UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Comprimento Não Solúvel de Grupos Finitos

Por

YERKO CONTRERAS ROJAS

BRASÍLIA, DF
2017

Comprimento Não Solúvel de Grupos Finitos

Por

YERKO CONTRERAS ROJAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Álgebra.
Orientador: Prof. Dr. Pavel Shumyatsky

BRASÍLIA, DF
2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Contreras Rojas, Yerko
CY47c Comprimento Não Solúvel de Grupos Finitos / Yerko
Contreras Rojas; orientador Pavel Shumyatsky. -- Brasília,
2017.
63 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2017.

1. Grupos finitos. 2. Variedades de grupos. 3. Grupos p
solúveis. 4. Comprimento não solúvel. 5. Comprimento não-p
solúvel. I. Shumyatsky, Pavel, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Comprimento não Solúvel de Grupos Finitos

por

Yerko Contreras Rojas

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 21 de setembro de 2017.

Comissão Examinadora:

____

Prof. Dr. Pavel Shumyatsky – Orientador (MAT-UnB)

Emerson Ferreira de Melo
____

Prof. Dr. Emerson Ferreira de Melo (MAT-UnB)

____

Prof. Dr. Norai Romeu Rocco (MAT-UnB)

____

Prof. Dr. Michael Dokuchaev (USP)

Jhone Caldeira Silva
____

Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva (UFG)

*O autor foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração deste trabalho.

A meus pais, Nubia Rojas e Carlos Contreras, e meus irmãos Paula e Andres.

”Deux mains c’est peu, peut-être, car le monde est infini.”
Alexander Grothendieck.

Agradecimentos

A minha familia e amigos, por ter sido meu principal estimulo.

Quiero agradecer particularmente a todos aquellos colegas que viveram de perto os momentos dificeis desta etapa e tiveram a paciencia de afrontar-os junto comigo.

Tenho também um agradecimento particular a meu orientador pela paciência e colaboração. E a os professores do departamento pelas ensenanzas impartidas.

Finalmente, a todas aquelas pessoas que de alguma forma colaboraram e alentaram na finalização deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio finaceiro.

Resumo

Todo grupo finito G tem uma série normal onde cada um dos seus fatores é solúvel ou produto direto de grupos simples não abelianos. O comprimento não-solúvel $\lambda(G)$ é definido em [19] como o número mínimo de fatores não solúveis em uma série deste tipo.

Seja p um primo. Analogamente, é definido o *comprimento não-p-solúvel* de um grupo finito, substituindo "solúvel" por "p-solúvel" e "simples" por "simples de ordem divisível por p" na definição de comprimento não-solúvel. Assim, o comprimento não-p-solúvel de G, denotado por $\lambda_p(G)$, é o número mínimo de fatores não-p-solúveis em uma série normal de G cujos fatores são p-solúveis ou o produto direto de grupos simples não abelianos de ordem divisível por p.

Trabalhamos com a seguinte questão: Dado um primo p e uma variedade própria de grupos $\mathfrak{V}$, é verdade que o comprimento não-p-solúvel $\lambda_p(G)$ de um grupo finito G cujos p-subgrupos de Sylow pertencem a $\mathfrak{V}$ é limitada em termos de p e $\mathfrak{V}$?

Neste trabalho, respondemos esta pergunta de maneira afirmativa em vários casos.

Palavras-Chave: Grupos finitos, Variedades de grupos, Grupos p-solúveis, Comprimento não-solúvel, Comprimento não-p-solúvel.

Abstract

Every finite group G has a normal series each of whose quotient either is soluble or is a direct product of nonabelian simple groups. In [19] the *nonsoluble length* of G, denoted by $\lambda(G)$, was defined as the minimal number of nonsoluble factors in a series of this kind.

For any prime p, a similar notion of non-p-soluble length $\lambda_p(G)$ was defined by replacing "soluble" by "p-soluble" and "simple" by "simple of order divisible by p".

We deal with the question whether, for a given prime p and a given proper group variety $\mathfrak{V}$, the non-p-soluble length $\lambda_p(G)$ of a finite group G whose Sylow p-subgroups belong to $\mathfrak{V}$ is bounded. In this work, we answer the question in the affirmative in several cases.

Keywords Finite groups, Groups Varieties, p-Soluble groups, Non-soluble length, Non-p-soluble length.

Sumário

Introdução **8**

1 Resultados Preliminares **13**
- 1.1 Alguns Comprimentos de Grupos 13
  - 1.1.1 Comutadores e Séries Normais 13
  - 1.1.2 Grupos Solúveis 15
  - 1.1.3 Comprimentos em Grupos 16
  - 1.1.4 Grupos p-Solúveis e o p-Comprimento 18
- 1.2 Problema Restrito de Burnside 20
- 1.3 Palavras de Grupo e Variedades 22
- 1.4 Produto Entrelaçado de Grupos 25

2 Comprimento Não-Solúvel e Não-p-Solúvel **27**
- 2.1 Definições e Resultados Introdutórios 27
- 2.2 Limitação do Comprimento Não-p-Solúvel 36
  - 2.2.1 Problema 36
  - 2.2.2 Algumas Soluções Positivas 36

3 Comprimento Não-p-Solúvel de Grupos com Comutadores de Ordem Pequena **39**
- 3.1 A Variedade $\mathfrak{W}(\delta_n, p^e)$ 39
- 3.2 A Variedade $\mathfrak{W}(\delta_1, 2^e)$ 44

4 Algumas Soluções Positivas para Produtos de Variedades **47**
- 4.1 A Variedade $\mathfrak{X}_s^k(n)$ 47
- 4.2 Prova dos Resultados Principais deste Capítulo 49

5 Condições de Engel e o Comprimento Não-p-Solúvel **54**
5.1 Limitação da Ordem de Elementos m-Engel 54
5.2 Limitando o Comprimento Não-p-Solúvel de Grupos Finitos Através de Condições de Engel nos Seus p-Subgrupos de Sylow 56
5.3 A Variedade $\mathfrak{X}(w,e,m)$ 57

Referências Bibliográficas **60**

Lista de Símbolos

1	Elemento trivial ou subgrupo trivial de um grupo G.
$H \leqslant G$	H é um subgrupo de G.
$G \cong H$	G é isomorfo a H.
$G_1 \times \cdots \times G_r$	Produto direto dos grupos $G_1, \ldots, G_r$.
$\|K\|$	Cardinalidade do conjunto K.
$\|g\|$	Ordem do elemento $g \in G$.
g^x	$x^{-1}gx$, se x, g pertencem a um grupo G.
h^{x+y}	$h^x \cdot h^y$, se x, y, h pertencem a um grupo G.
$C_G(H)$	Centralizador de H em G.
$\langle X \rangle$	Subgrupo gerado pelo subconjunto X.
$Aut(G)$	Grupo de automorfismos do grupo G.
$Z(G)$	Centro do grupo G.
$\langle g^G \rangle$	Fecho normal de $\{g\}$ em G.
$Sym(m)$	Grupo simétrico sobre um conjunto com m elementos.
$Syl_p(G)$	Conjunto dos p-subgrupos de Sylow de G.
C_p	Grupo cíclico com p elementos.
$[x, y]$	Comutador de x e y (pág. 13).
$[H, K]$	Comutador dos subconjuntos H e K (pág. 13).
G'	$[G, G]$, subgrupo derivado de G (pág. 14)
$G^{(i)}$	i-ésimo subgrupo derivado de G (pág. 14)
$\gamma_i(G)$	i-ésimo termo da série central inferior de G (pág. 15).
$Inn(G)$	Subgrupo de $Aut(G)$ composto de todos os automorfismos internos de G (pág. 16).
$Out(G)$	Grupo quociente de $Aut(G)$ por $Inn(G)$ (pág. 16).
$R(G)$	Radical solúvel de G (pág. 16).

$d(G)$	Comprimento derivado de um grupo solúvel G (pág. 17).
$h(G)$	Altura de Fitting de um grupo solúvel G (pág. 17).
$F(G)$	Subgrupo de Fitting do grupo G (pág. 18).
$F_i(G)$	i-ésimo termo da série de Fitting do grupo G (pág. 18).
$l_p(G)$	p-comprimento de um grupo finito p-solúvel G (pág. 19).
$R_p(G)$	Radical p-solúvel de G (pág. 19).
$exp(G)$	Expoente de um grupo G (pág.20).
G_w	Subconjunto dos w-valores em elementos de G (pág.23).
$w(G)$	Subgrupo verbal de G associado a w, onde w é uma palavra de grupo (pág.23).
$\mathfrak{B}_n$	Variedade dos grupos com expoente dividindo n. (pág. 23).
γ_k	Palavra comutador simples (pág.24).
δ_k	k-ésima palavra derivada (pág.24).
$\mathfrak{A}^k$	Variedade de todos os grupos solúveis com comprimento derivado menor ou igual a k (pág. 24).
$[x,_m y]$	m-ésima palavra de Engel (pág. 25).
$G \wr_r H$	Produto entrelaçado de G com H (pág. 25).
$\lambda(G)$	Comprimento não-solúvel de um grupo finito G (pág. 27).
$Soc(G)$	Socle de G (pág. 28).
$\lambda_p(G)$	Comprimento não-p-solúvel de um grupo finito G (pág. 28).
$K_p(G)$	p-kernel de G (pág. 34).
$K_{p,k}(G)$	k-ésimo p-kernel superior de G (pág. 34).
$L_p(G)$	Máximo p-comprimento dos subgrupos p-solúveis de G (pág. 36).
$\{n\}$-limitado	Valor limitado por uma função que depende exclusivamente de n (pág. 38)
$\mathfrak{W}(w,p^e)$	Variedade de todos os grupos nos quais todo w-valor tem ordem dividindo k (pág. 39).
$X_G(a)$	Conjunto de todos os $x \in G$ tal que o comutador $[x,a,a]$ tem ordem maximal (pág. 40).
$\mathfrak{X}(n)$	Variedade de todos os grupos satisfazendo a lei $[x,y]^n = 1$ (pág. 47).
$\mathfrak{X}(w,e,m)$	Variedade de todos os grupos cujos w^e-valores são m-Engel no grupo (pág. 57).

Introdução

Uma das áreas de pesquisa na teoria de grupos é o estudo de comprimentos de grupos finitos, o qual será também o objeto de estudo desta tese. Antes de abordar o comprimento com o qual trabalharemos, daremos uma breve motivação.

Vários conceitos relacionados com comprimentos de grupos finitos surgem com o estudo do Problema Restrito de Burside (PRB). O PRB pode ser enunciado como a seguinte pergunta:

É verdade que todo grupo finito m-gerado de expoente n tem ordem limitada por uma função dependendo de m e n exclusivamente?

Algumas formulações equivalentes para o PRB acompanhadas com um breve apanhado histórico serão apresentadas na Seção 1.2.

O PRB tem resposta afirmativa, e a prova da mesma foi dada por E. I. Zelmanov [35, 36] no final da década de 80. Um dos avanços mais significativos para a solução do PRB foi feito por P. Hall e G. Higman [13], trabalho publicado em 1956, onde os autores obtêm, entre outros importantes resultados, a redução do PRB para o caso em que n é uma potência de um número primo, pelo qual o PRB fica reduzido a grupos nilpotentes, tipo de grupos para os quais métodos de Lie podem ser aplicados.

A redução do PRB é dada obtendo limitações para o p-comprimento de um grupo finito p-solúvel G em termos da estrutura dos seus p-subgrupos de Sylow (algumas generalidades e a definição de p-comprimento serão apresentadas na Seção 1.1.4).

J. G. Thompson define em [32] (1964) a altura de Fitting, outro importante comprimento de grupos solúveis (este conceito será dado precisamente na Definição 1.1.6). Este comprimento de grupos finitos também tem uma estreita relação com o PRB, dado que limitações da altura de Fitting de grupos solúveis permitem reduzir problemas sobre grupos solúveis a problemas sobre grupos nilpotentes, garantindo a possibilidade de uso de ferramentas de álgebras de Lie. Relações da altura de Fitting com o PRB podem ser encontradas implicitamente em [13] e mais explicitamente em trabalhos mais recentes como [29].

O trabalho de P. Hall e G. Higman evidencia como propriedades de subgrupos dados geram uma influência na estrutura do grupo todo.

O seguinte resultado de [13] permite apreciar a técnica mencionada anteriormente.

Sejam G um grupo finito p-solúvel, P um p-subgrupo de Sylow de G com p um primo ímpar e $l_p(G)$ o p-comprimento de G. Seja $exp(P) = p^e$, denotamos por $e(P)$ o número e associado ao expoente de P e $d(P)$ o comprimento derivado do grupo P, então temos que

- $l_p(G) \leqslant d(P)$;
- $l_p(G) \leqslant 2e(P)$.

O caso em que $p = 2$ foi provado por E. G. Bryukhanova em [2] e [3], trabalhos publicados nos anos de 1979 e 1981, respectivamente.

Conhecidos estes resultados, surge um interesse por saber se outras propriedades nos p-subgrupos de Sylow de um grupo G implicam em limitações do p-comprimento do grupo G e se enuncia o seguinte problema, conhecido na literatura como o Problema de Wilson [24].

Dados um número primo p e uma variedade própria de grupos $\mathfrak{W}$, existe uma limitação para o p-comprimento de grupos finitos p-solúveis cujos p-subgrupos de Sylow pertencem a $\mathfrak{W}$?

Não foram encontradas muitas soluções positivas para o Problema de Wilson. Entretanto, problemas deste gênero podem ser enunciados para outras propriedades estruturais de grupos finitos, como limitações de outros comprimentos.

Discutiremos agora um novo conceito de comprimento, motivando o porquê de sua definição, para depois enunciar um problema (devido a E. I. Khukhro e P. Shumyatsky) análogo ao problema de Wilson, com respeito a este novo comprimento.

Muito usualmente, dadas condições sobre grupos solúveis, é possível limitar o comprimento p-solúvel ou a altura de Fitting de grupos solúveis que satisfazem ditas condições. Com isso, problemas sobre grupos solúveis podem ser reduzidos a problemas sobre grupos nilpotentes e, com esta redução, abre-se a porta ao uso de métodos de Lie, como já mencionado anteriormente.

Agora, dado um problema sobre grupos finitos arbitrários, torna-se útil o conceito de comprimento não-solúvel para reduzir o problema a uma parte solúvel e a outra parte não-solúvel. Para a primeira, novas restrições como as já mencionadas para o caso solúvel podem ser feitas, e para a segunda, o uso da classificação de grupos simples é a ferramenta fundamental. Isso evidencia a importância do conceito de comprimento não-solúvel.

Todo grupo finito G possui uma série normal onde cada um dos seus fatores é solúvel ou produto direto de grupos simples não-abelianos. O menor número de fatores não-solúveis de uma série do tipo define o *comprimento não-solúvel* de G, denotado por $\lambda(G)$. Esta definição foi dada por E. I. Khukhro e P. Shumyatsky em [19], mas o uso implícito deste comprimento data dos trabalhos de P. Hall e G. Higman na redução do PRB.

Para todo grupo finito G, temos uma noção similar, o *comprimento não-p-solúvel*, o qual é obtido substituindo a palavra solúvel por p-solúvel na definição de comprimento não-solúvel. De fato, o comprimento não-solúvel e o comprimento não-2-solúvel coincidem pelo Teorema de Feit-Thompson (esta afirmação será aprofundada na Seção 1.1.4).

Depois de apresentar esta definição, E. I. Khukhro e P. Shumyatsky relacionam o comprimento não-solúvel com o p-comprimento e a altura de Fitting (ver Teorema 2.2.2 e Corolário 2.2.3).

No presente trabalho, nosso objetivo principal é apresentar que implicações a estrutura dos p-subgrupos de Sylow de um grupo G impõe ao comprimento não-p-solúvel de G. Este interesse tem sido claramente motivado pelo seguinte problema enunciado em [19]:

Problema 2.2.1 *Dados um número primo p e uma variedade própria de grupos $\mathfrak{W}$, existe uma limitação para o comprimento não-p-solúvel λ_p de grupos finitos cujos p-subgrupos de Sylow pertencem a $\mathfrak{W}$?*

E. I. Khukhro e P. Shumyatsky (em [19]) respondem esta pergunta de maneira afirmativa para várias variedades de grupos (ver Teorema 2.2.2 e Teorema 2.2.5).

Provamos, no desenvolvimento desta tese, resultados que proporcionam soluções positivas ao Problema 2.2.1. Com o propósito de atingir o objetivo principal deste trabalho, dividimos este em capítulos.

No primeiro capítulo, apresentamos alguns resultados básicos de teoria de grupos. Abordaremos, por exemplo, propriedades de comutadores, grupos solúveis e p-solúveis, grupos nilpotentes e os comprimentos associados a algumas classes de grupos. Além disso, faremos uma breve dissertação com respeito ao Problema Restrito de Burnside e alguns conceitos relativos a variedades de grupos, importantes para o bom entendimento deste trabalho.

No segundo capítulo, damos as definições de comprimento não-solúvel e não-p-solúvel, objeto de estudo desta tese, provando alguns resultados básicos deste comprimento. Apresentamos também os primeiros resultados que expõem a influência dos p-subgrupos de Sylow de um grupo finito G no comprimento não-solúvel de G.

Já no terceiro capítulo, falamos de variedades específicas de grupos, as quais são definidas através de limitações na ordem dos comutadores de grupos pertencentes às mesmas. Tratamos aqui do comprimento não-p-solúvel em geral, fazendo uma distinção considerável entre os casos onde o primo p é par ou ímpar. Apresentaremos também a demonstração do seguinte teorema publicado em [4].

Teorema 3.1.1 *Sejam G um grupo finito e p um número primo ímpar. Se P é um p-subgrupo de Sylow de G tal que todo δ_n-valor em elementos de P tem ordem dividindo p^e, então $\lambda_p(G)$ é $\{e, n\}$-limitado.*

No teorema acima um δ_n-valor em elementos de H é um elemento $d \in H$ tal que $d = \delta_n(g_1, \ldots, g_{2^n})$ onde $g_1, \ldots, g_{2^n} \in H$ e δ_n é a n-ésima palavra derivada definida recursivamente como

$$\delta_0 = x_1, \qquad \delta_n = [\delta_{n-1}(x_1, \ldots, x_{2^{n-1}}), \delta_{n-1}(x_{2^{n-1}+1}, \ldots, x_{2^n})].$$

No quarto capítulo, definindo a variedade de grupos $\mathfrak{X}(n)$ como a variedade de todos os grupos satisfazendo a lei $[x, y]^n = 1$, onde n é um número inteiro positivo, e denotando por $\mathfrak{X}^k(n)$ o produto de k variedades $\mathfrak{X}(n)$, obtemos o seguinte teorema (publicado em [5]).

Teorema 4.1.1 *Seja p um número primo. O comprimento não-p-solúvel $\lambda_p(G)$ de um grupo finito G cujos p-subgrupos de Sylow pertencem a $\mathfrak{X}^k(n)$ é $\{k, n\}$-limitado.*

Uma generalização para o caso ímpar é obtida ao definir a variedade $\mathfrak{X}_s(n)$ constituída por todos os grupos satisfazendo a equação $\delta_s^n = 1$, onde δ_s é a palavra derivada, e denotamos por $\mathfrak{X}_s^k(n)$ o produto de k variedades $\mathfrak{X}_s(n)$. Com esta nova definição, provamos o resultado a seguir (publicado em [5]).

Teorema 4.1.2 *Seja p um número primo ímpar. O comprimento não-p-solúvel $\lambda_p(G)$ de grupos finitos G cujos p-subgrupos de Sylow pertencem a $\mathfrak{X}_s^k(n)$ é $\{k, n, s\}$-limitado.*

Os últimos resultados desta tese serão apresentados no quinto capítulo. Tais resultados mostram como condições de Engel impostas nos p-subgrupos de Sylow de um grupo finito garantem a limitação do comprimento não-p-solúvel do grupo. Além disso, mostra-se como estas condições podem ser combinadas com condições de expoente nos comutadores, permitindo-nos a obtenção do teorema enunciado a seguir.

Teorema5.2.1 *Seja G um grupo finito e P um p-subgrupo de Sylow de G tal que P é m-Engel, então $\lambda_p(G) \leqslant 2e + 2$ onde e é o maior inteiro tal que $p^e \leqslant m$.*

Concluiremos essa tese relacionando o teorema acima com os outros teoremas obtidos neste trabalho.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Nesse capítulo, apresentamos algumas notações, definições e alguns resultados concernentes à teoria de grupos. A maioria dos resultados expostos neste capítulo são bem conhecidos, motivo pelo qual muitas das suas provas serão omitidas.

1.1 Alguns Comprimentos de Grupos

Na presente seção, dissertaremos sobre alguns dos objetos mais importantes deste trabalho, os quais, mesmo com uma forma básica, dão sentido e bases para os conceitos envolvidos em nossa pesquisa. Começaremos com o conceito de comutador e propriedades básicas deste. Continuaremos definindo o conceito de série normal, expondo como exemplos deste conceito algumas séries muito conhecidas na teoria de grupos para, com estes exemplos, definir algumas bem conhecidas classes de grupos e algumas medidas (ou comprimentos) associadas aos mesmos.

1.1.1 Comutadores e Séries Normais

A seguir, introduzimos o conceito de comutador, não só com o propósito de dar uma boa introdução a algumas classes de grupos (como os grupos solúveis ou nilpotentes), mas também para introduzir algumas propriedades importantes dos mesmos.

Dados dois elementos x, y de um grupo G, denotaremos por $[x, y]$ o comutador de x e y, dado por $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. De forma análoga, dados H e K subconjuntos de G, denotaremos por $[H, K]$ o subgrupo gerado pelos elementos da forma $[h, k]$ com $h \in H$

e $k \in K$, conhecido como o subgrupo comutador de H e K.

Exibiremos agora algumas propriedades elementares de comutadores:

Lema 1.1.1. *Sejam x, y, z, t elementos de um grupo G. Então*

1. $[x,y] = 1$ *se, e somente se,* $xy = yx$;
2. $[x,y]^{-1} = [y,x]$;
3. $[x,y]^z = [x^z, y^z]$;
4. $[xy,z] = [x,z]^y[y,z] = [x,z][[x,z],y][y,z]$;
5. $[x,yz] = [x,z][x,y]^z = [x,z][x,y][[x,y],z]$;
6. $[x,y]z = z[x^z, y^z]$;
7. $[x^y,z] = [x,z]^{[x,y]}[x,y,z]$;
8. $[x^{y^z},t] = [x^y,t]^{[x^y,z]}[x^y,z,t]$;
9. $[x,y,z] = [x,y]^{-1}[x,y]^z$.

A prova do lema acima pode ser encontrada em vários resultados expostos em [27], mas decorre diretamente da definição de comutador.

A definição de comutador e as propriedades verificadas pelos mesmos nos permitem definir vários subgrupos muito conhecidos na teoria básica de grupos. É o caso dos subgrupos derivados, definidos indutivamente da seguinte maneira:

$$G^{(0)} = G \quad G^{(1)} = G' = [G,G] \quad \text{e} \quad G^{(n)} = (G^{(n-1)})' = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]. \tag{1.1}$$

Chamamos $G^{(i)}$ de i-ésimo subgrupo derivado de G. Tal construção gera uma cadeia de subgrupos $G \geqslant G' \geqslant G^{(2)} \geqslant \cdots$. Esta série de subgrupos é chamada de *série derivada* e tem a propriedade que todo elemento dela é normal no grupo G, mas isso não é uma particularidade desta série. Uma série $1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G$ de subgrupos de G, com a condição de que G_i seja normal G, para todo $i = 0, \cdots, n-1$, é chamada uma *série normal* de G e os grupos quocientes G_i/G_{i-1} são chamados os *fatores* da série.

Algumas séries são classificadas pela natureza dos seus fatores, dedicaremos o que resta desta seção para ilustrar alguns importantes exemplos.

1.1.2 Grupos Solúveis

O primeiro exemplo é o de séries normais finitas com fatores abelianos. Se um grupo G possui uma série de subgrupos com estas características, o grupo é chamado de *grupo solúvel*. Uma série normal de subgrupos que sempre resulta ter fatores abelianos é a série derivada, definida em (1.1). Esta série existe para qualquer grupo G, logo a condição determinante com respeito à solubilidade do grupo G é o fato de que a série seja finita. Em outras palavras, podemos garantir que G é solúvel se existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $G^{(n)} = 1$. Além disso, a condição de finitude da série derivada tem a propriedade particular que resulta ser não só uma condição suficiente para a solubilidade do grupo, mas é também uma condição necessária, motivo pelo qual a série derivada define também o conceito de grupo solúvel (para uma prova deste fato, o leitor pode remeter-se a [27]). O comprimento da série derivada recebe um nome específico, pelas suas propriedades, pelo qual será abordado separadamente na seguinte seção. Uma outra série normal que pode ser definida para todo grupo G é a série central inferior, definimos os termos desta série indutivamente da seguinte maneira:

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_2(G) = G' \quad \text{e} \quad \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]. \tag{1.2}$$

Todos os fatores desta série são abelianos e a finitude desta série é uma condição suficiente para a solubilidade, mas não necessária. No entanto, esta série junto com a condição de finitude sobre a mesma define uma nova e muito importante classe de grupos, como veremos em breve.

Agora, centraremos a nossa atenção em expor alguns resultados que nos permitem identificar grupos finitos solúveis. As ferramentas aqui mencionadas são essenciais no desenvolvimento deste trabalho e estarão acompanhadas por algumas definições.

Para começar, enunciamos aqui o famoso teorema de Feit-Thompson.

Teorema 1.1.2 (Feit-Thompson)**.** *Todo grupo finito de ordem ímpar é solúvel.*

A prova do resultado acima pode ser encontrada em [8]. Este teorema nos ajuda a compreender melhor a natureza dos grupos não-solúveis.

Outra técnica bastante usada na teoria de grupos para identificar se um grupo pertence a uma classe dada de grupos é o estudo de automorfismos e sua influência na estrutura do grupo. É segundo esta linha de pensamento que apresentamos a próxima definição, a qual nos permitirá entender o enunciado da Conjectura de Schreier, conjectura que, por sua vez, é verificada usando a classificação de grupos finitos simples. Usando este resultado e fazendo uso de alguns argumentos de isomorfismos de grupo, conseguiremos identificar alguns grupos solúveis.

Definição 1.1.3. *Seja G um grupo. O grupo de automorfismos externos de G é o grupo quociente $Aut(G)/Inn(G)$, denotado aqui por $Out(G)$, onde $Aut(G)$ denota o grupo de automorfismos de G, e $Inn(G)$ denota o subgrupo de $Aut(G)$ dos automorfismos internos de G.*

Lembramos que um grupo G é dito simples quando não possui subgrupos normais próprios.

Conjectura de Schreier. *(verificada pela classificação) O grupo de automorfismos externos de um grupo simples finito é solúvel.*

Para terminar com este breve apanhado sobre grupos solúveis, definiremos o seguinte subgrupo.

Definição 1.1.4. *Seja G um grupo finito, o radical solúvel do grupo G é o maior subgrupo normal solúvel de G, e é denotado como $R(G)$.*

O estudo do radical solúvel de grupos finitos também tem ajudado na caracterização dos grupos solúveis (ver por exemplo [12]).

1.1.3 Comprimentos em Grupos

Para o segundo exemplo, lembraremos que uma série normal,

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G,$$

de subgrupos de G é chamada de *série central* se seus fatores são centrais, isto é, se $G_i/G_{i-1} \subseteq Z(G/G_{i-1})$. Se um grupo G possui uma série central finita, o grupo é chamado de *grupo nilpotente*. Como no caso da série derivada para grupos solúveis, a série central inferior sempre possui fatores centrais e a condição de finitude desta série é uma condição necessária e suficiente para a nilpotência de um grupo.

Os exemplos anteriores nos mostram como algumas classes de grupos estão fortemente relacionadas a certos tipos de séries normais definidas pelas propriedades nos seus fatores. Além disso, mostram-nos que existem séries particulares com ditas propriedades nos seus fatores que junto com condições de finitude caracterizam e definem estas classes de grupos.

Ilustraremos brevemente esta afirmação usando alguns exemplos da seção anterior. A classe dos grupos solúveis pode ser definida a partir de séries finitas com fatores abelianos. A série derivada é um exemplo deste tipo de série que, por sua vez, munida com a condição de finitude, define a classe de grupos solúveis.

É bem conhecido que dado um grupo solúvel G, podem existir mais de uma série de G com fatores abelianos. Do mesmo modo, dado um grupo nilpotente, podem ser definidas mais de uma série normal com fatores centrais nele. É o caso da série central inferior definida em 1.2 e a série central superior.

Um grupo nilpotente G está associado a um número inteiro positivo c, igual ao comprimento mínimo de todas as séries centrais de G, ou o menor inteiro tal que $\gamma_{c+1}(G) = 1$. Este número é chamado *classe de nilpotência* de G, logo, a definição de grupo nilpotente está acompanhada pela definição de classe de nilpotência.

A série derivada em grupos solúveis possui também uma condição de minimalidade de comprimento. Sendo mais explícitos, seja G um grupo solúvel, então a série derivada possui comprimento finito d, i.e., d é o menor inteiro tal que $G^{(d)} = 1$. Assim, toda série com fatores abelianos de G possui ao menos $d-1$ subgrupos próprios distintos de G. O número d é chamado o *comprimento derivado* do grupo G, o qual denotaremos neste trabalho por $d(G)$ (pedimos que o leitor leve em consideração que esta não é uma notação padrão e pode representar outras constantes em textos de teoria de grupos).

Na teoria de grupos, os conceitos de *comprimentos* têm grande importância, permitindo-nos conhecer o quão perto está um objeto dado (um grupo) de uma classe particular de grupos. Este é o caso do comprimento derivado, definido acima, que pode ser interpretado como uma medida de quão perto está um grupo solúvel de ser abeliano.

Neste trabalho, temos um singular interesse em alguns comprimentos. É o caso da altura de Fitting de grupos solúveis finitos, e o p-comprimento de grupos p-solúveis finitos, por isso definiremos estas duas medidas no que resta desta seção.

Definição 1.1.5. *Seja G um grupo finito solúvel, a altura de Fitting de G é o menor comprimento de uma série normal de G com quocientes nilpotentes, denotado por $h(G)$.*

A altura de Fitting foi definida em [32]. Este comprimento de um grupo solúvel G pode ser entendido como uma medida de quão distante está o grupo G de ser nilpotente.

Para exemplificar uma série nas condições da Definição 1.1.5, lembramos da definição indutiva da série de Fitting, a qual sempre existe e é finita para todo grupo solúvel finito G. A série de Fitting sempre satisfaz a condição de minimalidade de comprimento exigida na definição de altura de Fitting. Para definir esta série, precisamos definir o subgrupo de Fitting.

Definição 1.1.6. *Seja G um grupo. O subgrupo gerado por todos os subgrupos nilpotentes normais de G diz-se subgrupo de Fitting e denota-se como $F(G)$. Se G é finito (como é o nosso caso), temos que $F(G)$ é normal em G e $F(G)$ é nilpotente (o maior subgrupo normal nilpotente contido em G).*

O subgrupo de Fitting de um grupo solúvel finito é sempre não trivial. Com isso em mente, temos que a série de Fitting de um grupo finito G é definida como:

$$F_0(G) = \langle e \rangle \leqslant F_1(G) = F(G) \leqslant \cdots \leqslant F_{h-1}(G) \leqslant \cdots \leqslant F_h(G) = G, \tag{1.3}$$

onde $F_i(G)/F_{n-1}(G) = F(G/F_{n-1}(G))$, i.e, $F_i(G)$ é a imagem inversa do subgrupo de Fitting de G/F_{n-1} pela projeção canônica $\pi : G \longrightarrow G/F_{n-1}(G)$.

Como observado anteriormente, a série de Fitting de grupos solúveis finitos é finita (fato que decorre de que o subgrupo de Fitting para esta classe de grupos é não trivial) e esta série satisfaz a condição de minimalidade no seu comprimento, assim podemos afirmar que a altura de Fitting do grupo G é h.

Daremos uma especial atenção a um outro comprimento de grupos, o qual está definido na classe dos grupos p-solúveis finitos. Este comprimento teve um forte impacto no estudo da teoria de grupos e pode ser considerado o pilar teórico fundamental com respeito aos tópicos estudados neste trabalho.

1.1.4 Grupos p-Solúveis e o p-Comprimento

Desde o trabalho de P. Hall e G. Higman [13], o estudo dos grupos p-solúveis e do p-comprimento dos mesmos se tornou uma área importante da teoria de grupos.

Um grupo finito é chamado *p'-grupo*, onde p é um número primo, se a ordem do grupo é coprima com p, e é um *p-grupo* se sua ordem é uma potência de p.

Definição 1.1.7. *Seja G um grupo finito. Dizemos que G é p-solúvel se tem uma série normal com fatores sendo p-grupos ou p'-grupos. O número mínimo de p-fatores em uma série do tipo é chamado o p-comprimento do grupo G, e será denotado por $l_p(G)$.*

A palavra p-fatores na definição acima refere-se aos fatores da série normal que são p-grupos.

Os grupos solúveis estão fortemente relacionados com os grupos p-solúveis, pois todo grupo solúvel finito é um grupo p-solúvel para todo número primo p. Este fato pode ser facilmente verificado lembrando que todos os fatores de composição de um grupo solúvel finito são grupos de ordem prima (portanto todos os fatores são p-grupos ou p'-grupos para todo primo p). Por outro lado, dado um grupo p-solúvel G, ele não é necessariamente solúvel, mas o teorema de Feit-Thompson 1.1.2 garante que todo grupo 2-solúvel é solúvel. De fato, seja G um grupo 2-solúvel, basta observar que na série normal, garantida pela definição de 2-solúvel, todos os fatores são de ordem potência de 2 ou de ordem ímpar. Assim pelo teorema de Feit-Thompson, todos os fatores de tal série são solúveis. Portanto, sabendo que uma extensão de grupos solúveis é também solúvel temos que G é solúvel.

Tendo como marco a relação anterior, entre solubilidade e p-solubilidade, definimos o conceito análogo ao radical solúvel.

Definição 1.1.8. *Seja G um grupo finito. O maior subgrupo normal p-solúvel de G é chamado o radical p-solúvel e será denotado aqui como $R_p(G)$.*

Expressamos a seguir um resultado direto da definição de grupos p-solúveis.

Proposição 1.1.9. *Subgrupos e imagens homomorfas de grupos p-solúveis são também p-solúveis.*

Uma prova desta proposição pode ser encontrada implicitamente em [10] em resultados concernentes a grupos π-separáveis.

Em verdade, o PRB foi o problema que motivou a definição de p-comprimento. Sendo assim, consideramos apropriado nos aprofundar neste problema na seguinte seção.

1.2 Problema Restrito de Burnside

Para enunciar e entender o PRB precisamos de algumas definições:

Um grupo G é *periódico* se todo subgrupo cíclico de G é finito, isto é, se todo elemento de G tem ordem finita. Se um grupo G é periódico, dizemos que o grupo tem *expoente finito* n se todo elemento de G tem ordem dividindo n, e n é o menor inteiro com esta propriedade. Denotamos o expoente de G por $exp(G)$.

Dizemos que um grupo G é m-gerado se G é gerado por um conjunto com m elementos.

Para chegar ao PRB, primeiro enunciaremos os problemas que motivaram o mesmo. Começaremos com o *Problema Geral de Burnside*, o qual pode ser enunciado da seguinte maneira:

Todo grupo periódico finitamente gerado é finito?

A resposta para o problema geral de Burnside é negativa, e vários contra exemplos foram encontrados na segunda metade do século XX (ver por exemplo [9] ou [11]).

Enuncia-se também uma versão do Problema Geral de Burnside conhecida como *O Problema de Burnside* a qual pode ser escrita como:

Todo grupo m-gerado de expoente n é finito?

Quando o grupo é cíclico, isto é, quando $m = 1$ a resposta é afirmativa. Quando o expoente n é menor ou igual a 2, claramente a resposta é afirmativa, afinal, teríamos um grupo abeliano. Outros casos mais complicados também têm sido estudados, de onde foi verificado que existem outras soluções positivas ao Problema de Burnside. Assim, por exemplo, tem-se que todo grupo m-gerado com expoente $n \leqslant 6$ e $n \neq 5$ é finito, para todo valor de m. O Problema de Burnside tem resposta negativa quando o expoente do grupo é grande. Por exemplo, se nos restringimos ao caso de grupos m-gerados de expoente $n \geqslant 2^{48}$, o grupo é infinito para todo $m \neq 1$ [15].

Outra pergunta relativa a esta linha de problemas é o *Problema Restrito de Burnside* (PRB). Possuímos um particular interesse neste problema, já que seu estudo motiva a introdução de conceitos relativos a comprimentos em grupos, que constituem o objeto de estudo deste trabalho. Apresentaremos aqui um breve apanhado histórico e exibiremos alguns resultados obtidos no processo da solução do PRB. O PRB pode ser enunciado da seguinte maneira:

Todo grupo finito m-gerado de expoente n possui ordem limitada por uma função que depende *exclusivamente de m e n?*

Formas equivalentes de enunciar este problema são:

Todo grupo residualmente finito de expoente n é localmente finito?

A classe de todos os grupos de expoente n localmente finitos é uma variedade?

Um dos avanços mais significativos para a solução do PRB foi feito por P. Hall e G. Higman [13], trabalho publicado em 1956, onde os autores obtêm limitações do p-comprimento, as quais são dadas pelo seguinte teorema.

Teorema 1.2.1. *Sejam G um grupo finito p-solúvel, P um p-subgrupo de Sylow de G com p um primo ímpar e $l_p(G)$ o p-comprimento de G. Seja $exp(P) = p^e$, denotamos por $e(P)$ o número e associado ao expoente de P e $d(P)$ o comprimento derivado do grupo P, então temos que*

- $l_p(G) \leqslant d(P)$;
- $l_p(G) \leqslant e(P)$ *se p não é um primo de Fermat;*
- $l_p(G) \leqslant 2e(P)$ *se p é um primo de Fermat.*

O caso em que $p = 2$ foi provado por E. G. Bryukhanova em [2] e [3], onde obtém o seguinte resultado.

Teorema 1.2.2. *Seja $e(P) = e$ o menor inteiro positivo tal que um 2-subgrupo de Sylow P de G tem expoente 2^e e seja $d(P)$ o comprimento derivado do grupo P. Se G é um grupo solúvel finito, então o comprimento $l_2(G) \leqslant e(P)$ e $l_2(G) \leqslant d(P)$.*

Usando as limitações anteriores para o caso ímpar, e assumindo algumas propriedades sobre os grupos finitos simples (depois verificadas com a classificação) se obtém a redução do PRB para o caso em que o expoente é uma potência de um primo. Obtém-se mais especificamente o seguinte resultado [13]:

Teorema 1.2.3. *Seja $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$, onde os p_i são primos distintos. Se assumirmos as seguintes afirmações,*

1. *Existe só um número finito de grupos simples finitos de expoente n;*
2. *A conjectura de Schreier é verdadeira;*

então uma resposta positiva para o PRB para grupos de expoente $p_i^{k_i}$ para cada $1 \leqslant i \leqslant r$ implica em uma resposta positiva ao PRB para expoente n.

As afirmações acima sobre grupos finitos simples foram verificadas com a classificação deste tipo de grupos. Assim, o problema ficou reduzido a grupos de expoente potência de um primo. Em 1959, A. I. Kostrikin [22, 23] prova que o PRB para expoente primo p e um número qualquer de geradores tem também solução positiva. Este resultado foi baseado no estudo de condições de Engel em álgebras de Lie sobre $\mathbb{Z}_p$, assim se abre o caminho para o uso de métodos de Lie no estudo de propriedades de grupos nilpotentes.

Já em 1989, E. I. Zelmanov provou que PRB é verdade para todo exponente p^m, com p um primo qualquer, e portanto o PRB tem solução positiva para todo expoente n usando o Teorema 1.2.3 e a classificação.

1.3 Palavras de Grupo e Variedades

Para começar, lembraremos que uma *variedade de grupos* é uma classe de grupos definida por equações. Um exemplo muito trabalhado de variedades de grupos é a classe de todos os grupos abelianos, a qual é a variedade definida pela equação $x^{-1}y^{-1}xy = 1$. Analogamente, o conceito de variedade de grupos pode ser dado através da definição de palavra de grupo.

O conceito de palavra é essencial na teoria de grupos, particularmente em subáreas como a teoria combinatória de grupos, sendo fundamental no estudo de grupos livres e apresentação de grupos. Neste trabalho, usaremos este conceito para aproximar-nos a algumas bem conhecidas variedades de grupos, como as variedades de grupos solúveis de comprimento derivado limitado ou as variedades de grupos nilpotentes de classe de nilpotência limitada. Para isso, daremos a seguir algumas definições e exemplos interessantes para o desenvolvimento dos objetivos desta tese.

Uma palavra de grupo w em variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, denotada por $w(x_1, \ldots, x_n)$, é uma concatenação finita de símbolos de variável pertencentes ao conjunto $\{x_i, x_i^{-1} | 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Dados uma palavra de grupo $w(x_1, \ldots, x_n)$ e um grupo G, a palavra w pode ser interpretada como uma aplicação,

$$\begin{array}{rccc} w: & G^n & \longrightarrow & G \\ & (g_1, ..., g_n) & \longmapsto & w(g_1, ..., g_n). \end{array}$$

As imagens desta aplicação são chamadas *w-valores* em elementos de G e serão denotadas neste trabalho como G_w. Denotamos por $w(G)$ o subgrupo de G gerado por todos os w-valores (i.e., $w(G) = \langle G_w \rangle$), o qual é conhecido como o *subgrupo verbal* de G associado a w. Se $w(G) = 1$, dizemos que o grupo G satisfaz a equação $w = 1$.

Dado um conjunto de palavras de grupo W, a *variedade* determinada por W é definida como sendo o conjunto de todos os grupos G tais que $w(G) = 1$ para toda palavra w pertencente a W. Pelo Teorema de Birkhoff [26], temos que uma classe de grupos é uma variedade se, e somente se, é fechada para subgrupos, fechada para imagens homomorfas e fechada para produto cartesiano.

Como no caso de estruturas algébricas, trabalhando com variedades, é possível construir novas variedades de grupos (ou novos exemplos de variedades) a partir de variedades já conhecidas. Uma forma de construir novas variedades é dada pelo conceito de *produto de variedades*.

Definição 1.3.1. *Sejam $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{W}$ variedades de grupos. O produto $\mathfrak{U}\mathfrak{W}$ é a variedade de todos os grupos G os quais têm um subgrupo normal N pertencendo a $\mathfrak{U}$, com quociente G/N pertencendo a $\mathfrak{W}$. O produto de mais de duas variedades é definido da forma mais natural, i.e., dada $\{\mathfrak{U}_i\}_{i=1}^n$ um coleção de variedades, a variedade produto $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2\cdots\mathfrak{U}_n$ é a variedade de todos os grupos G os quais tem um subgrupo normal N pertencendo a $\mathfrak{U}_1$, com quociente G/N pertencendo a $\mathfrak{U}_2\cdots\mathfrak{U}_n$.*

Para ilustrar as definições dadas nesta seção, daremos breves exemplos de palavras de grupo nas quais temos especial interesse, algumas relacionadas com os comutadores de grupo.

O primeiro exemplo é a palavra $e_n(x) = x^n$ com n um inteiro fixo. Assim os e_n-valores em um grupo G são todos os elementos da forma g^n com $g \in G$ e a variedade determinada por $\{e_n\}$ é a variedade formada por todos os grupos de expoente k, onde k divide n, denotada neste trabalho como $\mathfrak{B}_n$.

As variedades da forma $\mathfrak{B}_n$, dos grupos que satisfazem a equação $e_n(x) = 1$, nos permitem exemplificar a definição de produto de variedades. Sejam $\mathfrak{B}_n$ e $\mathfrak{B}_m$ duas variedades deste tipo. O produto destas variedades $\mathfrak{B}_n\mathfrak{B}_m$ é dado por todos os grupos que possuem um subgrupo normal de expoente dividindo n com quociente de expoente dividindo m. Seja $G \in \mathfrak{B}_n\mathfrak{B}_m$, então existe N, um subgrupo normal de G, tal que para todo $h \in N$ temos que $h^n = 1$ e para todo elemento $g \in G$ verifica-se que $(gN)^m = N$, pelo qual fica fácil observar que dado $G \in \mathfrak{B}_n\mathfrak{B}_m$, todo elemento $g \in G$ satisfaz a equação

$g^{mn} = 1$, implicando que a variedade $\mathfrak{B}_n\mathfrak{B}_m$ está contida na variedade $\mathfrak{B}_{mn}$.

Retomando os exemplos de palavras de grupo, uma importante família de palavras de grupo é a composta pelos comutadores simples γ_k, dada por

$$\gamma_1 = x_1, \qquad \gamma_k = [\gamma_{k-1}, x_k] = [x_1, \ldots, x_k]. \tag{1.4}$$

Os correspondentes subgrupos verbais $\gamma_k(G)$ são os termos da série central inferior de G, e a variedade determinada por $\{\gamma_k\}$ é a variedade dos grupos nilpotentes de classe de nilpotência menor ou igual a k.

Outra conhecida sequência de palavras são as palavras derivadas δ_k, em 2^k variáveis, as quais são definidas recursivamente como

$$\delta_0 = x_1, \qquad \delta_k = [\delta_{k-1}(x_1, \ldots, x_{2^{k-1}}), \delta_{k-1}(x_{2^{k-1}+1}, \ldots, x_{2^k})]. \tag{1.5}$$

Claramente $\delta_k(G) = G^{(k)}$, o k-ésimo subgrupo derivado de G, e as variedades determinadas por estas palavras são bem conhecidas e amplamente estudadas. A variedade determinada por $\{\delta_1\}$ é a variedade dos grupos abelianos, e em geral, a variedade associada a $\{\delta_k\}$ é a variedade dos grupos solúveis com comprimento derivado menor ou igual a k, a qual denotaremos neste trabalho por $\mathfrak{A}^k$.

Uma classe muito importante de comutadores para nosso trabalho serão os comutadores multilineares (também conhecidos como outer commutator words). Para definir os mesmos, usamos o conceito peso de um comutador.

Definição 1.3.2. *Uma palavra comutador de peso* $1, 2, \ldots$ *em variáveis* $x_1, x_2, \ldots$ *é definida indutivamente como*

- x_i *é uma palavra comutador de peso 1;*
- *Dadas palavras comutador* w_1 *e* w_2 *de peso* n_1 *e* n_2 *respectivamente, a palavra* $[w_1, w_2]$ *é também uma palavra comutador e seu peso é* $n_1 + n_2$.

Definimos os comutadores multilineares recursivamente.

Definição 1.3.3. *A palavra* $w(x) = x$ *é o único comutador multilinear de peso 1. Dados dois comutadores multilineares,* $w_1(x_1, \ldots, x_{n_1})$ *de peso* n_1 *e* $w_2(y_1, \ldots, y_{n_2})$ *de peso* n_2*, onde* $x_i \neq y_j$ *para todo* $1 \leqslant i \leqslant n_1$ *e todo* $1 \leqslant j \leqslant n_2$*, a palavra* $[w_1, w_2]$ *é também um comutador multilinear, de peso* $n_1 + n_2$.

Assim, exemplos de comutadores multilineares são as palavras γ_k ou δ_k definidas acima.

Um último exemplo de palavras de grupo são as palavras de Engel. A palavra 0-Engel na variável x é a palavra $w = x$, agora a palavra n-Engel em variáveis x_1, x_2 é igual a $[x_1, x_2, \dots, x_2]$ com x_2 ocorrendo n vezes, isto é denotado por $[x_{1,n} x_2]$.

As palavras de Engel são palavras comutador, mas dado $n \geqslant 2$ a palavra n-Engel não é uma palavra comutador multilinear.

Damos a seguir uma definição relacionada com as palavras n-Engel, com a qual concluiremos esta seção, e que usaremos em algumas partes deste trabalho.

Definição 1.3.4. *Dados um grupo G e um elemento g de G, g é chamado m-Engel em G se, para cada x em G, o m-Engel valor $[x,_m g]$ é trivial. O grupo G é dito m-Engel se todos os seus elementos são m-Engel.*

1.4 Produto Entrelaçado de Grupos

O produto entrelaçado de grupos será usado para a descrição e compreensão dos p-subgrupos de Sylow dos grupos simétricos, que por sua vez nos ajudarão a compreender a estrutura de grupos finitos interpretados como permutações de conjuntos (em um quociente apropriado). Estas interpretações ficarão mais claras nas provas apresentadas nos capítulos 3 e 4.

A seguinte definição, e definições que generalizam a mesma, podem ser encontradas em [26] ou [27], por exemplo.

Definição 1.4.1. *Dados dois grupos arbitrários H e K, tomamos o produto direto $\prod_{k \in K} H_k$, onde H_k é isomorfo a H, para todo $k \in K$. Definimos o produto entrelaçado de H e K, $H \wr_r K$, como o produto semidireto de $\prod_{k \in K} H_k$ pelo grupo K, onde a ação de K no produto direto $\prod_{k \in K} H_k$ é induzida pelo produto à direita nos sub-índices, i.e., $(H_k)^{\bar{k}} = H_{k\bar{k}}$.*

O produto entrelaçado pode ser definido para mais de dois grupos e ele tem a propriedade de ser associativo sob isomorfismo, isto é, $H_1 \wr_r (H_2 \wr_r H_3) \cong (H_1 \wr_r H_2) \wr_r H_3$. Um dos exemplos mais importantes de produtos entrelaçados de grupos são os p-subgrupos de Sylow dos grupos simétricos, os quais foram caracterizados da seguinte maneira.

Proposição 1.4.2 (Kaluznin)**.** *Seja $Sym(p^e)$ o grupo de permutações de um conjunto com p^e elementos. Um p-subgrupo de Sylow de $Sym(p^e)$ é isomorfo ao produto entrelaçado $W(p, e) = C_p \wr_r C_p \cdots \wr_r C_p$ de e cópias do grupo cíclico de p-elementos, C_p.*

A prova desta proposição (encontrada, por exemplo, em [26] ou [27]) pode ser feita por argumentos indutivos, levando em consideração a máxima potência de p que pode dividir $p^e!$.

Com esta proposição, concluímos este breve compêndio de resultados preliminares, os quais são alguns dos pré-requisitos mais importantes que motivaram ou dão solidez teórica a este trabalho.

Capítulo 2

Comprimento Não-Solúvel e Não-p-Solúvel

2.1 Definições e Resultados Introdutórios

Todo grupo finito G possui uma série normal cujos fatores são solúveis ou um produto direto de grupos simples não abelianos. E. I. Khukhro e P. Shumyatsky em [19] definem o *comprimento não-solúvel*, $\lambda(G)$, como o número mínimo de fatores não-solúveis em uma série deste tipo.

Definição 2.1.1. *Seja G um grupo finito e $1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{2h} \leqslant G_{2h+1} = G$ uma série normal de G satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Para i par, o grupo quociente G_{i+1}/G_i é solúvel (possivelmente trivial);*
2. *Para i ímpar, o quociente G_{i+1}/G_i é um produto direto (não vazio) de grupos simples não abelianos;*
3. *Possui comprimento minimal com respeito a todas as séries que satisfazem 1 e 2.*

Então o comprimento não-solúvel de G, é igual a h e será denotado por $\lambda(G)$.

Para apresentar mais claramente este conceito, definimos o *socle* de um grupo finito G, e depois caracterizamos sua estrutura. Posteriormente, usaremos o *socle* e o radical solúvel na construção de uma série normal cujos fatores são solúveis ou um produto direto de grupos simples não abelianos. Assim, dado um grupo finito G, exibimos uma série normal de G que determina o comprimento não-solúvel.

Definição 2.1.2. *Seja G um grupo finito, o socle de G, denotado por $Soc(G)$, é o produto direto de todos os subgrupos normais minimais de G.*

Para caracterizar este subgrupo (o qual claramente é normal), usamos o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [10].

Proposição 2.1.3. *Se H é um subgrupo normal minimal de um grupo finito G, então H é um p-grupo abeliano elementar para algum primo p ou H é o produto direto de grupos simples não-abelianos isomorfos.*

Deste modo, o subgrupo $Soc(G)$ de um grupo finito G é o produto direto de grupos simples (em princípio, alguns destes fatores podem ser abelianos).

Seja $A = N_1 \times \cdots \times N_l$ o subgrupo do *socle* de G proveniente do produto de todos os subgrupos N_i normais minimais de G, os quais são abelianos elementares. Temos que A é normal em G e, tendo em consideração a sua construção, podemos concluir que A é solúvel (mais ainda, A é abeliano). Logo, A está contido no radical solúvel de G. Considere agora o grupo quociente $\bar{G} = G/R(G)$. Dado que a parte abeliana de $Soc(\bar{G})$ está contida em $R(\bar{G})$, e claramente $R(\bar{G})$ é trivial, podemos concluir que $Soc(\bar{G})$ é o produto direto de grupos simples não abelianos, logo $Soc(\bar{G})$ não é solúvel.

Com as observações feitas acima, podemos construir, para qualquer grupo finito G, a seguinte série normal satisfazendo as condições da Definição 2.1.1:

$$1 \leqslant R(G) = M_1(G) < \Gamma_1(G) \leqslant \cdots \leqslant M_n(G) < \Gamma_n(G) \leqslant M_{n+1}(G) = G, \tag{2.1}$$

onde

$$\frac{M_i(G)}{\Gamma_{i-1}(G)} = R\left(\frac{G}{\Gamma_{i-1}}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\Gamma_i(G)}{M_i(G)} = Soc\left(\frac{G}{M_i}\right).$$

Analogamente, foi definido o *comprimento não-p-solúvel* de um grupo finito, substituindo solúvel por p-solúvel na Definição 2.1.1. Assim, dada uma série normal do grupo G tal que todos os seus fatores são p-solúveis ou o produto direto de grupos simples não abelianos de ordem divisível por p, o comprimento não-p-solúvel de G, denotado por $\lambda_p(G)$, é o número mínimo de fatores não-p-solúveis em uma série normal de G deste tipo.

É claro que o comprimento não-2-solúvel coincide com o comprimento não-solúvel, pela observação feita na definição de p-solúvel, na qual expõe-se a equivalência entre grupos solúveis e grupos 2-solúveis, usando o Teorema de Feit-Thompson (Teorema 1.1.2).

Do mesmo modo que foi construída a série em (2.1), podemos construir uma série nas condições da definição de comprimento não-p-solúvel para qualquer grupo finito G, substituindo o radical solúvel pelo radical p-solúvel. A alteração mais importante nesta construção é a seguinte proposição, que deixa a série construída em coerência com a definição de comprimento não-p-solúvel.

Proposição 2.1.4. *Seja G um grupo finito. Então o socle do grupo quociente $G/R_p(G)$ do grupo pelo seu radical p-solúvel, $Soc(G/R_p(G))$, é o produto direto de grupos simples não abelianos de ordem divisível por p.*

Demonstração. Para todo grupo G, temos que $R(G) \leqslant R_p(G)$, logo a parte abeliana de $Soc(G)$ está contida em $R_p(G)$. Considere o grupo quociente $\bar{G} = G/R_p(G)$, claramente $R_p(\bar{G})$ é trivial, logo $Soc(\bar{G}) = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$ (produto direto de grupos simples não abelianos). Suponha por contradição que existe $1 \leqslant i \leqslant r$ tal que p não divide a ordem de S_i. Como S_i é um fator do *socle* de $\bar{G}$, existe um subgrupo N, normal minimal em $\bar{G}$, tal que $N = S_{i1} \times S_{i2} \times \cdots \times S_{il}$, onde S_{ij} é isomorfo a S_i para todo $1 \leqslant j \leqslant l$ (pela Proposição 2.1.3). Portanto, N é um p'-grupo, de onde N é p-solúvel, o que contradiz o fato de que $R_p(\bar{G}) = 1$. Em conclusão, o resultado segue. □

Com a intenção de deixar mais clara a construção de uma série nas condições da definição do comprimento não-p-solúvel, daremos agora de forma explícita uma construção análoga à feita em (2.1).

$$1 \leqslant R_p(G) = M_1(G) < \Gamma_1(G) \leqslant \cdots \leqslant M_n(G) < \Gamma_n(G) \leqslant M_{n+1}(G) = G, \tag{2.2}$$

onde

$$\frac{M_i(G)}{\Gamma_{i-1}(G)} = R_p\left(\frac{G}{\Gamma_{i-1}}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\Gamma_i(G)}{M_i(G)} = Soc\left(\frac{G}{M_i}\right).$$

A partir da Proposição 2.1.4 e da Definição 1.1.8 (radical p-solúvel), verifica-se que os fatores da série (2.2) são p-solúveis ou o produto direto de grupos simples não abelianos de ordem divisível por p.

Na parte inicial desta seção, foi definido e caracterizado o subgrupo $Soc(G)$ de um grupo finito G. Depois, foi caracterizado o socle do grupo quociente $G/R_p(G)$ na

Proposição 2.1.4. Isso ajudou a evidenciar um exemplo construtivo de séries normais de G, as quais se encaixam nas definições de comprimento não-solúvel e não-p-solúvel.

Apresentamos agora um resultado que nos ajuda a entender a estrutura de grupos que são produto direto de grupos simples não abelianos, para com isso entender melhor a estrutura de $Soc(G/R_p(G))$.

Lema 2.1.5. *Seja $G = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$ o produto direto de grupos simples não abelianos S_i, então todo subgrupo normal não trivial N de G é igual ao produto direto $N = S_{i_1} \times \cdots \times S_{i_l}$, com $1 \leqslant i_j \leqslant r$ distintos dois a dois e $l \leqslant r$.*

Demonstração. Seja π_i a i-ésima projeção do grupo G no grupo S_i, i.e.,

$$\begin{aligned} \pi_i : \quad S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r &\longrightarrow S_i \\ (a_j)_{j=1}^r = (a_1, ..., a_r) &\longmapsto a_i. \end{aligned}$$

Defina $K := \{i \in \mathbb{Z} \mid 1 \leqslant i \leqslant r \text{ e } \pi_i(N) \neq \{1\}\}$. Como N é não trivial, o conjunto K é não vazio. Assim, escolha $k \in K$ e tome $x = (a_i)_{i=1}^r \in N$ tal que $a_k \neq 1$. Do fato de que S_k é simples não abeliano, podemos garantir a existência de $g_k \in S_k$ tal que $[g_k, a_k] \neq 1$. Seja agora $y = (g_i)_{i=1}^r \in G$, onde $g_i = 1$ para todo $i \neq k$, então a normalidade de N garante que $[y, x] \in N$ (pois $[y, x] = x^{-y}x$). É fácil ver que $\pi_i([y, x]) = 1$ para todo $i \neq k$ e $\pi_k([y, x]) = [g_k, a_k]$. Chamemos G_i o subgrupo de G igual ao produto direto de r fatores, os quais são todos triviais com exceção do i-ésimo termo. O i-ésimo termo, por sua vez, é igual a S_i (i.e., $G_1 = S_1 \times 1 \times \cdots \times 1$, e em geral, $G_i = 1 \times \cdots \times 1 \times S_i \times 1 \times \cdots \times 1$), é claro que G_i é isomorfo a S_i. Assim, $N \cap G_k$ é um subgrupo normal não trivial de G_k (pois $[y, x] \in N \cap G_k$), logo $N \cap G_k = G_k$ para todo $k \in K$, de onde concluímos que se assumirmos $K = \{k_1, \ldots, k_l\}$, teremos que $N = S_{k_1} \times \cdots \times S_{k_l}$, concluindo a demonstração. □

Usaremos o lema acima para o tratamento dos quocientes não-p-solúveis. O seguinte resultado garante que o comprimento não-p-solúvel se comporta bem com os subgrupos normais, as imagens homomorfas, o produto direto e, quiçá o mais importante, comporta-se bem para as extensões de grupos. Para a prova do mesmo, usaremos propriedades da teoria de grupos em conjunto com o lema anterior.

Proposição 2.1.6. *Dado G um grupo finito e p um número primo tal que $\lambda_p(G) = n$, então*

1. *Se N é um subgrupo normal de G, verifica-se que $\lambda_p(N) \leqslant n$ e $\lambda_p(G/N) \leqslant n$;*

2. *Dado N um subgrupo normal de G tal que $\lambda_p(N) = l$ e $\lambda_p(G/N) = k$, verifica-se que $n \leqslant l + k$.*

Demonstração. Para a prova dos ítens da proposição, assumimos

$$1 \leqslant R_p(G) = M_1(G) < \Gamma_1(G) \leqslant \cdots \leqslant M_n(G) < \Gamma_n(G) \leqslant M_{n+1}(G) = G,$$

como a série caracterizada em (2.2).

Seja $1 \leqslant n_0 \leqslant n$ o número mínimo tal que $N \leqslant M_{n_0+1}(G)$. Definimos agora uma série normal de subgrupos de N dada por

$$1 \leqslant M_1(G) \cap N \leqslant \Gamma_1(G) \cap N \leqslant \cdots \leqslant \Gamma_{n_0}(G) \cap N \leqslant M_{n_0+1}(G) \cap N = N. \tag{2.3}$$

Todos os elementos pertencentes a esta série são normais em G. Analisaremos agora os fatores desta série, chamando $M_i(G) = M_i$ e $\Gamma_i(G) = \Gamma_i$ para não sobrecarregar a notação.

Começaremos com os fatores da forma $M_i \cap N/\Gamma_{i-1} \cap N$. Dado que $\Gamma_{i-1} \leqslant M_i$ e aplicando isomorfismos básicos de grupos, temos que

$$\frac{M_i \cap N}{\Gamma_{i-1} \cap N} = \frac{M_i \cap N}{\Gamma_{i-1} \cap (M_i \cap N)} \cong \frac{\Gamma_{i-1}(M_i \cap N)}{\Gamma_{i-1}} \leqslant \frac{M_i}{\Gamma_{i-1}},$$

portanto, pela Proposição 1.1.9, temos que $(M_i \cap N)/(\Gamma_{i-1} \cap N)$ é p-solúvel para todo $2 \leqslant n_0 \leqslant n$. Já o caso $M_1 \cap N$ é p-solúvel, por ser também um subgrupo de um grupo p-solúvel.

Os outros tipos de fatores são os quocientes da forma $(\Gamma_i \cap N)/(M_i \cap N)$, os quais satisfazem os seguintes isomorfismos

$$\frac{\Gamma_i \cap N}{M_i \cap N} = \frac{\Gamma_i \cap N}{M_i \cap (\Gamma_i \cap N)} \cong \frac{M_i(\Gamma_i \cap N)}{M_i}.$$

Como foi observado acima, $\Gamma_i \cap N$ é um subgrupo normal de G, logo $\Gamma_i \cap N$ é normal em Γ_i. Assim, por correspondência no quociente G/M_i, temos que o grupo $(M_i(\Gamma_i \cap N))/M_i$ é um subgrupo normal de Γ_i/M_i. Sendo assim, usando a caracterização dada na Proposição 2.1.4 e o Lema 2.1.5, podemos concluir que $M_i(\Gamma_i \cap N)/M_i$ é produto direto de grupos simples não abelianos de ordem divisível por p, assegurando que os fatores da forma $(\Gamma_i \cap N)/(M_i \cap N)$ também o são. Logo, todos os fatores da série (2.3) são p-solúveis ou produto direto de grupos simples não abelianos, com o que podemos garantir que $\lambda_p(N) \leqslant n_0 \leqslant n$, como desejado.

Para concluir a demonstração do item 1 desta proposição, basta construir a seguinte série normal de G/N, onde $\overline{M}_i = NM_i/N$ e $\overline{\Gamma}_i = N\Gamma_i/N$

$$\overline{1} \leqslant \overline{M}_1 \leqslant \overline{\Gamma}_1 \leqslant \cdots \leqslant \overline{M}_n \leqslant \overline{\Gamma}_n \leqslant \overline{M}_{n+1} = \frac{G}{N}. \tag{2.4}$$

Os fatores da série da forma $\overline{M}_i/\overline{\Gamma}_{i-1}$ satisfazem os seguintes isomorfismos:

$$\frac{\overline{M}_i}{\overline{\Gamma}_{i-1}} \cong \frac{NM_i}{N\Gamma_{i-1}} = \frac{N\Gamma_{i-1}M_i}{N\Gamma_{i-1}} \cong \frac{M_i}{N\Gamma_{i-1} \cap M_i}.$$

Claramente, $M_i/\left(N\Gamma_{i-1} \cap M_i\right)$ é isomorfo ao quociente de M_i/Γ_{i-1} por $\left(N\Gamma_{i-1} \cap M_i\right)/\Gamma_{i-1}$. Logo, os fatores da forma $\overline{M}_i/\overline{\Gamma}_{i-1}$ são quocientes de grupos p-solúveis. Assim, pela Proposição 1.1.9, ditos fatores também são p-solúveis.

Já os fatores da forma $\overline{\Gamma}_i/\overline{M}_i$, por um tratamento análogo ao feito acima, são isomorfos ao quociente de Γ_i/M_i por $\left(NM_i \cap \Gamma_i\right)/M_i$, ou seja, $\overline{\Gamma}_i/\overline{M}_i$ é isomorfo a uma imagem homomorfa de Γ_i/M_i. Portanto, do fato que homomorfismos de grupos preservam a simplicidade de grupos, e da análise feita para os outros quocientes, obtemos que os fatores da série (2.4) são p-solúveis ou produto direito de grupos simples não-abelianos. Garantindo que $\lambda_p(G/N) \leqslant n$, concluindo a prova do item 1.

A série caracterizada em (2.2) pode ser construída para todo grupo finito, assim podemos construir uma série deste tipo para os grupos N e G/N. Estas séries são dadas por:

$$1 \leqslant R_p(N) = M_1(N) < \Gamma_1(N) \leqslant \cdots \leqslant M_l(N) < \Gamma_l(N) \leqslant M_{l+1}(N) = N,$$

$$1 \leqslant R_p(G/N) = M_1(G/N) < \Gamma_1(G/N) \leqslant \cdots \leqslant M_k(G/N) < \Gamma_k(G/N) \leqslant M_{k+1}(G/N) = G/N,$$

Utilizando estas séries, construiremos uma cadeia de subgrupos de G da seguinte maneira:

$$1 \leqslant M_1(N) \leqslant \Gamma_1(N) \leqslant \cdots \leqslant M_l(N) \leqslant \Gamma_l(N) \leqslant N \leqslant \breve{M}_{l+1} \leqslant \breve{\Gamma}_{l+1} \leqslant \cdots \leqslant \breve{M}_{l+k} \leqslant \breve{\Gamma}_{l+k} \leqslant \breve{M}_{l+k+1} = G,$$

onde os subgrupos denotados por $\breve{M}_{l+i}$ e $\breve{\Gamma}_{l+i}$ com $1 \leqslant i \leqslant k$ são, respectivamente, as imagens inversas dos subgrupos $M_i(G/N)$ e $\Gamma_i(G/N)$ pela projeção canônica $\pi : G \longrightarrow G/N$.

Os elementos da forma $M_i(N)$ ou $\Gamma_i(N)$ com $1 \leqslant i \leqslant l$ são característicos em N, portanto são normais em G. Já o Teorema de Correspondência de grupos normais nos garante que os subgrupos da forma $\breve{M}_{l+i}$ e $\breve{\Gamma}_{l+i}$ com $1 \leqslant i \leqslant k$ são normais em G, assim a cadeia acima é uma série normal de G.

Analisaremos agora os quocientes desta série. Pela construção feita em (2.2), os primeiros $2l$ fatores são ou p-solúveis ou produto direto de grupos simples não abelianos de ordem divisível por p. Entretanto, os fatores da forma $\breve{M}_{l+i+1}/\breve{\Gamma}_{l+i}$ e $\breve{\Gamma}_{l+i}/\breve{M}_{l+i}$ com $1 \leqslant i \leqslant k$ são isomorfos aos fatores da série exposta acima para o grupo G/N, portanto basta analisar o fator $\breve{M}_{l+1}/\Gamma_l(N) = \breve{M}_{l+1}/N$. Pela caracterização dos subgrupos $\breve{M}_{l+i}$, temos que

$$\frac{\breve{M}_{l+1}}{N} = R_p\left(\frac{G}{N}\right),$$

portanto este fator é solúvel, logo $n \leqslant l + k$ e o resultado segue. □

Observamos também que o comprimento não-p-solúvel se comporta bem com respeito ao produto direto de dois grupos finitos.

Sejam G_1 e G_2 grupos finitos tais que $\lambda_p(G_1) = n_1$ e $\lambda_p(G_2) = n_2$. Denote por $G_1 \times G_2$ o produto direto de G_1 e G_2. Como consequência da proposição anterior podemos afirmar que $\lambda_p(G_1 \times G_2) \leqslant n_1 + n_2$. Provaremos a seguir um valor exato de $\lambda_p(G_1 \times G_2)$ nas condições acima.

Proposição 2.1.7. *Sejam G_1 e G_2 grupos finitos tais que $\lambda_p(G_1) = n_1$ e $\lambda_p(G_2) = n_2$, denote por $G_1 \times G_2$ o produto direto de G_1 e G_2. Então $\lambda_p(G_1 \times G_2) = max\{n_1, n_2\}$.*

Demonstração. Para começar, assumimos

$$1 \leqslant R(G_i) = M_1(G_i) < \Gamma_1(G_i) \leqslant \cdots \leqslant M_{n_i}(G_i) < \Gamma_{n_i}(G_i) \leqslant M_{n_i+1}(G_i) = G_i,$$

como a série normal de G_i caracterizada em (2.2), $i = 1, 2$. Tome $G = G_1 \times G_2$.

Sem perda de generalidade, tome $n_1 \leqslant n_2$. Definimos agora uma série normal de G usando a seguinte notação $M_i(G_j) = M_i^j$ e $\Gamma_i(G_j) = \Gamma_i^j$

$$1 \leqslant M_1^1 \times M_1^2 < \Gamma_1^1 \times \Gamma_1^2 \leqslant \cdots < \Gamma_{n_1}^1 \times \Gamma_{n_1}^2 \leqslant G_1 \times M_{n_1+1}^2 < \cdots \leqslant G_1 \times M_{n_2}^2 < G_1 \times \Gamma_{n_2}^2 \leqslant G.$$

Claramente os elementos desta série são normais em G, e os fatores da mesma são solúveis ou produto de grupos simples não abelianos de ordem divisível por p o qual garante que $\lambda_p(G) \leqslant n_2$.

Por outro lado, G_2 é um subgrupo normal de G, logo, a Proposição 2.1.6 garante que $n_2 = \lambda_p(G_2) \leqslant \lambda_p(G)$, de onde concluímos que $\lambda_p(G) = n_2$, finalizando a prova. □

Deste ponto em diante, vamos considerar o caso onde o radical p-solúvel de G é trivial. Esta suposição não afeta o comprimento definido, já que $\lambda_p(G) = \lambda_p(G/R_p(G))$, o que é consequência direta da construção feita em (2.1).

Seja $Soc(G) = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$ o socle de G e considere a ação por conjugação de G no conjunto $\{S_1, \ldots, S_r\}$. Definiremos a seguir um importante subgrupo normal de G que será de grande importância na limitação do comprimento não-p-solúvel.

Definição 2.1.8. *Denotaremos por $K_p(G)$ o p-kernel do grupo G, o qual é definido como o kernel da ação por conjugação de G em $\{S_1, \ldots, S_r\}$, i.e., todos os elementos que pertencem à interseção dos normalizadores dos S_i em G. No caso do* 2*-kernel de G, este será denotado por* $K_2(G) = K(G)$.

Com o p-kernel de um grupo G, pode-se definir de maneira indutiva o subgrupo *p-kernel superior* ou p-kernel de ordem superior de G [19]. Assim, se p é um número primo e G é um grupo finito, o subgrupo p-kernel superior é dado por:

$$K_{p,1}(G) = K_p(G), \quad K_{p,2}(G) = \pi_1^{-1}(K_p(G/K_p(G))) \quad \text{e} \quad K_{p,n}(G) = \pi_{n-1}^{-1}(K_p(G/K_{p,n-1}(G))),$$

onde π_i^{-1} é a imagem inversa com respeito à projeção canônica $\pi_i : G \longrightarrow G/K_{p,i}(G)$.

Para $p = 2$, o subgrupo 2-kernel superior é denotado por $K_i(G) = K_{2,i}(G)$.

A prova do seguinte resultado (a qual pode ser encontrada em [19]) utiliza a classificação dos grupos simples finitos, na aplicação da Conjectura de Schreier, e o resultado constitui uma ferramenta fundamental na limitação do comprimento não-p-solúvel. Dado o nosso particular interesse, vamos reconstruir esta prova.

Lema 2.1.9. *O p-kernel de G tem comprimento não-p-solúvel menor ou igual a* 1.

Demonstração. Assuma $R_p(G) = 1$ e $Soc(G) = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$. Basta construir uma série normal de $K_p(G) = K$ com as condições da definição. Dado que $Soc(G) \leqslant K$ e $K = \bigcap_{i=1}^{r} N_G(S_i)$, todo fator simples S_i do $Soc(G)$ é normal minimal em K. Então $Soc(G) \leqslant Soc(K)$, assim é suficiente provar que o grupo quociente $K/Soc(G)$ é p-solúvel.

A seguinte é uma simples, mas importante, observação:

$$\bigcap_{i=1}^{r} C_K(S_i) = C_K(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r) = C_K(Soc(G)) \leqslant C_G(Soc(G)).$$

Além disso, $C_G(Soc(G))$ é normal em G, logo se $C_G(Soc(G)) \neq 1$, então existe um subgrupo N normal minimal de G contido em $C_G(Soc(G))$. Note que, supondo que $N \neq C_G(Soc(G))$, temos que, dado que todos os subgrupos S_i são não abelianos, então N deve ser p-solúvel (mais pontualmente, N é abeliano ou p'-grupo) contradizendo a suposição que $R_p(G) = 1$, então $N = C_G(Soc(G))$. Por um argumento análogo, como $C_G(Soc(G))$ resulta ser um subgrupo normal minimal de G, temos que $C_G(Soc(G)) = 1$.

Dado que $S_i \leqslant K \leqslant N_G(S_i)$, é possível fazer uma imersão do quociente $K/C_K(S_i)$ em $Aut(S_i)$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Além disso, todo elemento da forma $sC_K(S_i) \in K/C_k(S_i)$ com $s \in S_i$ representa um automorfismo interno de S_i. Tendo em consideração que $(K/C_K(S_i)) / (C_K(S_i)S_i/C_K(S_i))$ é isomorfo a $K/\left(C_K(S_i)S_i\right)$, temos que a imersão de $K/C_K(S_i)$ em $Aut(S_i)$ pode ser estendida a uma imersão do grupo $K/\left(C_K(S_i)S_i\right)$ no grupo de automorfismos externos de S_i, garantindo, pela aplicação da Conjectura de Schreier, que $K/\left(C_K(S_i)S_i\right)$ é solúvel.

Por outro lado, existe uma imersão natural do grupo quociente $K/(\bigcap_{i=1}^{r} C_K(S_i))$ no produto direto $\prod_{i=1}^{r} K/C_K(S_i)$, o que induz um homomorfismo injetivo de $K/Soc(G)$ no produto direto $\prod_{i=1}^{r} Out(S_i)$, com o que concluímos que $K/Soc(G)$ é solúvel como desejava-se. □

Como consequência do lema anterior e da Proposição 2.1.6, temos que

Lema 2.1.10. *O comprimento não p-solúvel de $K_{p,n}(G)$ é menor ou igual a n.*

Observe que o lema acima é uma clara generalização do Lema 2.1.9 . Uma das técnicas mais usadas neste trabalho para conseguir algumas limitações do comprimento não-p-solúvel em um grupo finito G com propriedades específicas é o estudo do grupo quociente G/N, para o qual o comprimento não-p-solúvel do subgrupo normal N de G é conhecido. Assim, o problema é reduzido a um grupo de ordem menor, permitindo-nos o uso de argumentos indutivos. Portanto, usaremos regularmente o p-kernel e p-kernel de ordem superior no lugar do subgrupo normal N, conseguindo desse modo uma aplicação para o Lema 2.1.9 e a sua generalização.

2.2 Limitação do Comprimento Não-p-Solúvel

Junto com as definições de comprimento não-solúvel e não-p-solúvel, evidenciamos nossa intenção de encontrar tipos de grupos para os quais estes comprimentos possam ser limitados. Estas intenções serão materializadas na presente seção, expondo de uma maneira mais clara a natureza das limitações pretendidas e dos grupos em questão.

2.2.1 Problema

O principal objetivo deste trabalho é dar algumas condições na estrutura dos grupos finitos que levem à limitação do comprimento não-p-solúvel. Com este objetivo, estuda-se um problema enunciado por E. I. Khukhro e P. Shumyatsky em [19], onde eles partem do seguinte problema sobre p-comprimento devido a Wilson [24]:

Dados um número primo p e uma variedade própria de grupos $\mathfrak{W}$, existe uma limitação para o p-comprimento de grupos finitos p-solúveis cujos p-subgrupos de Sylow pertencem a $\mathfrak{W}$?

Assim E. I. Khukhro e P. Shumyatsky adaptam a pergunta anterior a um questionamento análogo sobre o comprimento não-p-solúvel, propondo o seguinte problema:

Problema 2.2.1. *Dados um número primo p e uma variedade própria de grupos $\mathfrak{W}$, existe uma limitação para o comprimento não-p-solúvel λ_p de grupos finitos cujos p-subgrupos de Sylow pertençam a $\mathfrak{W}$?*

2.2.2 Algumas Soluções Positivas

E. I. Khukhro e P. Shumyatsky relacionam estes dois problemas, provando que respostas positivas para o problema de Wilson implicam em respostas positivas para o Problema 2.2.1. O seguinte resultado [19] evidencia esta relação.

Teorema 2.2.2. *(a) O comprimento não-solúvel $\lambda(G)$ de um grupo finito G não excede $2L_2+1$, onde L_2 é o máximo 2-comprimento de subgrupos solúveis de G.*

(b) Para $p \neq 2$, o comprimento não-p-solúvel $\lambda_p(G)$ de um grupo finito G não excede o máximo p-comprimento de subgrupos p-solúveis de G.

Os autores obtêm também limitações do comprimento não-p-solúvel em termos da altura de Fitting dos subgrupos solúveis:

Corolário 2.2.3. *O comprimento não-solúvel $\lambda(G)$ de um grupo finito G não excede a máxima altura de Fitting de subgrupos solúveis de G.*

Entretanto, o problema proposto por Wilson está longe de ser resolvido. Existem algumas soluções parciais, por exemplo os teoremas 1.2.1 e 1.2.2, para a variedade de grupos solúveis de comprimento derivado menor que um dado n, assim como para a variedade de grupos de expoente limitado. Portanto, usando o Teorema 2.2.2, obtém-se uma resposta positiva para o Problema 2.2.1 para as variedades anteriormente mencionadas. Ou seja, dado G um grupo finito cujos p-subgrupos de Sylow pertencem à variedade de grupos de expoente dividindo p^e, temos que $\lambda_p(G)$ é e-limitado. Analogamente, dado G um grupo finito cujos p-subgrupos de Sylow pertencem à variedade de grupos solúveis de comprimento derivado menor ou igual a d, temos que $\lambda_p(G)$ é d-limitado.

Expomos a seguir uma proposição que melhora a limitação do comprimento não-p-soluvél obtida por combinação dos teoremas 1.2.1, 1.2.2 e 2.2.2 para o caso da variedade de grupos de expoente dividindo p^e.

Proposição 2.2.4. *Sejam G um grupo finito, p um número primo e P um p-subgrupo de Sylow de G. Seja $exp(P) = p^e$, denotamos por $e(P)$ o número e associado ao expoente de P, então temos que $\lambda_p(G) \leqslant e(P)$.*

Demonstração. Suponha sem perda de generalidade que $R_p(G) = 1$ e seja $Soc(G) = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$ o socle de G. Procederemos a esta prova por indução sobre e. O caso em que $e = 0$ garante que P é trivial, logo G é um p'-grupo, assim G é p-solúvel, garantindo que $\lambda_p(G) = 0$. Assim, assumimos $e \geqslant 1$. Tome $a \in P$ um elemento de ordem p^e e suponha que a possui uma órbita de tamanho p^e no conjunto $\{S_1, S_2 \ldots, S_r\}$ relativa à ação de permutação de G induzida por conjugação. Escolha $x \in S_1 \cap P$ um elemento não trivial, então claramente $xa \in P$, logo por hipótese temos que $(xa)^{p^e} = 1$. Por outro lado,

$$(xa)^{p^e} = xx^{a^{-1}}x^{a^{-2}}\cdots x^{a}.$$

Cada fator do produto anterior pertence a um S_i distinto e dado que x é não trivial, concluímos que $(xa)^{p^e} \neq 1$ o qual é uma contradição. Portanto, a não possui órbitas de tamanho p^e no conjunto $\{S_1, S_2 \ldots, S_r\}$ relativa à ação de permutação de G induzida por conjugação. Assim, chamando $\bar{P}$ a imagem de P no grupo quociente $G/K_p(G)$, temos que o expoente de $\bar{P}$ é menor ou igual a p^{e-1}, de onde usando a indução sobre e e o Lema 2.1.9, o resultado segue. □

E. I. Khukhro e P. Shumyatsky em [19] combinam os resultados sobre variedade de grupos de expoente limitado e variedades de grupos de comprimento solúvel limitado. E. I. Khukhro e P. Shumyatsky obtêm que a resposta para o problema por eles proposto tem também resposta positiva em uma variedade de grupo a qual é o produto de várias variedades de comprimento derivado limitado e variedades de expoente limitado (lembrando que o produto de variedades foi apresentado na Definição 1.3.1), chegando ao seguinte resultado:

Teorema 2.2.5. *Seja p um número primo e seja $\mathfrak{V}$ uma variedade a qual é um produto de várias variedades solúveis e variedades de expoente limitado. Então o comprimento não-p-solúvel $\lambda_p(G)$ de grupos finitos cujos p-subgrupos de Sylow pertencem a $\mathfrak{V}$ é limitado. Mais precisamente, se um p-subgrupo de Sylow de um grupo finito G pertence à variedade $\mathfrak{B}_{p^{a_1}}\mathfrak{A}^{d_1}\cdots\mathfrak{B}_{p^{a_n}}\mathfrak{A}^{d_n}$ para alguns inteiros $a_i, d_i \geqslant 0$, então o comprimento não-p-solúvel $\lambda_p(G)$ é limitado em termos de $\sum a_i + \sum d_i$.*

No decorrer deste trabalho, diremos que um valor é $\{n_1, \ldots, n_l\}$-limitado se o valor é limitado por uma função dependendo exclusivamente dos n_i com $1 \leqslant i \leqslant l$. Por exemplo, no teorema anterior, diremos que um grupo satisfazendo as hipóteses do teorema acima tem comprimento não-p-solúvel $\{a_1, d_1, \ldots a_n, d_n\}$-limitado.

Capítulo 3

Comprimento Não-p-Solúvel de Grupos Finitos com Comutadores de Ordem Pequena

A partir deste capítulo, trabalharemos na solução do Problema 2.2.1, enunciado no capítulo anterior.

3.1 A Variedade $\mathfrak{W}(\delta_n, p^e)$

O primeiro resultado deste trabalho prova que na variedade de todos os grupos nos quais todo w-valor tem ordem dividindo p^e, p primo e w uma palavra comutador multilinear, o Problema 2.2.1 restrito aos números primos ímpares tem solução positiva. Se w é uma palavra comutador multilinear e k um inteiro positivo, então denotamos por $\mathfrak{W}(w,k)$ a variedade de todos os grupos nos quais todo w-valor tem ordem dividindo k (i.e., para todo $a \in G_w$, temos que $a^k = 1$). Explicitamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 3.1.1. *Sejam G um grupo finito e p um número primo ímpar. Se P é um p-subgrupo de Sylow de G tal que $P \in \mathfrak{W}(\delta_n, p^e)$, então $\lambda_p(G)$ é $\{e,n\}$-limitado.*

A palavra δ_n é a palavra derivada definida em (1.5).

No decorrer deste trabalho, teremos um interesse particular nos elementos da forma $[x,a,a]$, dado que, se impormos a condição de que a seja um δ_i-valor em elementos de

G, o elemento $[x,a,a]$ resulta ser um δ_{i+1}-valor em elementos de G, para todo elemento $x \in G$. Isso decorre de observar que $[x,a,a] = [a^{-x},a]^a$. É claro que esta observação pode ser estendida para um δ_i-valor em elementos de N, onde N é um subgrupo normal de G, caso no qual a normalidade de N é exigida para garantir que o elemento a^x pertença a N, para todo elemento $x \in G$.

Dado um elemento $a \in G$, denotamos por $X_G(a)$ o conjunto de todos os $x \in G$ tal que o comutador $[x,a,a]$ tem ordem maximal (onde a é um elemento qualquer do grupo, não necessariamente um δ_i-valor).

$$X_G(a) = \{x \in G; |[y,a,a]| \leqslant |[x,a,a]| \quad \text{para todo} \quad y \in G\}. \tag{3.1}$$

Uma útil e simples propriedade associada ao conjunto definido acima é a seguinte:

Lema 3.1.2. *Sejam G um grupo finito, a e g elementos de G, $x \in X_G(a)$, $y \in X_G(a^{-1})$ e $z \in X_G(a^g)$, então $|[y,a^{-1},a^{-1}]| = |[x,a,a]| = |[z,a^g,a^g]|$.*

Demonstração. A igualdade $|[x,a,a]| = |[z,a^g,a^g]|$ segue diretamente da preservação das ordens dos elementos sob conjugação.

Suponha que $|[y,a^{-1},a^{-1}]| \neq |[x,a,a]|$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $|[y,a^{-1},a^{-1}]| < |[x,a,a]|$.

É fácil observar que $[x,a,a] = [a^{-x}a,a] = [a^{-x},a]^a$ (onde a^{-x} denota o elemento $(a^{-1})^x$), e como as ordens dos elementos de um grupo são preservadas por conjugação e inversão, temos que $|[x,a,a]| = |[a^{-x},a]^{-1}|$. Assim usando propriedades dos comutadores, obtemos que

$$\begin{aligned}[a^{-x},a]^{-1} &= [a,a^{-x}] = \left[(a^x)^{x^{-1}},a^{-x}\right] = \left[(a^x)^{x^{-1}}a^{-x}a^x,a^{-x}\right] = \left[[x^{-1},a^{-x}]a^x,a^{-x}\right] \\ &= \left[[x^{-1},a^{-x}],a^{-x}\right]^{a^x}[a^x,a^{-x}] = \left[[x^{-1},a^{-x}],a^{-x}\right]^{a^x} = [x^{-a^x},a^{-x},a^{-x}].\end{aligned}$$

Para concluir, temos que

$$|[x,a,a]| = |[a^{-x},a]^{-1}| = |([a^{-x},a]^{-1})^{x^{-1}}|,$$

e dado que $([a^{-x},a]^{-1})^{x^{-1}} = [(x^{-a^x})^{x^{-1}},a^{-1},a^{-1}]$ e renomeando $(x^{-a^x})^{x^{-1}} = z$, temos que

$$|[y,a^{-1},a^{-1}]| < |[z,a^{-1},a^{-1}]|,$$

o que contradiz a hipótese que $y \in X_G(a^{-1})$, logo o resultado segue. $\square$

Para provar o Teorema 3.1.1, usaremos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.3. *Sejam G um grupo finito e P um p-subgrupo de Sylow de G para um primo p ímpar. Seja $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$ um subgrupo normal de G igual ao produto direto de grupos simples não abelianos S_i de ordem divisível por p. Sejam $a \in P$ e $b \in X_P(a)$ tais que $|[b,a,a]| = q > 1$. Então $[b,a,a]$ não possui uma órbita de comprimento q no conjunto $\{S_1,\dots,S_r\}$ relativa à ação de permutação de G induzida por conjugação.*

A prova desta proposição será dividida em vários lemas. O primeiro dos mesmos é um resultado básico de teoria de grupos, o qual apresentamos aqui, junto com sua prova, pelo seu papel determinante na diferenciação entre o caso em que o primo p é ímpar (o presente caso) e o caso em que $p = 2$.

Lema 3.1.4. *Seja H um grupo finito de ordem ímpar. Então $x^g \neq x^{-1}$ para todo elemento não trivial $x \in H$ e todo $g \in H$.*

Demonstração. Seja $|H| = 2k+1$ e suponha $x^g = x^{-1}$ para algum $x \in H$ não trivial e $g \in H$, então $x^{g^2} = x^{-g} = (x^g)^{-1} = (x^{-1})^{-1} = x$. Assim, para todo número natural n, temos $x^{g^{2n}} = x$. Tome $n = k+1$, logo $x^{g^{2(k+1)}} = x$. Por outro lado, $g^{2(k+1)} = g$, assim $x^{g^{2(k+1)}} = x^g = x^{-1}$ e portanto $x = x^{-1}$, o que gera uma contradição dado que $x \neq 1$. □

Veremos o uso do lema acima no seguinte resultado.

Lema 3.1.5. *Assuma as hipóteses da Proposição 3.1.3 e suponha que $[b,a,a]$ possui uma órbita de comprimento q no conjunto $\{S_1,S_2,\dots,S_r\}$. Seja $\{S_{i_1},S_{i_2},\dots,S_{i_q}\}$ a mencionada órbita. Então $S_{i_j}^a \in \{S_{i_1},S_{i_2},\dots,S_{i_q}\}$ para todo $1 \leqslant j \leqslant q$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumimos que $i_j = j$ para todo $1 \leqslant j \leqslant q$. Então, $[b,a,a]$ permuta regularmente $S_1,S_2,\dots,S_q$. Denote $P_i = P \cap S_i$, onde P_i é um p-subgrupo de Sylow de S_i o qual é não trivial por hipótese.

Suponha por contradição que a não estabiliza a órbita $S_1,S_2,\dots,S_r$, ou seja, existe $1 \leqslant i \leqslant q$ tal que $S_i^a \notin \{S_1,S_2,\dots,S_q\}$. Sem perda de generalidade, suponha que $S_1^a \notin \{S_1,S_2,\dots,S_q\}$. Escolha um elemento não trivial $x \in P_1$ e considere o elemento

$$[bx,a,a] = [[b,a]^x,a]^{x^{-1}x^a}[x,a,a].$$

Para simplificar a notação, chame $d = [[b,a]^x,a]^{x^{-1}x^a}$ e $y = [x,a,a]$. Note que a ação por permutação de d sobre $\{S_1, S_2, \ldots, S_q\}$ é igual à ação de $[b, a, a]$ no mesmo conjunto. Em particular, d permuta regularmente $S_1, S_2, \ldots, S_q$.

Além disso, temos que $y = x^{-a}xx^{-a}x^{a^2}$, e como assumimos que $S_1^a \neq S_1$, os elementos x e x^{-a} comutam e portanto $y = x^{-2a}xx^{a^2}$. O fato que $S_1^a \notin \{S_1, S_2, \cdots, S_q\}$ somado com o fato de x ser não trivial e não ter ordem dois garante que x^{-2a} não pertence ao produto $S_1S_2\cdots S_q$. Por outro lado, o elemento x^{a^2} pode pertencer ou não ao produto $S_1S_2\cdots S_q$.

Caso x^{a^2} não pertença a $S_1S_2\cdots S_q$, a projeção dos elementos $y^{d^{-1}}y^{d^{-2}}\cdots y^d y$ em S_1 é precisamente x. Isso decorre do fato que $x^{a^2d^i}$ e x^{ad^i} não pertencem a $S_1S_2\cdots S_q$ e $x^{d^i} \notin S_1$ para $1 \leqslant i < q$. Se temos, pelo contrário, que x^{a^2} pertence a $S_1S_2\cdots S_q$, então a projeção dos elementos $y^{d^{-1}}y^{d^{-2}}\cdots y^d y$ em S_1 é da forma $x(x^{a^2})^{d^i}$.

Dado que $b \in X_P(a)$, a ordem de $[bx, a, a]$ deve dividir q. Assim temos que

$$[bx, a, a]^q = y^{d^{-1}}y^{d^{-2}}\cdots y^d y = 1.$$

Em particular, a projeção de $y^{d^{-1}}y^{d^{-2}}\cdots y^d y$ em S_1 deve ser trivial. Dado que x não é trivial, concluímos que $x(x^{a^2})^{d^i} = 1$ para algum i. Logo, $x^{a^2d^i} = x^{-1}$, portanto x e x^{-1} são conjugados em P. Dado que p é um primo ímpar, segue que $x = 1$ (pelo Lema 3.1.4), o que é uma contradição, assim o resultado segue. □

O Lema 3.1.5 prova que, se $[b, a, a]$ tem uma órbita $\{S_1, S_2, \ldots, S_q\}$ de comprimento q, onde q é a ordem de $[b, a, a]$, então o elemento a estabiliza dita órbita. A seguir, provaremos que a^b também estabiliza a órbita.

Lema 3.1.6. *Sob as hipóteses do Lema 3.1.5, o elemento a^b estabiliza a órbita $\{S_1, S_2, \ldots, S_q\}$.*

Demonstração. Sem perda de geralidade, assumimos que $i_j = j$ para todo $1 \leqslant j \leqslant q$. Por hipótese e pelo Lema 3.1.5, $[b, a, a]$ e a estabilizam a órbita $\{S_1, S_2, \ldots, S_q\}$. Dado que $[b, a, a] = [a^{-b}, a]^a$ e $[b, a, a]$ permuta regularmente tal órbita, temos que $[a^{-b}, a]$ também permuta regularmente $S_1, S_2, \ldots, S_q$ (pois a conjugação por a pode ser vista como uma conjugação no grupo simétrico de q elementos). Como feito na demonstração do Lema 3.1.2, temos que

$$[a^{-b}, a]^{-1} = [b^{-a^b}, a^{-b}, a^{-b}].$$

Portanto, $[b^{-a^b}, a^{-b}, a^{-b}]$ também permuta regularmente os subgrupos $S_1, S_2, \ldots, S_q$. Pelo Lema 3.1.2, é claro que $|[t, a^{-b}, a^{-b}]| = q$ para todo $t \in X_P(a^{-b})$, e assim $b^{-a^b} \in X_P(a^{-b})$. Para concluir, aplicamos o Lema 3.1.5 e obtemos que a^{-b} estabiliza a órbita $\{S_1, S_2, \dots, S_q\}$, o que finaliza a prova. $\square$

Usando os resultados precedentes, procedemos à prova da Proposição 3.1.3.

Prova da Proposição 3.1.3. Queremos provar que $[b,a,a]$ não possui uma órbita de comprimento q, digamos $q = p^e$, no conjunto $\{S_1, \dots, S_r\}$ relativa à ação de permutação de G induzida por conjugação. Procederemos por contradição supondo que $[b,a,a]$ possui uma órbita de comprimento q no conjunto $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$. Seja $\{S_1, S_2, \dots, S_q\}$ a mencionada órbita, assim, pelos lemas anteriores (Lema 3.1.5 e Lema 3.1.6), sabemos que a e a^b estabilizam o conjunto $\{S_1, S_2, \dots, S_q\}$. Além disso, sabemos que $[a^{-b}, a]^a$ permuta regularmente os subgrupos $S_1, S_2, \dots, S_q$. Então, obtemos um homomorfismo natural do subgrupo $\langle a, a^b \rangle$ em um p-subgrupo de Sylow, digamos Q, do grupo das permutações de q elementos, $Sym(q)$. A imagem por este homomorfismo do elemento $[a^{-b}, a]^a$ é o ciclo $(1, 2, \dots, q)$.

$$\begin{array}{ccc} \langle a, a^b \rangle & \longrightarrow & Q \\ [a^{-b}, a]^a & \longmapsto & (1, 2, \dots, q). \end{array}$$

A estrutura dos p-subgrupos de Sylow dos grupos de permutações $Sym(p^e)$ é determinada pela Proposição 1.4.2 e é precisamente o produto entrelaçado iterado $C_p \wr_r \cdots \wr_r C_p$ de e cópias de C_p, o grupo cíclico com p elementos (uma prova deste resultado pode ser encontrada em [27]). Assim, p^e é o expoente do grupo $Q \cong C_p \wr_r \cdots \wr_r C_p$.

Dado que $[a^{-b}, a]^a$ é um comutador no grupo $\langle a, a^b \rangle$, a imagem pelo homomorfismo pertence ao grupo derivado de Q. No entanto, por causa da estrutura de Q, temos que Q' tem expoente igual a p^{e-1}. Deste modo, temos uma contradição no fato de que a imagem de $[a^{-b}, a]^a$ é o ciclo $(1, 2, \dots, q)$. Assim, $[b, a, a]$ não possui uma órbita de comprimento $q = p^e$, concluindo a prova. $\square$

Lembraremos a seguir o enunciado do Teorema 3.1.1 e, usando os resultados anteriores, daremos início a sua demonstração.

Teorema 3.1.1 *Sejam G um grupo finito e p um número primo ímpar, seja P um p-subgrupo de Sylow de G tal que $P \in \mathfrak{W}(\delta_n, p^e)$, então $\lambda_p(G)$ é $\{e, n\}$-limitado.*

Demonstração. Provaremos aqui que $\lambda_p(G) \leqslant n + e$. Assumiremos $R_p(G) = 1$, denotaremos $Soc(G) = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$ e procederemos por indução sobre n.

Quando $n = 0$, usamos indução sobre e. Por hipótese, $P \in \mathfrak{W}(\delta_0, p^e)$, o que significa que P tem expoente dividindo p^e, logo pela Proposição 2.2.4, o resultado segue.

Desse modo, assumimos que $n \geqslant 1$. Seja l o número máximo para o qual existe $a \in P_{\delta_{n-1}}$ (um δ_{n-1}-valor em elementos de P) e $b \in X_P(a)$ tal que $|[b,a,a]| = p^l$. Dado que $[b,a,a] = [a^{-b},a]^a$, temos que $[b,a,a]$ é um δ_n-valor em elementos de P e portanto $|[b,a,a]| \leqslant p^e$, logo $l \leqslant e$. Usaremos l como um novo parâmetro de indução. Nosso objetivo é mostrar que $\lambda_p(G) \leqslant n + l$.

Se $l = 0$, então $|[g,a,a]| = 1$ para todo $a \in P_{\delta_{n-1}}$ e todo $g \in P$, portanto $[a^{-g},a] = 1$, o que implica que $\langle a^P \rangle$ é abeliano para todo $a \in P_{\delta_{n-1}}$. Por [19, Lemma 4.3], $\langle a^P \rangle \leqslant K_p(G)$ e portanto a imagem de P no quociente $G/K_p(G)$ é solúvel com comprimento derivado no máximo $n - 1$, logo o resultado segue por indução sobre n.

Assumamos então que $l \geqslant 1$. Escolha um δ_{n-1}-valor a em elementos de P, e $b \in X_P(a)$ tal que $|[b,a,a]| = p^l$. A Proposição 3.1.3 garante que a ordem de $[b,a,a]$ em G/K_p divide p^{l-1}. Usando a indução sobre l, temos que $\lambda_p(G/K_p(G)) \leqslant n + l - 1$ e assim $\lambda_p(G) \leqslant n + l$, garantindo que $\lambda_p(G) \leqslant n + e$. □

Como corolário do Teorema 3.1.1, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.1.7. *Sejam p um primo ímpar e w uma palavra comutador multilinear de peso n. Seja P um p-subgrupo de Sylow de um grupo finito G e assuma que todo w-valor em elementos de P tem ordem dividindo p^e. Então $\lambda_p(G) \leqslant n + e$.*

A prova do corolário acima baseia-se fundamentalmente na seguinte afirmação: Dada uma palavra comutador multilinear em n variáveis, então cada δ_n-valor em um grupo G é um w-valor (a prova desta afirmação pode ser encontrada em [28, Lemma 4.1]). Portanto, se temos condições na ordem dos w-valores como na hipótese do Corolário 3.1.7, obtemos condições na ordem dos δ_n-valores como na hipótese do Teorema 3.1.1, de onde o resultado segue imediatamente.

3.2 A Variedade $\mathfrak{W}(\delta_1, 2^e)$

Para concluir este capítulo, mostraremos a seguir um resultado mais fraco para o caso onde o primo é 2. Neste caso, consegue-se limitar o comprimento não-solúvel quando damos condições para a ordem dos comutadores (δ_1 valores) do 2-subgrupo de Sylow do grupo.

Teorema 3.2.1. *Seja G um grupo finito de ordem divisível por 2 e P um 2-subgrupo de Sylow de G tal que $d^{2^e} = 1$ para todo comutador $d \in P$ (um δ_1-valor em elementos de P). Então $\lambda(G) \leqslant e$.*

Claramente, este teorema pode ser escrito de forma análoga ao Teorema 3.1.1, usando uma variedade do tipo $\mathfrak{W}(w,e)$ da seguinte maneira:

Sejam G um grupo finito e P um 2-subgrupo de Sylow de G tal que $P \in \mathfrak{W}(\delta_1, 2^e)$, então $\lambda(G)$ é $\{e\}$-limitado.

Procedemos agora à prova deste resultado.

Prova do Teorema 3.2.1. Como em provas anteriores, podemos supor sem perda de generalidade que o radical solúvel de G é trivial ($R(G) = 1$). Seja $\{S_1, \ldots, S_r\}$ o conjunto de fatores do socle de G (i.e., $Soc(G) = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$). Procederemos agora por indução sobre e.

Por hipótese, todo δ_1-valor em elementos de P tem ordem menor ou igual a 2^e. Suponha então que existe $d = [a,b] \in P_{\delta_1}$ tal que a ordem de d é exatamente 2^e e d tenha uma órbita no conjunto $\{S_1, \ldots, S_r\}$ sob a ação permutacional induzida por conjugação de tamanho 2^e. Sem perda de generalidade, tome $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_{2^e}\}$ tal órbita; provaremos agora que tanto a como b estabilizam S. Para começar, provaremos que a estabiliza S por contradição.

Suponha que exista $S_i \in S$ tal que $S_i^a \notin S$. Sem perda de generalidade, podemos supor $i = 1$, assim $S_1^a \notin S$. Já que todos os fatores do socle de G são grupos simples não-abelianos de ordem par, podemos garantir que $P_i = P \cap S_i$ é um 2-subgrupo de Sylow de S_i, o qual é não trivial. Assim, escolha $x \in P_1$ não trivial, e tome o elemento $[a,bx] = [a,x][a,b]^x$. Observe que a ação por conjugação do elemento $\bar{d} = [a,b]^x$ sobre o conjunto $\{S_1, \ldots, S_r\}$ é igual à ação de d, pelo fato de que a ação por conjugação de x em todos os S_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, é trivial. Além disso, como b e x são elementos de P, temos que bx também o é, e assim $[a,bx] \in P_{\delta_1}$. Logo, por hipótese, podemos assegurar que $[a,bx]^{2^e} = 1$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[a,bx]^{2^e} = ([a,x]\bar{d})^{2^e} &= [a,x][a,x]^{\bar{d}^{-1}}[a,x]^{\bar{d}^{-2}}\cdots[a,x]^{\bar{d}} \\
&= x^{-a}x(x^{-a}x)^{\bar{d}^{-1}}(x^{-a}x)^{\bar{d}^{-2}}\cdots(x^{-a}x)^{\bar{d}} \\
&= x^{-a}xx^{-a\bar{d}^{-1}}x^{\bar{d}^{-1}}x^{-a\bar{d}^{-2}}x^{\bar{d}^{-2}}\cdots x^{-a\bar{d}}x^{\bar{d}}.
\end{aligned}$$

Cada fator do produto anterior pertence a um S_i dado, assim procederemos a uma breve análise deste fato.

Como observado anteriormente, $x^{\bar{d}^{-i}}$ pertence ao mesmo fator que $x^{d^{-i}}$, a saber ambos pertencem a $S_1^{d^{-i}} = S_{p^e-(i-1)}$. Portanto, todos os elementos da forma $x^{\bar{d}^{-i}}$, com $1 < i \leqslant 2^e$, pertencem a fatores distintos, pela suposição do tamanho da órbita. Analogamente, $x^{-a\bar{d}^{-i}}$ pertence ao mesmo fator que $x^{-ad^{-i}}$ e dada a suposição de que $S_i^a \notin S$, temos que $S_1^{ad^j} \notin S$ para todo $1 < j \leqslant 2^e$. Logo, o único elemento pertencendo a S_1 é x, e como foi escolhido sendo não trivial temos que o elemento $x^{-a}xx^{-a\bar{d}^{-1}}x^{\bar{d}^{-1}}x^{-a\bar{d}^{-2}}x^{\bar{d}^{-2}}\cdots x^{-a\bar{d}}x^{\bar{d}}$ resulta ser não trivial, gerando uma contradição. Assim, concluímos que a estabiliza a órbita S.

Vale a pena observar que, de propriedades básicas dos comutadores (Lema1.1.1), podemos afirmar que $d^{-1} = [b,a]$. Além disso, d^{-1} satisfaz as mesmas condições que d. De fato, d^{-1} tem ordem 2^e, e a órbita de S_1 com respeito a este elemento coincide com a órbita de S_1 com respeito a d, ou seja, d^{-1} possui uma órbita de tamanho 2^e sob a ação permutacional induzida por conjugação no conjunto $\{S_1, \ldots, S_r\}$, a saber a órbita $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_{2^e}\}$. Assim, uma construção análoga à feita para d usando agora o elemento $[b, ax]$ nos leva à conclusão que b também estabiliza a órbita S.

Tendo que tanto a como b estabilizam S, obtemos um homomorfismo natural do subgrupo $\langle a,b\rangle$ no grupo das permutações de 2^e elementos, $Sym(2^e)$, onde a imagem por dito homomorfismo do elemento $[a,b]$ é o ciclo $(1,2,\ldots,2^e)$. Por outro lado, é bem conhecido que o grupo derivado do grupo $Sym(n)$ é o grupo alternado A_n, e a permutação $(1,2,\ldots,2^e)$ é uma permutação ímpar em $Sym(2^e)$. Portanto, $(1,2,\ldots,2^e) \notin A_{2^e}$, o que é uma contradição.

Assim, concluímos que se existe d um δ_1 valor em elementos de P tal que a ordem de d é exatamente 2^e, então a imagem de d no quociente $G/K_2(G)$ tem ordem estritamente menor que 2^e. Logo, da Proposição 2.1.6, do Lema 2.1.9 e da hipótese de indução, o resultado segue. $\square$

Capítulo 4

Algumas Soluções Positivas para Produtos de Variedades

Começaremos este capítulo mostrando algumas generalizações obtidas para os resultados provados no capítulo anterior.

4.1 A Variedade $\mathfrak{X}_s^k(n)$

O primeiro dos resultados aqui provados generaliza o Teorema 2.2.5. Antes de enunciá-lo, estableceremos algumas notações.

Denotamos por $\mathfrak{X}(n)$ a variedade de todos os grupos satisfazendo a lei $[x,y]^n = 1$, onde n é um número inteiro positivo. Definimos também $\mathfrak{X}^k(n)$ como sendo o produto de k variedades $\mathfrak{X}(n)$.

Observe que a variedade $\mathfrak{X}(n)$ coincide com a variedade $\mathfrak{W}(\delta_1, n)$. A variedade $\mathfrak{X}^k(n)$, por sua vez, é igual a $\mathfrak{W}(\delta_1, n)\mathfrak{W}(\delta_1, n)\cdots\mathfrak{W}(\delta_1, n)$ (o produto de k variedades $\mathfrak{W}(\delta_1, n)$).

Teorema 4.1.1. *Seja p um número primo. O comprimento não-p-solúvel $\lambda_p(G)$ de um grupo finito G cujos p-subgrupos de Sylow pertencem a $\mathfrak{X}^k(n)$ é $\{k,n\}$-limitado.*

Como observado acima, o Teorema 4.1.1 generaliza o Teorema 2.2.5, já que dado o produto de variedades $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}_{e_1}\mathfrak{A}^{d_1}\cdots\mathfrak{B}_{e_r}\mathfrak{A}^{d_r}$, existem inteiros n e k tais que $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{X}^k(n)$. Para deixar mais clara esta afirmação, basta observar que se $n = mmc(e_1, \ldots, e_r)$, então $\mathfrak{B}_{e_i} \subseteq \mathfrak{X}(n)$ para todo $1 \leqslant i \leqslant r$. Por outro lado, $\mathfrak{A}^{d_i} \subseteq \mathfrak{X}^{d_i}(n)$ para todo $1 \leqslant i \leqslant r$. Assim, podemos concluir que, se chamamos $d = \sum_{i=1}^{r} d_i$, então para $k = d + r$, verifica-se que $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{X}^k(n)$.

Já para o caso em que p é um primo ímpar, obtemos um resultado mais forte. Para enunciar o mesmo, denotamos por $\mathfrak{X}_s(n)$ a variedade constituída por todos os grupos satisfazendo a equação $\delta_s^n = 1$, onde δ_s é a palavra derivada definida indutivamente em (1.5). Denotamos por $\mathfrak{X}_s^k(n)$ o produto de k variedades $\mathfrak{X}_s(n)$.

Teorema 4.1.2. *Seja p um primo ímpar. O comprimento não-p-solúvel $\lambda_p(G)$ de um grupo finito G cujos p-subgrupos de Sylow pertencem a $\mathfrak{X}_s^k(n)$ é $\{k, n, s\}$-limitado.*

É claro que os teoremas acima generalizam o Teorema 3.2.1 e o Teorema 3.1.1 respectivamente.

O seguinte lema será de utilidade para a prova dos teoremas desta seção. Reproduziremos aqui a prova do mesmo, demonstrado por E. I. Khukhro e P. Shumyatsky em [19, Lemma 4.3].

Lema 4.1.3. *Sejam P um p-subgrupo de Sylow de um grupo finito G e A um subgrupo normal abeliano de P. Então $A \leqslant K_p(G)$ se $p \neq 2$ e $A^2 \leqslant K(G)$ se $p = 2$.*

Demonstração. Como em provas anteriores, assumimos que o radical p-solúvel de G é trivial. Seja $Soc(G) = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$, chamamos $P_i = P \cap S_i$, onde P_i é um p-subgrupo de Sylow de S_i não trivial. Procedemos agora por contradição. Suponha que A^2 não é um subgrupo de $K_p(G)$, então existe um elemento $a \in A$ que possui uma órbita de tamanho m no conjunto $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$, onde m é um inteiro maior que 2. Sem perda de generalidade, suponha $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ tal órbita. Tome um elemento não trivial $x \in P_1$, então o elemento $[x, a]$ pertence a $S_1 \times S_2$. Dado que tanto x^{-1} como x^a são não triviais, o elemento $[x, a]$ tem projeções não triviais em S_1 e em S_2. Conjugando $[x, a]$ por a, obtemos $[x, a]^a = x^{-a} x^{a^2}$, assim $[x, a]^a$ tem projeções não triviais em S_2 e S_3. Por outro lado, ambos, a e $[x, a]$, pertencem a A, e como A é abeliano, $[x, a]^a = [x, a]$ o que é um absurdo, tendo em conta as projeções não triviais destes elementos.

Assim, podemos concluir que $A^2 \leqslant K_p(G)$ para todo primo p. Se adicionamos a hipótese de que $p \neq 2$, obtemos diretamente que $A \leqslant K_p(G)$. $\square$

O seguinte resultado, corolário direto do lema acima, foi enunciado em [5].

Lema 4.1.4. *Sejam p um primo ímpar, P um p-subgrupo de Sylow de um grupo finito G e N um subgrupo normal de P. Suponha que N é solúvel com comprimento derivado d. Então $N \leqslant K_{p,d}(G)$.*

Demonstração. Procederemos por indução no comprimento derivado. O caso em que $d = 1$ foi provado no Lema 4.1.3. Agora, suponhamos que N tem comprimento derivado d, logo $N^{(d-1)}$ é abeliano e característico em N, pelo qual $N^{(d-1)}$ está nas hipóteses do Lema 4.1.3, de onde obtemos que $N^{(d-1)} \leqslant K_p(G)$. Assim, concluímos que $\bar{N}$, a imagem de N no grupo quociente $\bar{G} = G/K_p(G)$, possui comprimento derivado menor ou igual a $d-1$. Usando a hipótese de indução, garantimos que $\bar{N} \leqslant K_{p,d-1}(\bar{G})$, portanto, da definição de p-kernel de ordem superior, o resultado segue. □

4.2 Prova dos Resultados Principais deste Capítulo

Prova do Teorema 4.1.2. Lembremos que p é um primo ímpar. Seja G um grupo finito cujos p-subgrupos de Sylow pertencem a $\mathfrak{X}_s^k(n)$. Desejamos provar que o comprimento não p-solúvel de G é limitado por uma função dependendo exclusivamente de s, k e n. Podemos, sem perda de generalidade, supor $n = p^e$. Tendo em consideração a suposição anterior, provaremos que $\lambda_p(G)$ é limitado por uma função dependendo exclusivamente de s, k e e.

No caso em que $k = 1$, as hipóteses garantem que todo δ_s-valor nos p-subgrupos de Sylow de G tem ordem dividindo p^e, o que nos deixa nas condições do Teorema 3.1.1 e o resultado segue. Dessa forma, assumiremos aqui que $k \geqslant 2$ e usaremos indução sobre k.

Sejam P um p-subgrupo de Sylow de G e N um subgrupo normal de P tal que $N \in \mathfrak{X}_s(n)$ e o quociente $P/N \in \mathfrak{X}_s^{k-1}(n)$.

Lembremos que, como N é normal, sempre que a é um δ_{s-1}-valor em elementos de N e x é um elemento de P, o comutador $[x,a,a]$ é um δ_s-valor em elementos de N. Seja l o maior número para o qual existem um δ_{s-1}-valor a em elementos de N e um elemento $x \in X_P(a)$ tal que $|[x,a,a]| = p^l$ (onde $X_P(a)$ é o conjunto definido em (3.1)). É claro que $l \leqslant e$. Usaremos l como um segundo parâmetro de indução.

Se $l = 0$, então $|[x,a,a]| = 1$ para todo $x \in P$ e todo δ_{s-1}-valor a em elementos de N. Logo $\langle a^P \rangle$ é abeliano para todo $a \in N_{\delta_{s-1}}$ e, pelo Lema 4.1.3, temos que $a \in K_p(G)$. Devido ao fato anterior, obtemos que a imagem de N no grupo quociente $G/K_p(G)$ é solúvel, com comprimento derivado menor ou igual a $s-1$. Do Lema 4.1.4, podemos concluir que $N \leqslant K_{p,s}(G)$. Portanto a imagem de P no quociente $G/K_{p,s}(G)$ é um p-subgrupo de Sylow de $G/K_{p,s}(G)$ e pertence a $\mathfrak{X}_s^{k-1}(n)$, assim por indução sobre k, o resultado segue.

Assumimos então que $l \geqslant 1$. Tomemos agora $a \in N_{\delta_{s-1}}$ e $x \in X_P(a)$ tal que $|[x,a,a]| = p^l$. Utilizando a Proposição 3.1.3, obtemos que $[x,a,a]$ não possui uma órbita de comprimento p^l no conjunto $\{S_1,\ldots,S_r\}$ relativa à ação de permutação de G induzida por conjugação. Como consequência, $[x,a,a]^{p^{l-1}}$ pertence a $K_p(G)$. Logo, por indução sobre l, o comprimento não-p-solúvel $\lambda_p(G/K_p(G))$ é limitado em termos de k, s e e exclusivamente. Assim, dado que $\lambda_p(G) \leqslant 1+\lambda_p(G/K_p(G))$, o resultado segue. □

Agora, centraremos a nossa atenção no Teorema 4.1.1. É fácil observar que quando restringimos este teorema ao caso em que p é ímpar, o Teorema 4.1.1 se torna um corolário do Teorema 4.1.2. Por conseguinte, focaremos no caso em que $p=2$. Denotaremos a partir daqui K_i para $K_i(G) = K_{2,i}(G)$.

Antes de começar a prova do Teorema 4.1.1, enunciaremos e provaremos um resultado de vital importância para dita prova.

Lema 4.2.1. *Sejam G um grupo finito e N um subgrupo normal de um 2-subgrupo de Sylow de G tal que $[a,b]^e = 1$ para todo $a,b \in N$. Então existem números inteiros e-limitados e_1 e j tais que $N^{e_1} \leqslant K_j$.*

Demonstração. Para esta prova, utilizaremos indução sobre e. O caso em que $e=1$, segue diretamente do Lema 4.1.3, afinal, se $e=1$, então N é abeliano. Logo, obtemos que $N^2 \leqslant K_1$. Sendo assim, assumiremos que e é uma potência não trivial de 2 e que existem $a,b \in N$ tal que $[a,b]^{e/2} \neq 1$.

Sem perda de generalidade, assumimos que $R(G)=1$ e denotamos o 2-kernel como K. Se $[a,b]^{e/2} \in K$ para todo $a,b \in N$, o resultado segue diretamente da hipótese de indução aplicada no quociente G/K. Em vista disso, assumimos que N contém elementos a e b tais que $[a,b]^{e/2} \notin K$. Seja $Soc(G) = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$, onde os subgrupos S_i são subgrupos simples subnormais de G, e elementos de G permutam os fatores S_i. Dado que $[a,b]^{e/2} \notin K$, podemos garantir que o comutador $[a,b]$ tem uma órbita de tamanho e no conjunto $\{S_1,S_2,\ldots,S_r\}$. Assim sendo, assumimos que $S = \{S_1,S_2,\ldots,S_e\}$ é uma $[a,b]$-órbita de tamanho maximal (com respeito à ação de permutação induzida por conjugação).

Suponhamos agora que a órbita S é invariante sob a ação dos dois elementos a e b. Então, obtemos um homomorfismo natural do grupo $\langle a, b\rangle$ em um 2-subgrupo de Sylow do grupo simétrico $Sym(e)$. Seja Q tal subgrupo, i.e., $Q \in Syl_2(Sym(e))$, e o homomorfismo leva o elemento $[a,b]$ no ciclo $(1,2,\ldots,e)$.

$$\begin{array}{ccc} \langle a,b\rangle & \longrightarrow & Q \\ [a,b] & \longmapsto & (1,2,\ldots,e). \end{array}$$

Entretanto, o ciclo $(1,2,\ldots,e)$ pode ser expresso como produto de transposições da seguinte maneira $(1,2,\ldots,e) = (1,2)(2,3)\cdots(e-1,e)$. Desta forma, observamos que $(1,2,\ldots,e)$ é representado pelo produto de $e-1$ transposições. Dado que e é uma potência de 2, temos que $(1,2,\ldots,e)$ não pertence ao grupo alternado A_e, portanto não é um comutador em $Sym(e)$. Mas isso é uma contradição, logo ao menos um dos elementos, a ou b, não estabiliza a órbita S. Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que $S_1^a \notin \{S_1, S_2, \ldots, S_e\}$.

Seja P um 2-subgrupo de Sylow de G contendo N como um subgrupo normal. Tome um elemento não trivial $x \in P \cap S_1$ e $h \in N$. Logo, pela normalidade de N em P, temos que $[x,h] \in N$. Tomaremos agora o elemento $[a, b[x,h]]$ cuja ordem é menor ou igual a e, pois tanto a como $b[x,h]$ pertencem a N. Supondo que a ordem de $[a,b[x,h]]$ é menor que e, obtemos que $[a,b[x,h]]^{e/2} = 1$. Por outro lado, temos que, por propriedades de comutadores (Lema 1.1.1), $[a,b[x,h]] = [a,[x,h]][a,b]^{[x,h]}$, assim

$$[a,b[x,h]]^{e/2} = ([a,[x,h]][a,b]^{[x,h]})^{e/2} = [a,[x,h]]^{e/2}([a,b]^{[x,h]})^{e/2}.$$

Como $([a,b]^{[x,h]})^{e/2} \neq 1$ e $([a,b]^{[x,h]})^{e} = 1$, podemos garantir que $[a,[x,h]]^{e/2} = [a,b]^{[x,h]}$. Além disso, como $[a,[x,h]]$ é um comutador em elementos de N, sua ordem divide e. Logo, $[a,[x,h]]^e = 1$, de onde obtemos que $([a,b]^{[x,h]})^2 = 1$, uma contradição no caso em que $e \geqslant 4$. Se $e = 2$, então $[a,b] = [a^{[h,x]},[x,h]] = a^{-[h,x]}a$, e a imagem de $a^{-[h,x]}a$ no quociente G/K é trivial, contradizendo a existência da órbita de tamanho e do elemento $[a,b]$. Logo a ordem de $[a,b[x,h]]$ é exatamente e. Denotando $y = [a,[x,h]]$ e $d = [a,b]^{[x,h]}$, obtemos que $[a,b[x,h]] = yd$, como observado acima. Logo, temos que

$$1 = (yd)^e = yy^{d^{-1}}y^{d^{-2}}\cdots y^{d}. \tag{4.1}$$

Façamos uma breve análise da estrutura de y:

$$y = [a,[x,h]] = [a,x^{-1}x^h] = (x^{-1}x^h)^{-a}x^{-1}x^h = x^{-ha}x^a x^{-1}x^h.$$

Assim sendo, temos que y tem projeções nos fatores simples S_1, S_1^a, S_1^h e S_1^{ha}. Esta afirmação resulta evidente ao observar que os elementos x^{-1}, x^a, x^h e x^{-ha} pertencem aos fatores S_1, S_1^a, S_1^h e S_1^{ha}, respectivamente. Escrevemos $t = x^{-ha}x^a x^h$ e supomos agora que ambos fatores simples S_1^h e S_1^{ha} não pertencem à órbita S. Assim, em particular $S_1^{ha} \neq S_1$ e, dado que partimos da suposição que $S_1^a \notin \{S_1, S_2, \ldots, S_e\}$, temos também que $S_1^a \neq S_1$, logo $[x^a, x^{-1}] = [x^{-ha}, x^{-1}] = 1$. Portanto, $y = x^{-1}t$, mais ainda, temos que $[t, x^{-1}] = 1$ e a equação (4.1) se transforma em

$$1 = (yd)^e = tt^{d^{-1}}t^{d^{-2}} \ldots t^d x^{-1}x^{-d^{-1}}x^{-d^{-2}} \ldots x^{-d}.$$

Como supomos que ambos, S_1^h e S_1^{ha}, não pertencem a S, todos os elementos da forma t^{d^i}, na equação acima, só têm projeções não triviais em fatores simples fora de S, pelo qual deduzimos que

$$1 = x^{-1}x^{-d^{-1}}x^{-d^{-2}} \ldots x^{-d}.$$

Tendo em consideração que para $1 \leqslant i < j \leqslant e$, x^{-d^i} e x^{-d^j} pertencem a fatores simples distintos dentro de S, concluímos que x deveria ser trivial, o qual é uma contradição. Portanto, garantimos que ao menos um dos fatores S_1^h ou S_1^{ha} pertence à órbita S.

Consequentemente, se $S_1^{ha} \in S$, garantimos que $S_1^h \in \{S_1^{a^{-1}}, S_2^{a^{-1}}, \ldots, S_e^{a^{-1}}\}$ e, no outro caso, $S_1^h \in \{S_1, S_2, \ldots, S_e\}$. Com as observações anteriores, podemos afirmar que $S_1^h \in \{S_1, S_2, \ldots, S_e, S_1^{a^{-1}}, S_2^{a^{-1}}, \ldots, S_e^{a^{-1}}\} = S \cup S^{a^{-1}}$. Dada a arbitrariedade na escolha de h em N, inferimos que as N-órbitas contendo S_1 têm no máximo $2e$ fatores. Em particular, N^{2e} normaliza S_1. Um raciocínio análogo pode ser aplicado para todos os fatores da $[a,b]$-órbita, pelo qual N^{2e} normaliza S_i para todo $1 \leqslant i \leqslant e$. Mais ainda, N^{2e} normaliza todo fator simples $S_l \in \{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ que pertence a uma d-órbita de tamanho e, onde d é um δ_1-valor em elementos de N.

Sejam a_1 e b_1 dois elementos de N^{2e}. Então, a_1 e b_1 estabilizam todos fatores de toda d-órbita de tamanho e com d sendo um δ_1-valor em elementos de N. Portanto, $[a_1, b_1]$ também deixa invariantes os mencionados fatores e, por causa disso, $[a_1, b_1]$ não possui nenhuma órbita de tamanho e no conjunto $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$. Assim, podemos afirmar que

$[a_1, b_1]^{e/2} \in K$; este fenômeno acontece para toda escolha de $a_1, b_1 \in N^{2e}$.

Assim, levando em consideração que o subgrupo N^{2e} é normal em P, podemos usar a hipótese de indução sobre o subgrupo N^{2e}, obtendo que existem números e_0 e j, e-limitados, tais que $(N^{2e})_0^e \leqslant K_j$, garantindo que $N^{2ee_0} \leqslant K_j$. □

Com o resultado acima, completamos as ferramentas necessárias para a prova do Teorema 4.1.1, à qual procederemos a seguir.

Prova do Teorema 4.1.1. Seja G um grupo finito cujos p-subgrupos de Sylow, para um primo p, pertencem a $\mathfrak{X}^k(n)$. Devemos provar que o comprimento não-p-solúvel de G é limitado em termos de k e n unicamente. Como observado anteriormente, quando p é um primo ímpar o resultado segue imediatamente do Teorema 4.1.2. Em vista disso, assumimos que $p = 2$ e n é uma potência de 2.

Seja P um 2-subgrupo de Sylow de G e N um subgrupo normal de P tal que $N \in \mathfrak{X}(n)$ e o quociente $P/N \in \mathfrak{X}^{k-1}(n)$. Denotaremos aqui $\mathfrak{X}^0(n)$ como a variedade trivial e assim, se $k = 1$, então $N = P$.

O Lema 4.2.1 garante a existência de números e e j n-limitados tais que $N^e \leqslant K_j$. Trabalhando no quociente G/K_j, podemos assumir que a imagem de N neste quociente tem expoente dividindo e, pelo qual podemos assumir que o próprio N tem expoente dividindo e. Se $k = 1$, os 2-subgrupos de Sylow de G tem expoente dividindo e, caso no qual o resultado segue. Suponhamos então que $k \geqslant 2$. Como N tem expoente dividindo e e $P/N \in \mathfrak{X}^{k-1}(n)$, deduzimos que $P \in \mathfrak{X}^{k-1}(en)$. Logo a indução sobre k completa a prova. □

Capítulo 5

Condições de Engel e o Comprimento Não-p-Solúvel

No presente capítulo, apresentaremos alguns resultados originais concernentes a condições de Engel. Veremos como, impondo este tipo de condições nos p-subgrupos de Sylow de um grupo finito G, obtemos limitações do comprimento não-p-solúvel de G. Em seguida, generalizaremos alguns dos resultados expostos nos capítulos anteriores acrescentando às variedades definidas anteriormente uma condição de Engel.

5.1 Limitação da Ordem de Elementos m-Engel

Nesta seção, daremos alguns resultados que demonstram como condições de Engel podem ser transformadas em limitações de expoente em um quociente apropriado. O principal resultado que exibe esta relação é a seguinte proposição.

Proposição 5.1.1. *Seja G um grupo finito de ordem divisível por um número primo p. Tome P um p-subgrupo de Sylow de G, e $g \in P$ um elemento m-Engel em P. Então $\bar{g}$, a imagem de g no grupo quociente $\bar{G} = G/K_p(G)$, tem ordem menor ou igual a m.*

A prova desta proposição será dividida em dois lemas, o primeiro dos mesmos nos dá uma caracterização da estrutura dos valores m-Engel em elementos de um grupo G. Lembramos que um valor m-Engel é um elemento de G que pertence ao conjunto $\{[h,_m g] \in G \mid g, h \in G \text{ e } m \in \mathbb{N}\}$.

Lema 5.1.2. *Sejam m um número inteiro positivo e G um grupo finito. Então, todo valor m-Engel , $[h,_m g]$, com $g, h \in G$ pode ser escrito como um produto de conjugados de h e h^{-1} por potências de g da forma g^i com $i \leqslant m$. Mais ainda, se $[h^{g^i}, h^{g^j}] = 1$ para todo $0 \leqslant i, j \leqslant m$ e se denotamos $s(m,g) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}g^i$, então $[h,_m g]$ pode ser expresso como*

$$[h,_m g] = h^{s(m,g)},$$

onde $h^{x+y} = h^x h^y$ e h^y é o conjugado de h por y.

Demonstração. Inicialmente, demonstraremos a primeira afirmação. Provaremos por indução sobre m que todo valor m-Engel , $[h,_m g]$, pode ser escrito como um produto de conjugados de h e h^{-1} por potências de g da forma g^i com $i \leqslant m$.

O caso $m = 1$ é imediato dado que $[h,g] = h^{-1}h^g$.

Para o caso geral, usamos a hipótese indutiva para $m-1$, então suponha que

$$[h,_{m-1} g] = h^{\sum_{i=0}^{l}(-1)^{j_i}g^{k_i}},$$

onde $j_i \in \{0,1\}$ e $k_i \leqslant m-1$ (mas não é necessário que $k_i \neq k_s$ com $i \neq s$), assim

$$[h,_m g] = [[h,_{m-1} g], g] = [h,_{m-1} g]^{-1}[h,_{m-1} g]^g = h^{\sum_{i=0}^{l}(-1)^{j_{l-i}+1}g^{k_{l-i}}+\sum_{i=0}^{l}(-1)^{j_i}g^{k_i+1}},$$

e o resultado segue.

Agora, suponha que $[h^{g^i}, h^{g^j}] = 1$ para todo $0 \leqslant i, j \leqslant m$, provaremos aqui que $[h,_m g] = h^{s(m,g)}$, onde $s(m,g)$ é a aplicação definida no enunciado do lema. Analogamente à prova da primeira afirmação, usaremos m como parâmetro de indução. Observamos que a base indutiva desta prova coincide com a base indutiva do caso anterior. Assim sendo, procederemos diretamente ao passo indutivo supondo que

$$[h,_{m-1} g] = h^{s(m-1,g)},$$

onde

$$s(m-1,g) = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}\binom{m-1}{i}g^i.$$

Então

$$[h,_m g] = [[h,_{m-1} g], g] = [h,_{m-1} g]^{-1}[h,_{m-1} g]^g = h^{s(m,g)},$$

concluindo a prova do resultado. □

Lema 5.1.3. *Sejam G um grupo finito, p um número primo, P um p-subgrupo de Sylow de G e $S_1 \times \cdots \times S_r$ um subgrupo normal de G igual ao produto direto de grupos simples não abelianos S_i de ordem divisível por p. Seja b um elemento m-Engel de P. Então, b não tem órbitas de tamanho maior que m no conjunto $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ na ação por permutação de G em $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ induzida por conjugação.*

Demonstração. Suponha que b tenha uma órbita de tamanho $m + k$, com $1 \leqslant k$, sobre o conjunto $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$. Seja $\{S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_{m+k}}\}$ tal órbita. Sem perda de generalidade, assuma que $i_j = j$ para $j = 1, \ldots, m + k$. Assim, b permuta $S_1, S_2, \ldots, S_{m+k}$. Note que $P_i = P \cap S_i$ é um p-subgrupo de Sylow de S_i para cada i, e $P_i \neq 1$ por hipótese. Escolhemos um elemento não-trivial $x \in P_1$ e consideramos o elemento $[x,_m b]$, o qual é trivial por hipótese. Por outro lado, dado que $x^{b^i} \in S_{i+1}$ para todo $i = 1, ..., m$ e que $S_1, ..., S_{m+1}$ são distintos dois a dois, obtemos através do Lema 5.1.2 que as projeções canônicas sobre S_1 e S_{m+1} de $[x,_m b]$ são não-triviais, o que é uma contradição. □

Agora temos ferramentas suficientes para completar a prova da Proposição 5.1.1.

Prova da Proposição 5.1.1. Temos p um número primo e P um p-subgrupo de Sylow de G. Seja $g \in P$ um elemento m-Engel em P. Sem perda de generalidade, podemos supor que o radical p-solúvel de G é trivial. Pelo Lema 5.1.3, temos que g não possui uma órbita de tamanho maior que m no conjunto $\{S_1, ..., S_r\}$, onde os S_i são os componentes do socle de G, i.e., $Soc(G) = S_1 \times \cdots \times S_r$. Dado que g é um p-elemento, temos que g não possui órbitas de tamanho maior que p^e, onde e é o maior número inteiro tal que $p^e \leqslant m$. Seja $\bar{g}$ a imagem de g em $G/K_p(G)$, então a ordem de $\bar{g}$ é uma potência de p menor ou igual a p^e, como queríamos demonstrar. □

5.2 Limitando o Comprimento Não-p-Solúvel de Grupos Finitos Através de Condições de Engel nos Seus p-Subgrupos de Sylow

Na seção anterior, observamos como condições de Engel em um elemento de um p-subgrupo de Sylow P de um grupo finito G garantiam limitações na ordem de dito elemento no grupo quociente $G/K_p(G)$. Na presente seção, usaremos este resultado para obter, como uma consequência direta do mesmo, uma limitação do comprimento não-p-solúvel de grupos finitos cujos p-subgrupos de Sylow são m-Engel.

Teorema 5.2.1. *Seja G um grupo finito e P um p-subgrupo de Sylow de G tal que P é m-Engel. Assuma e o maior inteiro tal que $p^e \leqslant m$. Então $\lambda_p(G) \leqslant e+1$.*

Demonstração. Pela definição de grupo m-Engel, temos que todo elemento de P é m-Engel. Assim, decorre da Proposição 5.1.1 que para todo elemento $g \in P$, a imagem de g no grupo quociente $\bar{G} = G/K_p(G)$ tem ordem menor ou igual a m. Como e é o maior inteiro tal que $p^e \leqslant m$, temos que a imagem de g no grupo quociente $\bar{G}$ tem ordem menor ou igual a p^e. Se $\bar{P}$ denota a imagem de P no grupo quociente $\bar{G}$, então as observações anteriores garantem que $exp(\bar{P}) \leqslant p^e$.

Assim, a Proposição 2.2.4 garante que $\lambda_p(\bar{G}) \leqslant e$. Logo, pelo Lema 2.1.9 e a Proposição 2.1.6, obtemos que $\lambda_p(G) \leqslant e+1$, concluindo a demonstração. □

O resultado anterior nos proporciona uma resposta positiva ao Problema 2.2.1 no caso em que p é um primo qualquer e $\mathfrak{W}$ é a variedade de grupos m-Engel definida pela palavra de grupo $[x,_m y]$.

5.3 A Variedade $\mathfrak{X}(w, e, m)$

Nos capítulos anteriores, mostramos como condições sobre a ordem dos comutadores nos elementos de um p-subgrupo de Sylow de um grupo finito tinham consequências no comprimento não-p-solúvel do grupo todo. Na seção anterior, expusemos como elementos de Engel resultam ter ordem limitada (pela condição de Engel) no grupo quociente pelo p-kernel ($G/K_p(G)$), e como isso implica em limitações do comprimento não-p-solúvel. Nesta seção vamos combinar estes resultados.

Lembremos que $\mathfrak{W}(\delta_n, p^e)$ (variedade definida na Seção 3.1) é a variedade de todos os grupos nos quais todo δ_n-valor tem ordem dividindo p^e.

Definiremos a seguir uma nova variedade de grupos que generaliza a variedade $\mathfrak{W}(\delta_n, p^e)$ e inclui condições de Engel nos grupos que a compõem.

Sejam e, m inteiros não negativos e w uma palavra comutador multilinear. Então, denotamos por $\mathfrak{X}(w, e, m)$ a variedade de todos os grupos cujos w^e-valores são m-Engel, onde w^e é a palavra de grupo obtida pela concatenação da palavra de grupo w consigo mesma e vezes.

É fácil observar que $\mathfrak{W}(\delta_k, p^e) \subset \mathfrak{X}(\delta_k, e, m)$. No que resta deste capítulo, nos dedicaremos a provar alguns resultados (a saber, corolários 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3) envolvendo a variedade $\mathfrak{X}(\delta_k, e, m)$. Os corolários aqui expostos decorrem diretamente de resultados já apresentados.

Inicialmente, provaremos que dado um primo p ímpar e um grupo finito G cujos p-subgrupos de Sylow pertencem à variedade $\mathfrak{X}(\delta_k, e, m)$, o comprimento não-$p$-solúvel de G é limitado em termos de k, e e m.

Já no caso $p = 2$, obtemos um resultado análogo provando que dado um grupo finito G cujos 2-subgrupos de Sylow pertencem à variedade $\mathfrak{X}(\delta_1, 2^e, m)$, o comprimento não-solúvel de G é limitado em termos de e e m.

Para finalizar, generalizaremos os resultados expostos neste trabalho para primos ímpares, i.e., generalizaremos o Teorema 3.1.1 e o Teorema 4.1.2, provando explicitamente o seguinte enunciado.

Dado um primo p ímpar e um grupo finito G cujos p-subgrupos de Sylow pertencem à variedade produto de várias variedades do tipo $\mathfrak{X}(\delta_{k_i}, e_i, m_i)$, o comprimento não-$p$-solúvel de G é limitado em termos dos k_i, e_i, m_i.

Corolário 5.3.1. *Sejam w uma palavra comutador multilinear de peso k e G um grupo de ordem divisível por p, onde p é um primo ímpar. Se um p-subgrupo de Sylow P de G pertence ao produto de variedades da forma $\mathfrak{X}(w, n, m)$, então $\lambda_p(G)$ é $\{k, n, m\}$-limitado.*

Demonstração. Primeiramente, lembramos que dada uma palavra comutador multilinear w de peso k e um grupo finito G, temos que cada δ_k-valor em G é um w-valor (ver [28]).

Deste modo, basta analisar o caso em que w é a palavra δ_k, tratando assim do caso em que $P \in \mathfrak{X}(\delta_k, n, m)$. Denotaremos n como sendo $n = p^e$ e assumiremos α como o maior inteiro tal que $p^\alpha \leqslant m$. Doravante, temos que todo δ_k^n-valor em elementos de P é m-Engel. Logo, usando a Proposição 5.1.1, obtemos que a projeção de todos os elementos de $P_{\delta_k^n}$ no grupo quociente $\bar{G} = G/K_p(G)$ tem ordem menor o igual a m. Com mais precisão, ditos elementos têm ordem menor ou igual a p^α. Sejam $\bar{P}$ a imagem de P no grupo quociente $\bar{G}$ e $\overline{P}_{\delta_k}$ a imagem do conjunto P_{δ_k} no mesmo grupo. Então, podemos afirmar que todo elemento $\bar{g} \in \overline{P}_{\delta_k}$ satisfaz que $\bar{g}^{p^{e+\alpha}} = 1$, portanto $\bar{P} \in \mathfrak{W}(\delta_k, p^{e+\alpha})$. Logo, do Teorema 3.1.1, o resultado segue. □

Já para o caso em que $p = 2$, um resultado mais fraco que o anterior pode ser provado, concentrando a nossa atenção na palavra δ_1.

Corolário 5.3.2. *Sejam G um grupo finito e P um 2-subgrupo de Sylow de G. Se* $P \in \mathfrak{X}(\delta_1, n, m)$*, então* $\lambda(G)$ *é* $\{n, m\}$*-limitado.*

A prova do resultado acima é idêntica à prova do Corolário 5.3.1, exceto que, ao invés de utilizarmos o Teorema 3.1.1 para a conclusão, utiliza-se o Teorema 3.2.1.

Corolário 5.3.3. *Seja G um grupo de ordem divisível por p, onde p é um primo ímpar. Se um p-subgrupo de Sylow P de G pertence à variedade* $\mathfrak{X}(w_1, n_1, m_1)\mathfrak{X}(w_2, n_2, m_2)\cdots\mathfrak{X}(w_l, n_l, m_l)$*, onde* w_i *é um comutador multilinear de peso* k_i *para todo* $1 \leqslant i \leqslant l$*, então* $\lambda_p(G)$ *é* $\{k_1, e_1, m_1, \ldots, k_l, n_l, m_l\}$*-limitado.*

Demonstração. Como no resultado anterior, podemos restringir-nos ao caso em que $w_i = \delta_{k_i}$, dado que o resultado segue diretamente deste caso. Assim, podemos supor que $P \in \mathfrak{X}(\delta_{k_1}, n_1, m_1)\mathfrak{X}(\delta_{k_2}, n_2, m_2)\cdots\mathfrak{X}(\delta_{k_l}, n_l, m_l)$.

Procederemos à prova deste resultado por indução no número de fatores do produto de variedades, i.e., indução sobre l. Se $l = 1$, o resultado coincide com o Corolário 5.3.1. Assim sendo, suponha $l \geqslant 2$ e seja N um subgrupo normal de P tal que $N \in \mathfrak{X}(\delta_{k_1}, n_1, m_1)$ e $P/N \in \mathfrak{X}(\delta_{k_2}, n_2, m_2)\cdots\mathfrak{X}(\delta_{k_l}, n_l, m_l)$. Sejam $\overline{N}$ e $\bar{P}$ as imagens dos subgrupos N e P em $\bar{G} = G/K_p(G)$. Então, $\overline{N} \in \mathfrak{W}(\delta_k, p^e)$, onde e depende exclusivamente de n_1 e m_1 como na prova do Corolário 5.3.1.

Logo, obtemos que $\bar{P} \in \mathfrak{W}(\delta_{k_1}, p^e)\mathfrak{X}(\delta_{k_2}, n_2, m_2)\cdots\mathfrak{X}(\delta_{k_l}, n_l, m_l)$, pelo qual, como provado no Teorema 4.1.2, $\overline{N} \in K_{p,k_1}$. Deste modo, garantimos que a imagem de P no grupo quociente $G/K_{p,k_1+1}$ pertence à variedade $\mathfrak{X}(\delta_{k_2}, n_2, m_2)\cdots\mathfrak{X}(\delta_{k_l}, n_l, m_l)$. Assim, o resultado é garantido por indução sobre l. □

Com isso, concluímos os resultados relacionados com condições de Engel neste trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] C. Acciarri, G. A. Fernández-Alcober, P. Shumyatsky, A focal subgroup theorem for outer commutator words, *J. Group Theory* **15** (2012), 397–405.

[2] E. G. Bryukhanova, The 2-length and 2-period of a finite solvable groups, *Algebra Logic* **18**, (1979), 5–20.

[3] E. G. Bryukhanova, The relation between 2-length and derived length of a Sylow 2-subgroup of a finite soluble group, *Math. Notes* **29**, no. 1-2, (1981), 85–90.

[4] Y. Contreras-Rojas, P. Shumyatsky, Nonsoluble length of finite groups with commutators of small order, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **158** (2015), no. 3, 487–492.

[5] Y. Contreras-Rojas, P. Shumyatsky, Nonsoluble length of finite groups with restrictions on Sylow subgroups. *Communications In Algebra* **45**, (2016), 3606–3609.

[6] E. Detomi, P. Shumyatsky, On the length of a finite group and of its 2-generator subgroups, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, **47**, (2016), 845–852.

[7] E. Detomi, M. Morigi, P. Shumyatsky, Bounding the exponent of a verbal subgroup, *Annali Mat.*, **193**, Issue 5, (2014), 1431–1441.

[8] W. Feit, J. G. Thompson, Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 773–1029.

[9] E. S. Golod, On nil-algebras and finitely approximable p-groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **28** (1964), 273–276.

[10] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper and Row, New York, (1968).

[11] R. I. Grigorchuk, On the Burnside problem for periodic groups, *Funct. Anal. Appl.* **14** (1980), 53–54.

[12] R. Guralnick, B. Kunyavskii, E. Plotkin, A. Shalev, Thompson-like characterization of radicals in groups and Lie algebras, *J. Algebra* **300** (2006), 363–375.

[13] P. Hall, G. Higman, The p-length of a p-soluble group and reduction theorems for Burnside's problem, *Proc. London Math. Soc. (3)* **6** (1956), 1–42.

[14] I. Martin Isaacs, *Finite Group Theory*, Volumen 92, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Soc, (2008).

[15] S. V. Ivanov, On the Burnside problem on periodic groups, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S).* **27**, no. 2, (1992), 257–260.

[16] E. I. Khukhro, *Nilpotent groups and their automorphisms*, Walter de Gruyter, Berlin, (1993).

[17] E. I. Khukhro, p-Automorphisms of finite p-groups, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, **246** (1998).

[18] E. I. Khukhro, Problems of bounding the p-length and Fitting height of finite soluble groups, *Journal of Siberian Federal University*, Mathematics and Physics, **6(4)** (2013), 462–478.

[19] E. I. Khukhro, P. Shumyatsky, Nonsoluble and non-p-soluble length of finite groups, *Israel J. Math.* **207(2)**(2015), 507–525.

[20] E. I. Khukhro, P. Shumyatsky, Words and pronilpotent subgroups in profinite groups, *J. of Austr. Math. Soc.* **97** (2014), 343–364.

[21] E. I. Khukhro P. Shumyatsky, On the length of finite groups and of fixed points, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **143**, no. 9, (2015), 3781–3790

[22] A. I. Kostrikin, On the Burnside Problem, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **23**, no. 1, (1959), 3–34.

[23] A I. Kostrikin, Sandwiches in Lie algebras, *Matem. Sb.* **110** (1979), 3–12.

[24] *Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook*, no. 17, Institute of Mathematics, Novosibirsk, (2010).

[25] M. W. Liebeck, E. A. O'Brien, A. Shalev, P. H. Tiep, The Ore conjecture, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **12** (2010), no. 4, 939–1008.

[26] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics Springer, 4th edition, Volumen 80, (1996)

[27] J. Rotman, *Theory of Groups* Graduate Texts in Mathematics Springer, 4th edition (1999).

[28] P. Shumyatsky, Verbal subgroups in residually finite groups, *Q.J. Math.* **51** (2000), 523–528.

[29] P. Shumyatsky, On local finiteness of verbal subgroups in residually finite groups, *Ischia Group Theory 2010: Proceedings of the Conference*, (2010), 334–343.

[30] P. Shumyatsky, Commutators in residually finite groups, *Israel J. Math.* **182** (2011), 149–156.

[31] P. Shumyatsky, On the exponent of a verbal subgroup in a finite group, *J. Austral. Math. Soc.*, **93** (2012), 325–332.

[32] J. G. Thompson, Automorphisms of Solvable Groups. *Journal. Algebra*, **1** (1964), 259–267.

[33] J. Wilson, On the structure of compact torsion groups, *Monatsh. Math.*, **96** (1983), 57–66.

[34] E. I. Zelmanov, On some problems of the theory of groups and Lie algebras, *Mat. Sbornik*, **180**, 159–167; English transl., *Math. USSR Sbornik*, **66** (1990), 159–168.

[35] E. I. Zelmanov, A solution of the Restricted Burnside Problem for groups of odd exponent, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **54**, 42–59; English transl., *Math. USSR Izvestiya*, **36** (1991), 41–60.

[36] E. I. Zelmanov, A solution of the Restricted Burnside Problem for 2-groups, *Mat. Sbornik*, **182**, 568–592; English transl., *Math. USSR Sbornik*, **72** (1992), 543–565.

[37] E. I. Zelmanov, On periodic compact groups, *Israel J. Math.* **77**, no. 1–2 (1992), 83–95.