava-se um passo para a direita e, a cada bolinha azul retirada, dava-se um passo para cima. Outro colega ia desenhando no quadro o caminho sendo formado.

O copo era opaco e era posto acima do nível dos olhos do estudante para que não se pudesse reconhecer o conteúdo no seu interior. Ao fim dos oito passos, aquele(s) aluno(s) que havia(m) escolhido algum dos pontos visitados pelo caminho ganhou(aram) o jogo. O objetivo foi mostrar na prática como se poderia escolher um caminho de forma aleatória.

Na discussão que se seguiu acerca desta atividade lúdica notei que, mesmo tendo todos concluídos juntos que o ponto mais visitado é o ponto (1,1), alguns alunos ainda insistiram em afirmar que os pontos (1,0) ou (0,1) eram os mais prováveis de serem visitados pelo caminho sorteado, afinal, o caminho obrigatoriamente passa por um destes dois pontos, com 50% de chance cada um. O fato de mais do que 50% dos caminhos passar pelo ponto (1,1) não convenceu a estes poucos alunos.

Em seguida, os alunos espontaneamente sugeriram a criação de um jogo de azar usando a atividade conduzida na pesquisa, com fins lucrativos: o participante escolhe um ponto qualquer do plano e depois sorteia um caminho pela retirada sucessiva das bolas coloridas. Pela regra, o participante ganharia se o caminho sorteado passasse pelo ponto pré-escolhido pelo mesmo. Qual a chance de vitória? Fizemos juntos a conta para o caso do quadrado 3 por 3 e verificamos que há $16 - 2 = 14$ pontos que podem ser escolhidos. Em qualquer caminho há 5 pontos, desconsiderando também os pontos inicial e final, como pode ser verificado na figura 10.

Logo, a chance de vitória é de

$$\frac{5}{14} = 35,7\%.$$

Já no quadrado 4 por 4 existem $25 - 2 = 23$ pontos passíveis de escolha. Cada caminho possui 7 pontos. Logo, a chance de se ganhar é de

$$\frac{7}{23} = 30,43\%.$$

Com respeito ao jogo, várias possibilidades ainda foram levantadas pelos estudantes. Quanto mais pessoas jogando, maior ou menor o lucro? É melhor escolher um ponto ou um caminho completo para adivinhar? Poderíamos fazer um aplicativo com um jogo do tipo? Poderíamos ganhar dinheiro com o aplicativo? Qual seria a probabilidade de alguém acertar o ponto (ou o caminho)?

Outro questionamento surgiu ainda ao fim das atividades: o cálculo da probabilidade de um caminho passar pelo ponto (1,1) ou pelo ponto (N - 1, N - 1).

Aqui, me veio a oportunidade de trabalhar com eles o conceito de probabilidade da união de eventos. Exatos 40 percursos passam por $F = (1,1)$, bem como por $T = (3,3)$. Mas, ao todo, da origem até o ponto final (4,4), são 70 caminhos. Assim, a probabilidade de se passar por F ou por T *não* pode ser, portanto,

$$\frac{40 + 40}{70} > 100\%.$$

Expliquei no quadro, então, que teríamos de retirar os percursos que passam pelos dois pontos, para não contarmos os caminhos repetidos. Assim, precisamos saber quantos caminhos passam pelos dois pontos simultaneamente. Para tanto, usamos a estratégia de contar quantos chegam até F, depois quantos vão de F a T, e enfim quantos de T ao ponto final. Desta forma, são $2 \times 6 \times 2 = 24$ percursos. Logo, a chance de se passar por F ou por T será

$$\frac{40 + 40 - 24}{70} = \frac{56}{70} = 80\%.$$

Esta foi uma pergunta que me surpreendeu, e que reafirmou a riqueza que o problema pode gerar. A probabilidade da união de eventos *não* disjuntos não estava nos planos no ato da elaboração das atividades, porém surgiu através dos questionamentos espontâneos do aluno.

Tais questionamentos e sugestões levantadas pelos estudantes serviram para provar mais uma vez que problemas não imediatos e diferentes suscitam nos mesmos um maior envolvimento nas atividades propostas. Mostraram também que entenderam toda a questão, pois, se não tivessem compreendido o problema e a sua resolução, não poderiam propor jogos referentes ao mesmo.

Observou-se que o *milieu* materializado pelo problema de encontrar o ponto mais visitado serviu como um autêntico exemplo de uma situação adidática. Os alunos, na pesquisa, não tinham ideia de como poderiam encontrar o ponto. À medida que

foram pensando no problema, alguns alunos deram o salto desejado, isto é, utilizaram o Princípio Fundamental da Contagem, da Análise Combinatória, para que pudessem encontrar a quantidade de caminhos que passam por um determinado ponto do plano. Isto, pelo interesse dos próprios estudantes.

Observou-se também que o problema colocado no estudo piloto foi inicialmente proposto mesclando-se as representações geométricas e a linguagem natural: mostrada a malha quadriculada aos alunos, perguntou-se por extenso como calcular a quantidade de caminhos que passam por determinado ponto. Ao fim de toda a atividade, pôde-se verificar que os alunos conseguiram voltar para a representação em língua corrente, através inclusive das discussões que se seguiram, como por exemplo, a proposta de se inventar um jogo de azar para se ganhar dinheiro com o problema do ponto mais visitado. Esta discussão após as atividades finais mostrou que todos compreenderam bem o problema e sua resolução, mesmo que, para alguns, a solução tivesse que ser guiada pelo professor mediador.

No próximo capítulo será mostrado como foi realizada a pesquisa de campo. A pesquisa foi composta pelas mesmas atividades do experimento descrito anteriormente e ainda pelas atividades de aplicação do problema do ponto mais visitado ao Triângulo de Pascal. A análise dos resultados não se restringiu à análise praxeológica, mas também ao estudo dos registros semióticos apresentados pelos alunos na resolução das questões propostas.

5 A condução da pesquisa

O estudo de caso da pesquisa desta tese foi realizado da seguinte forma: foi entregue aos alunos de uma disciplina de Estatística Básica do noturno de graduação do campus Planaltina da Universidade de Planaltina – FUP – uma lista de atividades relacionadas ao *problema do ponto mais visitado* e suas aplicações no Triângulo de Pascal para que os mesmos pudessem executá-las, utilizando, para tanto, orientações do professor à medida que fossem necessárias. Os alunos em sua totalidade já haviam estudado, na disciplina, os conteúdos de análise combinatória e probabilidade e portanto poderiam utilizar destas ferramentas para execução das tarefas, caso viessem a lembrar.

Ao contrário do que fora executado no estudo piloto, a turma não estava sob minha responsabilidade no momento da pesquisa. Ela foi iniciada por mim, porém, ao entrar de licença, o professor substituto assumiu-a até o término do semestre. Ao fim do primeiro semestre de 2017 apliquei o estudo de caso na referida turma.

Na pesquisa, foi possível efetuar registros de feedback, verificar se há mudanças de respostas com relação à pesquisa piloto, sondar o perfil dos estudantes, verificar como foi a construção entre pares, efetuar a análise praxeológica das produções dos alunos à luz da teoria de Chevallard, verificar como os alunos tratam e convertem registros à luz da teoria das representações semióticas de Duval, verificar o desempenho dos alunos frente à metodologia de resolução de problemas à luz da teoria de Polya (1977), se os mesmos conseguem dar os saltos necessários no entendimento da Matemática na resolução do problema e se conseguem transpor o problema para as propriedades do triângulo de Pascal.

5.1 Caracterização da instituição

O *campus* Planaltina da Universidade de Brasília foi inaugurado em 2006 e atualmente abriga os seguintes cursos:

- Licenciatura em Ciências Naturais – diurno e noturno;
- Gestão Ambiental – noturno;
- Gestão do Agronegócio – diurno e,
- Licenciatura em Educação do Campo – diurno, sendo este com habilitações em Letras, Ciências e Matemática.

Em média, há 1000 alunos no *campus*.

Possui ainda os seguintes programas de pós-graduação: Mestrado em Ciências de Materiais, Mestrado Profissional em Gestão Pública, Mestrado em Meio Ambiente e Desenvolvimento Rural e Doutorado em Ciências Ambientais.

Até essa data, o quadro de professores era constituído por aproximadamente 100 professores, sendo mais de 95% doutores e os demais já ingressados em programas de doutoramento.

O campus atende alunos residentes principalmente na cidade de Planaltina-DF. As seguintes disciplinas contemplam algum conteúdo relacionado a Matemática, no *campus*:

- No curso de Gestão de Agronegócio, as disciplinas: Estatística Aplicada à Gestão do Agronegócio; Matemática para o Agronegócio;
- No curso de Gestão Ambiental, as disciplinas: Estatística e Ecologia Numérica; Matemática 1;
- No curso de Ciências Naturais, as disciplinas: Introdução ao Cálculo; Cálculo 1; Introdução à Estatística;
- No curso de Educação do Campo, habilitação em Matemática, as disciplinas de um curso tradicional de matemática.

A pesquisa desenvolvida para esta tese foi aplicada na turma de Estatística do curso de Ciências Naturais – noturno. Observa-se que os alunos deste curso estudam matemática em duas disciplinas nos dois primeiros semestres, depois voltam a estudá-la na disciplina de Estatística apenas no quarto semestre. Desta forma, é compreensível que os estudantes possam ter dificuldades em reter todos os detalhes da matemática estudada no decorrer do curso. Este fato acabou refletindo na execução da presente pesquisa, apesar de não a ter comprometido.

5.2 Perfil dos estudantes participantes da pesquisa de campo

Seis estudantes participaram da pesquisa, quatro do gênero feminino e dois do gênero masculino. De fato, a turma escolhida era composta por um número maior de estudantes, porém a pesquisa foi realizada ao fim de um semestre letivo e, sem que esta fosse a intenção do pesquisador, naquele momento a turma já estava dividida entre os que já haviam sido dispensados da disciplina e os que estavam realizando estudos de recuperação, sendo este último grupo o que participou da pesquisa, tendo todos assinado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE I – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido). Foi feito um questionário com o objetivo de caracterizar os

participantes da pesquisa. O questionário encontra-se no APÊNDICE II – Questionário para caracterização dos estudantes. Os resultados do questionário foram os seguintes:

Cinco dos seis estudantes tinham entre 20 e 25 anos de idade, e um tinha 32 anos de idade. Todos os seis frequentaram o Ensino Médio, majoritariamente, em escola pública. Todos moravam em Planaltina-DF.

Com relação ao curso que frequentavam:

- Três cursavam Licenciatura em Ciências Naturais – Noturno;
- Um cursava Licenciatura em Ciências Naturais – Diurno;
- Dois cursavam Gestão do Agronegócio – Diurno.

Todos ingressaram na UnB em anos distintos, a saber: 2009, 2011, 2012, 2013, 2014 e 2015.

Com relação à disciplina Estatística que cursavam no momento da pesquisa:

- Cinco dos seis já haviam sido reprovados na disciplina de Estatística;
- Todos declararam estar *dedicando-se um pouco* à disciplina de Estatística;
- Todos afirmaram que o professor regente, na ocasião o professor substituto, era *bastante dedicado* ao trabalho de ministrar a disciplina;

Sobre qual tipo de apoio acreditavam necessitar para bem cursar a disciplina de Estatística:

Tabela 1 - Tipo de reforço necessário para a disciplina de Estatística

	Quantos responderam SIM	Quantos responderam NÃO
Reforço oferecido pela universidade (monitoria, por exemplo)	Cinco	Um
Professor particular	Um	Cinco
Atendimento do professor extraclasse	Seis	Zero
Outro tipo de reforço escolar	Dois	Quatro

Sobre de quem foi a decisão de estarem na UnB:

- (1) De seus pais ou responsáveis
- (4) De você mesmo
- (1) De seus responsáveis junto com você
- (0) Orientação educacional no ensino médio
- (0) Outros

Com relação à escolaridade dos pais, apenas duas mães (ou madrastas) tinham graduação completa. As demais mães/madrastas e os pais de todos eles tinham formações variadas entre Ensino Médio, Ensino Fundamental e Ensino Técnico.

Percebe-se, pelas respostas acima, que os alunos tinham as seguintes características em comum: 1- histórico familiar com nível de escolaridade abaixo do nível deles, majoritariamente. 2- São alunos que possuem algum tipo de dificuldade no aprendizado de Estatística, já que são majoritariamente repetentes desta disciplina. 3- Além disto, declararam-se pouco dedicados à disciplina.

No entanto, as atividades foram realizadas satisfatoriamente, com produções significativas dos estudantes, conforme será visto na seção de análises das respostas do problema proposto no capítulo 6.

5.3 Descrição das atividades aplicadas na pesquisa de campo

A lista de atividades foi dividida em quatro partes mostradas a seguir, sendo que as três primeiras foram as mesmas aplicadas na pesquisa piloto:

- 1- Resolução do problema do ponto mais visitado no caso particular do quadrado 3 por 3, por contagem manual e pelo uso do PFC.
- 2- Resolução do problema no caso particular do quadrado 4 por 4, por contagem manual, pelo uso do PFC e pela fórmula $c(x, y)$ do número de percursos que passam por um ponto (x, y) qualquer do plano.
- 3- Resolução do problema no caso particular do quadrado 4 por 4, através do cálculo de probabilidades.
- 4- Verificação das novas propriedades do Triângulo de Pascal pela resolução do problema do ponto mais visitado.

Cada etapa acima era composta por uma lista de perguntas.

As atividades foram realizadas durante uma semana e meia, em três dias letivos espaçados. Após cada lista de atividades entregue aos alunos era explicado no quadro o que se deve fazer em cada questão, reforçando o que se pedia na lista. Dava-se um prazo para os alunos fazerem cada questão, depois era explicada a próxima no quadro.

6 Análise dos Resultados

Este capítulo será dedicado às análises praxeológicas das produções dos alunos, concomitante às referências às representações semióticas de Duval, para cada questão apresentada aos alunos. Com relação às representações semióticas, veremos que quatro tipos registros se destacaram: aritmético, algébrico, geométrico, verbal e triangular.

No Apêndice III estão digitalizados os registros referentes às atividades do último dia de aplicação envolvendo as aplicações do problema do ponto mais visitado ao Triângulo de Pascal, de todos os seis alunos participantes da pesquisa, para a consulta do leitor que estiver interessado.

Nas análises a seguir, veremos também as dúvidas e questões levantadas pelos estudantes durante as atividades, que foram por mim anotadas no momento ou posteriormente lembradas. Além disto, será analisado se as hipóteses levantadas para a tese foram verificadas.

As respostas estão mostradas em tabelas, envoltas em retângulos, e os enunciados fora das tabelas. Será feita uma análise global da realização dos estudantes, enquanto grupo.

Primeiro dia

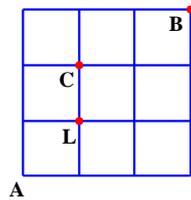
O PROBLEMA DO PONTO MAIS VISITADO

LISTA DE ATIVIDADES

PRIMEIRO DIA – Verificando a intuição dos alunos, bem como as suas estratégias de se resolver o problema nos quadrados 3 por 3 e 4 por 4

Parte I – Quadrado 3 por 3 - *Nesta parte, será averiguado como os alunos intuem com respeito ao ponto mais visitado por caminhos, num quadrado 3 por 3. Também, como eles formulam estratégias para resolver o problema do ponto mais visitado.*

Indo apenas para direita ou para cima, há vários caminhos de A até B.



Use a sua criatividade para determinar:

1- Quantos caminhos passam pelo *vértice superior esquerdo*? E pelo *vértice inferior direito*?

As respostas dos alunos foram:

ALUNOS 1 e 2:

“Vértice superior esquerdo 1

Vértice inferior direito 1”

ALUNO 3:

“Vértice superior esquerdo 10 caminhos

Vértice inferior direito 5 caminhos”

ALUNO 4:

“Vértice superior esquerdo 1 caminho

Vértice superior direito 2 caminhos”

ALUNO 5:

“Vértice superior esquerdo 8 caminhos

Vértice superior direito 8 caminhos”

ALUNO 6: “2/2”

Resposta Correta: um caminho passa por cada um destes dois vértices.

Análise Praxeológica de Chevallard das resoluções:

Todos os alunos executaram a tarefa por meio da técnica de contagem simples.

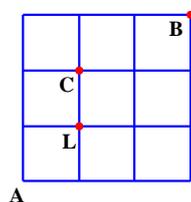
Registros Semióticos de Duval:

Todos os alunos utilizaram o registro geométrico. Com exceção do aluno 6, eles converteram ainda para o registro verbal.

Majoritariamente, os alunos não haviam ainda compreendido o problema. Apesar de eu ter deixado claro que os percursos só podiam ir para cima ou para a direita, alguns não observaram esta regra, gerando mais caminhos do que os solicitados.

Houve também aqueles que não estavam compreendendo que cada caminho termina compulsoriamente no ponto B: o aluno 6 contou dois percursos em cada vértice: de A até um vértice, e do vértice até o B, assinalando, assim, um caminho a mais. Nesta questão, os alunos não explicitaram nenhuma pergunta ou dúvida.

2- Antes de efetuar qualquer cálculo, pela sua intuição, por qual ponto você acha passam mais caminhos, o C, o L, ou não há diferença? Por quê?



As respostas dos alunos foram (a numeração dos alunos *não* é a mesma da questão anterior):

ALUNO 1: “Na minha intuição passam a mesma quantidade em C e L.”

ALUNO 2: “C, pois existe mais possibilidades de traçar caminhos passando pelo ponto C.”

ALUNO 3: “Não há diferença, pois da mesma forma que não ocorreu diferença nos caminhos dos vértices do item anterior, também não ocorre diferença nos caminhos C ou L.”

ALUNO 4: “Não há diferença, pelo fato dos dois estarem na mesma reta, não existem tantas opções de caminhos, pois os movimentos são limitados.”

ALUNO 5: “Não há diferença porque para chegar no ponto B basicamente tem que passar pelo caminho C e L na mesma quantidade.”

ALUNO 6: “C mais caminhos. Por estar a frente o ponto C tem mais possibilidades.”

Resposta Correta: pelo ponto L passam mais caminhos.

Análise Praxeológica: a técnica se limita ao uso da intuição.

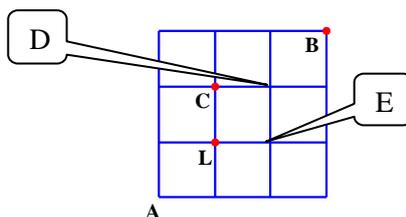
Os Registros Semióticos desta questão se limitam à conversão do registro geométrico para o registro verbal.

Não era esperado que os alunos acertassem o ponto mais visitado, pois, conforme já havia mencionado, quando lanço esta pergunta para alunos ou colegas professores, em geral os mesmos indicam pontos mais centralizados no quadrado. Nenhum respondeu corretamente, que é o ponto L. Talvez pela proximidade dos dois pontos C e L, quatro alunos acharam que por eles passa a mesma quantidade de percursos. Os outros dois indicaram o ponto C. Nesta questão ainda, os alunos não haviam compreendido como os caminhos deveriam ser considerados, de A até B, ainda.

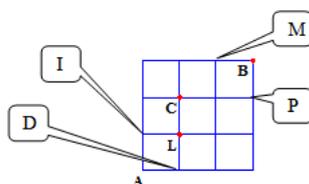
3- Sem calcular, usando sua intuição, por qual ou quais pontos você acha que passam mais caminhos, dentre todos os pontos possíveis? Por quê?

Respostas:

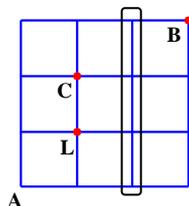
ALUNO 1: “C, L, D e E porque estão em área central” (D ao lado direito de C, e E ao lado direito de L).



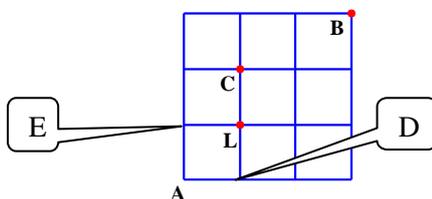
ALUNO 2: “No ponto I, D, M, P, para chegar ou dar a partida para o ponto B, são os pontos que sempre tem que passar. I, D para a partida. P, M, para chegar.” (Os pontos I, D, M e P são os vizinhos imediatos de A e de B.)



ALUNO 3: “Existem 3 pontos. A reta marcada no quadrado, todos os pontos da reta passam por mais caminhos.” (A reta a que se refere o aluno é a terceira linha vertical da figura, porém a reta assinala quatro pontos, ao invés de três, talvez por um descuido do aluno).



ALUNO 4: “Pelos pontos E e D, pois através dele que se pode chegar aos outros caminhos.” (os pontos E e D são os vizinhos imediatos de A, no desenho do aluno).



ALUNO 5: “Pontos 1, 2, 3 e 4.” (São os vizinhos imediatos de A e de B, no desenho do aluno).

ALUNOS 6: “Por esses dois pontos passam mais caminhos.” (o aluno indicou os dois pontos acima de A).

Resposta correta: o ponto L é o mais visitado, dentre todos.

Análise Praxeológica de Chevallard: a técnica se limita ao uso da intuição.

Registros Semióticos de Duval: novamente, os registros semióticos desta questão se limitaram à conversão do registro visual-geométrico ao registro verbal, por se tratar do uso da intuição.

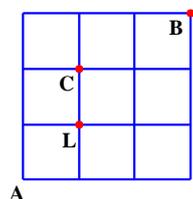
Novamente, não era esperado que os alunos respondessem corretamente esta questão, dado que o problema do ponto mais visitado não é intuitivo. O aluno 1 respondeu o mesmo que a maioria das pessoas tem me retornado sobre este problema, que os pontos centrais são os mais visitados.

Os alunos 2, 4 e 5 observaram o fato de que os vizinhos imediatos de A e de B são pontos com grandes chances de serem visitados, já que um caminho deve passar necessariamente por um dos dois vizinhos imediatos de A, e também por um dos dois vizinhos imediatos de B. Chegaram muito perto da resposta correta.

Nesta questão, surgiu a seguinte dúvida de um dos participantes, que perguntou em voz alta: “se não for o C ou o L, como eu vou identificar o ponto que escolher?” Esta pergunta se refere ao fato de que nem todo ponto fora nomeado, na figura. Respondi que eles podiam nomear os demais pontos para poderem responder.

Outra dúvida foi levantada por um dos participantes: “sempre saindo de A e chegando em B?” Isto mostra que os alunos responderam às primeiras questões ainda sem entender como os percursos deveriam ser considerados. Após eu ter revelado a resposta, ao término desta primeira questão, alguns comentaram que haviam esquecido a regra de apenas ir para a direita ou para cima. Salientei que não se preocupassem em terem “errado” a questão, que o objetivo desta etapa é que eles pudessem entender, primeiro, o que pede o problema.

4- Calculando, responda quantos caminhos possíveis, de A até B, passam pelo ponto C?



Respostas dos alunos:

ALUNO 1: “4 caminhos”.

ALUNO 2: “8 caminhos possíveis (feito por contagem)”.

ALUNO 3: “7”.

ALUNO 4: “Caminhos que usam a 1^a, 2^a e 4^a coluna = 3. Caminhos que usam todas as colunas = $2 \cdot 3 + 2 = 5$ caminhos.”

ALUNO 5: “12 caminhos, fiz os caminhos traçando.”

ALUNO 6: “9”

Resposta correta: 9 caminhos passam por C, de A até B.

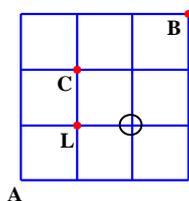
Análise Praxeológica de Chevallard: a técnica utilizada pelos estudantes foi a da contagem manual.

Registros Semióticos de Duval: uso do registro geométrico.

Apenas um aluno encontrou a resposta correta, nove percursos. A essa altura os alunos já tinham plena consciência de como os caminhos deveriam ser considerados, isto é, de A a B, indo apenas para cima ou para a direita. Ao contrário do que ocorrera no estudo piloto, não surgiu entre os estudantes a ideia de usar a técnica baseada no Princípio Fundamental da Contagem - PFC, isto é, de se contar os caminhos até C, e depois de C até B, o que para mim fora uma surpresa.

Nesta questão, a seguinte dúvida foi levantada: “Posso desenhar todos os caminhos?”. Ao que eu respondi que sim. Um aluno comentou: “Ele não falou, então...”, querendo dizer que eu não havia imposto qualquer restrição para encontrar o número de percursos que passam por C, que, de fato, era verdade. Outro comentou: “Toda hora dá um resultado diferente!”, querendo dizer que, ao verificar sua resposta, encontrava, a todo momento, uma resposta diferente. Este comentário parece revelar que, de fato, contar manualmente os caminhos não é uma tarefa muito simples, e que pode levar o aluno a esquecer algum caminho ou até mesmo contar algum caminho duas vezes.

5- Calculando, responda quantos caminhos possíveis, de A até B, passam pelo ponto vizinho direito do ponto L? Compare com o ponto C.



Respostas:

ALUNO 1: 5. “Comparando com C, deu diferente.”

ALUNO 2: “8 caminhos possíveis (feito por contagem).”

ALUNO 3: “1 caminho a menos, pois o ponto LD está abaixo da reta onde está o ponto C, fazendo com que LD tenha menos possibilidades de caminho.” (o ponto LD é o que está à direita de L.)

ALUNO 4: “H: 12 caminhos. Quantidade igual.” (H foi o nome dado pelo estudante ao ponto à direita do ponto L)

ALUNO 5: “9”

ALUNO 6: “6 caminhos.”

Resposta correta: 9 caminhos passam pelo ponto à direita de L, sendo igual à quantidade dos que passam por C.

Análise Praxeológica de Chevallard: novamente, a técnica fora a da contagem manual.

Representações Semióticas de Duval: houve a conversão do registro geométrico para o verbal.

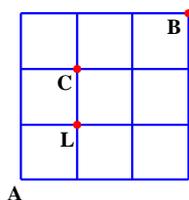
Apenas um aluno acertou a questão, 9 percursos. Não surgiu a ideia de se usar o PFC para a contagem dos caminhos. Duas dúvidas surgiram nesta questão: “É possível que dê tudo igual?”, e “Precisa fazer a comparação?”, ao que eu respondi positivamente para ambas.

6- Calculando, responda por qual ponto passa a maior quantidade de caminhos entre A e B?

Respostas:

ALUNO 1: “Os dois pontos vizinhos de A e os dois pontos vizinhos de B.”

ALUNO 2: “10”, onde o aluno indicou o vizinho esquerdo do ponto B.



ALUNO 3: “Pelo ponto de chegada e partida, pelos dois pontos. Mesma resposta da número 3”.

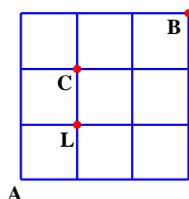
ALUNO 4: “O ponto (3,3) passa por uma maior quantidade de caminhos, pois dá a possibilidade de 7 caminhos.”.

Não ficou claro, na figura do aluno, qual seria o ponto (3,3).

ALUNO 5: “Pelos pontos B ou D (feito por contagem).”

ALUNO 6: “Ponto 1, circulado em vermelho.”

Resposta correta: O ponto L ou o ponto à direita de C.



Análise Praxeológica de Chevallard: fora usada a técnica da contagem manual.

Representações Semióticas de Duval: conversão do registro geométrico para o verbal.

Apenas um aluno respondeu corretamente, isto é, indicando o ponto à direita de C, mas não percebendo que, empatado com este, estaria o ponto L. Não fora utilizado o PFC para a contagem dos percursos por nenhum dos participantes.

O aluno 3 respondeu os pontos A e B, que estavam proibidos de serem escolhidos. Um aluno perguntou qual o nome do jogo, o qual respondi: o problema do ponto mais visitado. Dois comentários foram registrados: “Esse jogo é horrível!”, e “Ainda bem que é anônimo!”, revelando que os alunos estavam, de certa forma, desconfortáveis em resolver as questões propostas, principalmente, acredito, enquanto descobriam que não estavam, em geral, chegando nas respostas certas.

7- A resposta da questão 6 coincidiu com a sua intuição? Comente.

Nesta questão, dois alunos responderam “sim”, enquanto quatro alunos responderam “não”.

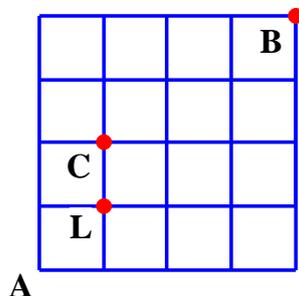
Observa-se que as respostas elaboradas pelos alunos em toda esta primeira atividade de certa forma foi comprometida pela dificuldade em entender, primeiro, como os caminhos deviam ser considerados, isto é, todos os percursos devem sair de A e chegar em B, e só podendo seguir para frente ou para cima, ao contrário do que ocorrera no estudo piloto, no qual este entendimento fora consolidado mais rápido.

Expliquei-lhes então que esta primeira atividade tinha o intuito maior de que eles entendessem o problema, que não deviam se preocupar caso “errassem” as respostas. Esta etapa inicial serviria para poderem executar as próximas tarefas com mais propriedade, o que de fato ocorreu.

Antes que pudéssemos seguir para a segunda parte, conferi com eles todas as respostas até então obtidas, perguntando um a um o que haviam respondido. Imediatamente forneci as respostas corretas das questões, para então seguirmos às atividades seguintes.

Parte 2 – Quadrado 4 por 4 – *Nesta parte será averiguado como os alunos intuem com respeito ao ponto mais visitado por caminhos, num quadrado 4 por 4, e como eles formulam estratégias para resolver o problema do ponto mais visitado.*

Indo apenas para direita ou para cima, há vários caminhos de A até B.



Obs: o ponto A é a origem (0, 0).

Use a sua criatividade para determinar:

1- Quantos caminhos passam pelo *vértice superior esquerdo*? E pelo *vértice inferior direito*?

Todos responderam 1 caminho, demonstrando que estavam com pleno entendimento com relação ao que o problema pedia, isto é, de A a B, para cima ou para a direita.
Análise praxeológica de Chevallard: técnica simples de contagem.
Representações semióticas de Duval: uso do registro geométrico.

2- Antes de efetuar qualquer cálculo, pela sua intuição, por qual ponto você acha que passa mais caminhos, o C, o L, ou não há diferença? Por quê?

Respostas:
ALUNO 1: “No ponto L passa mais caminhos, por ele está mais embaixo e ter mais chance de passar por ele e mais quadrados em cima.”
ALUNO 2: “L está mais próximo do ponto inicial.”
ALUNO 3: “No L, pelos resultados anteriores.”
ALUNO 4: Não há diferença por estarem na mesma reta e próximos ao ponto A.”
ALUNO 5: “No caminho L.”
ALUNO 6: “L.”

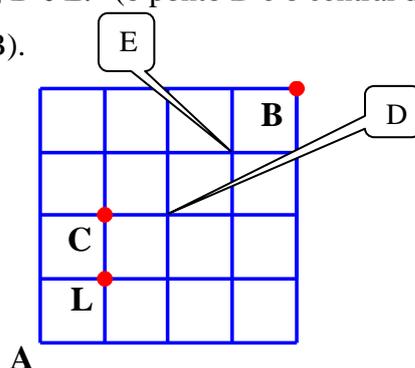
Análise Praxeológica de Chevallard: técnica da intuição
Representações Semióticas de Duval: conversão do registro geométrico para o verbal

Nesta questão relacionada ao quadrado 4 por 4, exceto por um aluno, os demais responderam corretamente: o ponto L é o campeão de percursos. Seguramente, se basearam nas respostas da primeira parte da atividade, no quadrado 3 por 3.

3- Sem calcular, por sua intuição, por qual ou por quais pontos você acha que passam mais caminhos, dentre todos os pontos possíveis? Por quê?

Respostas:

ALUNO 1: “Pelos caminhos L, D e E.” (o ponto D é o central do quadrado e o ponto E é o simétrico de L, próximo a B).



ALUNO 2: “O ponto (3,4), pois está próximo a B, e por estar em cima, dá chances para mais caminhos.” (o ponto (3,4) a que se referiu o aluno era o ponto vizinho esquerdo de B).

ALUNO 3: “L, para chegar ao B tem que passar por ele.”

ALUNO 4: “L mais próximo do ponto inicial.”

ALUNO 5: “Os três pontos centrais”. (os pontos indicados pelo aluno na figura eram o vizinho direito de L e mais os dois pontos acima dele).

ALUNO 6: “L”.

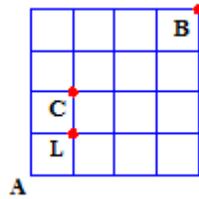
Resposta correta: L

Análise Praxeológica de Chevallard: técnica da intuição

Representações Semióticas de Duval: conversão do registro geométrico para o verbal.

Três alunos acertaram, apesar de que o aluno 3 justificou de maneira imprecisa, pois nem todo caminho necessariamente passa por L. Dois alunos insistiram nos pontos centrais do quadrado. O aluno 2 insistiu no vizinho esquerdo de B que, mesmo tendo 50% de chance de ser visitado, perde para o L.

4- Sabendo que, por um ponto qualquer, passam $\frac{(x+y)!}{x!y!} \times \frac{(N-x+N-y)!}{(N-x)!(N-y)!}$ caminhos, calcule: quantos percursos possíveis, de A até B, passam pelo ponto C?



Respostas:

Todos usaram a fórmula fornecida na questão. Dois alunos chegaram à resposta correta, 30 caminhos passam por C. Os outros quatro chegaram a valores distintos, sendo que um deles chegou a um número decimal.

Resposta correta: o ponto C corresponde às coordenadas $x = 1$ e $y = 2$. Logo, substituindo na fórmula, com $N = 4$:

$$\frac{(1+2)!}{1!2!} \times \frac{(4-1+4-2)!}{(4-1)!(4-2)!} = 3 \times \frac{5!}{3!2!} = 30 \text{ caminhos.}$$

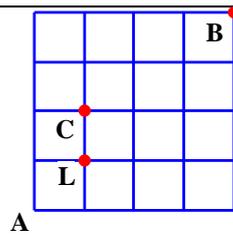
Análise Praxeológica de Chevallard: a técnica utilizada fora a sugerida, isto é, o uso da fórmula que fornece o número de caminhos que passam por determinado ponto. A tecnologia, que explica esta fórmula, é o fato de que, para se determinar quantos resultados existem para experimentos em etapas, basta multiplicar as quantidades de resultados possíveis de cada etapa. A teoria que explica a tecnologia é o PFC.

Representações Semióticas de Duval: conversão do registro geométrico para o algébrico, e deste para o aritmético.

Nesta questão tive que relembrar no quadro o conceito de fatorial de um número. Também, fui ao quadro estabelecer a relação de cada ponto com suas respectivas coordenadas cartesianas do plano, isto é, o ponto A corresponde ao ponto (0,0) e o ponto C corresponde ao ponto (1,2), expliquei a eles.

5- Calculando, responda quantos caminhos possíveis, de A até B, passam pelo ponto vizinho direito do ponto L? Compare com o ponto C.

Respostas:



Todos chegaram à resposta correta, 30 percursos, usando a fórmula fornecida.

Análise praxeológica: técnica da fórmula fornecida.

Representações semióticas: conversão do registro geométrico para o algébrico e depois para o aritmético.

Pude observar que alguns alunos conferiam suas respostas uns com os outros, refazendo os cálculos que porventura estavam sendo executados equivocadamente.

Antes de eles responderem a esta questão eu fiz, no quadro, a questão anterior que solicitava o número de caminhos que passam por C. Acredito que isto favoreceu encontrar o número de caminhos que passam pelo vizinho direito do ponto L.

Nesta questão, houve um aluno que percebeu a simetria deste ponto com o ponto C, pois apenas foram trocados, na fórmula, os valores de x e de y : lá era (1,2) e agora (2,1).

Em razão do tempo, as últimas duas questões, descritas a seguir, foram respondidas no início do segundo dia de atividade:

6- Calculando, responda por qual ponto passa a maior quantidade de caminhos entre A e B?

Respostas:

ALUNO 1: Pelos registros em sua folha de respostas, ele encontrou corretamente a quantidade de caminhos que passam por cada ponto, e concluiu corretamente que o ponto L é o mais visitado:

Figura 12 - Cálculos da quantidade de caminhos para cada ponto

$$\frac{(3+0)!}{3! \cdot 0!} \cdot \frac{(4-3+4-0)!}{(4-3)! \cdot (4-0)!} \Rightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{5040}{144} \Rightarrow 35 \quad \left. \begin{array}{l} 1! = 1 \\ 2! = 2 \\ 3! = 6 \\ 4! = 24 \\ 5! = 120 \\ 6! = 720 \end{array} \right\} 7! = 5040$$

$$\frac{(2+1)!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{(4-2+4-1)!}{(4-2)! \cdot (4-1)!} \Rightarrow \frac{2}{2} \cdot \frac{720}{48} \Rightarrow \frac{1440}{96} \Rightarrow 15$$

$$\frac{(3+1)!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{(4-3+4-1)!}{(4-3)! \cdot (4-1)!} \Rightarrow \frac{24}{6} \cdot \frac{24}{6} \Rightarrow \frac{576}{36} \Rightarrow 16$$

$$\frac{(4+1)!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{(4-4+4-1)!}{(4-4)! \cdot (4-1)!} \Rightarrow \frac{5}{24} \cdot \frac{720}{8} \Rightarrow \frac{4320}{144} = 30 \quad \begin{array}{l} 0,0/0,1/0,2/0,3/0,4 \\ 1,0/1,1/1,2/1,3/1,4 \\ 2,0/2,1/2,2/2,3/2,4 \\ 3,0/3,1/3,2/3,3/3,4 \\ 4,0/4,1/4,2/4,3/4,4 \end{array}$$

$$\frac{(3+0)!}{3! \cdot 0!} \cdot \frac{(4-3+4-0)!}{(4-3)! \cdot (4-0)!} \Rightarrow \frac{5}{6} \cdot \frac{120}{24} \Rightarrow \frac{720}{144} \Rightarrow 5$$

$$\frac{(0+1)!}{0! \cdot 1!} \cdot \frac{(4-0+4-1)!}{(4-0)! \cdot (4-1)!} \Rightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{5040}{144} \Rightarrow 35$$

$$\frac{(0+2)!}{0! \cdot 2!} \cdot \frac{(4-0+4-2)!}{(4-0)! \cdot (4-2)!} \Rightarrow \frac{2}{2} \cdot \frac{720}{48} = 15$$

$$\frac{(3+1)!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{(4-3+4-1)!}{(4-3)! \cdot (4-1)!} \Rightarrow \frac{2}{6} \cdot \frac{720}{6} \Rightarrow \frac{1440}{36} = 40$$

$$\frac{(1+2)!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{(4-1+4-2)!}{(4-1)! \cdot (4-2)!} \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \frac{120}{12} \Rightarrow 30$$

$$\frac{(2+2)!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{(4-2+4-2)!}{(4-2)! \cdot (4-2)!} \Rightarrow \frac{24}{4} \cdot \frac{24}{4} \Rightarrow \frac{576}{16} \Rightarrow 36$$

$$\frac{(3+2)!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{(4-3+4-2)!}{(4-3)! \cdot (4-2)!} \Rightarrow \frac{120}{12} \cdot \frac{6}{2} \Rightarrow \frac{720}{24} = 30$$

$$\frac{(4+2)!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{(4-4+4-2)!}{(4-4)! \cdot (4-2)!} \Rightarrow \frac{720}{48} \cdot \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{1440}{96} \Rightarrow 15$$

$$\frac{(4+3)!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{(4-4+4-3)!}{(4-4)! \cdot (4-3)!} \Rightarrow \frac{5040}{144} \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow 35$$

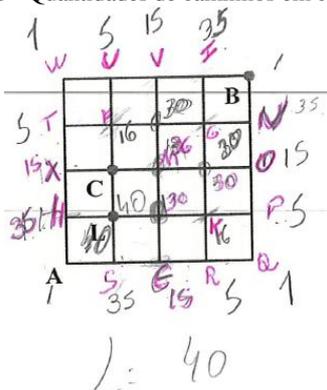
Ponto L = 40 caminhos.

Fonte: Produção de um estudante - Arquivo pessoal do pesquisador

ALUNO 2: Indicou o ponto correto, o ponto L, porém não há registros dos cálculos.

Talvez tenha feito em rascunhos. Sua produção está na figura 13:

Figura 13 - Quantidades de caminhos em cada ponto



Fonte: Produção de um estudante - Arquivo pessoal do pesquisador

ALUNO 3: Indicou o ponto (2,2), isto é, ponto central, com 36 caminhos. Não acertou o ponto, que seria o ponto L, apesar de ter calculado corretamente o número de caminhos que passam pelo ponto escolhido, 36:

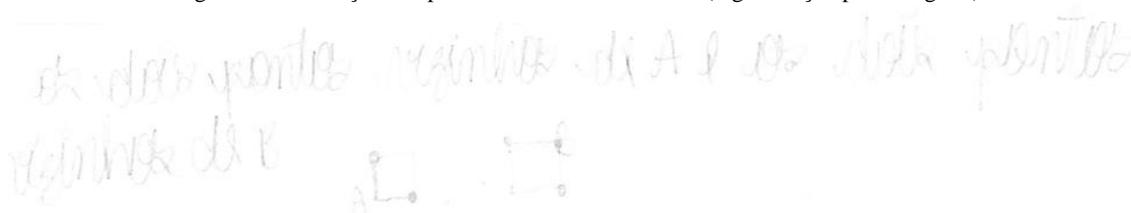
Figura 14 - Cálculo do número de caminhos pelo ponto central

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} x=2 \\ y=2 \end{matrix} \quad \frac{24}{2! \cdot 2!} \times \frac{(4-2+4-2)!}{(4-2)! (4-2)!} = \frac{24}{4} \cdot \frac{24}{16} = 576 \\
 & = 36 \quad \text{O ponto central (2,2)}
 \end{aligned}$$

Fonte: Produção de um estudante - Arquivo pessoal do pesquisador

ALUNO 4: Indicou os pontos vizinhos à direita e à esquerda, tanto de A e quanto de B.

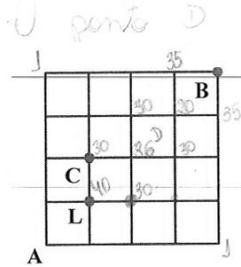
Figura 15 - Indicação dos pontos vizinhos de A e de B (digitalização pouco legível)



Fonte: Produção de um estudante - Arquivo pessoal do pesquisador

ALUNO 5: Indicou o ponto D, sem registros de cálculos:

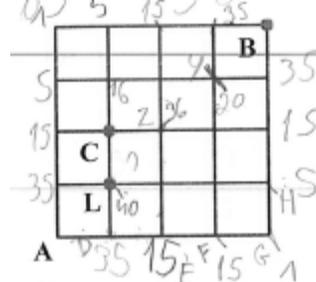
Figura 16 - Indicação do ponto D



Fonte: Produção de um estudante - Arquivo pessoal do pesquisador

ALUNO 6: Nos registros, encontram-se os cálculos realizados, porém o aluno não explicita qual seria o mais visitado. No quadrado desenhado, o aluno indica a quantidade de caminhos em cada ponto, corretamente, apesar de não verbalizar a resposta:

Figura 17 - Cálculos das quantidades de caminhos para cada ponto



6- Calculando, responde por qual ponto passa a maior quantidade de caminhos entre A e B?

$$D = 35x = 19 - 0 \quad N = 4 \quad \frac{1 \cdot 4!}{1 \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 24}{1 \cdot 6 \cdot 1} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\frac{(1+0)!}{1! \cdot 0!} \cdot \frac{(4-1+4-0)!}{(4-1)! \cdot (4-0)!} = \frac{1! \cdot 1!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{(4-1+4-0)!}{(4-1)! \cdot (4-0)!} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5040}{1 \cdot 6 \cdot 24} = \frac{5040}{144} = 35$$

$$\frac{(x+y)!}{x! \cdot y!} \cdot \frac{(N-x+N-y)!}{(N-x)! \cdot (N-y)!}$$

$$\frac{1! \cdot 0!}{1! \cdot 0!} \cdot \frac{(4-1+4-0)!}{(4-1)! \cdot (4-0)!} = \frac{1! \cdot 1!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{(4-1+4-0)!}{(4-1)! \cdot (4-0)!} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5040}{1 \cdot 6 \cdot 24} = \frac{5040}{144} = 35$$

$$E = 15 \quad x = 2 \quad y = 0 \quad N = 4$$

$$\frac{(2+0)!}{2! \cdot 0!} \cdot \frac{(4-2+4-0)!}{(4-2)! \cdot (4-0)!} = \frac{2! \cdot 1!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{(4-2+4-0)!}{(4-2)! \cdot (4-0)!} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{720}{2 \cdot 96} = \frac{1440}{192} = 7.5$$

$$F = 16 \quad x = 1 \quad y = 3 \quad N = 4$$

$$\frac{(1+3)!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{(4-1+4-3)!}{(4-1)! \cdot (4-3)!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{(4-1+4-3)!}{(4-1)! \cdot (4-3)!} = \frac{24}{6 \cdot 1} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1} = \frac{24 \cdot 24}{36} = 16$$

$$G = 36 \quad x = 4 \quad y = 0 \quad N = 4$$

$$\frac{(4+0)!}{4! \cdot 0!} \cdot \frac{(4-4+4-0)!}{(4-4)! \cdot (4-0)!} = \frac{4!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{(4-4+4-0)!}{(4-4)! \cdot (4-0)!} = \frac{24}{24 \cdot 1} \cdot \frac{4!}{1! \cdot 4!} = \frac{24 \cdot 24}{24 \cdot 24} = 1$$

$$H = 20 \quad x = 2 \quad y = 2 \quad N = 4$$

$$\frac{(2+2)!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{(4-2+4-2)!}{(4-2)! \cdot (4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{(4-2+4-2)!}{(4-2)! \cdot (4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{576}{16} = 36$$

$$L = 36 \quad x = 1 \quad y = 1 \quad N = 4$$

$$\frac{(1+1)!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{(4-1+4-1)!}{(4-1)! \cdot (4-1)!} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{(4-1+4-1)!}{(4-1)! \cdot (4-1)!} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 1} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{1440}{36} = 40$$

Fonte: Produção de um estudante - Arquivo pessoal do pesquisador

Análise Praxeológica de Chevallard: técnica de contar caminhos pela fórmula. A tecnologia consiste na multiplicação dos resultados de cada etapa. A teoria, o PFC. Representações Semióticas de Duval: conversão do registro geométrico para o algébrico, e deste para o aritmético.

Dois alunos assinalaram corretamente a resposta: dentre todos os pontos, exceto A e B, o ponto mais visitado é o ponto L, com 40 caminhos passando por ele (ou o seu simétrico próximo a B).

Tiveram dificuldades em encontrar as coordenadas x e y de cada ponto. Fui ao quadro e forneci os valores de x e de y de cada ponto, pois não dava tempo de explicar toda a teoria de sistemas de coordenadas cartesianas. Apesar dos estudantes já terem visto na disciplina de Matemática o assunto de coordenadas cartesianas, o esquecimento não seria estranho de ocorrer dado que os cursos que faziam na universidade não contemplavam disciplinas de Matemática com frequência suficiente para uma fixação apropriada dos conhecimentos correspondentes.

Os alunos não explicitaram verbalmente se tinham percebido alguma simetria no quadrado, com relação ao número de caminhos passando por cada ponto, porém, não descarto a possibilidade de alguns terem percebido, pois, nos registros, não constam, em geral os cálculos de todos os pontos.

7- A resposta da questão 6 coincidiu com a sua intuição? Comente.

Respostas:

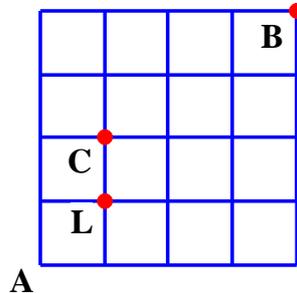
Três responderam “sim”.

Depois de terem respondido, pedi que cada aluno dissesse, um por vez e em voz alta, as respostas que encontraram. Ao fim da atividade, indiquei a eles as respostas corretas, no quadro.

SEGUNDO DIA

Quadrado 4 por 4 – Neste dia, os alunos estarão convidados a resolver o problema do ponto mais visitado por meio da probabilidade.

Indo apenas para direita ou para cima, há vários caminhos de A até B.



Use a sua criatividade para determinar:

1- Na urna existem 4 bolas brancas (4 passos para a direita) e 4 azuis (4 passos para cima).

Retirando uma bola por vez para realizar cada passo, qual a probabilidade de se passar pelo ponto L = (1,1)?

Respostas:

Quatro alunos responderam $\frac{32}{56} \cong 57\%$.

Dois alunos responderam $\frac{16}{56} + \frac{16}{56} = \frac{32}{112} = 28,6\%$.

Resposta correta: $\frac{16}{56} + \frac{16}{56} = \frac{32}{56} \cong 57\%$.

Análise Praxeológica:

Técnica: Dividir o número de casos favoráveis pelo número de casos total, depois somar as probabilidades dos eventos disjuntos.

Tecnologia: a probabilidade de um evento é a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados totais do experimento. Também, a probabilidade da união de dois eventos disjuntos é a soma das probabilidades de cada evento.

Teoria: A teoria geral da probabilidade.

Registros semióticos de Duval: majoritariamente, houve a conversão do registro geométrico para o registro em frações.

Nesta questão, inicialmente, foi solicitado que os estudantes trabalhassem individualmente para encontrar a probabilidade de se passar pelo ponto (1,1). A expectativa é que se lembrassem do que fora visto a respeito da probabilidade no início do semestre, quando este conteúdo fora estudado na disciplina. De fato, o assunto probabilidade que estávamos considerando era para ter sido estudado também no Ensino Médio. Contudo, por diversas razões, os estudantes não estavam se lembrando do conteúdo de probabilidade. Sendo assim, passados alguns minutos, fui ao quadro e expliquei que, para se chegar ao ponto (1,1), há duas formas. A primeira é tirar uma bola branca e depois uma azul, caminhando-se para a direita e para cima, respectivamente, com probabilidades $\frac{4}{8}$ e $\frac{4}{7}$, respectivamente, pois as bolas são retiradas sem reposição. A segunda é tirar uma azul e depois uma branca, com as mesmas probabilidades. Expliquei, então, que deveríamos multiplicar as probabilidades em cada situação, e, por fim, somarmos os dois resultados:

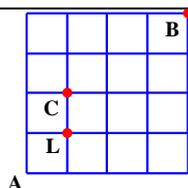
$$\frac{4}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \times \frac{4}{7}.$$

Quando eu perguntei a probabilidade de se retirar a *segunda* bola, de outra cor, alguns responderam corretamente que era $\frac{4}{7}$, mostrando que haviam entendido que a retirada era *sem reposição*. A finalização dos cálculos ficou para cada estudante realizar, sendo que quatro deles chegaram à resposta correta.

Um aluno encerrou a questão no registro fracionário, enquanto cinco alunos, em seguida, fizeram a conversão para o registro em decimais. Destes, dois alunos ainda efetuaram a conversão para o registro em porcentagens.

Ao somar as duas frações iguais a $\frac{16}{56}$, houve a necessidade de se *tratar* o registro fracionário. Quatro alunos trataram corretamente este registro, chegando à resposta certa. Dois alunos erraram no tratamento, somando também os denominadores das frações. O estudante não se deu conta que cada tipo de registro tem sua própria forma de tratamento.

2- Lembrando das atividades desenvolvidas no primeiro dia, qual ponto seria mais provável de ser visitado? Comente.



ALUNO 1: “O ponto central, (2,2)”.

ALUNO 2: “L por ter probabilidade de 0,57.”

ALUNO 3: “L, porque o L é mais de 50% de ser visitado.”

ALUNO 4: “O ponto abaixo do ponto L, pois para ir para qualquer ponto é preciso passar por ele.”

ALUNO 5: “O ponto L, pois através da fórmula, mostra que ele é o mais visitado.”

ALUNO 6: “L, pois foi o ponto que mais apareceu como resposta nas questões anteriores”.

Observações e análise das respostas:

Análise Praxeológica de Chevallard: Técnica: associar o evento com mais resultados com o evento mais provável de ocorrer. Tecnologia: a probabilidade de ocorrência de um evento é diretamente proporcional ao número de elementos (resultados) que o evento possui. Teoria: a teoria da probabilidade.

Representações Semióticas de Duval: Conversão do registro aritmético (número de vezes que um ponto é atravessado por um caminho) para o registro probabilístico (chance de o ponto ser visitado).

Observamos aqui que quatro alunos, baseados no que fora feito no quadrado 3 por 3, escolheram o ponto $L = (1,1)$ como sendo o mais provável de ser visitado, isto é, como ele é o mais visitado por caminhos de acordo com as questões anteriores, ele teria a maior probabilidade de ser visitado quando se sorteasse um caminho qualquer retirando as bolas coloridas da sacola. Fizemos corretamente a conversão dos registros. Depois, expliquei-lhes que, de fato, o ponto $(1,1)$ é o mais provável de ser visitado.

3- Simule, retirando bolas azuis (passos para cima) e brancas (passos para a direita) da sacola, para verificar se coincide com sua resposta dada na questão 1. Comente os resultados.

Neste momento, segurei uma sacola com 4 bolas azuis e 4 bolas brancas de mesma espessura e tamanho, conforme a foto da figura 18, e pedi para que cada aluno retirasse duas bolas, de olhos fechados, para que o sorteio fosse aleatório, e, na medida

que iam tirando, eu ia anotando no quadro branco o caminho sendo formado por estes dois passos, a fim de se verificar se o caminho passou ou não pelo ponto mais visitado (1,1).

Figura 18 - Sacola com as bolinhas a serem retiradas pelos alunos



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

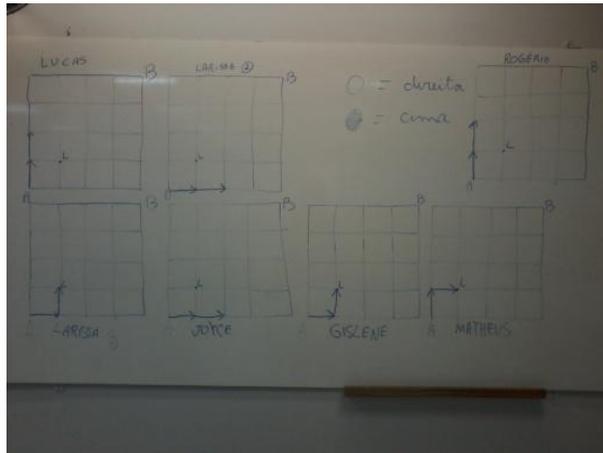
Figura 19 - Cada aluno retirava duas bolinhas para formar o início de um caminho aleatório



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Então, fui anotando no quadro o caminho formado por cada aluno, conforme registrado na Figura 20. Eu também fiz a simulação:

Figura 20 - Cada caminho formado por cada aluno, até o ponto (1,1)



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Desta forma, cada aluno iria relatar se a proporção dos percursos que passaram pelo ponto (1,1) se aproxima da probabilidade encontrada na questão 1, de 57%. Não precisava retirar as demais bolas, pois o objetivo era apenas verificar se o caminho passaria ou não pelo ponto (1,1). As respostas deles foram:

Resultados:

Cinco alunos disseram corretamente que não coincide com a resposta. Um aluno se absteve nesta questão.

Análise praxeológica: técnica: dividir o número de caminhos que passaram por L pelo número total de caminhos. Tecnologia: a probabilidade de um evento é a razão entre o número de resultados favoráveis ao evento e o número total de resultados. Teoria: a teoria da probabilidade.

Registros semióticos de Duval: conversão o registro de frações em registros probabilísticos.

Os sete percursos sorteados resultaram, conforme pode ser visto na figura 20, em: três caminhos passaram pelo ponto L e quatro caminhos não passaram pelo ponto L. Desta forma, apenas $3/7 = 42,9\%$ dos caminhos passaram por L, contrariando o que vínhamos observando nas atividades anteriores. Obviamente, apesar de os alunos não explicitarem, o motivo fora o pequeno tamanho da amostra, sete caminhos. Demonstraram, assim, que sabiam associar o resultado teórico ao experimental.

Durante o sorteio das bolas, um aluno revelou estar compreendendo bem o que estava sendo feito, quando comentou, ao ver que o seu caminho não passara pelo ponto L: “Estou nos 43%”, referindo-se ao fato de que, pela questão número 1, era de 57% a probabilidade de se passar por L, assim, como o seu caminho não passara por ele, o estudante se sentiu localizado nos 43%.

Outro comentário registrado foi: “Aumentando o quadrado, as quantidades são proporcionais?”, sugerindo que haveria proporcionalidade entre o número de percursos passando por um ponto e o tamanho do quadrado. Disse-lhe que era preciso verificar, que não tinha a resposta prontamente. De fato, é possível demonstrar que não, pois há ponto para o qual a probabilidade de ser visitado aumenta e há ponto para o qual a probabilidade de ser visitado diminui com N , segundo cálculos realizados por Santos, (2016).

A seguir estão as análises das produções dos alunos na associação entre o problema do ponto mais visitado e o Triângulo de Pascal.

Nesta questão, desenhei o Triângulo de Pascal no quadro, expliquei algumas de suas propriedades, e identifiquei a sua coluna central.

Todos os alunos fizeram a identificação dos números 2 e 6 na coluna central do Triângulo, sinalizando-os:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \boxed{2} \\ \boxed{6} \\ 20 \\ 70 \end{array}$$

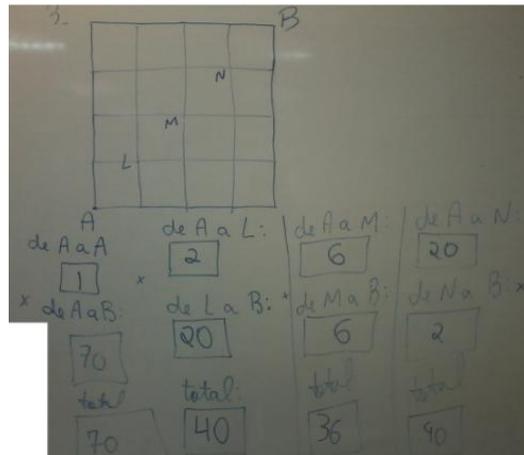
3- No quadrado 4 por 4, apenas nos pontos da diagonal secundária, determine quantos caminhos passam por cada ponto da diagonal e chegam ao ponto final (4,4).

Os pontos da diagonal são A, L, M, N e B, na figura 21.

Nesta questão, antes que respondessem na folha, fui ao quadro e, como ainda não tinham percebido a possibilidade de se usar o PFC, perguntei: “Quantos caminhos existem saindo do ponto inicial A, até L?” ao que eles responderam dois, corretamente. Em seguida, perguntei: “Quantos caminhos saem de L e chegam ao ponto final B?”, ao que eles responderam corretamente 20 caminhos. Então, perguntei: “Quantos caminhos, portanto, *passam* por L? Dois alunos responderam: “22.”. Outro: “40, porque já tínhamos calculado antes.” Outro ainda: “Multiplica 2 por 20.” Neste instante, confirmei para a turma que bastava multiplicar. Em seguida, um aluno comentou: “Pelo ponto N dá 40, né professor, pois é simétrico.”, ao que respondi que sim.

Então, desenhei a seguinte tabela no quadro, ainda em branco, para que os estudantes pudessem preencher os quadradinhos:

Figura 21 - Tabela para o cálculo de quantos caminhos passam por cada ponto da diagonal



Fonte: Foto tirada do quadro branco. Arquivo pessoal do pesquisador.

Todos os alunos preencheram corretamente as quantidades totais de percursos que passam por cada ponto da diagonal secundária do quadrado, como mostra a figura 21.

Análise Praxeológica de Chevallard: as técnicas utilizadas foram:

-primeira técnica: contar, primeiro, quantos caminhos chegavam em cada ponto, e também quantos caminhos saíam deste ponto e terminavam em B. Tecnologia: pela fórmula ou manualmente. Teoria: a teoria geral da análise combinatória.

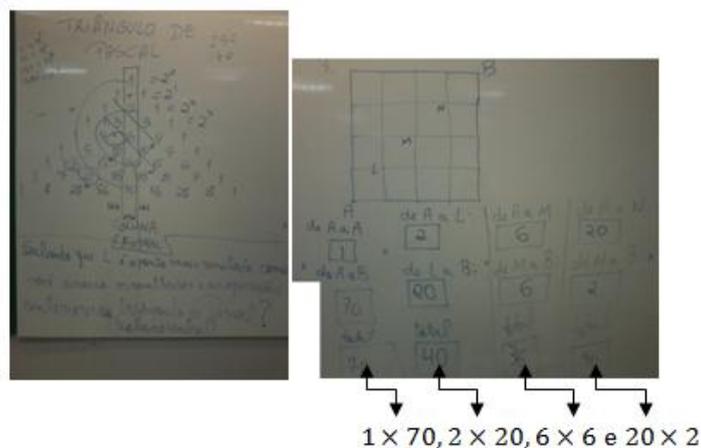
-segunda técnica: multiplicar os resultados. Tecnologia: o PFC. A teoria: teoria geral da probabilidade.

Representações Semióticas de Duval: conversão do registro geométrico para o aritmético-combinatório.

4- Sabendo que L é o ponto mais visitado, como você associa os resultados e as operações anteriores ao Triângulo de Pascal (coluna central)?

Nesta questão, primeiro desenhei novamente o Triângulo de Pascal no quadro branco, e mostrei a eles os cálculos que foram realizados na questão anterior, identificando-os à *coluna central* do Triângulo: 1×70 , 2×20 e 6×6 , como ilustra a figura 22:

Figura 22 - Triângulo de Pascal desenhado no quadro e seu correspondente no quadrado



Fonte: Foto do quadro branco. Arquivo pessoal do pesquisador.

Após ter desenhado o triângulo e mostrado a sua associação com a quantidade de caminhos, pedi que respondessem então a questão com suas palavras.

Respostas:

ALUNO 1: “Concluimos que $70 > 40 > 20$. E que nas extremidades da coluna central os resultados são maiores do que na parte central.”

ALUNO 2: “O eixo central os números aumentam de forma proporcionalmente igual aos valores dos pontos de A até B no quadrado de 16, ou em outros quadrados.”

ALUNO 3: “De acordo com os cálculos e analisando com o triângulo de Pascal, foi possível verificar que os valores centrais são menores que os valores que se encontram nas extremidades.”

ALUNO 4: “Os pontos centrais do quadrado são a coluna central do triângulo, e somando os lados dele dá o valor o resultado correto. Multiplicando os números dá o valor, as extremidades no triângulo são maiores, já no quadrado as extremidades são menores e quando chega ao centro vai aumentando.”

ALUNO 5: “Os valores da extremidade são maiores que os internos.”

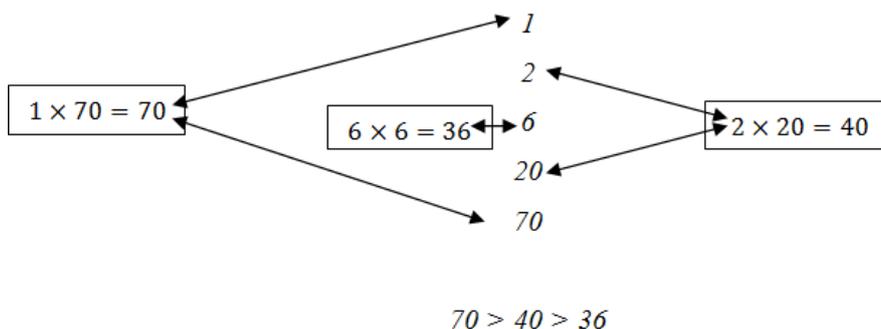
ALUNO 6: “Os pontos mais extremos do quadrado 4x4 possuem mais caminhos do que os pontos internos. $1 \times 70 = 70$ (caminhos de A a B), $2 \times 20 = 40$ (caminhos de A a L e L a B), $6 \times 6 = 36$ (de A a M e de M a B).”

Análise Praxeológica de Chevallard: técnica de associar operações com suas correspondentes em uma lista numérica (a coluna central do Triângulo).

Representações Semióticas de Duval: conversão do registro geométrico para o registro triangular.

Observações e análise das respostas: pude perceber, pelas respostas assim obtidas, que os alunos entenderam bem a associação entre o número de caminhos que passam pelos pontos da diagonal secundária do quadrado e o Triângulo de Pascal, bem como as operações realizadas. Isto, apesar de muitos terem escrito “os valores da extremidade são maiores que os internos”, ao invés da resposta mais precisa: *o produto dos valores mais externos da coluna central do Triângulo de Pascal é maior do que o produto dos valores simetricamente internos à coluna:*

Figura 23 - Ilustração da propriedade do Triângulo



Fonte: Elaboração própria.

Ao final das atividades os alunos não chegaram sozinhos à propriedade do Triângulo de Pascal nos minutos que tiveram para pensar sobre esse tema. Porém, com meu auxílio, perceberam a relação entre o problema e o Triângulo, o que para mim foi de grande valia e satisfação.

Conforme mencionado na seção de caracterização dos alunos, o grupo participante da pesquisa foi formado, sem a intencionalidade do pesquisador, por estudantes de baixo desempenho na disciplina de Estatística, pelo fato da pesquisa ter sido realizada ao fim de um semestre letivo, o que poderia explicar o atraso na associação das quantidades de caminhos ao Princípio Fundamental da Contagem. No entanto, conseguiram, ao fim das atividades, compreender todos os mecanismos propostos, converteram corretamente os tipos de registros, usaram as técnicas que tinham em mãos e também as técnicas apresentadas por mim.

7 Conclusões

Pude concluir que a resolução de problemas que George Polya (1977) destacava foi um bom método de se estudar análise combinatória e probabilidade, dado que em pouco tempo os estudantes puderam revisar os conceitos principais: fatorial, fórmula da probabilidade como a razão entre o número de elementos de um evento e o número de elementos do espaço amostral, eventos disjuntos, eventos independentes e o Triângulo de Pascal, além das noções básicas de Matemática: álgebra elementar, soma de frações e transformação de números decimais em porcentagem.

A sequência proposta por Polya foi verificada na aplicação das atividades: a compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano e, retrospecto. Na primeira, a compreensão, o pesquisador ia ao quadro a cada conjunto de atividades e explicava para os estudantes o que se pedia nas questões para auxiliá-los nesta etapa, dado que o problema do ponto mais visitado não consta em livros escolares. Na segunda etapa os alunos eram deixados sem o apoio do pesquisador, num primeiro momento, para que pudessem elaborar seus próprios planos de resolução. Na terceira etapa os alunos também eram deixados sem interferência, porém era permitido que se ajudassem. Na quarta etapa, o retrospecto, o pesquisador ia ao quadro a cada conjunto de atividades e resolvia todas as questões juntamente com os alunos, de tal forma que os alunos iam falando o que tinham respondido e o pesquisador ia revelando as respostas, numa construção mútua. Esta atitude era necessária para que os estudantes pudessem realizar as atividades seguintes com maior propriedade.

O modelo de Onuchic de resolução de problemas também se verificou na condução da pesquisa. O modelo é constituído de etapas que diferem ligeiramente das de Polya: proposição do problema à turma; leitura individual do mesmo; leitura em grupos; resolução do problema; acompanhamento e incentivo por parte do professor; anotação das diferentes soluções na lousa; discussão com a turma toda; busca de um consenso; formalização do conteúdo trabalhado com a inserção das definições e teoremas e, proposição de novos problemas. A única etapa não estimulada veementemente nesta organização de Onuchic foi a da leitura em grupos, apesar de que os alunos não estavam proibidos de se comunicarem, o que de fato acabou ocorrendo.

Os momentos de incubação, aqueles nos quais o aluno não pensa no assunto para que o inconsciente possa trabalhar, foram disponibilizados na pesquisa, dado que os alunos tiveram um ou dois dias entre uma atividade e outra.

Puderam ser identificados alguns tipos de obstáculos que acarretaram em erros cometidos pelos estudantes nas respostas da pesquisa: a) *obstáculo epistemológico - dificuldade de entendimento do conceito matemático*: particularmente no conceito de plano cartesiano e dos conceitos de análise combinatória; b) *obstáculo didático - más escolhas do professor no método de ensino*: uma atividade mais elementar poderia ter sido empregada antes, para uma melhor condução da pesquisa; c) *obstáculo psicológico - quando o conteúdo entra em conflito com a intuição e os desejos do aluno*: a solução do problema do ponto mais visitado, conforme já colocado, não é intuitivo.

Nas primeiras questões da atividade, houve algumas dificuldades iniciais, como no entendimento do que o problema propunha. Com meu auxílio progressivo as dificuldades foram sendo sanadas e, nas últimas questões, a porcentagem de acerto aumentou significativamente, reforçando a hipótese de que, de fato, o problema se configurava no *milieu* apropriado para a situação adidática que se propunha submeter os estudantes.

O problema do ponto mais visitado de fato se constituiu numa situação de conflito cognitivo para os estudantes (BROUSSEAU, 1986), apesar de, por fim, ter sido bem compreendido pelos estudantes ao fim das atividades aplicadas na pesquisa. O problema não permitia a aplicação direta de uma fórmula única e definitiva para sua resolução. Também não possuía um único caminho a ser seguido, sequer um caminho claro. A variedade de respostas apresentadas ilustrou bem este aspecto. Deve-se levar em conta que o contrato didático estabelecido durante as atividades difere-se do contrato que estava vigente com o professor da disciplina que ora cursavam os alunos, pelo fato de que os erros e acertos dos alunos não seriam levados em conta na composição de uma nota.

As fases da situação didática foram percebidas no desenrolar das atividades: a *devolução*; quando o pesquisador apresentou o problema do ponto mais visitado; a *ação* no qual o aluno inicia a resolução do problema; a *formulação*, quando o aluno conversa com o problema sem, no entanto, explicitar necessariamente uma linguagem matemática formal, e também dialoga com outros colegas; a *validação* quando o aluno passou para o papel suas produções em linguagem matemática e, a *institucionalização*, quando o pesquisador revelou ao aluno sua intenção didática inicial, incorporando o conhecimento adquirido no universo teórico constituído historicamente, que ficará ao alcance de todos para quando for necessário utilizá-lo em outros contextos.

A hora das retiradas das bolinhas da sacola foi um momento que envolveu descontração e verificação visual do problema, no qual os alunos puderam comparar o resultado teórico com o experimental. O lúdico, de fato, tem sido amplamente utilizado e apoiado pelas pesquisas acadêmicas como estratégia de ensino da matemática e também de outras disciplinas. Afinal, o jogo promove a criatividade e a capacidade de antecipação de problemas, por exemplo (MENEZES, 2008).

Menezes (2008) lembra que muitas xaradas aparentemente simples geraram teorias avançadas e que hoje são campo de atuação em pesquisas de Pós-Graduação: o paradoxo de Zenão, o problema das pontes de Koeñigsberg, o último teorema de Fermat, o quadrado mágico. Segundo Marques de Sá, Júnior e Miranda (2016), ainda há, entretanto, um caminho a trilhar neste sentido. De fato, não se deve pensar no lúdico apenas no âmbito do material concreto, mas também da imaginação, segundo os autores.

A ampliação do problema com relação ao estudo piloto se mostrou aplicável, pois pude notar a possibilidade de se estender o problema do ponto mais visitado para a relação com o Triângulo de Pascal, o que de fato se concretizou junto aos alunos.

Na parte em comum entre o estudo piloto e a presente pesquisa foram constatadas algumas diferenças de produções, talvez pelas diferenças entre as turmas: uma do diurno com 17 alunos e a outra do noturno, com seis alunos em estado de recuperação na disciplina que cursavam. A primeira diferença foi com relação ao tempo de se perceber o uso do Princípio Fundamental da Contagem para o cálculo da quantidade de caminhos passando por um ponto. No estudo piloto esta possibilidade foi constatada nas primeiras questões, enquanto que na pesquisa houve a intervenção do pesquisador para que os estudantes pudessem ter esta percepção, necessária para a aplicação no Triângulo de Pascal. Outra diferença foi também o tempo de percepção com relação à simetria do quadrado no que diz respeito às quantidades de caminhos que passam por cada ponto. Novamente, no estudo piloto esta percepção surgiu mais rapidamente.

Na execução das atividades o *feedback* era dado por mim ao fim de cada conjunto de atividades, porém o estudante não poderia mais voltar e refazer a questão, para não comprometer o registros das respostas. Ele aproveitava o *feedback* para a realização das atividades seguintes, o que, conforme pôde-se verificar, serviu de fato para as questões que se seguiram. Nesse sentido, o *feedback* possuiu um caráter formativo, em detrimento do somativo, devido ao seu objetivo ser o de colaborar para o

entendimento do conteúdo por parte dos alunos, ao invés de servir apenas para a composição de uma nota (HADJI, 2001).

Foi possível também identificar como os alunos tratavam e convertiam os registros semióticos descritos por Duval. Em certas situações alguns estudantes pareceram não entender a existência de dois tipos de registro para um objeto matemático, e que cada registro tem um tratamento próprio, isto é, uma manipulação própria. Este fato foi verificado em algumas produções nas quais a soma de frações era feita de modo equivocado, sem a manipulação correta dos denominadores. Além disto, isoladamente, houve poucos que, ao converterem o registro simbólico para o verbal, produziram frases com interpretações dúbias ou com falta de clareza.

Em geral, os alunos converteram adequadamente os registros semióticos relacionados aos objetos matemáticos postos: do geométrico para o aritmético, quando o aluno transpunha os caminhos traçados para a contagem dos mesmos; do geométrico para o combinatório e para o algébrico, quando faziam a contagem dos caminhos passando por determinado ponto por meio da fórmula apresentada; do geométrico para o verbal, quando relatavam como faziam as contagens dos caminhos ou quando usavam a intuição na identificação do ponto mais visitado; do geométrico para o triangular, quando associavam o problema do ponto mais visitado ao Triângulo de Pascal; do geométrico para o fracionário, o decimal e o probabilístico, quando realizavam a simulação dos caminhos para a verificação das frequências observadas.

As análises praxeológicas das produções dos estudantes mostraram a importância de se conhecer as técnicas disponíveis para a realização de tarefas, bem como o arsenal teórico tecnologia-teoria que explicam estas técnicas, conforme prevê a teoria de Chevallard. Em geral os alunos progrediram com relação ao uso das possíveis técnicas. As principais utilizadas foram a contagem simples, depois a aplicação da fórmula de se encontrar o número de caminhos, a técnica de se calcular a probabilidade de interseção e a união de eventos, a técnica de se converter decimais em porcentagens, de converter frações em decimais, de associar o problema dos caminhos ao Triângulo de Pascal, sendo esta última até então não conhecida pelos estudantes participantes da pesquisa. As tecnologias e teorias empregadas foram basicamente as seguintes: o Princípio Fundamental da Contagem, a teoria da probabilidade e a teoria da contagem. Das técnicas utilizadas, estaca-se o PFC como uma técnica *superior*, pelo fato de ela servir para outros tipos de problemas (BESSA DE MENEZES, 2010).

A pesquisa se mostrou num exemplo no qual as organizações didáticas – os problemas propostos e as atividades lúdicas aplicadas – permitiram que se trabalhassem tais organizações matemáticas – a teoria da probabilidade e da análise combinatória (ALMOULOU, 2012).

A praxeologia envolvida no problema do ponto mais visitado como um todo pode ser classificada como *regional*, pois, para sua resolução é necessária mais de uma tarefa (BESSA DE MENEZES, 2010): contagem, desenvolvimento de fatorial, aplicação do conceito de combinação e da probabilidade, manipulação algébrica e aritmética, cada uma amparada por uma tecnologia própria dentro da teoria geral da probabilidade.

A discussão em pares surgiu espontaneamente entre os alunos e foi de grande valia para que eles se ajudassem no entendimento do que se pedia na atividade. Também foi importante para que uns ajudassem os outros nas operações elementares da Matemática. A situação adidática vivida pelos participantes da pesquisa ensejou a discussão em pares justamente pelo caráter não familiar do problema proposto.

Segundo Silva (2014), a importância do exercício do diálogo entre os alunos permite um aprimoramento e amadurecimento acadêmico não apenas do tutorando, mas também do estudante tutor. Segundo a autora tal mediação surge espontaneamente, como foi o caso desta pesquisa, e, geralmente, ocorre entre estudantes com diferentes níveis de habilidade com respeito ao assunto estudado naquele momento.

Silva (2014) salienta ainda que, dependendo da postura do professor, a discussão em pares pode ou não ser valorizada. De fato, em momentos de conversa entre os estudantes, é comum que o professor não consiga discernir se o assunto em pauta está ligado ou não com o conteúdo da aula, o que pode gerar um mal entendido entre as partes. O tempo também seria um fator que inibiria a mediação. Na presente pesquisa o tempo – 3 dias letivos de aplicação – e a postura do pesquisador propiciaram um clima de abertura ao diálogo importante para a condução das atividades. Silva (2014) ainda considera que esta interação estimula o gosto pelo aprendizado e que os alunos desenvolvem processos de autorregulação que os tornam mais independentes com o passar do tempo. Ao dialogarem, eles regulam seus próprios processos cognitivos. No cálculo das quantidades de caminhos por cada ponto no problema do ponto mais visitado, de fato os estudantes se ajudaram no início, depois, para os demais pontos, foram capazes de usar a fórmula com maior independência.

Novas ampliações do problema, por exemplo com sua resolução através das cadeias de Markov – conceito da teoria da Probabilidade – poderão ser a próxima investida, como continuação natural desta pesquisa por mim ou por qualquer investigador que se interesse em fazê-lo, tanto com alunos do Ensino Médio quanto do Superior (SANTOS, 2016a). Tal abordagem propicia ao aluno verificar a ligação entre vários conceitos em Matemática, como as matrizes e a probabilidade. Também, auxilia-os a constatar que assuntos básicos de matemática podem ter implicações em situações mais complexas onde são exigidas notações mais robustas, como é o caso da aplicação do problema do ponto mais visitado abordado sob o ponto de vista das cadeias de Markov. Além disto, diversos autores têm defendida a aplicação das cadeias de Markov na Educação Básica, como Cordani (2016), Delatorre (2016) e Manoel (2016). O problema do ponto mais visitado poderia ser mais um caso de aplicação deste conceito no Ensino Médio.

Outra futura possibilidade de aplicação é o uso do problema do ponto mais visitado na Educação Básica de forma mais simplificada. Para tanto, uma proposta de atividade em forma de jogo encontra-se no Apêndice IV. Porém, o problema enseja também a criação de jogos por parte do próprio aluno, afinal, pode-se ou escolher um ponto e sortear um caminho para ver se irá passar pelo ponto escolhido, ou então dois alunos escolhem um caminho e verifica-se se há pontos em comum, dentre outras possibilidades de jogo.

Conforme aponta Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) o jogo, quando criado pelo próprio estudante, proporciona a este uma apropriação mais acentuada dos conceitos matemáticos envolvidos nas regras a serem estabelecidas. Segundo as autoras o jogo é uma atividade que se aproxima da modelagem matemática e que propicia o desenvolvimento de outros aspectos como a capacidade do trabalho em grupo, a sociabilidade, a disciplina, o planejamento, a autoconfiança, a linguagem, o raciocínio lógico, a imaginação, autonomia, espírito de cooperação, dentre outros.

Segundo Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008), o jogo pedagógico não é algo novo e é conhecido pelo seu potencial para o ensino nas diversas áreas do conhecimento. Ao jogar, os alunos desenvolvem ainda habilidades em resolver problemas, estabelecer relações entre conceitos matemáticos, além de possibilitar uma situação prazerosa de aprendizado nas aulas de matemática. As autoras salientam, porém, que no Ensino Médio em particular o jogo tem sido visto por alguns professores como um obstáculo ao aprendizado, por gerar certa desordem na sala de aula. No

entanto, as vantagens da aplicação desta metodologia se sobressaem com respeito às desvantagens. De fato, segundo Marques de Sá, Júnior e Miranda (2016), o jogo carrega consigo o aspecto da imprevisibilidade, da surpresa, afinal a turma pode não receber bem determinada atividade lúdica proposta pelo docente.

O jogo, que deve ter caráter lúdico e, também, educativo, pode ser do tipo estratégico ou de conhecimento, onde, no segundo tipo, a matemática constitui-se em conhecimento a ser fixado ou apreendido pelos estudantes, (DINIZ; PESSOA; ISHIHARA, 2008). O jogo não precisa ser uma atividade relegada a poucas aulas no ano. Se bem planejado, pode se constituir em ferramenta útil para o sucesso do aprendizado em Matemática.

Voltando às conclusões da presente pesquisa, o ineditismo do problema do ponto mais visitado na forma de atividade aplicada em sala de aula enseja ainda um campo amplo de aplicação em turmas de outros níveis, como o fundamental, o médio e até o de Pós-Graduação. Não apenas o problema em si, mas o tratamento das informações coletadas por meio da Análise Praxeológica de Chevallard e dos Registros Semióticos de Duval, com relação à resolução deste e de outros problemas de Probabilidade e de Análise Combinatória no Ensino Superior, ainda é um campo pouco explorado, e cabem mais aprofundamentos e descobertas a serem feitas.

As análises realizadas nesta pesquisa permitiram concluir, como síntese e núcleo central desta tese, que: a) a pouca bagagem matemática de parte dos estudantes que chegam à graduação enseja a propositura de estratégias diferenciadas para o êxito na prática de ensino desta disciplina; b) o trabalho pedagógico orientado pela metodologia de resolução de problemas e pelo apelo ao lúdico favorece a aprendizagem matemática; c) as análises das representações semióticas permitem o professor averiguar as lacunas existentes na bagagem de conhecimento do aluno e enseja uma ação reparadora desta situação; e, d) a análise praxeológica se constitui em uma ferramenta útil para o professor poder acompanhar com maior propriedade o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos.

A pesquisa possui algumas limitações, como por exemplo: o problema do ponto mais visitado, dependendo de quão profundo se deseja ir, exige um tempo considerável de aplicação, o que não seria viável para uma turma regular de graduação, a menos que fosse abordado em atividades extraclasse ou em complementos de atividades recuperativas, como foi o caso da presente pesquisa.

Outra limitação seria a inviabilidade de se demonstrar matematicamente a solução do problema do ponto mais visitado para estudantes de nível médio ou para estudantes de cursos de graduação que não possuem disciplinas envolvendo Indução Finita. O mesmo ocorrendo na demonstração das propriedades do Triângulo de Pascal.

Para o aprimoramento desta pesquisa, creio ser necessária uma introdução mais elementar com respeito às regras que os caminhos devem seguir na malha quadrada, para se evitar a demora do entendimento por parte dos estudantes, como ocorreu nesta pesquisa. Além disto, seria interessante que o pesquisador pudesse fornecer um *feedback* melhor para seus alunos, mais detalhado.

Pode ser um fator de melhoramento também a divisão da classe em grupos, para que a discussão possa ser mais bem estimulada entre os pares. Seria também interessante que o professor tivesse mais tempo para retornar aos estudantes os detalhes da solução do problema, mostrando quem sabe algum esboço das demonstrações das propriedades, para sanar a curiosidade que porventura surgir por parte dos alunos. Com estas e outras propostas a pesquisa tem potencial para continuar.

Como pesquisador e como professor, aprendi que a descoberta em matemática pode ser estimulada por meio de metodologias apropriadas como a resolução de problemas; que o lúdico de fato prende a atenção dos estudantes, envolvendo-os mais efetivamente no processo de ensino e aprendizagem da matemática; que os alunos necessitam do seu próprio tempo para a apreensão do conhecimento, e que este tempo pode ser reduzido no trabalho em pares; que pesquisas de campo em Educação favorecem uma visão mais detalhada da realidade dos estudantes e, que o aluno pode ser autônomo no processo do seu aprendizado, com o apoio fiel de seu professor.

Destaco aqui outro aprendizado, o que considero o mais importante e urgente. Em verdade, uma constatação que já pressupunha e que me foi confirmada nesta tese. Quando o aluno sabe onde se pretende chegar, quando os objetivos de ensino são bem definidos e claros pelo professor e pela escola, enfim, quando o porquê de se estudar algo é claramente informado ao estudante, o mesmo sente-se motivado a enfrentar e apreender os conteúdos a serem trabalhados. Na resolução do problema, sabe-se donde se quer chegar. O caminho do aprendizado para sua resolução, então, é trilhado com autêntica motivação, ao contrário do ensino no qual nenhuma informação é dada com respeito aos porquês daquele assunto estar sendo visto na aula, o que, verdadeiramente, desmotiva uma considerável parte dos alunos.

8 Referências

ABREU, Joel Faria de. Coincidência de aniversários. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 11. SBM. 1990.

ABREU, Vanja Marina Prates de. *A calculadora como recurso didático nos anos iniciais do ensino fundamental*. 2009. 136f. Dissertação (Mestrado em Educação). Centro de Ciências Humanas e Sociais do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande.

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira. Engenharia didática: evolução e diversidade. *REVEMAT: R. Eletr. de Edu. Matem.* Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012.

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. *Geometria Analítica Plana: Praxeologias Matemáticas no ensino médio*. 2007. 121f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará. Belém.

ANNIN, Scott A.; LAI, Kelvin S. Common errors in counting problems. *Mathematics Teacher*, Reston, vol. 103, n. 6, Feb/2010.

ARAÚJO, Abraão Juvencio de. *O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do Didático*. 2009. 292f. Tese (Doutorado em Educação). Curso de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

ARMANDO, Hudson Rodrigues; SANTOS, Rogério César dos. O Triângulo de Pascal e Funções Polinomiais. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 86. SBM, 2014.

ASPLUND, Katie. Pascal's Triangle Patterns and Extensions. Iowa State University. MSM Creative Component; Summer 2009.

ASSIS, Adryanne Maria Rodrigues Barreto. *Conhecimentos de combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada: reflexões e prática de uma professora*. 2014. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

BARBOSA, Aline Oliveira da Silva. *A trigonometria do ciclo trigonométrico: uma análise da transposição didática realizada pelo livro didático na 2ª série do ensino médio à luz da teoria antropológica do didático*. 2015. 100 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife.

BARBOSA, Edelweis José Tavares. *Equação do primeiro grau em livros didáticos sob a ótica da teoria antropológica do didático*. 2011. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LIMA, Ana Paula Avelar Brito. Organizações matemática e didática entre duas coleções didáticas sobre equações do primeiro grau. *REVEMAT*. Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 110. 2014.

BARBOSA, Elton Fernandes. *Sequências aplicáveis para o ensino médio*. 2015. 67 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande.

BAYER, Arno, ECHEVESTE, Simone, ROCHA, Josy, BITTENCOURT, Hélio Radke. Probabilidade na Escola. In: *III Congresso Internacional de Ensino da Matemática*, 2005, Canoas. III Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2005. v. 1. p. 1-12.

BERMAN, Gerald.; FRYER, K. D. *Introduction to Combinatorics*. New York: Academic Press, 1972. Disponível em <https://books.google.com.br/books?id=H7zSBQAAQBAJ&pg=PA49&lpg=PA49&dq=paths+in+the+plane+pascal+triangle&source=bl&ots=PJDj87UheU&sig=VAkjsSwyKodb6nPFTY71ROzi_Zs&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwirwcv8mdfKAhUJfZAKHcRJCv8Q6AEIVjAL#v=onepage&q=paths%20in%20the%20plane%20pascal%20triangle&f=false> Acesso em: 29 Fev. 2106.

BESSA DE MENEZES, Marcus. *Praxeologia do professor e do aluno: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau*. 2010. 178f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Pernambuco. Recife

BICUDO, Irineu. Demonstração em Matemática. *Bolema*. Rio Claro. São Paulo. v. 15. n. 18. Set. 2002.

BLOCH, Isabelle. Prefácio. In: ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Paraná: Editora da UFPR, 2007.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. MEC. 2013.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – Ensino Fundamental – Matemática*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, 1998, p. 7

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental – SEF. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática (1ª a 4ª série)*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental – SEF. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática (5ª a 8ª série)*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITTO, Marta Aparecida Ferreira de Oliveira. *Matrizes: Propostas de aplicação no ensino médio*. 2014. 94f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora.

BROUSSEAU, Guy. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BUSE, Andrei. *Um olhar diferenciado sobre a cinemática no ensino médio: uma abordagem praxeológica das tarefas*. 2014. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. *Educação Matemática no Brasil: uma meta-investigação*. *Quadrante Revista Teórica e de Investigação*, Lisboa, v. 9, n. 1, p. 117-140, 2000.

CARVALHO, Cláudia Cristina Soares de. *Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do ensino médio*. 2007. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CARVALHO, Dierson, Gonçalves de. *Uma análise da abordagem da área de figuras planas no guia de estudo do projovem urnano sob a ótica da teoria antropológica do didático*, 2012. 122f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

CAZORLA, Irene Mauricio e SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos. *Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio*. Itabuna, BA: Via Litterarum, 2006.

CELESTE, Letícia Barcaro. *A produção escrita de alunos do ensino fundamental em questões de matemática do PISA*. Dissertação. 2008. (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

CHAVES, Adiel Praseres. *Função Quadrática: análise em termos de contextos, de organizações matemáticas e didáticas propostas em Livros Didáticos de Ensino Médio*. 2016. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CHEVALLARD, Yves. *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie antropológica du didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Editions, v.19.n.2, p.221-265, 1999.

CHIAPETTI, Rita Jaqueline Nogueira. Pesquisa de campo qualitativa: uma vivência em geografia humanista. *GeoTextos*, vol. 6, n. 2, dez. 2010. Rita Jaqueline N. Chiapetti 139-162

CORDANI, Lisbeth Kaiserlian; HARNIK, Simone Bega. Além da Independência probabilística entre eventos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 89, 2016.

COSTA, Acylena Coelho. *Geometria Analítica no Espaço: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos*. 2015. 113 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

COSTA, Carlos Rogério. *Panorama de um estudo sobre razões e proporções em três livros didáticos*. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: PUC, 2005.

COUTINHO, Jean Lázaro da Encarnação. *Matemática para o ensino do conceito de combinação simples*. 2015. 118 f. Dissertação (Pós-Graduação em Educação). Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia. Salvador.

COUTINHO, Renata Paixão; BARBOSA, Augusto Cesar de Castro; CONCORDIDO, Cláudia Ferreira Reis; COSTA, Marcus Vinicius Tovar. Resolução de Problemas em matemática – uma aplicação. *Ensino, Saúde e Ambiente*, Niterói, v. 9, n. 3, p. 249-268, Dez/ 2016.

CRUZ, Eliana da Silva. *A noção de variável em livros didáticos de Ensino Fundamental: um estudo sob ótica da organização praxeológica*. 2005. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CURY, Helena Noronha. Análise de erros em resolução de problemas: uma experiência de estágio em um curso de licenciatura em matemática. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. v. 1. n. 1. 2008. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. DOI: 10.3895/S1982-873X2008000100006

CURY, Helena Noronha; SILVA, Priscila Nitibailoff. Análise de erros em resolução de problemas: uma experiência de estágio em um curso de licenciatura em matemática. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia*. v.1, n. 1, 2008.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A Educação Matemática como disciplina. *Revista Brasileira de Educação*, n. 27, 2004.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *O que é Etnomatemática?*. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, s/d.

D'AMORE, Bruno. Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino. *Bolema*, Rio Claro, ano 20, n. 28, p. 179–205, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*. Vol. 1. São Paulo: Ática, 2010.

DAVIS, Tom. *Exploring Pascal's Triangle*. Disponível em <<http://www.geometer.org/mathcircles/pascal.pdf>>. Acesso em: 29 Fev. 2016.

DELATORRE, Hugo Tadeu. *Aplicações das Cadeias de Markov no Ensino Médio*. 2016. 66f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” de São José do Rio Preto. Presidente Prudente.

DOYLE, Peter G.; SNELL, J. Laurie Snell. *Random walks and electric networks*. Washington: The Mathematical Association of America, 1984

DUVAL, Raymond. Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *RDM*, v 16, n3, p. 349-382, 1996.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, v. 5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mérciles Thadeu Moretti. *REVEMAT*. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

FERNADES, Hercília Maria.; ARAÚJO, Marta Maria de. Pedagogia Científica à descoberta da criança. *Revista Educação em Questão*. Vol. 50, n. 36, p. 248-252, Natal, 2014.

FERNANDES, George Pimentel; MENEZES, Josinalva Estácio. O Movimento da Educação Matemática no Brasil: cinco décadas de existência. II Congresso Brasileiro de História da Educação. *Anais...* Natal. 2002.

FERNANDES, Pedro. *Introdução aos processos Estocásticos*. IMPA, 2014. Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/10CBM/10_CBM_75_03.pdf>. Acesso em: 01 Mar. 2016.

FERNANDEZ, Dinara W. Xavier; FERNANDEZ, Dierê Xavier. O Prazer de Aprender Probabilidade Através de Jogos: Descobrimo a Distribuição Binomial. *Atas da Conferência Internacional "Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística - Desafios para o Século XXI"* Florianópolis, Santa Catarina, Brasil - 20 a 23 de Setembro de 1999.

FERREIRA, Norma Sandra de Almeida. As pesquisas denominadas estado da arte. *Educação & Sociedad*. Ano XXIII, n. 79, 2002.

FERREIRA, Robson dos Santos. *Ensino de probabilidade com o uso do programa estatístico R numa perspectiva construcionista*. 2011. 155f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

FERREIRA, Robson dos Santos; KATAOLA, Verônica Yumi; KARRER, Mônica. Sequência de ensino “Passeios aleatórios da Carlinha”: contribuições da árvore de possibilidades. *Anais...* Petrópolis, 2012.

FIorentini, Dario; Lorenzato, Sérgio. *Investigação em Educação Matemática*. Campinas: Autores Associados, 2006 (coleção formação de professores).

FOUREZ, Gérard *A construção das ciências: introdução à filosofia e à ética das ciências*. São Paulo: Unesp, 1937

FREITAS, Evandro de. *O uso de matriz de transição para o cálculo de probabilidade em jogos*. 2013. 63 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora.

FRIOLANI, Luis Cesar. *O pensamento estocástico nos livros didáticos do ensino fundamental*. 2007. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

GATTI, Bernadete, A.; NUNES, Marina Muniz Rossa. (orgs) *Formação de professores para o ensino fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas*. São Paulo: Fundação Carlos Chagas/Departamento de Pesquisas Educacionais, 2009.

GODOY, Elenilton Vieira; SANTOS, Vinício de Macedo. *O Currículo de Matemática, no Ensino Médio: Uma Análise Considerando as Dimensões Culturais, Sociais, Formativas e Políticas*. s/d.

GONÇALVES, Mauro César. *Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica*. 2004. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

GONTIJO, Hércules Gontijo. *Criatividade em Matemática: identificação e promoção de talentos criativos*. *Educação – Centro de Educação*. Vol. 32, n. 2, 2007a.

GONTIJO, Hércules Gontijo. *Relação entre criatividade, criatividade em matemática, e motivação em matemática de alunos do ensino médio*. Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Psicologia. UnB, 2007b.

GOULART, Amari. *O discurso sobre os conceitos probabilísticos para a escola básica*. 2007. 88 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

GROENWALD, Cláudia Lisete Oliveira; ZOCH, Lisiane Neto; HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokti. *Seqüência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM*. *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 22, no 34, 2009, p. 27 a 56.

GUSMÃO, Nathan Lascoski; SAKAGUTI, Fernando Yudi; PIRES, Liceia Alves. *Educação Matemática Pesquisa*. v. 19. n. 2. p. 211-235. São Paulo. 2017

HADJI, Charles. *Avaliação desmistificada*; trad. Ramos, P. C.. Porto Alegre/RS: Artmed, 2001.

HARDY, Godfrey Harold. *Em Defesa de Um Matemático*. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

HÉLIE, Sébastien; SUN, Ron. Incubation, insight, and creative problem solving: a unified theory and a connectionist model. *Psychological Review*, Washington, DC, v. 117, n. 3, p. 994-1024, julho/2010.

HOEL, Paul G.; PORT, Sidney C.; STONE, Charles J. *Introduction to Stochastic Processes*. 1972. 203f. University of California, Los Angeles.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. *A noção de “Obstáculo Epistemológico” e a Educação Matemática*. São Paulo: IME, 2015.

IMENES, Luiz Márcio Pereira. Um Estudo Sobre o Fracasso do Ensino e da Aprendizagem da Matemática. *Bolema*, Rio Claro – SP, v. 5, n. 6, 1990.

INAFUKO, Julio K. *As equações algébricas no ensino médio: um estudo de uma sequência didática utilizando software gráfico*. 2006. 291f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Florianópolis.

KATAOLA, Verônica Yumi. Passeios Aleatórios da Carlinha: Uma Atividade Didática para o Ensino de Probabilidade. *ERMAC 2010: I ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL*. 11 - 13 de Novembro de 2010, São João del-Rei, MG; p. 26 – 35.

KLYMCHUK, Sergiy. Provocative mathematics questions: drawing attention to a lack of attention. *Teaching Mathematics and Its Applications* (2015) 34, 63-70.

KNIJNIK, Gelsa; DUARTE, Cláudia Glavam. Entrelaçamentos e Dispersões de Enunciados no Discurso da Educação Matemática Escolar: um Estudo sobre a Importância de Trazer a “Realidade” do Aluno para as Aulas de Matemática. *Bolema*. v. 23. n. 37. São Paulo. 2010.

KRAMP, Cristian. *Éléments d'arithmétique universelle*. Colôna: Ed. Cologne, 1808.

LEITE, Miriam Soares. *Contribuições de Basil Bernstein e Yves Chevallard para a discussão do conhecimento escolar*. Tese. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em Educação. 2004.

LESTER, Frank K., Jr. Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction. *The Mathematics Enthusiast*, vol. 10, nos.1&2. USA: Indiana University, 2013.

LIMA, César Augusto Vieira. *Probabilidade para o Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

LIMA, Iranete Maria da Silva. Prática Docente: conhecimentos que influenciam as decisões didáticas tomadas por professores. In DIAS, A. A; MACHADO, C. J. S.; NUNES, M. L. S. (Orgs.). *Educação, Direitos Humanos e Inclusão Social: currículo, formação docente e diversidades socioculturais*. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, v. 1, p. 51-67, 2009.

LOEHR, Abbey Marie; FUFÉ, Emily R.; and RITTLE-JOHNSON, Bethany (2014) "Wait for it . . . Delaying Instruction Improves Mathematics Problem Solving: A Classroom Study," *The Journal of Problem Solving*: Vol. 7: Iss. 1 , Article 5. DOI: 10.7771/1932-6246.1166

MACHADO, Cláudia Rejane. Teorias de pesquisa em Educação Matemática: A influência dos franceses. UFRGS. Disponível em <http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/pesquisa/CLAUDIA_FRANCESES.DOC.pdf>. Acesso em 23 de fevereiro de 2017

MAIA, Cristini Kuerten. *A organização praxeológica do objeto triângulo nos livros didáticos da 7ª série do ensino fundamental*. 2008. 195f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis.

MAMONA-DOWNS, Joanna.; DOWNS, Martins. Problem Solving and its elements in forming Proof. *The Mathematics Enthusiast*, vol. 10, nos. 1&2, p.137. USA: Indiana University, 2013.

MANOEL, Marcelo de Ramos. *Cadeias de Markov: uma abordagem voltada para o ensino médio*. 2016. 69f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

MARCHETTI, Maurizio. *Lineamentos de Análise Combinatória*. 2016. 110 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Campus de Rio Claro. São Paulo.

MARQUES DE SÁ, Antônio Villar; JÚNIOR, Luiz Nolasco de Rezende; MIRANDA, Simão de. *Ludicidade: desafios e perspectivas em educação*. Jundiaí, Paco Editorial: 2016.

MATEUS, Pedro. *Cálculo Diferencial e Integral nos livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica*. 2007. 188f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

MELO, Antônio Luiz de.; SANTOS, Rogério César dos Desigualdades no Triângulo de Pascal. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*. Bauru. Vol. 3. No 1. Março de 2014.

MENDES, Herman do Lago. *Os números binários: do saber escolar ao saber científico*. 2015. 295f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

MENEZES, Josinalva Estacio (Jô) (org). *Conhecimento, interdisciplinaridade e atividades de ensino com jogos matemáticos: uma proposta metodológica*. Recife, UFRPE: 2008.

MESQUITA, Flávio Nazareno Araújo. *As dinâmicas praxeológicas e cognitivas e a construção do conhecimento didático do professor de matemática*. 2011. 106f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação Matemática e Científica. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Pará. Belém.

MICHAILOFF, Grazielle Taise. *As contribuições de Malba Tahan ao ensino da Matemática*. (2009). Monografia (Licenciatura em Matemática). Departamento de Ciências e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões-Campos de Erechim. Rio Grande do Sul: Erechim, 2009.

MIGUEL, Maria Inez Rodrigues. *Ensino e aprendizagem do modelo Poisson: uma experiência com modelagem*. 2005. 270 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em 29 Fev. 2016.

MIRANDA, Gina Magali Horvath. *Um Sistema Baseado em Conhecimento com Interface em Língua Natural para o Ensino de Matemática*. Mestrado Acadêmico em Educação Matemática. PUC-SP, 2009.

MLODINOW, Leonard. *O Andar do Bêbado: como o acaso determina nossas vidas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

MORAIS, Tula Maria Rocha. *Statistical thinking an study: components and skills*. 2006. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp*. v.11, n. 19, Jan./Jun, 2003.

MOTTA, Josiane Marques. *As disciplinas de metodologia de ensino e estágio supervisionado na formação do professor de matemática: saberes e dificuldades*. 2006. 147f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis.

NAGAMINE, Camila Macedo Lima; HENRIQUES, Afonso.; UTSUMI, Miriam Cardoso; CAZORLA, Irene Maurício. Análise Praxeológica dos Passeios Aleatórios da Mônica. São Paulo: *Bolema*, 2011.

NAKAMURA, Keiji. *Conjunto dos números irracionais: a trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas escolares*. 2008. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

NETO, Fernando de Simone. *Análise do letramento estatístico nos livros didáticos do ensino médio*. 2008. 161f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

NETTO, Orlando Gonnelli. *Análise da didatização do tema radiciação de corpo negro sob a luz da teoria antropológica do didático*. 2014. 136f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis.

NEVES Regina da Silva Pina; BACCARIN, Sandra Aparecida Oliveira; SILVA, Jhone Caldeira Silva. A formação geométrica de Licenciandos em Matemática: uma análise a partir da replicação de questões do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE). *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 34, p. 169-186, 2013.

NEVES, Késia Caroline Ramires.; BARROS, Rui Marcos de Oliveira. Diferentes olhares acerca da transposição didática. *Investigações em Ensino de Ciências*. v. 16, 2011.

NOGUEIRA, Lemerton Matos. Aprendizagem de Conceitos básicos de Probabilidade por Estudantes do 9º ano. *XVIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. 2014. Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife.

NOGUEIRA, Rosane Corsini Silva *A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica*. 2008. Dissertação. Mato Grosso do Sul.

OLIVEIRA, Joselba Liliane; ARRUDA, Aline Mendes de; SILVA, Fernando Carneiro da; CAMARGO, Joseli Almeida. Os conceitos de erro, obstáculo e contrato didático segundo Guy Brousseau. *III EIEMAT. Escola de Inverno de Educação Matemática. 1º Encontro Nacional PIBID-Matemática*. Ago, 2012.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? *Espaço pedagógico*. v. 20, n. 1, Passo Fundo, p. 88-104, jan./jun. 2013.

ORDEM, Jacinto. *Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique*. 2010. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PAIVA, Manoel R. *Matemática 2*. Pg. 189. Exerc. R.3. São Paulo: Moderna, 1995.

PANTOJA, Lígia Françoise Lemos; CAMPOS, Nadja Fonseca da Silva Cutrim.; SALCEDOS, Rocio Rubi Calla. A Teoria dos Registros de Representações Semióticas e o Estudo de Sistema de Equações Algébricas Lineares. *Comunicação Científica. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática*. Rio Grande do Sul: ULBRA, 2013.

PEDROSO, Hermes Antônio. *História da Matemática*. Notas de Aula. UNESP, 2009.

PEREIRA, José Carlos de Souza. *Análise praxeológica de conexões entre aritmética e álgebra no contexto do desenvolvimento profissional do professor de matemática*. 2012. 122 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém.

PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda. *Análise combinatória: organizações matemáticas e didáticas nos livros escolares brasileiros no período entre 1895-2009*. 2015. 145 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PIVATTO, Bruno; SCHUHMACHER, Elcio. Conceitos de teoria da aprendizagem significativa sob a ótica dos mapas conceituais a partir do ensino de Geometria. *REVEMAT*. Florianópolis (SC), v. 08, n. 2, p. 194-221, 2013.

POFFO, Eliane Maria. *A resolução de problemas como metodologia de ensino: uma análise a partir das contribuições de Vygotsky*. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/artigo_resolucao_problemas.pdf>. Acesso em 24 de fevereiro de 2017.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas – um novo aspecto do método matemático*. (Tradução e Adaptação de Araújo, H. L. Rio de Janeiro: Interciência, 1995).

POLYA, George. *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press, New Jersey, EUA: 1977

POMMER, Wagner Marcelo. Brousseau e a idéia de Situação Didática. *SEMA – Seminários de Ensino de Matemática/ FEUSP – 2º Semestre 2008* Coordenação: Profº Drº Nilson José Machado.

PONTE, João Pedro da. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132. Este artigo é uma versão revista e atualizada de um artigo anterior: Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18. (re-publicado com autorização).

PRODANOV, Cleber Cristiano. FREITAS, Ernani Cesar. *Metodologia do Trabalho Científico*. 2ª e. Universidade Feevale: Rio Grande do Sul, 2013.

PURE MATH 30. *Pathway problem: a problem involving the number of ways of going from one point to another*. Disponível em

<http://staff.argyll.epsb.ca/jreed/math30p/perms_combs/pathways.htm>. Acesso em 29 Fev. 2016.

RABAY, Yara Silva Freire. *Estudo e aplicações da geometria fractal*. 2013. 89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa.

RIBEIRO E SILVA, Débora Janaína. Abordagem CTS e ensino de matemática: um olhar sobre a formação inicial dos futuros docentes. *III Encontro Regional em Educação matemática do RN*. 2011, p. 2.

RICARDO, Elio; SLONGO, Ione; PIETROCOLA, Maurício. A perturbação do contrato didático e o gerenciamento dos paradoxos. *Investigações em Ensino de Ciências*, Porto Alegre, v. 8, n. 2, p. 153-163, agosto/2003.

ROBERT, Aline. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches em Didactique dès Mathématiques*. Vol. 18, n°2, pp. 139-190, 1998.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa; BORBA RUTE, Elizabete de Souza Rosa; Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diferentes olhares. *X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA*, 2010.

ROCHA, José de Arimatéa. *Investigando a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios em licenciandos em matemática*. 2006. 140 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

ROONEY, Anne. *A História da Matemática*. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

ROSADAS, Vitor Dutra Soares. *Triângulo de Pascal*. 2016. 70f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

ROSEN, Kenneth H. *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*. Sec. 2.3.2 Ex. 9. USA: CRC, 2000.

ROSSINI, Renata. *Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologias*. 2006. 384f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica. São Paulo.

SABO, Ricardo Dezso. *Análise de livros didáticos do ensino médio: um estudo dos conteúdos referentes à combinatória*. 2007. 54f. (Monografia). Curso de Especialização em Educação Matemática. Centro de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão do Centro Universitário Fundação Santo André.

SANTOS, Cíntia Ap Bento dos; CURI, Edda. Alguns aspectos de articulação entre as teorias da didática francesa e suas contribuições para formação de professores. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*. V 4.5, p.53-66, UFSC: 2009.

SANTOS, Marcelo Câmara; MENEZES, Marcus Bessa. A Teoria Antropológica do Didático: uma releitura sobre a teoria. *Perspectivas da Educação Matemática*, Cuiabá, v. 8, n. 18, p. 648 – 670, 2015.

SANTOS, Paulo Avelino dos. *A modelagem como proposta para a introdução à probabilidade por meio dos passeios aleatórios da Mônica*. 2010. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo

SANTOS, Rodrigo Medeiros dos. *Estado da arte e história em Educação Estatística em programas brasileiros de pós-graduação*. 2015. 348 f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação). Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. São Paulo.

SANTOS, Rogério César dos. Algum resultado da Mega-Sena já se repetiu? *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 89, 2015.

SANTOS, Rogério César dos. O problema do ponto mais visitado e a cadeia do viajante. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*. v. 8. Universidade Estadual Paulista. Bauru, dez, 2016a

SANTOS, Rogério César dos. Um estudo probabilístico sobre caminhos em reticulados quadrados. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*. v. 8. Universidade Estadual Paulista. Bauru. dez. 2016b

SANTOS, Rogério César dos. Um estudo sobre a chance de repetição na Mega-Sena. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*. Bauru, v. 3, 2014.

SANTOS, Rogério César dos; CASTILHO, José Eduardo. O problema do ponto mais visitado. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo. v. 82, p. 50, 2013.

SHOENFELD, Alan. H. Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, vol. 10, nos.1&2, p.19-34. USA: University of California, 2013.

SILVA, Elion Souza da. O problema dos diferentes caminhos. *Revista do Professor de Matemática*. v. 94. São Paulo, SBM: 2017.

SILVA, Erondina Barbosa da. *O diálogo entre diferentes sujeitos que aprendem e ensinam matemática no contexto escolar dos anos finais do ensino fundamental*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Brasília. Brasília. 2014.

SILVA, Francisca Jocineide da Costa e Silva; CARVALHO, Maria Eulina Pessoa de. O estado da arte das pesquisas educacionais sobre gênero infantil: uma introdução. 2014.

18º Redor: Perspectivas feministas de gênero: desafios no campo da militância e das práticas. Novembro. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife.

SILVA, Júlio César da. *Conhecimentos estatísticos e os exames oficiais: SAEB, ENEM E SARESP.* 2007. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, Luis Carlos. *A prática de ensino de física no ensino médio e o conceito de proporcionalidade: conexão fundamental na construção e (re)construção de conhecimentos.* 2009. 108f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará. Belém.

SILVA, Márcio Rebouças. *Números binomiais: uma abordagem combinatória para o ensino médio.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2015.

SILVA, Salatiel Dias da. *Estudo do binômio de Newton,* 2013, 60f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa.

SINGH, Simon. *O Último Teorema de Fermat.* Rio de Janeiro: Record, 2000.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. *Bolema.* n. 14. p. 66-91. 2000.

SOUSA, Ariana Bezerra. *A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática.* Disponível em <<https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf>>. Acesso em 24 de fevereiro de 2017.

SOUZA, Cibele de Almeida. *A distribuição binomial no ensino superior.* 2002. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

SOUZA, Dorgival Fidellis de. *Modelos binomiais: caracterização e aplicações.* 2014. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás. Goiânia.

STERNBERG, Robert. J. *Psicologia Cognitiva.* Porto Alegre: Editora Artmed, 2008.

STRIEDER, Roseline Beatriz. *Abordagens CTS na educação científica no Brasil: sentidos e perspectivas.* Tese de Doutorado. São Paulo, Universidade de São Paulo: 2012.

SUKOW, José Augusto. *Relato de uma experiência: resolução de problemas e modelagem matemática no ensino médio.* Disponível em <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1662-8.pdf>>. Acesso em 24 de fevereiro de 2017.

TAVARES, Cláudia.; BRITO, Frederico R. M. de. Contando a História da Contagem. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo n. 57. SBM. 2005.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. Jogo de quadros na perspectiva de Régine Douady. *REVEMAT*. Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 145-165, 2014.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Cláudio César Manso. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. *Zetetiké – FE/Unicamp – v. 21, n. 39 – jan/jun 2013*.

TENREIRO-VIEIRA, Celina; VIEIRA, Rui Marques. Educação em Ciências e em Matemática Numa Perspectiva de Literacia: desenvolvimento de materiais didáticos com orientação CTS/ pensamento crítico (PC). *CTS e educação científica – desafios, tendências e resultados de pesquisa*. Brasília: Editora Unb, 2011, p. 423.

TIECHER, Ricardo Fernando Paes; CASADO, Lorenzo Justiniano Díaz. *Passeios Aleatórios e circuitos elétricos*.

VALDÉS, Eloy Artega. Competencias Básicas: El desarrollo de la creatividad en la Educación Matemática. *Congreso Iberoamericano de Educación*. Buenos Aires, 2010.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Considerações sobre a Matemática escolar numa abordagem histórica. *Cadernos da História da Educação*, n. 3, 2004.

VARELLA, Márcia. *Prova e demonstração na geometria analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos*. 2010. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

VERAS, Claudio Monteiro. *A estatística nas séries iniciais: uma experiência de formação com um grupo colaborativo com professores polivalentes*. 2010. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

VIALI, Lorí. Algumas Considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. *Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 8, n. 16 (outubro/2008 -março/2009) - pág.143-153*.

VOGT, Carlos. *A espiral da cultura científica*. Com Ciência, 2003.

YAMAUTI, Marcelo Massahiti. *Regressão linear simples nos livros de estatística para cursos de Administração: um estudo didático*. 2013. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

APÊNDICE I – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

O seguinte termo foi entregue e assinado por todos os participantes da pesquisa:

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

“Atividade para pesquisa de campo na área de ensino de análise combinatória e probabilidade no nível superior”

Prezada(o) Senhora(or),

Gostaríamos de convidá-lo(a) a participar da pesquisa intitulada por **“O problema do ponto mais visitado: um estudo de caso com estudantes da educação superior”**, realizada pelo Programa de Pós-graduação da Faculdade Educação da Universidade de Brasília – PPGE/FE/UnB.

O objetivo da pesquisa é analisar as produções dos alunos na resolução de um problema de análise combinatória, a saber, o *problema do ponto mais visitado*.

Sua participação é voluntária.

As informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com sigilo, de modo a preservar a sua identidade.

Por benefício, espera-se que os participantes, após as atividades, sejam levados a aprofundar seus conhecimentos de análise combinatória e probabilidade, dentro da disciplina de Estatística da FUP.

O pesquisador se coloca à disposição para demais esclarecimentos.

Brasília, ____ de _____ de 2017.

Pesquisadores Responsáveis:

Prof. Rogério César dos Santos

Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo

Eu _____, tendo sido devidamente esclarecido(a) sobre os procedimentos da pesquisa, e tendo recebido todas as informações que julguei necessárias do(a) pesquisador(a) responsável, concordo em participar **voluntariamente** da pesquisa descrita acima.

Assinatura: _____

Data: _____

APÊNDICE II – Questionário para caracterização dos estudantes

O seguinte questionário foi aplicado, para que se pudesse caracterizar os participantes da pesquisa:

Pesquisa – O problema do ponto mais visitado
Doutorando: Rogério César dos Santos

CARACTERIZAÇÃO DOS ESTUDANTES PARTICIPANTES DA PESQUISA

1. EM QUE TIPO DE ESCOLA VOCÊ CURSOU O ENSINO MÉDIO?

- () Maior parte em escola particular
() Maior parte em escola pública

2. SEU CURSO NA UNB: _____

3. SEMESTRE QUE ENTROU NA UNB: _____

4. TURNO DO SEU CURSO:

- () Noturno
() Diurno

5. VOCÊ JÁ REPETIU A DISCIPLINA DE ESTATÍSTICA?

- () Nunca
() Sim, 1 vez
() Sim, 2 vezes ou mais

6. NA DISCIPLINA DE ESTATÍSTICA:

- () Sou bastante dedicado
() Me dedico um pouco
() Não estudo em casa

7. SOBRE O PROFESSOR DE ESTATÍSTICA:

- () É bastante dedicado
() Se dedica pouco
() Não se interessa pelo aprendizado dos alunos

8. QUE TIPO(S) DE APOIO VOCÊ ACHA QUE PRECISA PARA OS SEUS ESTUDOS:

	SIM	NÃO
Reforço oferecido pela universidade (monitoria, por exemplo)		

Professor particular		
Atendimento do professor extraclasse		
Outro tipo de reforço escolar		

9. DE QUEM FOI A DECISÃO PARA VOCÊ ESTAR NA UNB?

- () De seus pais ou responsáveis
 () De você mesmo
 () De seus responsáveis junto com você
 () Orientação educacional no ensino médio
 () Outros

10. ATÉ QUE SÉRIE SUA MÃE/MADRASTA ESTUDOU?

11. ATÉ QUE SÉRIE SEU PAI/PADRASTO ESTUDOU?

12. SEU GÊNERO:

- () masculino
 () feminino

13. IDADE: _____

14. CIDADE ONDE MORA: _____ -

APÊNDICE III – Registros digitalizados das atividades realizadas pelos alunos, referentes ao último dia de aplicação

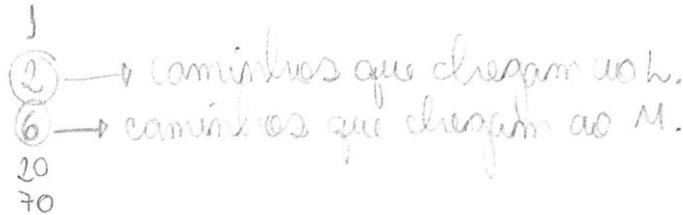
Respostas dos alunos às primeiras duas questões do último dia.

Aluno a)

1- No quadrado 3 por 3, apenas nos pontos da diagonal secundária, determine quantos caminhos *chegam* até cada ponto da diagonal.

$$\begin{aligned} \text{Até } L &= 2 \\ \text{Até } M &= 6 \end{aligned}$$

2- Identifique estes valores na coluna central do Triângulo de Pascal

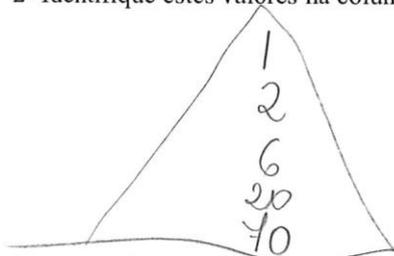


Aluno b)

1- No quadrado 3 por 3, apenas nos pontos da diagonal secundária, determine quantos caminhos *chegam* até cada ponto da diagonal.

$$\begin{aligned} \text{Até } L &= 2 \\ \text{Até } m &= 6 \end{aligned}$$

2- Identifique estes valores na coluna central do Triângulo de Pascal

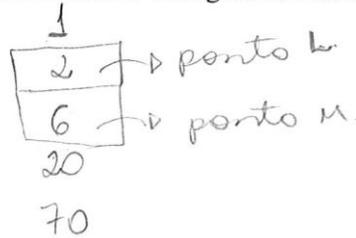


Aluno c)

1- No quadrado 3 por 3, apenas nos pontos da diagonal secundária, determine quantos caminhos *chegam* até cada ponto da diagonal.

2 | 6

2- Identifique estes valores na coluna central do Triângulo de Pascal

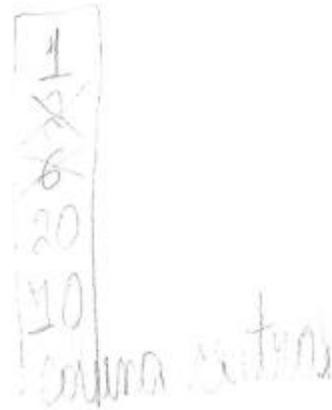


Aluno d)

1- No quadrado 3 por 3, apenas nos pontos da diagonal secundária, determine quantos caminhos *chegam* até cada ponto da diagonal.

$A \rightarrow B = 2$
 $A \rightarrow M = 6$

2- Identifique estes valores na coluna central do Triângulo de Pascal

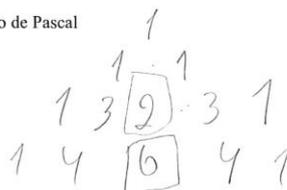


Aluno e)

1- No quadrado 3 por 3, apenas nos pontos da diagonal secundária, determine quantos caminhos *chegam* até cada ponto da diagonal.

$A \rightarrow L = 2$
 $A \rightarrow M = 6$

2- Identifique estes valores na coluna central do Triângulo de Pascal



Aluno f)

1- No quadrado 3 por 3, apenas nos pontos da diagonal secundária, determine quantos caminhos *chegam* até cada ponto da diagonal.

De A até L = 2 caminhos

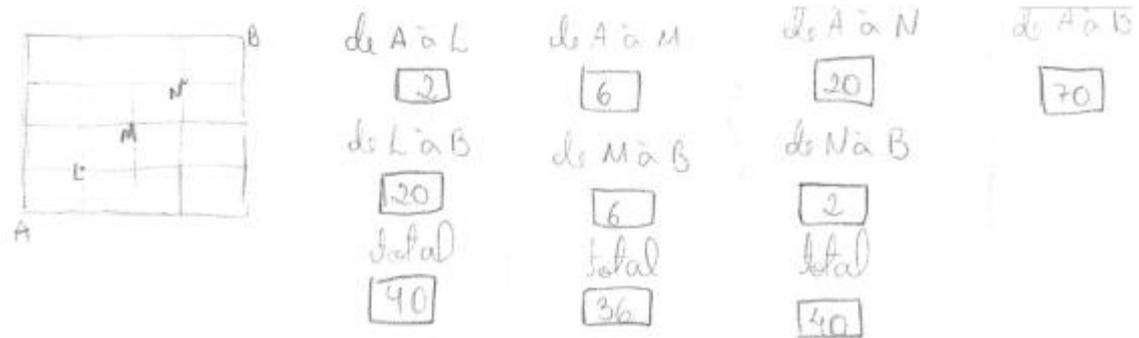
De A até M = 6 caminhos

2- Identifique estes valores na coluna central do Triângulo de Pascal

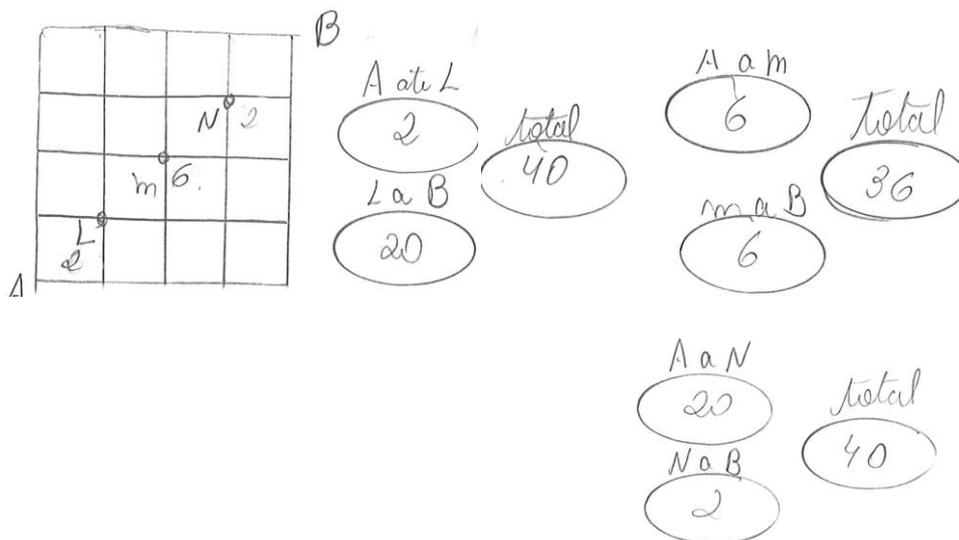
1
2
6
20
70

Respostas dos alunos à terceira e penúltima questão do último dia: - No quadrado 4 por 4, apenas nos pontos da diagonal secundária, determine quantos caminhos passam por cada ponto da diagonal e chegam ao ponto final (4,4).

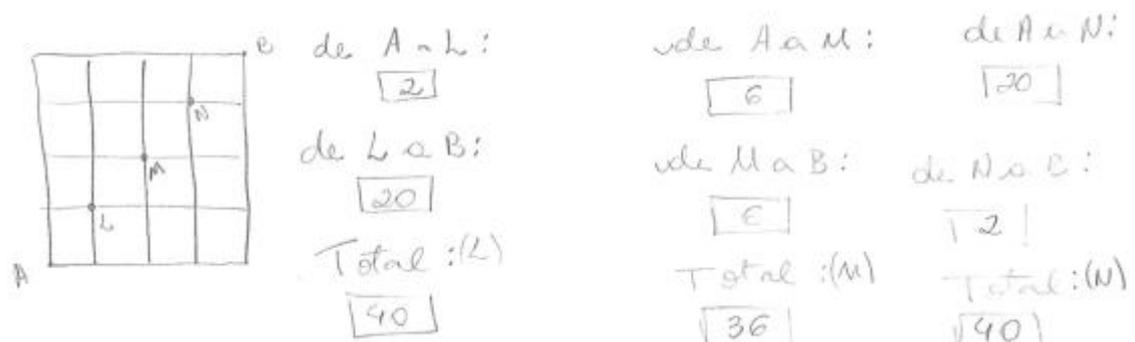
Aluno a)



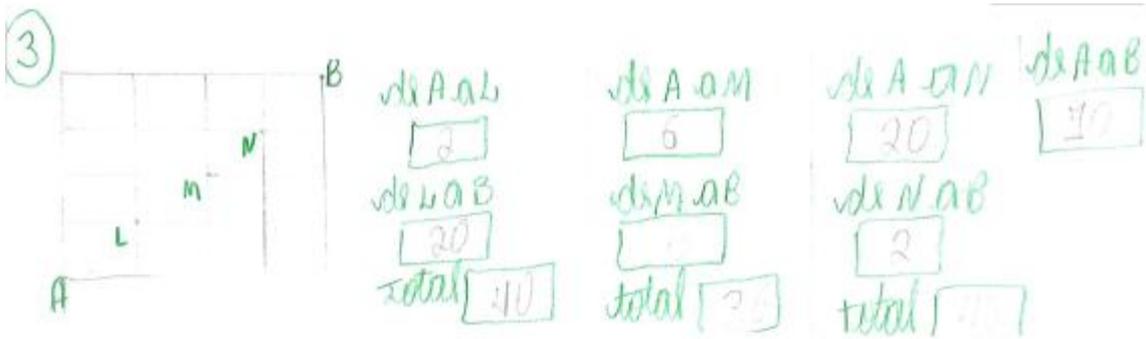
Aluno b)



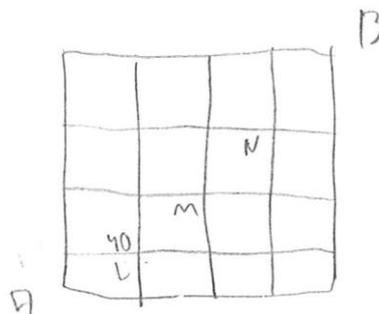
Aluno c)



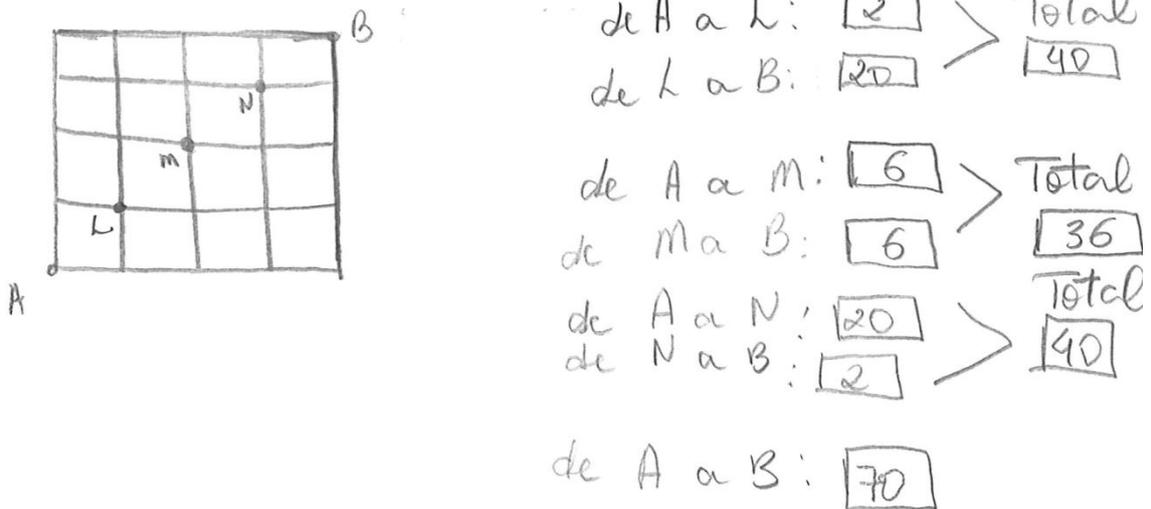
Aluno d)



Aluno e)

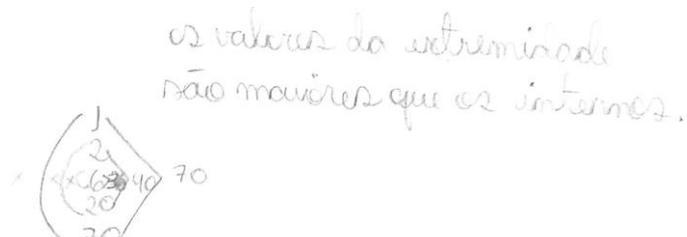


Aluno f)



Respostas dos alunos à quarta e última questão do último dia: -Sabendo que L é o ponto mais visitado, como você associa os resultados e as operações anteriores ao Triângulo de Pascal (coluna central)?

Aluno a)



Aluno b)

R. Os pontos centrais do quadrado são a coluna central do triângulo e somando os fatores dele se o valor resultante correto. / multiplicando os números. Se o valor, as extremidades

no triângulo são maiores, fazemos quadrados as extremidades são menores e quando chega ao centro vai aumentando.

Aluno c)

De acordo com os cálculos, analisando com o triângulo de Pascal, foi possível verificar que os valores centrais são menores que os valores que se encontram nas extremidades.

Aluno d) – Digitalização ilegível:

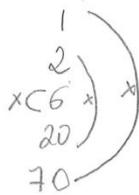
Sabendo que $10 > 40 > 20$, e que nas extremidades da coluna central os resultados são maiores que os valores centrais.

Aluno e)

O eixo central os números, assim ele tem a proporção de 16
igual a 16, logo, do ponto A até B no quadrado de 16,
ou em outros quadrados.

Aluno f)

Os pontos mais extremos do quadrado 4×4
possuem mais caminhos do que os pontos internos



$$1 \times 70 = 70 \text{ (caminhos de A a B)}$$

$$2 \times 20 = 40 \text{ (caminhos de A a L e L a B)}$$

$$6 \times 6 = 36 \text{ (de A a M e de M a B)}$$

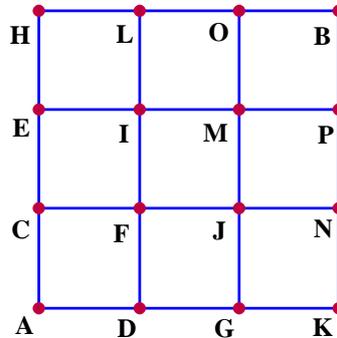
APÊNDICE IV – Uma proposta de aplicação do problema do ponto mais visitado no Ensino Básico

Tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio está previsto o ensino das noções básicas da análise combinatória, em particular do Princípio Fundamental da Contagem – PFC, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998). Por este motivo, a seguir está apresentada uma sugestão de atividade que adapta o problema do ponto mais visitado à Educação Básica, em forma de jogo. A proposta pode ser útil também como futuro campo para pesquisa em Educação Matemática.

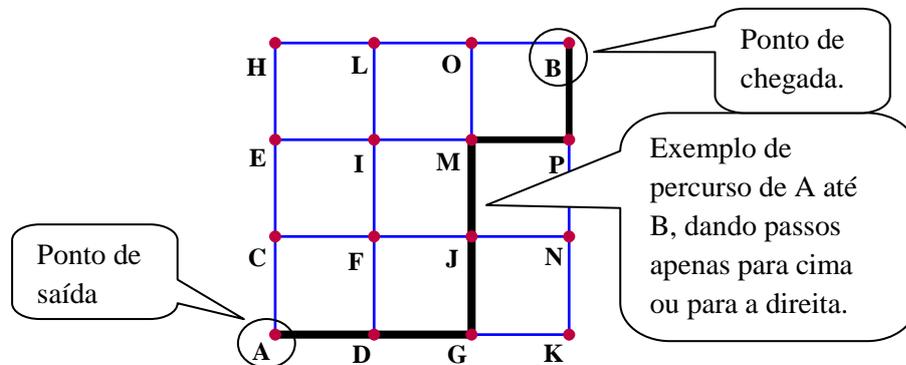
O JOGO DOS PERCURSOS

Primeira parte: compreensão de como se faz um percurso de A até B

Observe o quadrado abaixo e seus 16 pontos.

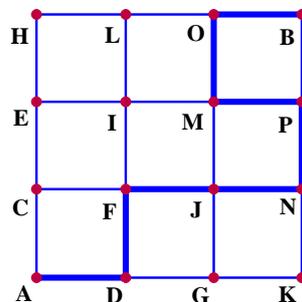


Neste jogo, um percurso pode seguir apenas para a direita ou para cima, de A até B, exemplo:



1- Complete a seguinte frase: o percurso em destaque na figura acima passa pelos pontos A, D, G, J, M, _____ e B.

2- Lembrando que **só é permitido ir para cima ou para a direita e de A até B**, o percurso ADFJNPMOB, abaixo desenhado é permitido? Resposta: _____.



3- Lembrando que **só é permitido ir para cima ou para a direita e de A até a B**, existem quantos percursos passando pelo ponto K? Resp: _____.

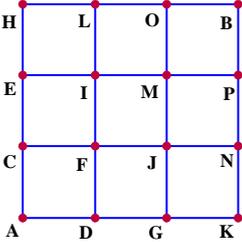
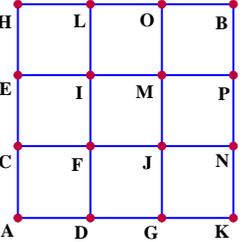
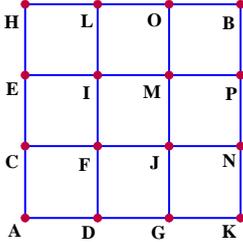
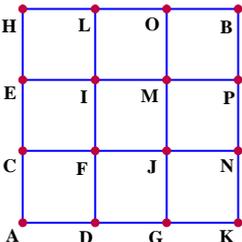
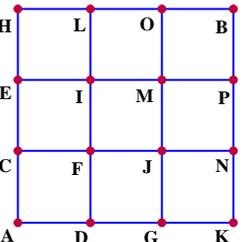
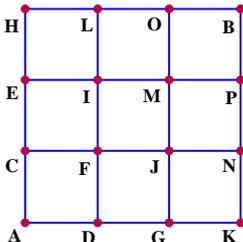
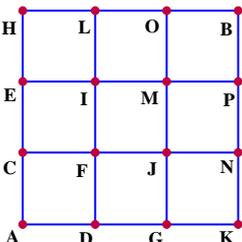
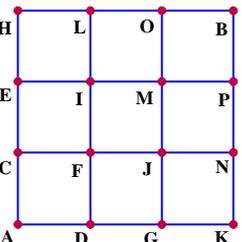
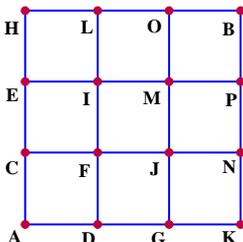
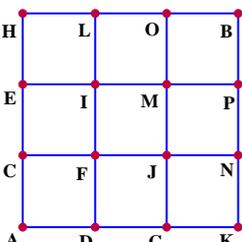
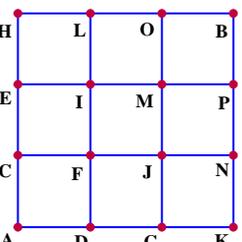
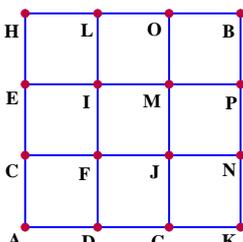
4- Existem mais percursos passando por K ou mais percursos passando pelo ponto J? Resp: _____.

AGORA SIM, VAMOS AO JOGO

As regras do jogo são:

- a) Em cada rodada, a dupla escolhe de comum acordo um ponto do quadrado, exceto os pontos A e B.
- b) A dupla usa as **bolas coloridas para sortear** um percurso saindo de A e chegando em B.
Bola azul = passo para cima. Bola branca = passo para a direita.
- c) Se o percurso passar pelo ponto escolhido, a dupla marca um ponto. Caso contrário, zero.

Valendo! (desenhe o percurso nas figuras)

<p align="center">Percurso 1</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>	<p align="center">Percurso 2</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>	<p align="center">Percurso 3</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>
<p align="center">Percurso 4</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>	<p align="center">Percurso 5</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>	<p align="center">Percurso 6</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>
<p align="center">Percurso 7</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>	<p align="center">Percurso 8</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>	<p align="center">Percurso 9</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>
<p align="center">Percurso 10</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>	<p align="center">Percurso 11</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>	<p align="center">Percurso 12</p>  <p>Ponto escolhido: _____ Pontuação (1 ou 0): _____</p>

PONTUAÇÃO FINAL DA DUPLA: _____.

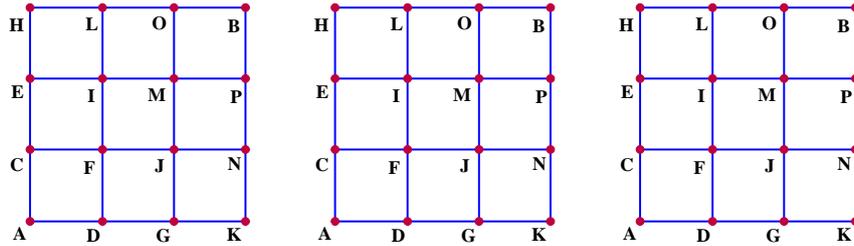
EXPLORANDO A MATEMÁTICA DO JOGO DOS PERCURSOS

1- Dos 12 percursos sorteados pela sua dupla, quantos passaram pelo ponto:

C? ___	D? ___	E? ___	F? ___	G? ___	H? ___	I? ___
J? ___	K? ___	L? ___	M? ___	N? ___	O? ___	P? ___

2- Por qual ponto passaram mais percursos? _____.

3- Quantos percursos possíveis de A até B existem, ao todo, indo apenas para cima ou para a direita? Use as figuras abaixo para te a ajudar a contar, se quiser.



4- De todos os percursos possíveis de A até B, indo apenas para cima ou para a direita, quantos passam pelo ponto:

C? ___ 	D? ___ 	E? ___ 	F? ___
G? ___ 	H? ___ 	I? ___ 	J? ___
K? ___ 	L? ___ 	M? ___ 	N? ___
O? ___ 	P? ___ 		

5- Neste jogo, qual seria o melhor ponto a se escolher, para conseguir a vitória?