UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

ANÁLISES DE APRENDIZAGENS EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UM ESTUDO DE CASO DE DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS E PROCEDIMENTOS ALGÉBRICOS EM UMA UNIVERSIDADE PÚBLICA BRASILEIRA

RAQUEL CARNEIRO DÖRR

Brasília, DF
Agosto de 2017

RAQUEL CARNEIRO DÖRR

ANÁLISES DE APRENDIZAGENS EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UM ESTUDO DE CASO DE DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS E PROCEDIMENTOS ALGÉBRICOS EM UMA UNIVERSIDADE PÚBLICA BRASILEIRA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Doutorado Acadêmico da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação. Linha de Pesquisa: Educação em Ciências e Matemática (ECMA), tendo como eixo de interesse a Educação Matemática.

.

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Alberto Muniz

Brasília, DF
Agosto de 2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

CC289a

Carneiro Dörrr, Raquel
Análises de Aprendizagens em Cálculo Diferencial e Integral: um Estudo de Caso de Desenvolvimento de Conceitos e Procedimentos Algébricos em uma Universidade Pública Brasileira / Raquel Carneiro Dörrr; orientador Cristiano Alberto Muniz. -- Brasília, 2017.
237 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Educação) -- Universidade de Brasília, 2017.

1. Aprendizagem. 2. Cálculo Diferencial e Integral. 3. Educação Matemática. 4. Ensino Superior. I. Alberto Muniz, Cristiano, orient. II. Título.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA - UnB
FACULDADE DE EDUCAÇÃO - FE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

ANÁLISES DE APRENDIZAGENS EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UM ESTUDO DE CASO DE DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS E PROCEDIMENTOS ALGÉBRICOS EM UMA UNIVERSIDADE PÚBLICA BRASILEIRA

RAQUEL CARNEIRO DÖRR

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Orientador: Prof. Dr. Cristiano Alberto Muniz (UnB/Faculdade de Educação)

____
Membro: Profa. Dra. Marilena Bittar (UFMS /Instituto de Matemática)

____
Membro: Prof. Dr. Mauro Luiz Rabelo (UnB/Departamento de Matemática)

____
Membro: Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo (UnB/Departamento de Matemática)

____
Suplente: Profa. Dra. Regina da Silva Pina Neves (UnB/Departamento de Matemática)

Brasília, 2017

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Cristiano Muniz por ter me acolhido no EDEM, pelo incentivo na pesquisa e por conseguir tirar o melhor daqueles que estão a sua volta. Obrigada, Professor, pela leitura cuidadosa, pelas críticas, pelos comentários e sugestões e por conduzir as orientações com leveza e humanidade.

A todos os componentes do EDEM agradeço pelos momentos intensos e ricos de aprendizagem. Nossos encontros foram todos marcantes. Pudemos conviver, discutir e compartilhar saberes e aprendizados na Educação Matemática em diferentes esferas e níveis de ensino.

Agradeço a todos cooperadores dessa pesquisa, estudantes e professores do Departamento de Matemática da UnB pela disposição em contribuírem para o enriquecimento desse estudo.

Agradeço aos professores Marilena Bittar, Mauro Rabelo, Cleyton Gontijo e Regina Pina por terem aceitado, desde a qualificação, participarem da banca examinadora. É um privilégio poder contar com suas leituras e contribuições.

Ao meu querido companheiro, apoiador, e amigo, Stefan Dörr, agradeço em especial pelo apoio nesse período de doutoramento.

Obrigada Senhor, por me sustentar física e emocionalmente em todo esse processo.

Ao Sr. Vicente e D. Glória, meus amados pais
pelo incentivo desde sempre.
A Stefan, Bernardo e Martina pelo apoio e amor
incondicional.
*Porque DELE e por ELE, e para ELE, são todas as
coisas; glória, pois, a Ele eternamente (Rm 11.36).*

Não sei por que em nossa sociedade formou-se um critério unilateral sobre a personalidade humana, nem por que todos relacionam dons e talento apenas ao intelecto. Além de ser possível pensar com talento, também se pode sentir talentosamente. O aspecto emocional da personalidade não tem menos importância que outros e constitui objeto e a preocupação da educação, na mesma medida que o intelecto e a vontade. ***O amor pode conter tanto talento e inclusive genialidade quanto a descoberta do cálculo diferencial. Em ambos os casos o comportamento humano adota formas excepcionais e grandiosas****.* (VYGOTSKY, 2003, p.122)

RESUMO

O Cálculo Diferencial e Integral é um dos componentes curriculares fundamentais para uma variedade de cursos no Ensino Superior. Apesar de seu papel de destaque no cenário acadêmico, os cursos de Cálculo chamam a atenção de pesquisadores e educadores matemáticos devido aos seus altos índices de reprovação, à evasão que ocasionalmente leva ao abandono do curso e às dificuldades de aprendizagem encontradas pelos estudantes iniciantes. Assim, a comunidade científica tem buscado compreender o porquê desse impasse, a fim de que se discutam e proponham intervenções com vistas à alteração desse quadro. É neste contexto que se apresenta este estudo investigativo. Ele tem como objetivo geral analisar produções escritas de estudantes em atividades de Cálculo Diferencial e Integral, a fim de que sejam identificados elementos indicadores de possíveis relações entre dificuldades, de ordem conceitual ou nos procedimentos algébricos, com o processo de aprendizagem dessa disciplina. A investigação foi realizada por meio de uma abordagem de pesquisa qualitativa com atividades práticas que contaram com a colaboração de um grupo de estudantes de uma universidade pública do Centro-Oeste brasileiro. No momento da pesquisa, os estudantes participantes vivenciavam alguma situação de dificuldade de aprendizagem com o curso inicial de Cálculo. Portanto, o trabalho de pesquisa aqui descrito aliou a investigação científica de um fenômeno acadêmico concreto a uma atividade prática pautada na mediação e no diálogo para a compreensão dos desafios de aprendizagem associados a essa realidade. As análises das produções matemáticas escritas dos estudantes indicam que parte considerável das dificuldades de aprendizagem relacionadas à deficiência de conteúdos básicos está ligada às aprendizagens matemáticas de objetos de conhecimentos integrantes dos componentes curriculares do Ensino Fundamental e que se constituirão como obstáculos às aprendizagens do Cálculo. Os estudantes têm consciência dessas dificuldades e desejam superá-las. Por outro lado, observa-se a existência de uma disposição de professores e educadores matemáticos na criação de mecanismos e alternativas metodológicas que ajudem os estudantes a transporem suas dificuldades ao ingressarem na universidade. Assim, consideramos que a universidade deve assumir o seu papel de espaço educacional que perceba cada estudante como um sujeito aprendente em processo de aquisição de conhecimentos, levando ao favorecimento da formação de ambientes de aprendizagens pautados em diálogos pedagógicos e na mediação.

Palavras-chave: Aprendizagem. Cálculo Diferencial e Integral. Educação Matemática no Ensino Superior.

ABSTRACT

Differential and Integral Calculus is one of the fundamental components of a variety of courses in Higher Education. Despite its prominent role in the academic scene, the Calculus courses capture the attention of researchers and mathematics educators due to its high failure rates, evasion that occasionally leads to the abandoning of the course and to the learning difficulties found by beginner students. Therefore, this scientific community has been seeking to understand the reason for this impasse, so that interventions that intend to change this scenario can be discussed and proposed. It is within this context that this investigative study is presented. Its main objective is to analyze written productions of Differential and Integral Calculus students in order to identify elements that indicate possible relations between difficulties, either in conceptual manners or in the algebraic procedures, with the learning process of this discipline. The investigation was conducted through a qualitative research approach with practical activities that had the collaboration of a group of students from a public university in the Brazilian Midwest. At the moment of the research, the participating students experienced some kind of learning difficulties with the initial Calculus course. Hence, this study combined the scientific investigation of a concrete academic phenomenon to a practical activity based on the mediation and dialogue for the comprehension of learning challenges related to this reality. The analysis of the written mathematical productions from the students indicate that a considerable part of the learning difficulties related to the deficit of basic contents are linked to the mathematical learning of objects of knowledge that constitute the curricular components of the Elementary School. This leads to future obstacles to the learning of Calculus. The students are conscious about those difficulties and wish to overcome them. On the other hand, the existence of a disposition of lecturers and educators in creating mechanisms and alternative methodologies that help students to overcome their difficulties is observed. Therefore, it is considered that the university must assume its role of educational space that notices each student as a learning subject in the process of acquiring knowledge leading to the favoring of the development of learning environments based on pedagogic dialogue and mediation.

Keywords: Learning. Differential and Integral Calculus. Mathematics Education in Higher Education.

RESUMEN

El Cálculo Diferencial e Integral es uno de los componentes curriculares fundamentales para una variedad de cursos en la Enseñanza Superior. A pesar de su papel destacado en el escenario académico, los cursos de Cálculo llaman la atención de investigadores y educadores matemáticos debido a sus altos índices de reprobación, a la evasión que ocasionalmente lleva al abandono del curso ya las dificultades de aprendizaje encontradas por los estudiantes principiantes. Así, esa comunidad científica ha buscado comprender el por qué de ese impasse, a fin de que se discutan y propongan intervenciones con vistas a la modificación de ese cuadro. En este contexto se presenta este estudio investigativo. Él tiene como objetivo general analizar producciones escritas de estudiantes en actividades de Cálculo Diferencial e Integral a fin de que sean identificados elementos indicadores de posibles relaciones entre dificultades, de orden conceptual o en los procedimientos algebraicos, con el proceso de aprendizaje de esa disciplina. La investigación se realizó a través de un enfoque de investigación cualitativa con actividades prácticas que contaron con la colaboración de un grupo de estudiantes de una universidad pública del Centro-Oeste brasileño. En el momento de la investigación, los estudiantes participantes vivían alguna situación de dificultad de aprendizaje con el curso inicial de Cálculo. Por lo tanto, el trabajo de investigación aquí descrito alió la investigación científica de un fenómeno académico concreto a una actividad práctica pautada en la mediación y en el diálogo para la comprensión de los desafíos de aprendizaje asociados a esa realidad. Los análisis de las producciones matemáticas escritas de los estudiantes indican que una parte considerable de las dificultades de aprendizaje relacionadas con la deficiencia de contenidos básicos están ligadas a los aprendizajes matemáticos de objetos de conocimientos integrantes de los componentes curriculares de la Enseñanza Fundamental y que se constituirán como obstáculos a los aprendizajes del Cálculo. Los estudiantes tienen conciencia de esas dificultades y desean superarlas. Por otro lado, se observa la existencia de una disposición de profesores y educadores matemáticos en la creación de mecanismos y alternativas metodológicas que ayuden a los estudiantes a transponer sus dificultades al ingresar en la universidad. Así, consideramos que la universidad debe asumir su papel de espacio educativo que percibe a cada estudiante como un sujeto aprendente en proceso de adquisición de conocimientos llevando al favorecimiento de la formación de ambientes de aprendizajes pautados en diálogos pedagógicos y mediación.

Palabras clave: Aprendizaje. Cálculo Diferencial e Integral. Educación Matemática en la Enseñanza Superior

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

AP	**Aprovado**
BOLEMA	**Boletim de Educação Matemática**
CAPES	**Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior**
CEAD	**Centro de Educação a Distância**
CERME	***Congress of the European Society for Research in Mathematics Education***
CIBEM	**Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática**
CS	**Cálculo Semipresencial**
DF	**Distrito Federal**
EMR	**Educação Matemática em Revista**
FE	**Faculdade de Educação**
GE	**Grupo de Estudos**
GESTAR	**Programa de Gestão da Aprendizagem Escolar**
GT	**Grupo de Trabalho**
ICME	***International Congress on Mathematical Education***
IMPA	**Instituto de Matemática Pura e Aplicada**
INEP	**Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**
LADIMA	**Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática**
LDB	**Lei de Diretrizes e Bases**
MEC	**Ministério de Educação**
MOODLE	***Modular Object - Oriented Dynamic Learning Environment***
PIBID	**Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência**
PPGE	**Programa de Pós-Graduação em Educação**
PROFMAT	**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**
PUC	**Pontifícia Universidade Católica**
RIPEM	**Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**
RP	**Reprovado**
SBEM	**Sociedade Brasileira de Educação Matemática**
SEEDF	**Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal**
SIGRA	**Sistema de Graduação**
SIPEM	**Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**
TCC	**Teoria dos Campos Conceituais**

TFC	**Teorema Fundamental do Cálculo**
TR	**Trancamento**
UFV	**Universidade Federal de Viçosa**
UnB	**Universidade de Brasília**
USP	**Universidade de São Paulo**
ZDM	***The International Journal on Mathematics Education***

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral é reconhecido como um dos componentes curriculares fundamentais para uma variedade de cursos no Ensino Superior. Esse reconhecimento é decorrente de seu uso como suporte teórico na fundamentação e construção de temas da Matemática Avançada, bem como das suas múltiplas aplicações em outras áreas do conhecimento.

Da mesma forma que ocorre em outros níveis educacionais, a investigação do ensino e da aprendizagem da Matemática no Ensino Superior tem contemplado as questões fundamentais da pesquisa em Educação Matemática. Um exemplo disso são as pesquisas que têm sido desenvolvidas com ênfase no Cálculo Diferencial Integral (IGLIORI, 2015; LIMA, 2015; RASMUSSEN; MARRONGELLE; BORBA, 2014; BRESSOUD et al, 2016).

Apesar de toda sua distinção nos meios acadêmicos enquanto área de conhecimento basilar, do esforço conjunto de educadores matemáticos e do meio acadêmico no desenvolvimento de ações que cooperem para o aperfeiçoamento do seu ensino com vistas a melhores resultados de aprendizagens, o Cálculo Diferencial e Integral ainda está, em geral, associado a altos níveis de reprovação em muitas universidades brasileiras (ALVARENGA; DÖRR; VIEIRA, 2016; DÖRR; MUNIZ; PINA NEVES, 2016). Essa realidade é resumida por Lachini (2001, p. 149) “como uma triste e perversa tradição da área tecnológica”. Nesse sentido, entendemos que ainda há espaço para que se façam estudos relacionados às aprendizagens do Cálculo e, portanto, nosso empenho neste trabalho está voltado para a busca de entendimento de dificuldades e obstáculos específicos que são inerentes ao processo de aprendizagem dessa disciplina.

Por outro lado, a pesquisadora que apresenta este trabalho, tem um tempo de prática significativa no ensino do Cálculo. Esse fato foi o elemento determinante na escolha do tema da pesquisa. Um dos frutos dessa experiência adquirida em sala de aula é a conscientização do compromisso e da responsabilidade que cada docente tem com as aprendizagens de seus alunos. Assim, nosso intento na construção dessa tese é fazer uma investigação das dificuldades de aprendizagem evidenciadas nos registros escritos de estudantes de uma universidade pública.

Esperamos que seus resultados sejam usados para embasar discussões acerca de testes e implementações de estratégias didáticas e pedagógicas que busquem melhores e mais significativos resultados de aprendizagem. Este relatório de pesquisa foi organizado em seis capítulos seguidos das considerações finais, referências bibliográficas, apêndices e anexos.

Tendo em mente nossos propósitos gerais, iniciamos a tese com um capítulo que trata da historicidade e do delineamento do processo investigativo. Assim, o primeiro capítulo aponta os principais momentos da trajetória de vida e profissional da pesquisadora que contribuíram para a escolha do objeto de pesquisa. Em seguida, são descritos o quadro onde a problemática se estabeleceu, a problematização propriamente dita e, por fim, estabelecemos as questões, objetivos e a tese que se propõe ser validada por meio da pesquisa relatada neste trabalho.

Nossa fundamentação teórica, tema do segundo capítulo, apoia-se, inicialmente, nas ideias e elementos básicos que formam o estudo do Cálculo Diferencial e Integral como disciplina matemática, componente curricular de uma gama de cursos do Ensino Superior e como objeto de conhecimento matemático principal desta tese. Complementa essa fundamentação uma pesquisa do panorama atual da investigação sobre a aprendizagem do Cálculo, considerada a partir de teses, de artigos científicos nacionais e internacionais e anais de congressos de Educação Matemática.

Como alicerce das análises dos registros escritos dos estudantes, trazemos também nesse segundo capítulo, as contribuições de autores que têm investigado os erros em produções matemáticas de estudantes no Ensino Superior. O capítulo termina com uma apresentação dos elementos básicos componentes da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, uma vez que alguns deles serão usados em nossas análises dos resultados.

O terceiro e o quarto capítulos explicitam os mecanismos metodológicos da pesquisa, o que inclui a descrição das condições, dos sujeitos e do cenário investigativos. Como a metodologia é apresentada em dois capítulos, no segundo deles destacamos a pesquisa exploratória, parte inicial do processo investigativo. Isso foi feito para marcar sua importância na definição dos rumos da pesquisa e do planejamento do que veio a ser denominado de pesquisa de campo.

A apresentação e as análises das produções escritas de estudantes selecionadas durante a pesquisa de campo são os assuntos contemplados no quinto capítulo. O agrupamento das análises foi estabelecido de acordo com os tópicos que determinam o desenvolvimento de um curso de inicial de Cálculo para funções de uma variável real. Esses tópicos são as Funções, os Limites, as Derivadas e as Integrais.

Entrevistas realizadas com dois estudantes e três professores da instituição, onde foi realizada a pesquisa, serviram de base para a abordagem das percepções desses dois grupos de sujeitos acerca do ensino e da aprendizagem do Cálculo que foi realizada no sexto capítulo. Para concluir, as Considerações Finais apresentam uma síntese dos resultados da parte prática da investigação e uma discussão sobre os avanços, as possibilidades, as dificuldades e as lacunas, bem como os encaminhamentos para futuras pesquisas.

Em todo o texto da tese, a palavra *Cálculo* é usada em maiúsculo para designar um curso inicial de Cálculo, cujas denominações possíveis podem ser Cálculo I ou Cálculo Diferencial e Integral I. As três primeiras seções do primeiro capítulo desta tese foram escritas em primeira pessoa do singular por apresentarem uma descrição de momentos da vida da pesquisadora relacionados a sua formação como professora e educadora matemática e que influenciaram na delimitação do objeto de pesquisa. Porém, à medida que o trabalho prossegue, mudamos para a primeira pessoa do plural a fim de registrar a participação direta ou indireta de todos os sujeitos que se constituíram como importantes personagens nesse processo contínuo de formação pessoal e profissional.

1 HISTORICIDADE E DELINEAMENTO DO OBJETO DE PESQUISA

Minhas lembranças da vida escolar iniciam-se no caminho para a pré-escola quando eu tinha cinco anos. Entretanto, somente passei a tomar gosto pela escola a partir do segundo ano. Acredito que isso tenha ocorrido por causa da professora, a Dona Célia, figura doce, de voz suave e carinhosa. Senti-me acolhida e segura em suas aulas. No ano seguinte foi a vez da Dona Maria do Carmo que foi minha professora por dois anos e, para a minha limitada concepção daquela época, ela dava ótimas aulas de Matemática, pois foi nessas aulas que foram despertados os meus interesses iniciais pela Matemática.

Nasci e cresci em Viçosa, localizada no estado de Minas Gerais. Minha cidade, apesar de pequena naquela época, tem sido importante no cenário acadêmico brasileiro por sua universidade federal. Estudei em escola pública por toda a minha vida estudantil até a universidade. As escolas públicas, daquela época, eram as melhores instituições de ensino e poucos procuravam as instituições particulares que eram elitizadas. Já havia nas escolas públicas uma separação de turmas por rendimento dos alunos. Pelas boas notas que tinha, sempre estive na “Turma A”, o que significou também conviver com colegas de nível social bem acima do meu.

Essa influência dos colegas de classe fazia com me esforçasse em ser aceita naquela turma, tirando boas notas. A escola ficava a dez minutos da minha casa. Nesse caminho a pé, eu tinha o costume de ler as placas dos poucos carros da época e fazer associações, correlacionar e achar padrões entre seus números. Eu chegava a decorar algumas. Já adulta e estudando sobre a criatividade em Matemática, aprendi que isso poderia indicar uma habilidade criativa nessa disciplina.

Sempre tive boas notas e, em Matemática, adquiria-se um *status* quando se era menina e eficiente nas continhas e tabuada, que era “tomada” oralmente diante de toda a turma. Eu queria sempre estar bem preparada para não me sentir mais envergonhada do que era, por causa da extrema timidez. Nos anos finais do Ensino Fundamental, continuei me destacando nos estudos. Nas aulas de Matemática, tinha interesse pela aula expositiva e pela resolução dos deveres de casa. Na sexta e sétima séries (7º e 8º anos na designação atual), tive um professor marcante de Matemática. Ele exigia que resolvêssemos os deveres no quadro e escolhia quem iria fazê-los. Os melhores eram elogiados diante de toda a turma e os “piores” humilhados. Por isso, eu me esforçava para estar sempre preparada.

O destaque em Matemática fez com que eu sempre fosse incentivada aos estudos dessa área por meus professores e também pela família. Por causa do trabalho no comércio do meu pai, ele era conhecido por suas habilidades nos cálculos mentais. Assim, falavam que eu havia herdado essa habilidade dele. Isso me alegrava pelo fato dos meus pais não terem tido a oportunidade de estudar como eu e minhas irmãs. Além do incentivo aos estudos, aprendi com eles a respeitar e a valorizar a profissão docente.

1.1 Formação acadêmica e começo da atividade docente

O que me levou à universidade foi o desejo de ser funcionária do Banco do Brasil e, já que gostava de Matemática, decidi fazer o curso de Matemática para me preparar para um concurso para o tal banco. Ao optar pela Matemática e ingressar na universidade, não sabia a diferença entre Licenciatura e Bacharelado e que deveria fazer uma escolha entre as duas modalidades. Entrei na universidade no momento de reformas curriculares e em que se implementavam na UFV a nova Licenciatura e o Bacharelado por áreas, bem quando estava sendo extinto o curso de Ciências. Assim, graduei-me em minha terra natal na Universidade Federal de Viçosa (UFV). Cursei Bacharelado e Licenciatura em Matemática, entre os anos de 1983 e 1987.

Minha primeira aula na universidade ocorreu às sete horas da manhã de uma segunda-feira no primeiro dia de aula do semestre. O curso era de Geometria Analítica e o professor um senhor húngaro com sotaque carregado, aparência cansada e com ar mal-humorado. Ele chegou à sala e, sem nos cumprimentar, começou a falar e a escrever coisas no quadro que pareciam húngaro. Entrei em pânico, porque, pela primeira vez, aquela Matemática não me agradava e me era estranha. Felizmente, a segunda aula foi de Cálculo I e com um professor nos moldes tradicionais, que era o que eu estava acostumada.

Nos anos de graduação, tive minhas primeiras experiências com as práticas de ensino ao trabalhar em monitorias dos cursos de Matemática, já a partir do segundo semestre. Parte desse trabalho de monitoria consistia em dar aulas de exercícios, nas quais fui muito desafiada, não só em termos dos conteúdos dos exercícios a serem resolvidos, mas porque foi a primeira vez que tive a necessidade de explicar um conteúdo para um grupo de pessoas e de falar em público, sem nenhuma preparação anterior para essa atividade.

Nesse sentido, a graduação foi o marco decisivo em minha vida profissional, pois durante esse tempo me despertei para a atividade docente, descobri minha vocação e passei a persegui-la. A Licenciatura em Matemática contribuiu muito pouco em termos de conteúdos pedagógicos para minha formação como educadora.

Após a conclusão da graduação, novamente por incentivo e influência dos professores, e buscando uma melhor qualificação, ingressei, em 1988, no Curso de Mestrado em Matemática na Universidade de Brasília, UnB. A escolha da Universidade se deu pelo fato de ela ter sido o local da pós-graduação de parte considerável dos professores do Departamento de Matemática da UFV naquela época. Éramos preparados para o Mestrado da UnB. Fiz dois cursos de verão em dois anos consecutivos, em 1987 e 1988, na UnB antes de ingressar no Mestrado. A aprovação no curso de Análise da Escola de Verão era o mecanismo de admissão ao Programa de Mestrado da UnB para estudantes que, como eu, vinham de outras instituições de Ensino Superior.

No mestrado, busquei me aperfeiçoar em uma área em que pudesse aplicar em problemas práticos os conceitos adquiridos nas áreas básicas da Matemática. Por esse motivo, escolhi a área de Otimização Matemática, uma subárea da Matemática Aplicada. O mestrado foi concluído em dezembro de 1990, quando apresentei um trabalho na área de convergência de métodos teóricos para resolver problemas de otimização irrestrita.

Após a conclusão do Mestrado, de 1991 a 1993, lecionei Matemática na Universidade Católica de Brasília e também no Departamento de Matemática da UnB, com contrato temporário de professora substituta. Nessa ocasião, lecionei os Cálculos I, II e III para diferentes grupos de estudantes.

O ano de 1993 foi um ano especial. Nesse ano, fiz o concurso para professora assistente no Departamento de Matemática da UnB e fui mãe pela segunda vez. Minha formação Matemática me conduziu rapidamente à prática docente. Assim, iniciei minha carreira, agora concursada, lecionando Cálculo e sendo a primeira Coordenadora de Graduação da primeira turma do recém-criado curso de Licenciatura em Matemática do período noturno. Ao tomar a decisão pelo trabalho docente, já tinha bem definido em meu interior que a docência era uma atividade que me dava satisfação. Sou realizada profissionalmente como professora e educadora, gosto do que faço e me empenho em incentivar meus alunos de licenciatura para a especial e desafiadora missão de ensinar Matemática.

1.2 A prática docente aliada à formação de professores: de professora a educadora matemática

Minha trajetória como docente de Matemática do Ensino Superior começou informalmente na graduação e formalmente no último ano do Mestrado. Desde meu ingresso, inicialmente como professora substituta, para o quadro de docentes do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília e dois anos depois como concursada, tenho atuado na docência de diferentes disciplinas de Matemática dos cursos de graduação. Entre essas disciplinas, destaco o Estágio de Regência, as Geometrias para o Ensino e as Álgebras para o Ensino, que são cursos específicos e obrigatórios para estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. No trabalho e na preparação para estes cursos, foi quando tive contato pela primeira vez com os temas da Educação Matemática.

A descoberta desses assuntos abriu uma nova área de interesse em minha vida profissional: a Educação Matemática. Inicialmente, os temas tratados nos cursos que lecionava eram direcionados ao Ensino Fundamental e continham, principalmente, possibilidades didáticas alternativas para o ensino tradicional da Matemática. Até então, apesar da existência de um Laboratório de Matemática no departamento, eu o desconhecia. Não havia divulgação, entre os colegas, da existência desse espaço tão importante para a formação de professores de Matemática.

A partir daquela descoberta, senti que tratar de assuntos do cotidiano de minha prática docente era gratificante, que existiam pesquisas sobre eles que poderiam contribuir para o desenvolvimento da minha prática em sala de aula. Influenciada pelo que ia descobrindo em Educação Matemática, comecei, então, a levar algumas práticas diferenciadas para minhas aulas na graduação.

Para D’Ambrosio (2012, p. 86) esse processo é natural e intrínseco à prática docente. Em suas palavras: “Claro, o professor está permanentemente num processo de busca de aquisição de novos conhecimentos e de entender e conhecer os alunos. Portanto, as figuras do professor e do pesquisador são indissolúveis”.

A minha prática docente inicial foi baseada no exemplo daqueles professores que mais me influenciaram, principalmente os da graduação. Essa prática no Ensino Superior é um trabalho dinâmico, pois temos novas turmas a cada semestre. Ao mesmo tempo, é surpreendente, pois cada grupo reage e interage de uma maneira singular. Além do mais, exige do docente o comprometimento com o futuro profissional dos seus estudantes. Por estar consciente dessas características e das consequentes responsabilidades que a elas são associadas, sinto-me privilegiada por atuar nessa área.

No ano de 2005, comecei a atuar na formação continuada de professores de Matemática como uma das coordenadoras, na UnB, do Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio. Esse curso era oferecido semestralmente pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) na modalidade de videoconferência. Ainda nesse campo de formação, fui orientadora de monografias do Curso de Especialização, que era oferecido pelo Centro de Educação à Distância (CEAD) - UnB a professores da Secretaria de Educação do Governo do Distrito Federal entre 2008 e 2009. Entre os anos de 2008 e 2010, participei como formadora de Matemática do Programa Gestar II - Programa Gestão da Aprendizagem Escolar. O Gestar II é um programa de formação continuada de professores das séries finais do Ensino Fundamental da rede pública de ensino em todo o território nacional. Todo o material desse programa tem como autores dois professores da UnB, o prof. Cristiano Alberto Muniz e a profa. Nilza Eingenheer Bertoni, nomes conhecidos no cenário da Educação Matemática brasileira. De 2010 a 2011, fui coordenadora da UnB na execução do Gestar II.

No primeiro semestre de 2014, lecionei uma disciplina no Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT na UnB. Nos anos de 2013 e 2014, lecionei disciplinas de Matemática e Educação Matemática para um grupo de quinze professores da SEEDF, que cursavam a segunda Licenciatura em Matemática pelo PARFOR, Plano Nacional de Formação de Professores, apoiado pela Capes. As experiências na formação de professores tanto na graduação, como nos cursos de especialização e mestrado, colocaram-me em contato com o dia a dia das práticas dos docentes de Matemática que atuavam, principalmente, no ensino público nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Conheci de perto os desafios enfrentados cotidianamente pelos professores de Matemática no Brasil. A partir do 1º Semestre de 2012, passei a integrar, voluntariamente, a equipe de professores que apoia os trabalhos do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) no Departamento de Matemática da UnB. Nessa atividade, orientei dois estudantes de Licenciatura em Matemática na construção de materiais pedagógicos para aplicação em escolas públicas do DF.

1.3 Experiências na docência do Cálculo Diferencial e Integral

O curso que leva o nome *Cálculo* é uma disciplina de Matemática do Ensino Superior, que aborda temas matemáticos fundamentais que dão suporte teórico para futuros professores das áreas das ciências exatas, estudantes das engenharias, matemáticos, físicos e cientistas de qualquer outra área em que se estude o movimento. Isso porque, nas áreas em que há a necessidade de se estudar o movimento, o Cálculo surge como uma ferramenta essencial (SWOKOWSKI, 1994).

No início do meu trabalho docente, não tinha a preocupação e nem a preparação para a parte didática e pedagógica da atividade. Como ocorre na docência do Ensino Superior, repetimos as práticas daqueles mestres que assumimos como modelos em sala de aula e, desse modo, eles passam a ser a nossa referência. Naquela fase, preocupavam-me as questões de conteúdo e as exigências curriculares do curso, ou seja, eu me preparava para estar com os tópicos teóricos bem estudados para a apresentação ao grupo e para cumprir, da maneira mais completa possível, o conteúdo programático estipulado pelo plano da disciplina.

Depois de anos de estudos de Matemática pura, achava que era a hora de poder transmitir toda a bagagem acumulada. Entretanto, com o passar dos semestres, senti que essa transferência de conhecimentos representava apenas um movimento unilateral em que o docente transmite seu conteúdo sem se preocupar com a audiência. Nessa tarefa, sentia-me solitária numa sala de aula repleta de estudantes. Assim, tive necessidade de me aproximar deles, de dar-lhes abertura para a participação nas aulas e de saber como estava chegando até eles os conteúdos apresentados. Até aquele momento, a única forma de expressão que eles tinham era a avaliação escrita. Nesse incômodo, passei a pensar em alternativas que pudessem criar ambientes em que os alunos tivessem maior liberdade para exporem suas dúvidas ou que pudessem participar das aulas, já que nelas o maior trabalho que tinham era o de copiar o que era escrito pelo professor no quadro.

Após semestres seguidos, lecionando nos mesmos cursos de Cálculo, a atividade docente começou a parecer monótona. A preparação já não era mais importante, porque eu já sabia de cor as aulas, exemplos, exercícios e, até mesmo, as demonstrações. Isso passou a me perturbar e me levou a buscar alguma coisa que pudesse tornar o momento de sala de aula mais ativo e significativo.

Num curso “de massa” como o de Cálculo, ou seja, um curso ofertado para dezenas de turmas com uma média de 60 alunos por grupo, não há muitas possibilidades didático-pedagógicas. Essa limitação deve-se não somente ao grande número de pessoas em uma turma, mas também ao conteúdo programático a ser cumprido, ao espaço físico, entre outros.

Na universidade em que trabalho, tive a oportunidade, em alguns semestres, de lecionar em pequenos grupos para os estudantes que ingressavam no curso de Matemática, tanto do Bacharelado quanto da Licenciatura. Nessas turmas, foi possível introduzir elementos como o uso de grupos para resolução e discussão de situações-problema ou atividades com uso de História da Matemática. As experiências foram positivas, mas insuficientes. Queria ter mais possibilidades. Assim, iniciou-se um período de procura por aprofundamento e estudos sobre o ensino do Cálculo.

Com a experiência profissional adquirida e com esse interesse, tenho aprendido que, para o adequado exercício da docência no Ensino Superior, é necessário muito mais que o conhecimento teórico de um dado conteúdo. Devemos levar em conta muitos outros fatores que não são tratados nos cursos de graduação e pós-graduação em Matemática. Um deles é a percepção de que os estudantes são sujeitos distintos e que têm necessidades e ritmos de aprendizagem diversos (MUNIZ, 2015). Ou ainda, a importância da criação de ambientes propícios à aprendizagem em aulas de Matemática, em todos os níveis.

A entrada de um estudante em um curso de Cálculo é um marco em sua vida acadêmica. Assim como em muitas universidades brasileiras, os estudantes que têm o Cálculo como disciplina obrigatória já o tem ofertado em seu primeiro semestre. É nesse curso que terão contato com uma abordagem da Matemática talvez nunca vista anteriormente, pensada ou esperada por muitos deles. Entre as novidades, está a introdução do formalismo matemático, como aponta Job e Schneider (2014). O Cálculo é, portanto, um divisor de águas, já que nele ocorre a ruptura entre a Matemática do Ensino Médio e a Matemática do Ensino Superior.

No meu caso, como estudante, foi o momento em que comecei a sentir de fato o que é a Matemática. Essa descoberta me instigou a continuar explorando suas outras áreas. Mas nem sempre é assim. Para muitos, esse primeiro encontro com o Cálculo pode gerar decepção e frustação. O resultado é que o Cálculo é conhecido, há muito tempo no meio acadêmico, como “difícil” e que reprova muito. Essas concepções negativas são trazidas até mesmo por aqueles estudantes que gostavam da Matemática no Ensino Médio.

Como veremos nos dados apresentados neste trabalho, podemos verificar que, na universidade em que foi feita a pesquisa, o índice médio de reprovação ainda é alto. A reprovação causa nos estudantes frustação e desmotivação. Esses fatores poderão afetar o desenvolvimento acadêmico, emocional e social do estudante, podendo atingir a autoimagem ou desmotivá-lo para os estudos (LACHINI, 2001; NASSER, 2007; ALVARENGA; DÖRR; VIEIRA, 2016).

Além de afetar as emoções dos estudantes, os índices de reprovação e a evasão têm um custo econômico e social para a universidade, pois, para atender à demanda de estudantes que têm que cursar a disciplina a cada semestre, novas turmas deverão ser criadas e mais professores devem ser disponibilizados. Essas dificuldades fazem parte do cotidiano dos professores que lecionam o Cálculo. Desde que iniciei o ensino dessa disciplina, tais preocupações passaram a fazer parte do meu cotidiano. Muitas tentativas, por parte dos docentes envolvidos com o Cálculo, têm sido realizadas com o intuito de modificar esse quadro, não só no Brasil (RASMUSSEN; MARRONGELE; BORBA, 2014; BRESSOUD et al, 2016). Não é simples encontrar soluções que sirvam para todos, por se tratar de um curso que envolve um grande número de estudantes e de professores e uma variedade de cursos com suas peculiaridades curriculares. Por toda complexidade envolvida, tratar do Cálculo e seus problemas tem instigado pesquisadores e educadores envolvidos com o ensino de Matemática no Ensino Superior.

1.4 Problematização e objeto de pesquisa

Todos os aprendizados vivenciados, desde o meu ingresso na universidade até os dias atuais, constituíram-se em processos formativos implícitos e graduais que levaram à conversão de uma professora de Matemática em uma educadora matemática, e essa, por sua vez, em uma pesquisadora. Nesse processo de transformação e descobertas, tendo em vista as experiências proporcionadas com o cotidiano de uma sala de aula de Cálculo, juntamente com as demandas surgidas nessa prática e o anseio por buscar outros significados para o trabalho docente, consolidou-se o meu interesse pela pesquisa em Educação Matemática. Em particular, pela aprendizagem do Cálculo no Ensino Superior.

Parte significativa de um curso de Cálculo envolve resoluções de atividades que, genericamente falando, demandam a utilização de novos conceitos, interpretações, representações algébricas e geométricas. Dentre esses aspectos, neste estudo, concentraremos nossa atenção na apreciação dos diferentes processos algébricos, associados aos conceitos, aos procedimentos e ao trato com a linguagem formal da Matemática. Para isso, em nossa investigação, foram consideradas para análise algumas produções escritas dessas atividades realizadas por estudantes de Cálculo de uma universidade pública federal, localizada na

Região Centro-Oeste brasileira. Esses estudantes se encontravam em alguma situação de dificuldade de aprendizagem no momento da pesquisa.

Os registros dessas resoluções contêm informações significativas, pois indicam importantes expressões do pensamento, da linguagem e do conhecimento matemático adquirido pelos estudantes anteriormente nos Ensino Fundamental e Médio. Ademais, podem revelar erros frequentes, entre outras possibilidades que serão tratadas no âmago desse relatório final de pesquisa de doutorado.

Por meio da análise dessas produções escritas de estudantes, matriculados no momento da pesquisa em diferentes cursos das áreas chamadas Ciências Exatas e de outros cursos que têm o Cálculo como componente curricular obrigatório, pretendemos concentrar nossa investigação na apresentação, análise e discussão não somente dos erros frequentes, mas também das formas como comunicam e argumentam seus saberes por meio da escrita matemática. Assim, temos como objeto de pesquisa: ***a análise de produções escritas de estudantes de um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral e suas implicações no processo de aprendizagem dessa disciplina no Ensino Superior.***

Com o objeto estabelecido, explicitaremos, no item seguinte, os propósitos da pesquisa por meio dos objetivos que orientaram o processo investigativo.

1.5 Elementos condutores da pesquisa: questões, objetivos e tese

A investigação feita nos primeiros Grupos de Estudos[1] foi uma tarefa exploratória que cooperou na delimitação dos rumos para desenvolvimento desse estudo. Parte dele foi compartilhado e discutido em alguns eventos de Educação Matemática, como o 13th ICME – International Congress on Mathematical Education, o 1º LADIMA – Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática (DÖRR; MUNIZ, 2016; DÖRR; MUNIZ; PINA NEVES, 2016) e, mais recentemente, no VIII CIBEM – Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (DÖRR; MUNIZ, 2017).

O curso de Cálculo I, da universidade onde foi realizada a pesquisa, se caracteriza como um modelo diferenciado com relação a outras universidades (ALVARENGA; DÖRR; VIEIRA, 2016). Portanto, tínhamos que usufruir da possibilidade de pesquisa num contexto ímpar. Isso nos proporcionou ter à disposição parte dos instrumentos de apoio usados nas

[1] Essas experiências são descritas no Capítulo 4.

atividades práticas da pesquisa. Esse material é fornecido pela plataforma do curso e disponível a todos os alunos, professores e monitores.

Na metodologia vigente na universidade, o curso oferece pelo menos duas listas de exercícios semanais para os matriculados: uma de atividades, chamada Lista de Fixação dos conteúdos (Anexo A) e outra de situações-problema, contemplando diferentes áreas do conhecimento (Anexo B). Assim, optamos pelo uso, na maior parte do trabalho de pesquisa, das listas de exercícios que fazem parte do material de apoio do Cálculo I.

Além disso, nesse sistema, o Cálculo I tem turmas na metodologia semipresencial para aqueles estudantes que já tenham reprovado pelo menos uma vez no curso. Essa peculiaridade foi o que viabilizou a formação de um grupo de estudos em que a maior parte dos estudantes integrantes estava experimentando, circunstancialmente, dificuldades de aprendizagem com o Cálculo. Essas dificuldades foram evidenciadas por meio de alguma reprovação por nota ou por abandono do curso sem concluí-lo.

Uma vez que o foco investigativo não estava nos processos didáticos, mas nas produções das aprendizagens dos alunos, com forte ênfase nos protocolos das produções escritas dos alunos matriculados, para o desenvolvimento do objeto de pesquisa, foi formado, no primeiro semestre de 2016, um Grupo de Estudos de Cálculo I para que efetivássemos a investigação prática final. Esse Grupo de Estudos foi no formato de um curso de extensão, sendo, portanto, uma atividade extracurricular. Tendo ajustadas nossas estratégias metodológicas, propusemos a questão inicial da pesquisa:

O que podem revelar e influenciar, no processo de aprendizagem, as produções escritas de estudantes que cursam a disciplina Cálculo Diferencial e Integral no que se refere às dificuldades relacionadas aos conteúdos e processos algébricos?

Empenhados em responder a essa pergunta, somos levados a outros questionamentos como:

Que conhecimentos revelam as produções escritas de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral?

Que dificuldades são evidenciadas e quais são suas consequências para a aprendizagem dessa disciplina?

O que sinalizam os erros nos registros escritos quanto ao processo de conceitualização e aprendizagem matemática dos estudantes?

Que contribuições podem trazer os resultados das análises das produções escritas de estudantes para a aprendizagem do Cálculo?

A análise de registros escritos de estudantes tem muito mais a indicar do que os aspectos ora considerados. Sabemos que essas questões não são suficientes para contemplar todos os aspectos envolvidos na aprendizagem matemática na formação superior. Entretanto, essas questões foram escolhidas como referenciais para a construção dos objetivos geral e específicos, enunciados a seguir. Eles expressam os propósitos os quais nos empenhamos a alcançar através deste processo investigativo.

Objetivos da Pesquisa

Objetivo Geral

- Analisar produções escritas de estudantes em atividades de Cálculo Diferencial e Integral com o propósito de identificar elementos indicadores de possíveis relações entre dificuldades, de ordem conceitual ou nos procedimentos algébricos, com o processo de aprendizagem dessa disciplina.

Objetivos Específicos

- Analisar produções escritas, na forma de protocolos, de estudantes em atividades de Cálculo Diferencial e Integral.
- Identificar e caracterizar erros, procedimentos e estratégias de resolução em atividades de Cálculo Diferencial e Integral com ênfase nos aspectos algébricos de produções escritas de estudantes.
- Analisar os atuais procedimentos didáticos, pedagógicos e metodológicos que visam à aprendizagem do Cálculo no local em que foi realizada a pesquisa.
- Buscar, junto a docentes e discentes, percepções sobre as aprendizagens do Cálculo.

Na constituição do Grupo de Estudos de Cálculo para realização da parte prática final, as situações didáticas foram pensadas de modo que favorecessem um espaço de aprendizagem Matemática em que houvesse liberdade de trabalho e momentos de reflexões lógicas e argumentativas, nos quais fossem valorizados todos os tipos de interações entre os sujeitos, a comunicação, as discussões e os diálogos.

Ao final dessa prática investigativa, esperamos poder verificar que uma aprendizagem significativa do Cálculo deve considerar como imprescindíveis as interações que possibilitem a comunicação e as trocas de saberes entre os sujeitos, que podem ser promovidas pelas atividades solidárias em investigação matemática, próprias dos Grupos de Estudos. Assim, formulamos e expressamos, na proposição seguinte, a tese que pretendemos verificar e ratificar:

Se *alguns dos momentos de aprendizagem do Cálculo forem pautados em espaços educacionais que considerem cada aluno como um sujeito aprendente em processo de aquisição de conhecimentos e que favoreçam a formação de ambientes pautados em diálogos pedagógicos e na mediação,* **então** *as dificuldades inerentes ao processo, não se constituirão necessariamente como obstáculos à aprendizagem.*

O Capítulo seguinte apresenta as teorias e autores que embasaram nosso estudo investigativo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO E CONCEITUAL

Os marcos teóricos básicos que fundamentaram nossas análises e contribuíram para a significação do objeto de pesquisa são apresentados neste capítulo. Nosso objeto de pesquisa diz respeito às análises de produções de estudantes de Cálculo e suas implicações no processo de aprendizagem dessa disciplina.

Portanto, partiremos do Cálculo Diferencial e Integral como o saber científico principal do nosso estudo para abordarmos, nas seções seguintes, estudos sobre a aprendizagem Matemática no Ensino Superior. Concluiremos este capítulo apresentando alguns dos autores que foram usados para sustentarem as análises e discussões finais.

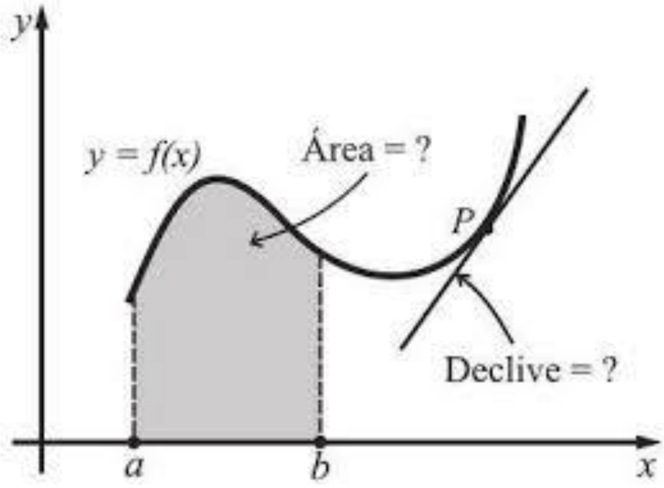
2.1 A Essência do Cálculo Diferencial e Integral

A compreensão dos temas que estruturam os estudos de Cálculo e os motivos pelos quais a disciplina desempenha um papel importante nos currículos é um primeiro passo para entender o modo como o curso é estruturado e as dificuldades de aprendizagem apresentadas por alguns estudantes. Como fontes principais, para o delineamento e a explicitação do Cálculo que está sendo considerado neste trabalho, foram usados o livro de Cálculo de Simmons (1987), e os de Bardi (2010) e Boyer (2002).

Assim, têm-se que o *Cálculo Diferencial* e o *Cálculo Integral* são os dois tópicos principais no qual o Cálculo se divide. Suas ideias e aplicações estão relacionadas a dois problemas geométricos que envolvem o gráfico de uma função $y = f(x)$.

O problema associado ao Cálculo Diferencial é o chamado Problema das Tangentes, no qual se deseja calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ num ponto P desse gráfico. O Problema do Cálculo de Áreas é o problema central do Cálculo Integral e consiste em calcular a área debaixo do gráfico da função $y = f(x)$ entre os pontos $x = a$ e $x = b$. A figura 1, apresentada a seguir, ilustra os dois problemas geométricos citados.

Figura 1 – Ilustração dos problemas geométricos



Fonte: Simmons (1987, p.69)

Esses dois problemas geométricos estão relacionados aos estudos de grandezas que sofrem mudanças por meio de movimentos. Por exemplo, a posição, a trajetória, a velocidade a aceleração de um corpo em movimento, ou qualquer quantidade que varia em relação à outra pode ser modelada com os instrumentos do Cálculo.

Assim, podemos dizer que o Cálculo é uma coleção de conhecimentos e ferramentas matemáticas usadas para analisar corpos em movimento. Esses conhecimentos têm terminologias, notações e métodos computacionais específicos. E, como explica Boyer (2002, p.277) “Achar tangentes exigia o uso do *calculus differencialis* e achar quadraturas o *calculus summatorius* ou *calculus integralis,* frases de onde resultaram as expressões que usamos”. Ainda sobre a nomenclatura, Bardi afirma: “*Diferenciais* são pequenos acréscimos ou decréscimos instantâneos em grandezas que variam, e *integrais* são somas de intervalos infinitesimais de curvas ou forma geométricas” (BARDI, 2010, p.22).

A palavra *calculus,* em latim, significava uma pequena pedra usada para contagem. Daí surgiu o verbo *calculare* que passou a significar computar, ou calcular. Por causa desse uso da palavra cálculo é que usaremos Cálculo em maiúsculo para distingui-lo dos outros tantos cálculos.

O Cálculo como é estudado hoje foi desenvolvido por Newton e Leibniz, dois grandes gênios do século XVII. Não devemos esquecer, porém, que o Cálculo é resultado de um longo processo de criação que começou na Grécia antiga e ainda continua até os dias de hoje.

Nas seções seguintes, apresentamos, resumidamente, elementos essenciais que caracterizam os conteúdos de três dos temas fundamentais do Cálculo: os Limites, as

Derivadas e as Integrais. Essa caracterização se faz necessária porque nossas análises de produções escritas de estudantes foram agrupadas de acordo com esses conteúdos.

2.1.1 Limites

“O Cálculo é o estudo de limites. Em termos mais simples, um limite permite-nos observar o que acontece a uma variável dependente quando a variável independente se aproxima de alguma coisa” (SZECSEI, 2007, p. 79, tradução e grifo da autora). Essa afirmação, feita por uma educadora matemática americana, além de reforçar a vinculação dos tópicos do Cálculo à noção de Limites[2], expressa resumidamente o fato de que, através dos Limites, o Cálculo possibilita uma abordagem mais dinâmica do uso de funções. Isso se dá no cálculo de Limites quando há a combinação da informação sobre o valor de uma função em um ponto específico com as informações sobre mudanças ocorridas nessa função em pontos próximos ao ponto fixado (SZECSEI, 2007).

Os Limites já fizeram parte do currículo do Ensino Médio no Brasil. Em meados dos anos oitenta, a autora dessa tese estava cursando o Ensino Médio em Minas Gerais no Colégio Estadual de Viçosa. O livro didático de Matemática adotado em sua escola na 3ª Série do 2º Grau, o que seria hoje correspondente ao 3º ano do Ensino Médio, foi o de Iezzi et al (1976). Esse livro traz nos capítulos 6, 7, 8 e 9, os temas Limites, Derivadas, Regras de Derivação e o Estudo da Variação das Funções, respectivamente.

No exemplar de Iezzi et al (1976) usado pela autora na 3ª série do 2º grau são encontradas algumas de suas anotações em lápis. A última delas, com data de 6 de outubro de 1982, está registrada no parágrafo 4 do capítulo 8 cujo título é “A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO COMPOSTA” (IEZZI,1976, p.188). Isso é surpreendente porque indica que no último ano do segundo grau, uma escola pública estadual avançou nos conteúdos de Cálculo, apresentando todas as regras básicas de derivação. Atualmente, esses tópicos não constam do currículo do Ensino Médio. No Currículo em Movimento da Educação Básica do DF, no volume correspondente ao Ensino Médio, por exemplo, não há nenhuma menção a eles. (DISTRITO FEDERAL, 2013).

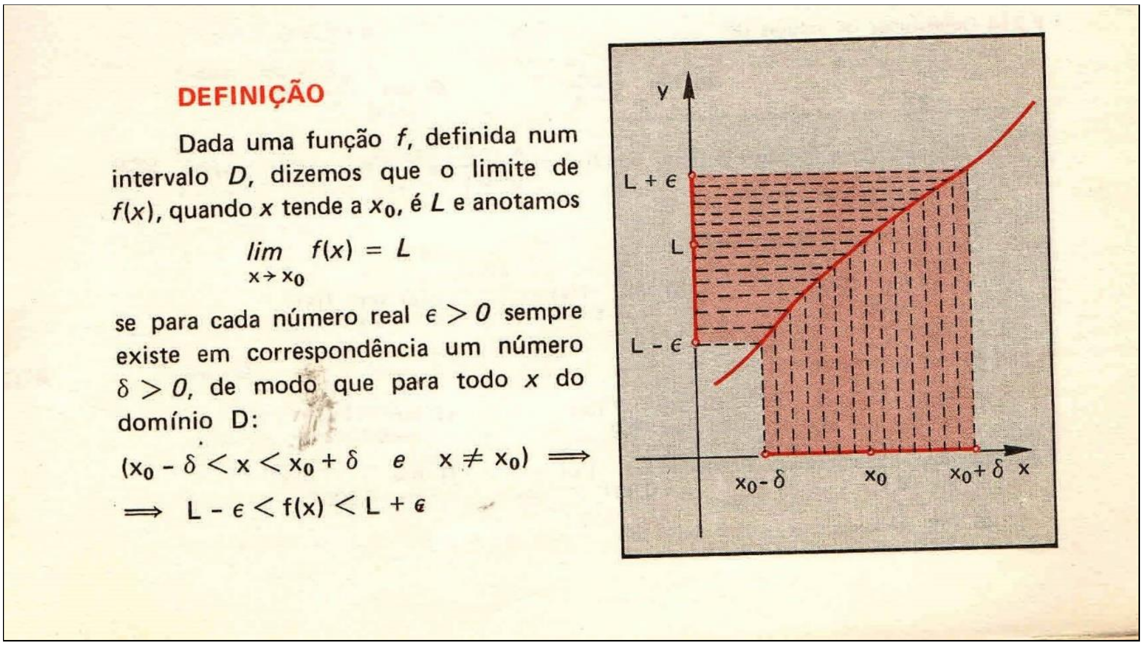
Em prefácio de 1974, os autores desse volume afirmam que os capítulos dedicados ao Cálculo apresentam, iniciando com o estudo de Limites, uma introdução a seu estudo, feita por meio de um desenvolvimento mais detalhado das derivadas e suas aplicações. Entretanto, ressaltam que o tópico Limites será introduzido de forma intuitiva, a partir de ilustrações

---

[2] Como tópico de Cálculo, a palavra Limites será usada em maiúsculo para ser diferenciada de outros significados da palavra limites na língua portuguesa.

gráficas. Acrescentam ainda que, o estudo de Limites exige um rigor matemático não compatível com o nível de ensino do 2º grau. Mesmo assim, após a introdução de vários exemplos resolvidos graficamente, é estabelecida a definição de Limites usando épsilons e deltas como na figura 2, conhecida como a definição formal de Limites.

Figura 2 – Definição de função



DEFINIÇÃO

Dada uma função f, definida num intervalo D, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a x_0, é L e anotamos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se para cada número real $\epsilon > 0$ sempre existe em correspondência um número $\delta > 0$, de modo que para todo x do domínio D:

$$(x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad e \quad x \neq x_0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

Fonte: Iezzi et al (1976, p. 141).

Para explicar essa definição, o autor apela para a intuição gráfica usando quatro exemplos de cálculos de Limites de funções, três lineares e uma quadrática. No processo da formação de conceitos, a representação gráfica é uma ferramenta auxiliar na construção mental dos significados. Entretanto, é um mecanismo incompleto e não traduz toda a essência do novo conceito que, em geral, pode ser expresso por meio de símbolos como na definição formal de Limites usando épsilons e deltas.

Da mesma forma, a definição formal de um conceito não consegue, isoladamente, incorporar significação através de palavras e símbolos. Assim, definição formal, representação gráfica e outras estratégias de procedimentos intuitivos ou lúdicos devem ser combinados para ampliarem as possibilidades de significação da aprendizagem. Sobre conceitos e definições, no contexto da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), Pais (2015), p. 56, pontua que: “Para tratar do fenômeno da aprendizagem torna-se necessário diferenciar esses dois níveis cognitivos: trabalhar com o desafio da elaboração conceitual e com seu registro através de um texto formal”.

Para Vergnaud (2009, p. 13) “o conhecimento é adaptação”. Ou seja, indica um processo de desenvolvimento dinâmico e que pode ocorrer em qualquer etapa da vida. Em sua teoria, esse processo envolve a assimilação de novos conhecimentos e uma acomodação às contingências, isto é, às situações possíveis, porém não previstas anteriormente (FIGUEROA; OTERO, 2011).

Em termos da construção linguística dessa definição, podemos apontar possíveis entraves que podem se constituir como obstáculos para a aprendizagem dos Limites. O primeiro deles é a introdução das letras gregas épsilon (ε) e delta (δ), raramente usadas na literatura brasileira e, portanto, desconhecidas de boa parte dos estudantes. Por fim, a palavra “limite” também constitui um obstáculo, visto que na linguagem cotidiana ela assume significados diferentes do sentido matemático declarado na definição formal. (SANT’ANA; TEDESCO, 2004).

Apesar do Cálculo ser um aprofundamento do estudo de funções iniciado na educação básica, é com a noção de Limites que ocorre a ruptura na aprendizagem matemática entre o ensino básico e o superior. Essa ruptura acontece com a introdução de notações e formalismos não experimentados anteriormente pelos estudantes e que os fazem sentir como se essa nova conceitualização não tivesse relação com suas aprendizagens matemáticas anteriores. Embora o conceito de função seja central para a matemática moderna, é o conceito de Limite que caracteriza uma mudança para um plano mais elevado do pensamento matemático (TALL apud SANT’ANA; TEDESCO, 2004, p.47).

Nesse ponto, surge o questionamento: como e quando introduzir os Limites no Cálculo? De acordo com Ávila (2002), a ordem de apresentação dos Limites, se antes ou depois das Derivadas, tem sido motivo de debate entre matemáticos e educadores matemáticos.

Na universidade que foi local da investigação, o livro referência do plano de ensino de Cálculo I (ANEXO 4.1) é o livro “Cálculo” de Thomas (2009), Volume 1. Esse livro apresenta o estudo de Limites e Continuidade antes das Derivadas. Entretanto, preparando o leitor para a definição formal, as propriedades e as técnicas nos cálculos de Limites são explorados anteriormente em exemplos de cálculos de taxas de variação média resolvidos graficamente e exercitando a intuição.

O professor Geraldo Ávila sustenta que a definição formal dos Limites usando épsilons e deltas não deve ser apresentada já no início do ensino de Cálculo e justifica:

> As coisas devem ser assim, não somente porque os alunos que ingressam no curso superior ainda trazem muitas dificuldades de formação, mas principalmente porque, só depois de terem entendido bem o conceito de derivada e visto algumas de suas aplicações, é que estarão devidamente preparados para prosseguir no estudo dos fundamentos (da Análise). (ÁVILA, 2002, p. 85).

Para reforçar seu posicionamento, esse autor acrescenta que, do ponto de vista histórico, o conceito de derivada antecede o de Limite e ilustra sua afirmação com a situação-problema em que se pede para calcular o coeficiente angular da reta tangente a uma parábola num ponto dado, ou seja, nesse contexto, o que se busca é a derivada de uma função quadrática dada num ponto especificado. Na resolução, o Limite aparece de modo natural a partir da derivada sendo, desse modo, destacado o significado geométrico da derivada como um coeficiente angular de uma reta tangente como na Figura 1, apresentada anteriormente.

Ávila apresenta, em seus livros de Cálculo, os Limites e as Derivadas por meio do problema da tangente, mencionado acima, e pelo conceito de taxa de variação, em especial, no cálculo da velocidade instantânea de um objeto. Portanto, como pode ser verificado em Ávila (2003), esse autor é coerente com sua postura que considera mais adequado apresentar novos conceitos através de situações que manifestam claramente a necessidade de avanços na teoria.

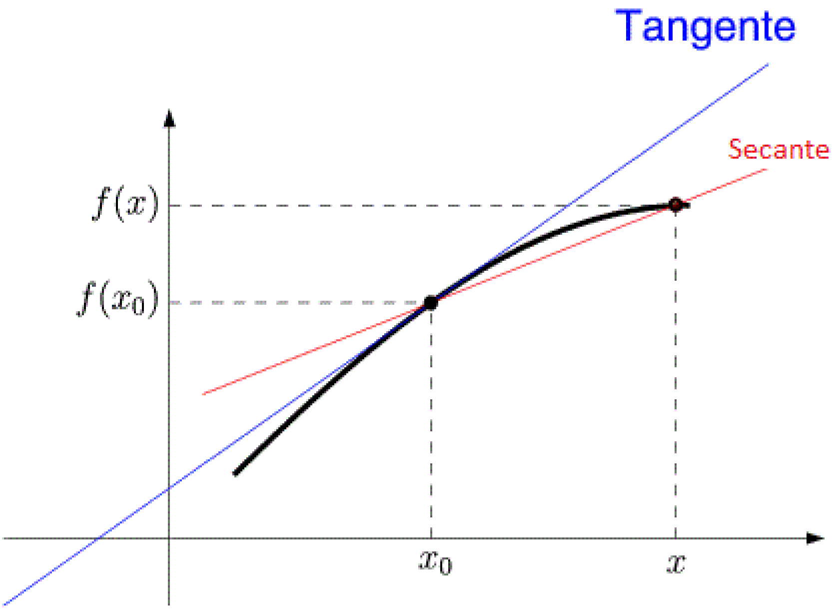
Semelhantemente, os livros de Cálculo de James Stewart (2011) e de Simmons (1987) introduzem os conceitos básicos do Cálculo a partir da mesma motivação usada em Ávila. Essa parece ser uma alternativa metodológica desses autores e de outros como Tall e Schwarzenberger (1978) que, a partir de seus textos, reforçam para os educadores a importância de se desenvolverem métodos intuitivos que ajudem no processo de construção de imagens mentais de novos conceitos, antes que sejam introduzidas as definições formais. Independente da ordem em o conceito de Limite que é apresentado, é importante relembrar que ele é que permite a formalização dos resultados fundamentais do Cálculo.

Existem diferentes tipos de Limites. O Limite considerado nos registros dessa seção é o Limite de uma função, quando x se aproxima de um número real dado. Esse Limite está associado à definição de função contínua e, em geral, é representado por$\lim_{x \to x_0} f(x)$. Nessa notação, *f(x)* representa uma função real de uma variável real x e x_0 é um real fixado. Além desse Limite, existem Limites de sequências, Limites infinitos, Limites de taxas de variação, entre outros.

2.1.2 Derivada: novo conceito para um ente geométrico já conhecido

Conforme exposto anteriormente sobre os fundamentos do Cálculo, a introdução do conceito de Derivadas é, muitas vezes, estabelecida através da sua interpretação geométrica pelo “Problema da Tangente” (Figura 1). Nesse problema, ao calcularmos o coeficiente angular da reta tangente a uma curva como um Limite de uma razão incremental de uma função real de uma variável real, o coeficiente angular passa a se chamar *a derivada da função no ponto fixado*. Ou seja, o coeficiente angular de uma reta tangente, ente geométrico já conhecido, *a priori*, da Geometria Analítica do Ensino Médio, recebe o nome de “derivada”, no contexto do Cálculo. Assim, a derivada é o Limite de coeficientes angulares de retas que são secantes ao gráfico da função. Por sua vez, essas retas são aproximações da reta tangente ao gráfico da função no ponto especificado x_0 como ilustrado na Figura 3 a seguir.

Figura 3 – Gráfico de uma função

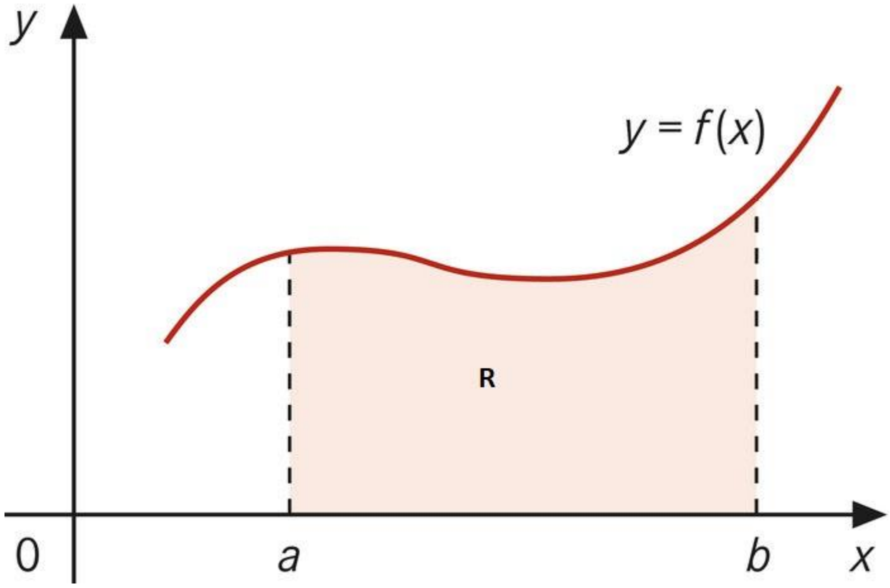


Fonte: http://mathe-online.fernuni-hagen.de/MIB/HTML/node82.html

2.1.3 Integral: a segunda face da moeda do Cálculo

Os Cálculos Diferencial e Integral formam as duas faces da moeda do Cálculo (BARDI, 2010). De fato, derivada e a integral são os dois conceitos fundamentais em torno dos quais se constrói todo o Cálculo (ÁVILA, 1981). Da mesma forma que ocorre com as derivadas, há um problema geométrico associado ao campo conceitual da Integral. Ele consiste em se determinar a área de uma região do plano limitada pelo gráfico de uma função contínua *f(x)* em um intervalo fechado [a,b]. A Figura 4 ilustra esse problema. Nela a região para a qual se quer determinar a área está destacada e indicada com um R.

Figura 4 – Problema geométrico associado ao campo conceitual da integral



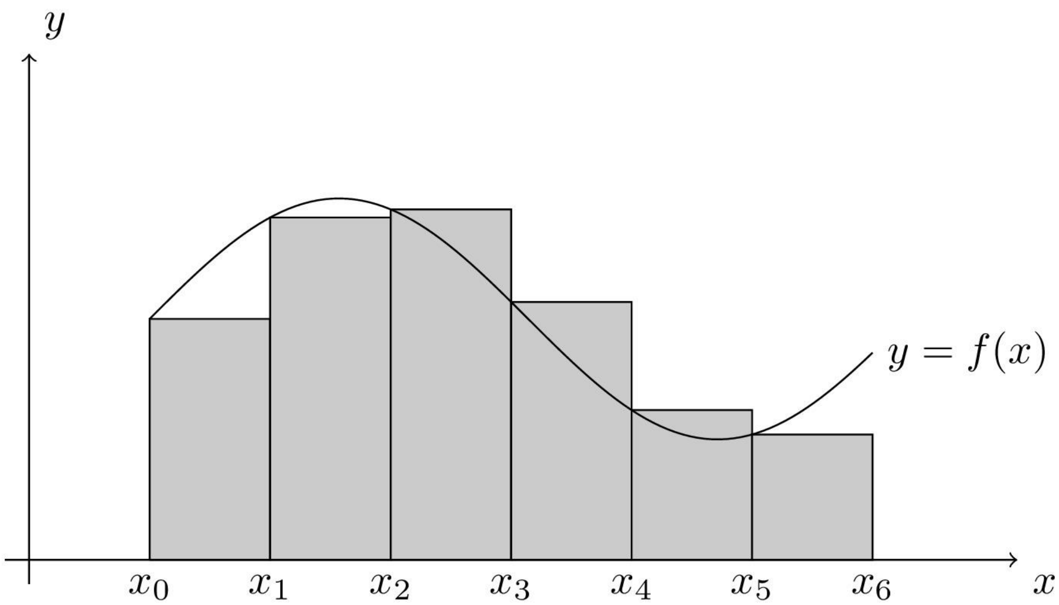
Fonte: http://www.duden.de/_media_/full/I/Integralrechnung-201020350624.jpg

O problema de se calcular áreas limitadas por regiões não poligonais vem desde Arquimedes na Grécia Antiga com seu "Método da Exaustão". O método resume-se em se somar áreas de polígonos conhecidos que são desenhados dentro da região que se deseja calcular a área. Repete-se o processo de divisão da região usando regiões poligonais cada vez menores de modo que, ao final, a soma total das áreas dessas pequenas partes que cobrem a região convirja para a área procurada. O desenvolvimento do Cálculo em meados do XVII com os trabalhos de Newton e Leibniz é considerado pelos historiadores um marco na história do Cálculo por ter substituído a técnica do Método da Exaustão por um processo geral e eficaz de cálculo de áreas, por meio das integrais, e, principalmente, sem necessidade de cálculos de Limites de somas (COURANT; ROBBINS; STEWART, 1996).

Inspirados no Método da Exaustão, no contexto do Cálculo, divide-se a região, do tipo R da figura 4, em pequenos retângulos chamados de "retângulos infinitesimais" (ÁVILA, 2003). A soma das áreas desses retângulos será uma aproximação para a área procurada (Figura 5). Para encontrar uma melhor aproximação, usa-se uma maior quantidade desses retângulos, que, por sua vez, devem ter áreas menores. Repetindo-se o processo, a área desejada será o Limite das somas das áreas dos retângulos que aproximam a área da região

(ÁVILA, 2003; STEWART, 2011; SIMMONS, 1987; COURANT; ROBBINS; STEWART; 1996).

Figura 5 – Método da Exaustão no contexto do Cálculo



Fonte: tps://commons.wikimedia.org/wiki/File:Riemann_Sum6.jpg

Nesse caso, a área A da região destacada na Figura 5 passa a ser chamada de "a integral definida de a a b de *f(x)dx*" e é representada pelo símbolo

$\int_a^b f(x)dx$.

Essa representação, introduzida por Leibniz, lembra-nos que a área de A é a soma das áreas dos retângulos infinitesimais (f*(x)dx).* O símbolo de integral, $\int$,foi introduzido por Leibniz para indicar soma (ÁVILA, 2003). A conexão entre o Cálculo Diferencial e o Integral é estabelecida pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) cujo enunciado é o que segue:

O Teorema Fundamental do Cálculo (STEWART, 2011 p. 347 e p. 361)

Parte I

Se f for contínua em [a,b], então a função g definida por

$g(x) = \int_a^x f(t)dt\,, \quad a \leq x \leq$ b,

é continua em [a,b], e derivável em (a,b), e $g'(x) = f(x)$.

Parte II

Se f for contínua em [a,b], então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que F´= f.

Da parte I, temos estabelecido pelo TFC que a integral definida de a até x de $f(t)$ (que representa uma área), é uma primitiva de $f(x)$, ou seja, é uma função cuja derivada é $f(x)$. Logo, o processo de integração que transforma f em F por meio da derivação, leva F a f pela derivação. São processos inversos (COURANT; ROBBINS; STEWART, 1996).

Como acontece com as derivadas, há várias concepções para as integrais, cada uma delas dependendo da situação ou contexto de aplicação. Integrais podem ser definidas ou indefinidas, números ou funções. Como funções, elas são obtidas a partir das regras básicas de integração ou pelas técnicas específicas. Como número, elas podem representar uma área, um volume, um comprimento de arco de uma curva, o trabalho de uma força, entre outros. O conceito de Integral é complexo em termos da sua conceituação teórica, de suas aplicações práticas e de suas representações.

2.2 Aprendizagem do Cálculo e da Matemática no Ensino Superior

2.2.1 Pesquisas sobre a aprendizagem do Cálculo

Com o propósito de resumir e mostrar os temas que têm sido contemplados nas recentes produções científicas relacionadas à aprendizagem do Cálculo, apresentamos, nesta seção, uma breve pesquisa bibliográfica. Para tanto, destacamos algumas teses de doutorado, as edições de 2015 de três revistas brasileiras com publicações em Educação Matemática, os anais do VI SIPEM, a edição do ano de 2014 da Revista ZDM - *The Internacional Journal on Mathematics Education* - que foi inteiramente dedicada ao Cálculo, e, por fim, a publicação de 2016 da Revista ZDM - *Teaching and Learning of Calculus* (BRESSOUD et al, 2016) que contém uma síntese das pesquisas apresentadas e discutidas no ICME 13 – *13th International Congress on Mathematical Education*, realizado na Alemanha, em 2016, no grupo de estudos Aprendizagem e Ensino de Cálculo.

2.2.2 Algumas teses brasileiras

São muitas pesquisas e variados os temas e abordagens ligados às aprendizagens do Cálculo. Por exemplo, Rosa (2011) tratou em seu trabalho dos aspectos motivacionais que envolvem o curso de Cálculo; Santos (2012) analisou os processos de comunicação num curso de Cálculo na modalidade a distância e Lobo (2012) estudou os modos de apresentação do conceito de derivada em livros didáticos. O trabalho de Raad (2012) trata da aprendizagem e metodologia a partir da abordagem usando a história do Cálculo; Amorim (2011), Souza (2011) e Lehman (2011) apresentaram propostas de sequências didáticas para uso em aulas de Cálculo.

A tese de doutorado de Escher (2011) investigou a influência do uso de tecnologias de informação nos processos de ensinar e aprender Cálculo. Em sua tese de doutorado, Lima (2012) descreve o desenvolvimento histórico durante sessenta anos do curso de Cálculo I da USP de 1934, ano de sua fundação, até 1994. E Campos (2012) avaliou uma modalidade metodológica desenvolvida e aplicada na UFMG a alunos de Cálculo dos cursos de engenharia.

Um mapeamento quantitativo de algumas dissertações e teses produzidas em instituições de Ensino Superior públicas e particulares, no Brasil, que abordam o ensino de Cálculo Diferencial e Integral no período compreendido entre 1999 e 2013 é apresentado no artigo de Pagani e Allevato (2014). Com enfoque em pesquisas que tratavam de Derivadas, as autoras dividiram seus resultados em duas categorias: trabalhos de natureza empírica e trabalhos de natureza teórica. A maior ocorrência foi de trabalhos de natureza empírica com predominância em estudos que implementaram e analisaram alguma prática de ensino. A menor ocorrência foi na pesquisa de natureza teórica relacionada às investigações sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem no Cálculo. Entre os principais resultados dessa pesquisa está a verificação de que o principal motivo para a realização da maioria das investigações analisadas foi a evidência da ocorrência de altos índices de reprovação nos cursos inicias de Cálculo.

Em recente estudo, Masola e Allevato (2016) apresentam uma seleção de trabalhos brasileiros, realizados nos últimos anos, que tratam de dificuldades em conteúdos matemáticos de alunos iniciantes no Ensino Superior e suas consequências não só no Cálculo, mas também em outras disciplinas de cursos como as engenharias que a têm como pré-requisito. Assim, as dificuldades apresentadas por grande contingente de estudantes na aprendizagem do Cálculo se constitui em desafio para a didática no Ensino Superior.

2.2.3 Anais de Congressos de Educação Matemática

O VI SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – aconteceu de 15 a 19 de novembro de 2015, na cidade goiana de Pirenópolis. Esse Seminário faz parte das atividades da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) para a divulgação e discussão, entre pesquisadores brasileiros e estrangeiros, das pesquisas já concluídas em Educação Matemática. As discussões são realizadas pelos Grupos de Trabalho (GT) de cada área. O GT 4 é o Grupo de Trabalho da SBEM que congrega os trabalhos de Educação Matemática no Ensino Superior. Para essa edição do SIPEM, foram apresentados 16 trabalhos nesse grupo. Desses, sete deles, quase metade dos trabalhos, teve o Cálculo como seu objeto de pesquisa.

Igliori e Almeida (2015) apresentaram parte de uma pesquisa que objetivou promover e discutir entre educadores matemáticos a necessidade de articulação entre teoria e prática na produção de materiais para o ensino de conceitos do Cálculo Diferencial. Historicamente, os modelos dos cursos de Cálculo que foram implantados nas universidades brasileiras tiveram suas origens na Europa e nos Estados Unidos (LIMA, 2012). Esse autor, dando continuidade ao trabalho iniciado com o doutorado, defende em seu trabalho, apresentado no SIPEM (LIMA, 2015), a necessidade da construção de uma identidade própria para o Cálculo brasileiro, levando em conta as exigências e os objetivos específicos de cada curso de Matemática ou Engenharia. Tudo isso com vistas à melhora da compreensão dos estudantes sobre o que é e para que a disciplina é ministrada.

Jesus (2015) traz uma revisão bibliográfica dos trabalhos apresentados no grupo de estudos cujos temas estavam ligados à Educação Matemática no Ensino Superior da oitava edição do CERME - *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* – (Congresso da Sociedade Europeia para Pesquisa em Educação Matemática), ocorrido em 2013. O autor da revisão focou sua pesquisa nos trabalhos com temática relacionada às dificuldades no ensino e aprendizagem de conceitos fundamentais do Cálculo e da Análise. Diretamente associados ao Cálculo, Jesus (2015) narra o trabalho de Alvarado Monroy e González Astudillo (2013) em que foram estudados “processos de construção e reconstrução de definições precisas em Cálculo e a importância deste aspecto na produção de provas’’.

Merecem destaque, nessa pesquisa bibliográfica, dois trabalhos citados com referências ao estudo de funções. Um deles é o artigo de Hyvärinen, Hästö e Vedenjuoksu (2013) que tratou sobre o desenvolvimento e evolução do conhecimento de estudantes no tema. O outro artigo é o trabalho de autoria de Viirman (2013), em que foram analisadas, através das práticas discursivas de aulas de Cálculo de duas universidades distintas, possibilidades de aprendizagem.

Trevisan, Borssoi e Elias (2015) apresentaram os resultados da criação, aplicação, análise e discussão de uma situação-problema que propunha a construção de uma calha de capacidade máxima. A atividade foi aplicada a estudantes de Cálculo I do curso de

Engenharia de Materiais no primeiro semestre de 2015.

O artigo de Cunha e Laudares (2015) apresenta uma sequência didática usando o *software* livre de geometria dinâmica GeoGebra como suporte auxiliar no estudo do comportamento de funções por meio de suas derivadas. Como no trabalho descrito anteriormente, a atividade foi aplicada a estudantes de Cálculo de um curso de engenharia.

Sousa (2015) trouxe para o VI SIPEM o relato de uma experiência realizada, durante quatro semestres, em um programa extracurricular criado pela necessidade de se oferecerem alternativas a estudantes de Cálculo que enfrentam dificuldades de aprendizagem. As atividades foram divididas em três momentos. No primeiro deles, os estudantes realizavam sequências didáticas com o GeoGebra em laboratório de informática. Nos outros momentos, os estudantes podiam participar de monitorias orientadas e de plantão de dúvidas. Esse trabalho tem em comum com a proposta desta tese o fato de ser uma proposta extracurricular, diferencia-se, entretanto, pelo uso do Geogebra e por não ter atividades em grupos.

Para encerrar o relato sobre os trabalhos do SIPEM, descrevemos o trabalho apresentado pelas irmãs Bisognin e Bisognin (2015). As pesquisadoras verificaram, por meio da aplicação de sequências de atividades em um curso de formação continuada para professores de Matemática, que alguns deles não têm bem consolidada a compreensão sobre o significado e as diferentes representações de taxas de variação.

2.2.4 Publicações em Periódicos brasileiros e internacionais

A SBEM possui duas publicações: a Educação Matemática em Revista (EMR) e a Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM). Em 2015, a EMR não publicou, em seus quatro números, nenhum artigo relacionado ao Cálculo. O mesmo aconteceu com a RIPEM em 2014 e 2015.

Por outro lado, em 2015, a publicação que originalmente era vinculada ao programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro - BOLEMA – Boletim de Educação Matemática - publicou três artigos ligados ao Cálculo. Com o propósito de discutir e compreender o ensino da disciplina Análise para auxiliar na contribuição em futuras discussões acerca de ementas e metodologias, Gomes, Otero-Garcia, Silva e Baroni (2015) realizaram um amplo estudo envolvendo coordenadores de cursos de Matemática, professores da disciplina, professores de Matemática da educação básica e licenciandos sobre a importância dessa disciplina em suas práticas. O registro desse artigo é importante porque é no Cálculo I em que ocorrem os primeiros contatos dos estudantes com os assuntos da Análise Matemática.

A conceituação de Derivadas é um dos tópicos fundamentais em Cálculo. Pino-Fan, Godino e Font (2015) descrevem uma investigação em que aplicaram situações problemas com derivadas a estudantes de Licenciatura em Matemática em final de curso para categorizarem seus conhecimentos. Os resultados revelaram que os futuros professores não veem conexão entre os distintos significados da derivada e indicam a necessidade de os estudantes buscarem mais aprofundamento sobre o tema.

O estudo de Limites de funções e a Continuidade são também pontos fundamentais do Cálculo. Esses tópicos foram usados numa investigação exploratória de Messias e Brandemberg (2015), realizada com licenciandos em Matemática dos terceiro e quarto semestres para averiguar associações feitas por esses sujeitos entre Limite e continuidade de uma função.

O volume 46, Edição 4, 2014, da publicação da editora Springer ZDM - *The Internacional Journal on Mathematics Education* - é composta por 13 artigos que abordam recentes pesquisas acerca do Cálculo, realizadas pela comunidade internacional de Educação Matemática. Essa edição especial é intitulada - "*The Teaching and Learnig of Calculus - in memoriam to Arnold Kirsch"* (O Ensino e a Aprendizagem do Cálculo – em memória de Arnold Kirsch). Arnold Kirsch, falecido no ano anterior à publicação da revista, foi um educador matemático alemão que influenciou e divulgou a pesquisa em Educação Matemática internacionalmente (KAISER, 2014).

Dentro dessa publicação, o artigo de Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014) apresenta um mapeamento das pesquisas que envolvem o Cálculo nos anos 70, 80 e 90, além de um resumo dos outros doze artigos publicados nesse volume especial. A revisão bibliográfica lhes permite destacar possibilidades para pesquisas futuras, bem como as limitações das pesquisas. São apresentadas pelos autores quatro tendências características da pesquisa em Cálculo nos trabalhos que tratam principalmente de limites, derivadas e integrais, tópicos de nossa investigação, quais sejam:

Primeira – Identificação e estudos das dificuldades dos estudantes.

Segunda – Investigação dos processos de aprendizagens de conceitos específicos.

Terceira – Estudos práticos em sala de aula.

Quarta – Pesquisas sobre os conhecimentos, crenças e práticas de professores de Cálculo.

Os trabalhos descritos nessa publicação representam uma amostra do que tem sido feito em pesquisas ligadas à aprendizagem do Cálculo. Observarmos a evidente preocupação de pesquisadores e educadores matemáticos com essa problemática sobre diferentes perspectivas: epistemológicas, cognitivas, conceituais, entre outras.

Os tópicos principais da publicação do ICME – 13 (BRESSOUD et al, 2016) foram cinco:

- Aspectos epistemológicos principais dos conceitos de Cálculo.
- Pensamento no Cálculo e dificuldades de aprendizagens.
- Cálculo no contexto institucional e práticas em sala de aula.
- O desenho do Cálculo na pesquisa em Educação Matemática.
- Principais aspectos da transição entre o ensino básico e o superior no Cálculo.

A palavra Cálculo nessa publicação refere-se a todos os níveis e objetos conceituais do Cálculo Diferencial e Integral. Tendo como objetos os temas listados acima, a publicação trouxe um estado da arte das pesquisas feitas nos últimos doze anos com o objetivo de que sirvam de referencial para futuras investigações. Entre os assuntos tratados, destacamos questões como livros-textos e materiais de apoio em aulas e os currículos de Cálculo na França, Alemanha, Estados Unidos, Uruguai, Singapura, Coréia do Sul e Hong Kong.

2.3 Aprendizagem Matemática e Teoria dos Campos Conceituais na Análise da Formação de Conceitos Matemáticos

Como educadores matemáticos, ao falarmos em aprendizagem da Matemática, esperamos que ela seja significativa, ou seja, uma aprendizagem que produza significados aos estudantes por meio de novos aprendizados, descobertas e esclarecimentos de dúvidas sobre algum assunto que se esteja estudando. Além disso, como educadores atuantes no Ensino Superior, desejamos que a aprendizagem de nossos alunos dê a eles as possibilidades e interesses para resolverem outras questões mais avançadas nos estudos de suas áreas específicas, ou que os tornem capazes de criar novas soluções para situações inéditas, ou ainda, que os levem à busca de conhecimentos adicionais sobre os assuntos estudados.

O “ser matemático”, categoria proposta por Muniz (2001; 2015), é todo e qualquer sujeito que, quando lhe são garantidas condições adequadas para o aprendizado, poderá experimentar uma aprendizagem significativa. Essas condições são denominadas pelo autor como “experiências de qualidade” e são canais de desenvolvimento da aprendizagem matemática. Porém, nossa concepção de aprendizagem significativa é subjetiva e restrita, porém é a abordagem de aprendizagem significativa que entendemos na prática.

A partir dessa concepção de aprendizagem significativa, consideramos que o uso de atividades em grupo em aulas de Matemática pode contribuir para a criação de ambientes propícios à aprendizagem (DÖRR, 2013), conforme descreveremos em nossa pesquisa de campo realizada em uma atividade extracurricular e que será relatada no próximo capítulo.

Ausubel (1968) estabelece que para a ocorrência da aprendizagem significativa são necessários dois pressupostos fundamentais. O primeiro deles é que o indivíduo manifeste uma disposição para aprender. O segundo é que o material a ser aprendido seja potencialmente significativo, tanto no sentido lógico quanto psicológico. Essa aprendizagem denominada significativa seria o contraponto à aprendizagem mecânica, em que há ênfase na memorização.

No estudo das dificuldades de aprendizagem em Matemática, surge naturalmente o questionamento a respeito das relações entre as dificuldades e o processo de formação dos conceitos e às estratégias procedimentais. Ao tratarmos dos conceitos e da análise dos aspectos cognitivos da formação de conceitos matemáticos, somos levados à Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Gérard Vergnaud (1990).

Sua teoria, que surgiu com o estudo das estruturas aditivas e multiplicativas dentro da Educação Matemática, tem sido usada na investigação dos processos de construção do significado dos conceitos matemáticos a fim de torná-los mais acessíveis à compreensão dos estudantes e, portanto, contribuindo para a aprendizagem (PAIS, 2015). A teoria desenvolvida por Vergnaud (1990) é uma teoria cognitivista que fornece ferramentas para a análise das produções escritas de estudantes. Segundo Bittar (2009), devido ao seu objeto de pesquisa, a teoria é um “instrumento teórico” adequado para o estudo do conhecimento dos estudantes. Para justificar seu argumento, a autora estabelece que:

> O objeto da teoria dos campos conceituais é fornecer um quadro para as pesquisas sobre as atividades cognitivas complexas, principalmente, sobre as aprendizagens científicas e técnicas. É uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, ainda, da conceitualização do real: ela permite elencar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual; ela permite também analisar a relação entre conceitos como conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios que são implícitos nas condutas dos sujeitos em ação assim como aprofundar a análise das relações entre significados. (VERGNAUD, 1990 apud BITTAR, 2009, p. 56)

O conceito e suas complexidades é uma das noções fundamentais da teoria dos campos conceituais, bem como as noções de *campo conceitual, atividade, situação, esquema, invariante operatório,* entre outras ramificações desses termos (SUREDA; FIGUEROA, 2011; OTERO, 2011; MOREIRA, 2002; MUNIZ, 2009). Em nossa pesquisa, usamos alguns dos elementos da teoria dos campos conceituais para fundamentação das análises das produções de estudantes. Por esse motivo, passamos a definir a seguir os componentes teóricos básicos dessa teoria.

2.3.1 Elementos da Teoria dos Campos Conceituais

Para Vergnaud, o conhecimento é constituído pelo que ele denominou de *Campos conceituais.* Estes, por sua vez, são definidos por ele como (VERGNAUD, 2009, p. 29):

> Um campo conceitual é ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações.

Assim, o campo conceitual é um conjunto composto por problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos, representações, entre outros. Todos relacionados e interconectados (MOREIRA, 2002). Vergnaud estabelece que "conhecimento é adaptação" (VERGNAUD, 2009, p. 13). Logo, a construção do conhecimento envolve um processo de conceitualização progressivo e temporalmente indefinido.

Nesse processo de conceitualização, surge a noção de *Esquema.* Vergnaud (1990 apud MUNIZ, 2009) propõe o esquema como um conceito central de sua teoria em duas dimensões:

> Definição 1: o esquema é uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dadas.
> Definição 2: ele é formado necessariamente de quatro componentes:
> - Um <u>objetivo</u>, subobjetivos e antecipações.
> - <u>Regras de ação</u>, tomada de informações e controle.
> - <u>Invariantes operacionais</u>: conceitos em ato e teoremas em ato.
> - Possibilidade de <u>inferências</u> em situação. (VERGNAUD, 1990 apud MUNIZ, 2009, p.7, tradução e grifos nossos)

Em nossas análises de registros escritos de estudantes de Cálculo, evidenciaremos possíveis conceitos e procedimentos que permanecem válidos para um conjunto de situações. Por esse motivo, dos elementos componentes dessa definição de esquema, destacaremos os invariantes operacionais ou invariantes operatórios conhecidos como *Teoremas em ação* ou *Teoremas em ato*. Vergnaud os define como proposições tidas como verdadeiras nas ações em situação (VERGNAUD, 2009, p. 23).

Nas resoluções matemáticas, a seleção e o desenvolvimento dos teoremas em ato, necessários à realização dos cálculos matemáticos, depende do modo como os sujeitos mobilizam os denominados *Conceitos em ato*. Ou seja, são eles que permitem ao sujeito eleger as informações consideradas como as mais relevantes para a produção de uma solução de acordo com seus objetivos (MUNIZ, 2016).

Resumidamente, um conceito em ato é um conceito considerado como pertinente na ação no contexto da situação e, formalmente, na teoria é estabelecido por Vergnaud (1990, apud MUNIZ, 2009, p.48) como:

> Numa situação dada, o sujeito dispõe de muitos tipos de conhecimentos para identificar os objetos e suas relações e a partir daí estabelecer objetivos e regras de conduta pertinentes. Os conhecimentos são conhecimentos em ato, designados aqui por "invariantes operatórios" para indicar que estes conhecimentos não são necessariamente explícitos, nem mesmo conscientes para certos entre eles. O conceito de invariante operatório permite falar nos mesmos termos às vezes da percepção, quer dizer da identificação dos objetos materiais e suas relações, da interpretação das informações perceptivas nas situações onde há espaço para a incerteza, e os pensamentos que portam objetos altamente elaborados da cultura (VERGNAUD, 1998, p. 10)

As atividades de interpretação nesse estudo investigativo usarão, em certos momentos, elementos da TCC que nos auxiliarão na compreensão dos conhecimentos mobilizados pelo sujeito nas situações de aprendizagem propostas.

2.4 Síntese do capítulo: nossos pressupostos

Este capítulo enfatizou as dificuldades e desafios enfrentados por estudantes iniciantes de uma universidade pública, apresentados por meio das pesquisas sobre as aprendizagens no Cálculo, e nele elencamos autores, trabalhos, questões e teorias relacionadas a essa problemática. Para o desenvolvimento das fases seguintes do processo de pesquisa e com a intenção de compreender os desafios e dificuldades dos estudantes, devemos assumir três fatos importantes e que serão considerados em nosso relato de pesquisa. São eles:

- os estudantes ingressantes são jovens que, ao longo de mais de 12 anos de educação básica em que a Matemática é componente curricular sempre presente, fizeram uma opção por uma formação no Ensino Superior e pelo consequente desenvolvimento profissional, em campo de conhecimento no qual a Matemática é um eixo pilar, tanto da formação quanto da atuação profissional. Pressupõe-se, assim, que as experiências didático-pedagógicas, praticadas por tantos anos, assim como o sentimento de sucesso na aprendizagem, compeliram tal contingente à opção pelo estudo da Matemática, seja no curso de matemática, nas Ciências Exatas ou Tecnológicas. Isso leva-nos, inicialmente, a uma reflexão de que estes jovens tinham uma boa relação com o conhecimento matemático escolar e que não apresentavam grandes dificuldades nas aprendizagens matemáticas, de forma que a forte presença da Matemática nos cursos superiores escolhidos não se constituía em problema, ao contrário, ela se constituía como estímulo à continuidade dos estudos.

- possivelmente, dificuldades na aprendizagem do Cálculo estão ligadas às questões didáticas da matemática escolar nos Ensinos Fundamental e Médio. Assim, ao chegarem ao Ensino Superior, esses estudantes se dão conta de que muitas aprendizagens foram apoiadas em conhecimentos mecânicos, desprovidos de significados, o que não permite o avanço dos estudos conceituais e procedimentais, nem garante uma relação afetiva positiva com a área de conhecimento, uma vez que o fracasso nas aprendizagens do Cálculo passa a impregnar suas experiências na aprendizagem do Ensino Superior.

- mesmo gostando da área de conhecimento da Matemática, a formação inicial dos estudantes apresenta grandes hiatos, em especial nos campos da Álgebra, assim como da Geometria, não lhes permitindo alavancar e nem desenvolver conceitos centrais, tais como o de Limite, de taxa de variação, de infinitude, bem como no trato dos procedimentos algébricos e nas representações dos conceitos e procedimentos. No próximo capítulo, descreveremos o percurso metodológico da pesquisa.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo traz uma descrição pormenorizada das informações ligadas à construção da tese com relação ao ambiente, aos sujeitos da pesquisa e aos fatores ligados à execução da pesquisa prática. Trata-se da caracterização metodológica da investigação que buscou ter como fios condutores o objeto, os objetivos pré-estabelecidos e a base teórico-conceitual, estabelecida no capítulo anterior.

O ponto central do objeto de pesquisa é a análise de registros escritos de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral e suas implicações no processo de aprendizagem desse tópico do Ensino Superior. Para abordá-lo, retomamos os objetivos que são: analisar produções escritas de estudantes em atividades de Cálculo Diferencial e Integral, identificar e caracterizar erros, procedimentos e estratégias de resolução em atividades de Cálculo Diferencial e Integral com ênfase nos aspectos algébricos dessas produções, analisar os atuais procedimentos didáticos, pedagógicos e metodológicos que visam à aprendizagem do Cálculo no local em que foi realizada a pesquisa e, por último, buscar junto a alunos e professores percepções sobre as aprendizagens no Cálculo.

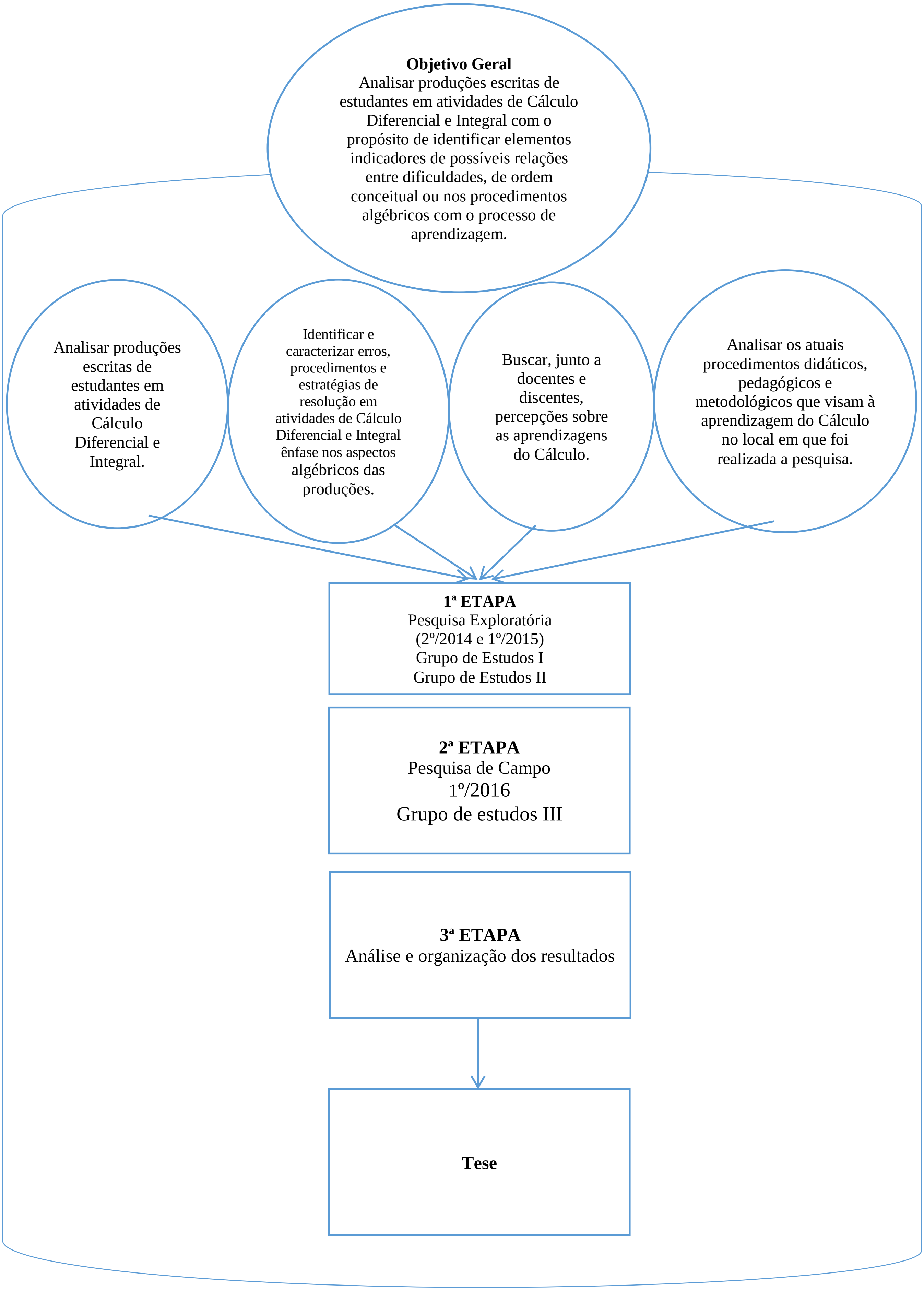
A pesquisa exploratória, que será relatada no início do capítulo seguinte, foi decisiva na escolha do caminho metodológico e no delineamento final do objeto e dos objetivos. Para tanto, pressupomos que a pesquisa em educação não é um sistema pronto e acabado. Ela engloba a interação entre os sujeitos envolvidos nos processos associados às construções das aprendizagens. Consequentemente, é um processo dinâmico e complexo que requer recursos dialógicos entre o pesquisador e seus colaboradores. Esse dinamismo da pesquisa (NÓVOA, 2011) é também reforçado por Triviños do seguinte modo: “Temos expressado reiteradamente que o processo da pesquisa qualitativa não admite visões isoladas, parceladas, estanques. Ela se desenvolve em interação dinâmica retroalimentando-se, reformulando-se constantemente e, [...]” (TRIVIÑOS, 1987, p. 137). Essa constatação, além de expressar o que foi vivenciado durante o desenvolvimento da nossa pesquisa, também sinaliza o processo metodológico descrito neste capítulo que qualifica este trabalho como o de uma pesquisa qualitativa.

A pesquisa foi organizada em três etapas. A primeira compreendeu um estudo preliminar de caráter exploratório, realizado entre estudantes de Cálculo, ingressantes dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática. Essa etapa, ocorrida durante dois semestres, trouxe contribuições para o entendimento do contexto e do ambiente da investigação; ela serviu para o conhecimento das demandas relativas às aprendizagens do

Cálculo dos participantes, mas, sobretudo, para a definição dos rumos dos trabalhos nas fases seguintes. Em razão de sua importância para a formatação dessa tese, a primeira etapa será descrita separadamente no próximo capítulo.

Embora a primeira fase também faça parte da pesquisa prática, a segunda parte será o que chamaremos de pesquisa de campo. Isso porque foi nessa etapa que concentramos nossa investigação nas aprendizagens do Ensino Superior, mais especificamente, nos temas do Cálculo. Esse estágio prático da pesquisa foi pensado com base nas experiências anteriores dos Grupos de Estudos e efetivado junto a um grupo de sujeitos específicos que tinham, anteriormente, manifestado alguma dificuldade de aprendizagem do Cálculo e que, por isso, estavam refazendo o curso. Esse momento foi o que deu suporte às produções escritas, resultados e análises que serão apresentados neste trabalho. A terceira e última etapa foi a fase de formatação e construção do trabalho final. Portanto, neste capítulo, serão detalhadas a metodologia das segundas e terceiras fases do processo de pesquisa. O diagrama a seguir (Figura 6) ilustra todas as três etapas do processo de pesquisa.

Figura 6 – Esquema do processo metodológico



3.1 Cenário da pesquisa

O local da pesquisa foi o Departamento de Matemática de uma instituição de Ensino Superior pública do Centro Oeste brasileiro.

A definição do local da pesquisa ocorreu pelo fato dessa instituição ser uma representante de um cenário em que se manifestam as demandas e desafios da aprendizagem do Cálculo. Esses, por sua vez, são também experimentados em outras instituições de Ensino Superior (ALVARENGA; DÖRR; VIEIRA, 2016).

No primeiro semestre de 2017, a universidade em que foi feita a pesquisa reservou, por meio do seu Departamento de Matemática, um total de 2199 vagas de Cálculo Diferencial e IntegraI com as denominações Cálculo I, Cálculo I Semipresencial e Matemática I. Esse último é um curso de quatro créditos, mas que tem em comum com o Cálculo a maior parte de seu conteúdo programático como pode ser verificado no Anexo D. As vagas para cada um desses cursos foram 1130 (19 turmas), 369 (14 turmas), 700 (10 turmas) respectivamente, de acordo com dados extraídos pelo Sistema de Graduação, SIGRA.

São 27 o total de cursos de graduação que têm em seus currículos o Cálculo I ou a Matemática I como disciplinas obrigatórias, conforme Tabela 1 que apresenta os cursos, em ordem alfabética, para os quais os cursos Cálculo I e Matemática I são ofertados nessa universidade.

Tabela 1 – Cursos que ofertam Cálculo I e Matemática I

CÁLCULO I	MATEMÁTICA I
Administração	Agronomia
Biotecnologia	Ciências Ambientais
Ciências Biológicas	Ciências Biológicas (Not.)
Ciência da Computação	Ciências Contábeis
Ciências Econômicas	Engenharia Florestal
Engenharia Ambiental	Farmácia
Engenharia Civil	Gestão De Agronegócios
Engenharia De Computação	Gestão De Políticas Públicas
Engenharia Elétrica	
Engenharia Mecânica	
Engenharia Mecatrônica	
Engenharia Química	
Engenharia de Redes	
Física	
Geologia	
Geofísica	
Matemática	
Química	
Química Tecnológica	

Fonte: Relatório da pesquisa

3.2 Sujeitos da pesquisa

Passamos agora a apresentar e caracterizar os sujeitos integrantes da segunda etapa da pesquisa, ou seja, aqueles que participaram da última versão dos Grupos de Estudos. Os participantes da pesquisa exploratória serão descritos no próximo capítulo.

Tanto na pesquisa exploratória quanto na pesquisa de campo, foram três categorias de sujeitos componentes do estudo. A primeira delas, objeto de nossa investigação, é constituída pelos estudantes que no momento da pesquisa estavam em situação de dificuldade de aprendizagem com o Cálculo. A segunda delas é composta pelos estudantes que atuaram na monitoria e cooperaram no trabalho de campo. A terceira e última é a professora-pesquisadora.

Um dos resultados da pesquisa exploratória foi a indicação de que, já que os objetivos da pesquisa abrangiam tópicos ligados às dificuldades de aprendizagem, deveríamos, então, considerar especialmente aqueles estudantes que já tinham evidenciado explicitamente alguma dificuldade com o curso. Foi assim que decidimos tomar para a investigação prática final da segunda etapa, estudantes dos cursos de Cálculo , voluntários, mas que estivessem matriculados nas turmas de Cálculo I na modalidade semipresencial. Como já explicado anteriormente, nessa modalidade do Cálculo, a prioridade de matrícula é dada àqueles estudantes que já obtiveram pelo menos uma reprovação neste componente curricular e ficaram na lista de espera de matrículas para as turmas regulares. Em termos gerais, portanto, o sujeito estudante considerado é aquele que, tendo sido reprovado pela menos uma vez em Cálculo I, deseja superar alguma limitação, dificuldade ou impedimento que o tenha levado ao fracasso no curso. Nesse caso, a reprovação está sendo colocada como o indicador de alguma situação de dificuldade de aprendizagem.

Quanto ao número de participantes, pretendíamos inicialmente trabalhar com um número máximo de 20 pessoas para a realização de trabalhos em duplas ou trios. Esse procedimento tinha o objetivo de tornar viável, do ponto de vista operacional, o trabalho de acompanhamento e de condução das atividades no grupo. Como no primeiro encontro tivemos a participação de cinquenta estudantes, optamos por conduzir as atividades com o grupo todo, sabendo que, como ocorreu das outras vezes, alguns desistiriam durante o percurso.

Na primeira semana das atividades, reforçamos o caráter investigativo dos encontros, sua importância naquele momento e no futuro da aprendizagem do Cálculo e que, devido a essa característica, foi solicitado a todos os participantes que assinassem o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido apresentado no Apêndice A. O Termo foi lido pela pesquisadora junto com o grupo, explicado e assinado pelos participantes.

As turmas do Cálculo Semipresencial (CS) são formadas por alunos de diferentes cursos. Essa característica do grupo envolve uma diversidade de indivíduos e de concepções a respeito da disciplina e da relação dela com seus cursos de graduação.

A Tabela 2, a seguir, apresenta os cursos nos quais os estudantes participantes estavam matriculados à época da realização das atividades práticas da pesquisa. Nessa tabela, listamos os cursos em ordem alfabética e incluímos todos os 73 (setenta e três) participantes que passaram pelo GE pelo menos uma vez, incluindo aqueles que não permaneceram até o final. Na tabela 2, foram marcados em amarelo os cursos com os três maiores percentuais de participação no GE: Geologia, Geofísica, Administração e Ciência da Computação.

No semestre anterior à atividade, nesses quatro cursos destacados, os índices de aprovação das turmas às quais os cursos pertenciam, foram respectivamente, 40,91%, 38,33%, 18,03% e 62, 71% para as turmas do diurno e 28,3% para a turma de Administração do período noturno. Excetuando a turma de Ciência da Computação do diurno, todas as outras turmas apresentaram índices de reprovação inferiores a 50%. Logo, esses índices sugerem que a maior frequência de participantes oriundos dessas turmas está relacionada aos menores índices de aprovação nessas turmas e explicariam a maior quantidade de participantes desses cursos.

Tabela 2 – Cursos dos participantes da pesquisa

CURSO	PORCENTAGEM DE PARTICIPANTES
ADMINISTRAÇÃO	11,00
BIOTECNOLOGIA	6,90
CIENCIAS BIOLÓGICAS	1,40
CIÊNCIA DA COMPUT.	9,60
CIÊNCIAS CONTÁBEIS	5,50
ECONOMIA	2,70
ENGENHARIA AMBIENTAL	4,10
ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO	1,40
ENGENHARIA DE REDES	1,40
ENGENHARIA FLORESTAL	1,40
ENGENHARIA MECÂNICA	4,10
ENGENHARIA MECATRÔNICA	9,60
ESTATÍSTICA	5,50
FÍSICA	1,40
GEOFÍSICA	11,00
GEOLOGIA	12,30
QUÍMICA	5,50
QUÍMICA TECNOLÓGICA	5,50

Fonte: Relatório da pesquisa

3.3 Formação do Grupo de Estudos

Após duas experiências anteriores com o Grupo de Estudos (GE) na pesquisa exploratória, a segunda parte da investigação foi iniciada e se constituiu na pesquisa de campo propriamente dita. Essa etapa aconteceu no primeiro semestre letivo de 2016. Os potenciais participantes, ou seja, os alunos matriculados na modalidade Semipresencial do Cálculo foram convidados pessoalmente pela pesquisadora. O convite ocorreu na quarta-feira, dia 09 de março de 2016, no primeiro encontro presencial do curso. Foram visitadas as dez turmas de Cálculo semipresencial com autorização do coordenador da disciplina.

No convite oral foi explicado, em aproximadamente cinco minutos, os principais elementos da proposta de atividade. Assim, os estudantes foram informados sobre o horário e o local dos encontros, que se tratava de um apoio extra à disciplina e que ela ocorreria na modalidade de atividade de extensão. Ao comentar sobre as diferentes dificuldades que surgem para muitos estudantes numa primeira vez que se tem contato com o Cálculo, foi ressaltado que a atividade teria a intenção de ser mais um suporte aos participantes na identificação e superação das eventuais dificuldades de aprendizagem.

Na mesma semana, o convite foi reforçado por *e-mail* e por um aviso no “Fórum de Notícias” na página do curso no ambiente *Moodle* a todos os matriculados no Cálculo I Semipresencial.

3.4 Descrição das Atividades

As atividades do GE iniciaram-se na segunda-feira dia 14 de março de 2016. Os encontros aconteceram às segundas e sextas-feiras entre 12h15 e 13h50 numa sala localizada no Departamento de Matemática do local da pesquisa. O Grupo de Estudos de Cálculo aconteceu no primeiro semestre de 2016 na modalidade de curso de extensão.

Durante o tempo de realização da atividade, o trabalho em sala foi feito com o auxílio de dois estagiários de Regência do curso de Licenciatura em Matemática daquele semestre e mais dois monitores de Cálculo. Todos serão denominados de monitores nos relatos da pesquisa de campo. Com esse apoio, foi possível que, na maioria dos encontros, houvesse quatro pessoas atuando e cooperando com os trabalhos dos grupos, ou seja, a professora-pesquisadora, dois estagiários e um monitor.

Nos dois encontros realizados semanalmente eram abordados os mesmos temas que estavam sendo estudados no curso de Cálculo regular. No início de cada encontro, a professora-pesquisadora, ou um dos monitores, fazia um breve resumo do assunto semanal em que eram destacados os pontos mais importantes que deveriam ser estudados, entendidos e exercitados por meio da resolução de atividades que eram escolhidas entre os exercícios de fixação (Anexo A), a lista de situações-problema (Anexo B) ou alguma atividade extra, elaborada pela pesquisadora. Os estudantes eram lembrados de tópicos matemáticos dos Ensinos Fundamental ou Médio que deveriam embasar os conteúdos matemáticos que estavam sendo estudados e estimulados ao estudo desses assuntos, caso necessitassem.

Em seguida, passava-se à resolução de exercícios das listas semanais. Essas listas, uma de exercícios de fixação e outra de aplicação (Anexos A e B), eram disponibilizadas na página do curso na internet. Elas foram elaboradas por um grupo de professores de Cálculo com o objetivo de servirem de referência para os estudos individuais dos estudantes e eram liberadas, semana após semana, de acordo com o respectivo tema tratado. A lista de fixação, já era acompanhada do seu gabarito com as respostas, mas para a de lista de aplicações, as soluções completas esperadas estavam disponíveis somente na semana seguinte à sua publicação na página do curso.

Nas atividades do GE, os exercícios a serem trabalhados em pequenos grupos eram indicados pela professora-pesquisadora ou sugeridos pelos participantes de acordo com as suas necessidades de aprofundamento nos temas semanais. A formação dos grupos era definida pelos participantes, sendo observado um máximo de quatro integrantes. O local de realização das atividades, é composto por mesas de seis a oito lugares favorecendo a formação dos grupos.

O monitoramento, o acompanhamento, a mediação e o apoio aos trabalhos nos grupos eram feitos com a ajuda da professora-pesquisadora e dos monitores. O encontro terminava com a resolução, no quadro, de um ou dois dos exercícios propostos daqueles que geraram mais dúvidas e questionamentos. Por fim, fazia-se o resumo ou reforço de alguma explicação solicitada pelos estudantes.

Para essa resolução final no quadro, dava-se a oportunidade de participação aos estudantes. Porém, a maioria deles não se sentia à vontade e nem segura e se recusava. Foram poucas as vezes que se dispuseram a participar. Assim, essa tarefa foi realizada, em sua maior parte, pela professora-pesquisadora ou pelos monitores.

Nas semanas de testes ou provas, os encontros de sexta-feira foram realizados às quintas-feiras devido à realização das provas e testes da disciplina que aconteciam nas sextas-feiras entre 12 e 14 h para todas as turmas do período diurno. Nessas ocasiões, tentávamos disponibilizar pelo menos uma meia hora do encontro de quinta-feira para tirar dúvidas dos estudantes.

As atividades eram dinâmicas, cooperativas e focadas nas resoluções de exercícios e situações-problema das listas semanais do Cálculo. Pelo menos uma vez ao mês, pedíamos aos participantes que entregassem alguma atividade selecionada por escrito. Isso era feito em grupo ou individualmente, dependendo do assunto tratado ou do tipo de atividade. Cada participante ou grupo entregava seus registros à professora-pesquisadora ou aos monitores. As resoluções eram corrigidas, comentadas e devolvidas aos participantes para conhecimento de seus erros e acertos.

Durante a pesquisa prática, foram realizados um total de 27 encontros os quais estão resumidos na Tabela 3, apresentada a seguir. Ela contém as datas e conteúdos tratados em cada semana de realização das atividades do GE.

Tabela 3 – Encontros e temas

SEMANA	DATAS DOS ENCONTROS	TEMAS
1ª	14 e 18 de Março	Introdução ao Cálculo, Pré-teste e Limite no Ponto
2ª	21 de Março	Continuidade
3ª	28 e 31 de Março	Limites infinitos, no infinito e assíntotas
4ª	11 e 12 de Abril	Retas tangentes, derivadas e regras de derivação; Derivada das funções trigonométricas e da função exponencial
5ª	18 de Abril	Regra da Cadeia; Derivação implícita; Derivadas de funções inversas
6ª	25 e 29 de Abril	Taxas relacionadas; Extremos de funções
7ª	02 e 05 de Maio	Teorema do Valor Médio; Crescimento de funções; Otimização
8ª	09 e 13 de Maio	Concavidade; Esboço de gráficos
9ª	16 e 19 de Maio	Indeterminações e a Regra de L'Hôpital
10ª	23 de Maio	Integral definida, Teorema Fundamental do Cálculo, Áreas
11ª	30 de Maio e 03 de Junho	Integrais Indefinidas
12ª	06 e 10 de Junho	Regra de Substituição
13ª	13 e 16 de Junho	Integração por partes; Volumes
14ª	20 e 24 de Junho	Integração por frações parciais; Comprimento de arco
15ª	27 e 30 de Junho	Substituição trigonométrica

Fonte: Relatório da pesquisa

As imagens subsequentes são fotografias que exemplificam alguns momentos dos encontros do Grupo de Estudos de Cálculo realizados no primeiro semestre de 2016. Elas retratam a atmosfera, os cenários e os participantes da pesquisa. Como podemos constatar, diferentemente de aulas realizadas em outros contextos ou de um curso regular, o grupo tem tamanho e local adequados ao trabalho em grupo. Essas características favorecem as trocas entre os pares, a proximidade física e social entre os monitores e entre a professora-pesquisadora responsável pela pesquisa.

Figura 7 – Os encontros do Grupo de Estudos de Cálculo

Fonte: arquivo da pesquisa.

3.5 A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática

O sujeito central de nossa pesquisa é aquele estudante que se dispôs a fazer parte do Grupo de Estudos por se julgar em situação de dificuldades no curso de Cálculo I. Esse sujeito se propôs a compartilhar com os outros participantes suas necessidades e conquistas nas aprendizagens durante a resolução de atividades em temas do Cálculo.

A execução da pesquisa de campo envolveu um trabalho prático realizado num ambiente acadêmico efetivo, mas fora do contexto de uma sala de aula regular. Nesse espaço, foi possível serem verificadas, socializadas e partilhadas eventuais dificuldades de aprendizagem no Cálculo. Os resultados serão validados através de descrições e análises, baseados em uma fundamentação teórica e na interpretação subjetiva dos pesquisadores. Essas caracterizações confirmam o caráter de uma pesquisa qualitativa ao nosso trabalho de investigação (D’AMBROSIO, 2012).

De acordo Bogdan et al (1994 apud BORBA; ARAÚJO, 2013, p.25), a pesquisa qualitativa é caracterizada pelas seguintes proposições:

> 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
> 2. A investigação qualitativa é descritiva;
> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados dos produtos;
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Triviños (1987, p. 128) emprega os mesmos cinco pontos anteriores para tipificar uma pesquisa qualitativa de tipo fenomenológico. Quanto ao primeiro ponto da caracterização, ressaltamos que na pesquisa realizada, a investigadora atuou como mediadora e cooperadora dos trabalhos tendo também como coadjutores os estudantes de Cálculo e os monitores num ambiente de trocas e interações em que cada um dos atores desempenhou um papel relevante no processo investigativo. Nessa função, muitas vezes, ela assumiu o seu papel de professora que ensina e orienta os estudos numa ação partícipe, mas também de aprendiz. É por isso que, em todo esse trabalho, ela está sendo chamada de professora-pesquisadora.

A caracterização do segundo item, relativa ao caráter descrito da pesquisa, pode ser ampliada. Concordamos que a descrição é parte essencial de um processo investigativo, porém não o único e acompanha todas as outras etapas. Assim, ao lado da descrição, destacamos as outras fases que são igualmente essenciais na preparação para a construção da tarefa descritiva final.

A pesquisa qualitativa não tem como foco a quantidade de indivíduos, mas considera, principalmente, o indivíduo com suas complexidades, limitações e leva em conta sua inserção e interação com o meio (D'AMBROSIO, 2012). Essas peculiaridades estão de acordo com a abordagem metodológica da nossa pesquisa que tem como foco as aprendizagens de cada sujeito participante, num contexto de dificuldades de aprendizagens.

Esse sujeito epistêmico, singular, traz consigo influências afetivas, sociais, culturais e cognitivas. Esse contexto múltiplo requer um mergulho profundo e complexo nos processos cognitivos revelados em suas atividades matemáticas, por meio das atividades propostas no curso de Cálculo, ou seja, na expressão de Muniz (2016, p.1):

> "Faire apprendre" é uma das essências do desafio da didática da matemática, uma vez que ao concebermos um sujeito que aprende, a atividade de aprendizagem é vista como propriedade do sujeito epistêmico em atividade

> e, assim, ninguém pode aprender por ele. A busca da complexa compreensão da aprendizagem de um sujeito em plena atividade requer de nós, educadores e pesquisadores, um esforço interpretativo, intelectual e psicológico, em que as categorias conceito em ato e teorema em ato, revelam-se tanto ricas quanto desafiantes.

Relativamente à caracterização da natureza metodológica da pesquisa, esta é qualificada por nós como pesquisa participante (SILVA; SILVEIRA, 2012), uma vez que a professora-pesquisadora foi inserida no ambiente efetivo onde se realizavam as aprendizagens do Cálculo, e, em particular, acompanhou os encontros dos Grupos de Estudos a fim de observar, conhecer e experimentar as necessidades, em termos de aprendizagens, das pessoas que participaram e cooperaram com as ações práticas. Nesse tipo de pesquisa, como o próprio nome indica, há um caráter de participação efetiva e comprometida com a realidade concreta de um determinado local. A esse respeito, registramos as palavras de Paulo Freire:

> Para muitos de nós, a realidade concreta de uma certa área se reduz a um conjunto de dados materiais ou de fatos cuja existência ou não, de nosso ponto de vista, importa constatar. Para mim, a realidade concreta é algo mais que fatos ou dados tomados mais ou menos em si mesmos. Ela é todos esses fatos e todos esses dados e mais a percepção que deles esteja tendo a população neles envolvida. Assim, a realidade concreta se dá a mim na relação dialética entre objetividade e subjetividade. (FREIRE, 1981, p. 35)

A "realidade concreta" de nossa ação investigativa está restrita a um grupo particular de estudantes em uma universidade pública específica. Essas peculiaridades conferem ao nosso estudo o caráter de um estudo de caso. Como sucede em um estudo de caso, mesmo que os resultados e conclusões concebidos no âmbito da pesquisa tenham sido construídos dentro de um contexto restrito, esse tipo de investigação nos permitirá formular hipóteses para o encaminhamento e aprimoramento de outras pesquisas na área (TRIVIÑOS, 1983).

Nessa perspectiva, não há a intenção de que sejam formuladas generalizações dos resultados para outras realidades. Ainda assim, essa pesquisa caracteriza-se pela condição privilegiada de ser um mergulho epistemológico na construção de uma práxis particular. Neste caso, o aprendizado do Cálculo e o seu desenvolvimento para a formação matemática.

A motivação geradora desta pesquisa partiu da atividade docente cotidiana da professora-pesquisadora e, por isso, foi efetivada com a intenção de que seus resultados sirvam para o entendimento de um problema prático e recorrente nas universidades. Esperamos também que ela possa ser usada para embasar outros estudos e estratégias de ensino, mas sem a preocupação imediata com mudança da realidade. Portanto, compartilhamos do entendimento de Gabarrón e Landa, (2006, p.113). Esses autores resumem a pesquisa participante “como uma proposta metodológica inserida em uma estratégia de ação definida, que envolve seus beneficiários na produção de conhecimentos”.

A escolha metodológica de nossa investigação foi pensada inicialmente nas necessidades dos estudantes participantes. Esses sujeitos buscavam a aprovação no Cálculo. Sendo assim, a partir dessas necessidades, construiu-se um espaço dialógico que permitisse à professora-pesquisadora captar os processos psicológicos que definem as aprendizagens e as produções matemáticas desses alunos que se apresentam em situação de dificuldade.

Para que obtivessem sucesso em suas aprendizagens, os estudantes necessitavam e buscavam ter resolvidas as listas de atividades propostas a fim de que se sentissem mais preparados para as avaliações. Assim, uma forma de contribuição se deu abrindo um espaço para as resoluções dessas atividades. Por isso, decidimos usar como ferramentas de desenvolvimento das atividades práticas dos Grupos de Estudos o material, em forma de listas, do curso regular de Cálculo. Dessa forma, os instrumentos metodológicos foram estabelecidos pelas necessidades dos estudantes de superarem suas dificuldades e alcançarem sucessos em suas aprendizagens de Cálculo, mas também para darem suporte ao trabalho de investigação.

3.6 As interações nos Grupos de Estudos de Cálculo

As atividades dos Grupos de Estudos de Cálculo foram pautadas por interações dialógicas diversas entre os sujeitos envolvidos. Entre essas interações apontamos as seguintes:

Interação professora-pesquisadora X estudantes;
Interação professora-pesquisadora X monitores;
Interação estudantes X estudantes;
Interação estudantes X monitores.

O diálogo a que nos referimos diz respeito a um dos elementos de ação da pesquisa participante expressado nos diferentes modos de comunicação, ocorridos no cotidiano dos encontros dos GE. Novamente lembramos Freire (2011) que fala da importância de se desenvolverem espaços educativos abertos ao diálogo. Para esse autor, o diálogo é uma consequência natural de uma abertura do docente às manifestações dos outros. A esse respeito ele afirma:

> Viver a abertura respeitosa aos outros e, de quando em vez, de acordo com o momento, tomar a própria prática de abertura ao outro como objetivo da

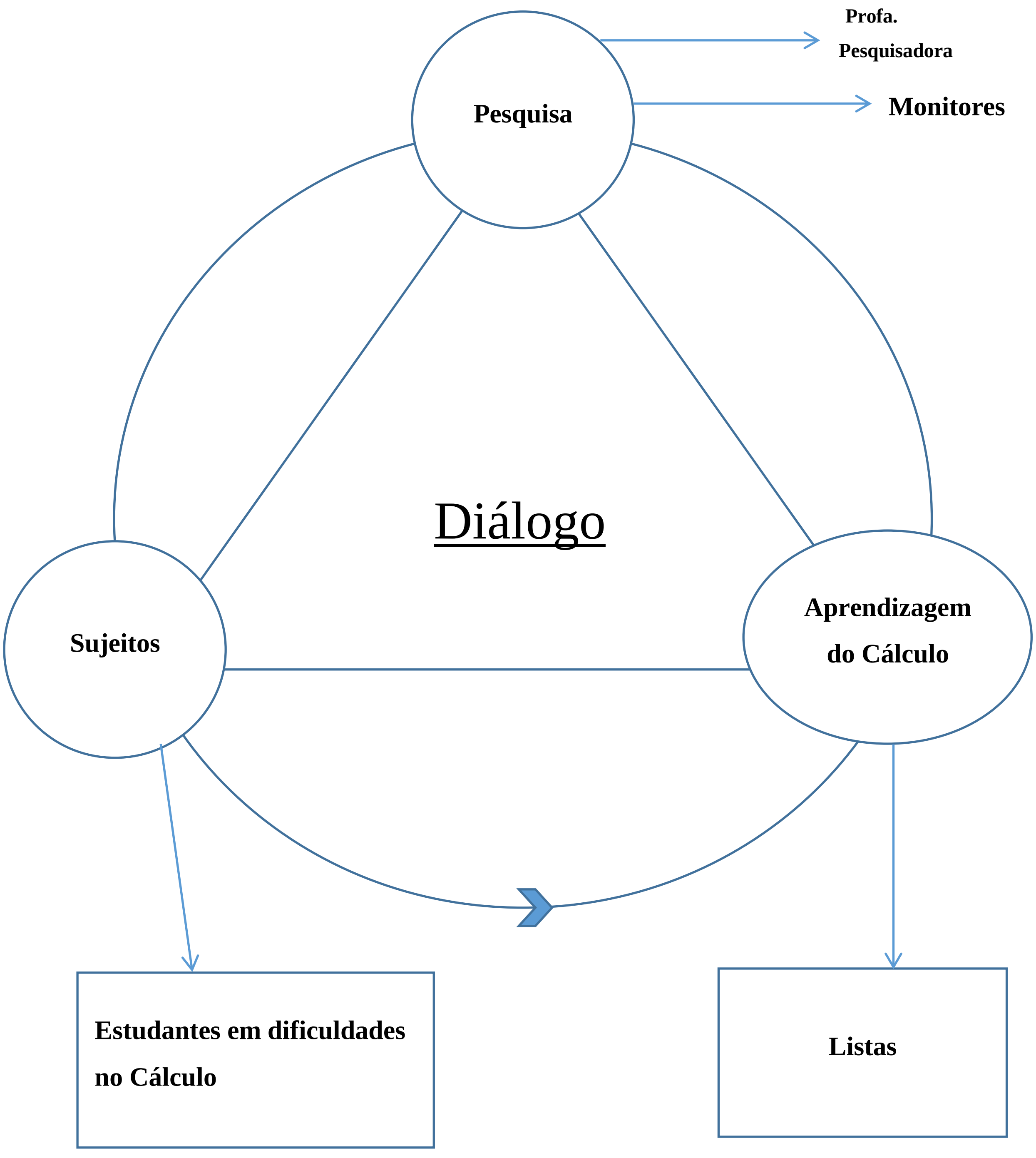
> reflexão crítica deveria fazer parte da aventura docente. A razão ética da abertura, seu fundamento político sua referência pedagógica; a boniteza que há nela como viabilidade do diálogo. (FREIRE, 19, p.86)

Na prática dos GE, os diálogos aconteceram no contexto das resoluções das listas semanais. Nessa atividade, foi possível perguntar, apresentar, discutir e explicar resoluções em um ambiente menos formal que o da sala de aula regular. Tais diálogos foram tanto estratégias de ensino e compromisso educacional de uma educadora-pesquisadora, quanto representaram uma estratégia de investigação na busca de um espaço comunicativo de desvelamento de conceitos e procedimentos matemáticos fundamentais para o aprendizado do Cálculo. Nesse sentido, partilhamos das ideias da tese da pesquisa de doutorado de Silva (2014, p.35) que estabelece que:

> No contexto da aprendizagem escolar da Matemática, há uma múltipla influência entre diálogo e aprendizagem matemática, portanto a conversão da sala de aula em espaço de diálogo e interação, de construção e criação, de espaço de pensar e fazer pode potencializar a aprendizagem matemática, do mesmo modo que a qualificação das aprendizagens pode potencializar o diálogo.

O estudante em situação de dificuldades de aprendizagem no Cálculo, muitas vezes, também indica ter problemas na forma de comunicar suas dúvidas. Ele não questiona por sentir-se intimidado pelo meio ou por não saber como expressá-las. Além da possiblidade de se expressarem por escrito nas resoluções das listas e de serem acompanhados pela professora-pesquisadora ou pelos monitores, houve também a possibilidade de dialogarem com outros colegas nas atividades de grupo. Concluindo essa seção, apresentamos na Figura 8, a seguir, um diagrama que resume o processo interativo aqui descrito.

Figura 8 – Esquema interativo nas atividades dos GE



3.7 Procedimentos de Construção e Registro das Informações

O terceiro e último momento da pesquisa, iniciado a partir do segundo semestre de 2016, foi o da reunião, ordenação lógica e seleção das informações e materiais coletados nas fases exploratórias e de campo. Esse material foi usado na organização e na construção das categorizações, análises e apresentação dos resultados e conclusões.

O Grupo de Estudos foi um espaço de resolução de exercícios e situações-problema de Cálculo. Como já mencionado anteriormente, já que os participantes estavam matriculados no curso de Cálculo e desejavam aprender a resolver as atividades das listas do curso, optamos por usar as listas semanais da disciplina como referência, pois elas eram, em primeira instância, a fonte de interesse de aprendizagem desses estudantes. Semanalmente, os estudantes tinham à disposição, na página do curso, duas listas, uma de exercícios de fixação e outra de problemas com aplicações do conteúdo em situações-problema em geral, advindas da realidade de diferentes áreas (Anexos B e C).

As resoluções escritas dos estudantes participantes do GE, após serem corrigidas, eram fotocopiadas, digitalizadas e arquivadas pela professora-pesquisadora. Nesse processo já era feita uma seleção daquelas que poderiam trazer contribuições para a análise final. Essas produções escritas são referenciadas neste trabalho em algumas citações como "protocolos". Assim, neste contexto, estamos considerando como protocolos os registros escritos dos estudantes contendo o desenvolvimento em termos de uma linguagem matemática de um exercício ou de uma situação-problema. Esses registros foram considerados em suas versões originais, ou seja, estão isentos de alterações. A maior parte das resoluções que será apresentada constitui-se de problemas das listas de exercícios.

Além das produções escritas em atividades de resoluções de atividade de Cálculo, foram aplicados um pré-teste (Apêndice D) e dois questionários avaliativos: um realizado após a primeira prova e outro ao final (Apêndices B e C, respectivamente).

3.7.1 Entrevistas com estudantes e professores

Um dos objetivos específicos da pesquisa está associado à investigação de percepções sobre as aprendizagens do Cálculo junto a professores e alunos. Por esse motivo, foram realizadas entrevistas com três professores atuantes na docência do Cálculo na universidade em que foi feita a pesquisa, e dois estudantes que haviam participado dos encontros dos GE na terceira fase.

As entrevistas foram do tipo semiestruturadas e seguiram um roteiro de perguntas elaborado pela professora-pesquisadora e seu orientador para a condução da conversa com os estudantes. Essas perguntas foram pensadas de modo que os estudantes pudessem expressar suas necessidades como aprendentes de Cálculo, suas sugestões, entre outros.

Os professores entrevistados trabalharam diretamente na criação e implementação da modalidade de Cálculo considerada no contexto da pesquisa. Ainda hoje, eles acompanham e participam do andamento, coordenação e atualização do curso. Por isso, foram escolhidos para contarem essa história, além de poderem apresentar suas visões acerca das aprendizagens e dificuldades que observam e vivenciam a cada semestre.

Todas as entrevistas estão transcritas no sexto capítulo. Ao terem assinado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndices A e B), os entrevistados, tanto professores quanto estudantes, autorizaram a gravação das conversas e a divulgação do conteúdo por meio deste trabalho. Foi mantido o anonimato desses colaboradores.

3.7.2 Registros das informações em diário de campo

O recurso usado para apontamento das atividades do Grupo de Estudos foi a construção de um diário de campo para anotação das atividades de cada encontro, buscando-se destacar os comentários, as observações e as participações consideradas como significativas para a pesquisa. O grupo de apoio formado pelos monitores foi orientado a contribuir com essas anotações por meio do envio semanal para a professora-pesquisadora de um resumo das atividades com suas descrições, observações e comentários sobre o desenvolvimento dos encontros.

Para composição desse diário, também foram usadas fotografias, gravação de áudio e arquivamento das produções escritas dos estudantes participantes.

3.8 Procedimentos de Análise

No decurso da pesquisa, um dos momentos marcantes aconteceu na tarefa de reunir e selecionar os registros escritos originados a partir das atividades propostas nos encontros do GE. Surpreendeu-nos o volume e a significação das produções, bem como as possibilidades investigativas por elas refletidas. Entretanto, como tínhamos objetivos a seguir, conduzimos a seleção observando tais objetivos.

Essa parte exigiu tempo e um olhar diferenciado dos pesquisadores para essas produções, uma vez que não poderíamos e nem teríamos tempo de usar todas elas. Nesse contexto, a experiência do Prof. Cristiano Muniz, orientador desta pesquisa, foi determinante. Uma de suas linhas de investigação tem se caracterizado pela difusão e incentivo a um “novo olhar” para os trabalhos escritos dos estudantes em sala de aula.

> Necessitamos de um **novo olhar** para a escola como espaço de produção de conhecimento matemático, concebendo cada aluno como sujeito epistêmico dotado de esquemas de pensamento e significações que permitem a possibilidade de diversidade no desenvolvimento de conceitos e procedimentos matemáticos. (MUNIZ, 2009, p.37, grifo da pesquisadora)

Para tirar proveito desses saberes e habilidades singulares do professor-orientador e com a possibilidade de ampliar esse olhar para produções matemáticas concretas de estudantes de graduação, optamos pelo emprego da combinação de elementos básicos da análise de erros em Educação Matemática e da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud como ferramentas de apreciação do material escrito selecionado. Entendemos que o uso da TCC se constituiu em um instrumento diferenciado na tentativa de entendimento dos mecanismos de produção e da aprendizagem dos estudantes de Cálculo considerados em situação de dificuldades de aprendizagem (MUNIZ, 2009, 2016). Nesse sentido, Bittar (2009, p. 56) nos lembra de que:

> [...] quando um aluno resolve uma determinada atividade, ele utiliza determinados conhecimentos que são implícitos, os chamados invariantes operatórios, e é o estudo desses invariantes que vai permitir identificar e compreender as dificuldades de aprendizagem relativas a um determinado campo conceitual.

Mais especificamente, em parte de nosso trabalho de análise, fizemos um trabalho de interpretação da natureza dos erros apresentados nos registros escritos sob a perspectiva da TCC, por meio da explicitação e classificação de conceitos, procedimentos e registros com vistas à discussão de implicações pedagógicas que pudessem contribuir para o entendimento das dificuldades de aprendizagem.

Em síntese, assume-se, neste estudo de caso, uma metodologia de pesquisa qualitativa apoiada na pesquisa participante com vistas ao entendimento de processos de aprendizagem do Cálculo numa universidade pública. Isso conduz à tomada de um percurso de pesquisa intencional em que se busca compreender a realidade do fenômeno aprendizagem do Cálculo, levando em conta os principais componentes do entorno da pesquisa, a saber, o professor-pesquisador-educador, os estudantes e o ambiente acadêmico. Para complementar a descrição metodológica de nosso estudo, descrevemos, no próximo capítulo, a pesquisa exploratória.

4 A PESQUISA EXPLORATÓRIA

Desde a concepção do projeto inicial de pesquisa, tínhamos em mente a realização da investigação entre estudantes do curso de Cálculo I do Departamento de Matemática de uma instituição pública federal. Assim, para melhor retratar a realidade do campo de pesquisa, foram feitas sondagens preliminares, desde a entrada da pesquisadora para o programa de Doutorado, que ocorreu no primeiro semestre de 2014. Tais sondagens serviram para o delineamento da pesquisa de campo final e contribuíram para a identificação, ratificação e formação de algumas hipóteses que julgamos serem relevantes ao processo de aprendizagem de Cálculo, do ponto de vista de professores e educadores matemáticos.

Destacaremos, neste capítulo, algumas das informações colhidas em dois anos de sondagem do campo de pesquisa. Iniciamos com a descrição da metodologia do curso de Cálculo na instituição em que foi realizada a pesquisa, em seguida, mostramos os resultados sobre os números de aprovados nos cursos de Cálculo I, a partir de 2011 até segundo semestre de 2016. A seguir, trazemos um relato das experimentações de formação dos chamados Grupos de Estudos de Cálculo, ocorridos em dois semestres consecutivos, o segundo semestre de 2014 e o primeiro de 2015.

Essas informações preliminares serviram para fundamentar a construção dos objetivos e da metodologia da pesquisa efetivada. Reforçamos que, nesse momento da pesquisa, não tivemos a preocupação com a análise dos dados e as informações coletadas.

4.1 Estruturação do Cálculo I no local da pesquisa e o modelo Cálculo Semipresencial

Como foi descrito na seção 3.1 do capítulo anterior, a disciplina Cálculo I da universidade pesquisada oferece vagas para todos os cursos de graduação que o tem como disciplina obrigatória em sua grade curricular. No primeiro semestre de 2017, o número de vagas ofertadas no Cálculo I foi de 1.130 no curso regular e 369 na modalidade semipresencial. A carga horária semestral do curso é de 90 (noventa) horas que equivalem a 6 (seis) créditos. Essas noventa horas são distribuídas em três encontros semanais. Cada encontro tem duração de cento e dez minutos, no período diurno, e cem minutos no período noturno.

Até o ano de 2012, o ensino de Cálculo I, na instituição considerada neste trabalho, era ministrado, em todas as turmas, na forma a qual chamaremos de *modelo tradicional* por se tratar de uma aula usual do Ensino Superior, em que há a exposição de conteúdos pelo professor e em que são usados como recursos didáticos o quadro negro e o giz. No segundo semestre de 2012, o Departamento de Matemática introduziu uma metodologia de ensino em que a primeira aula semanal é teórica e as demais são aulas de exercícios. Foram alocadas seis turmas de diferentes cursos para a introdução dessa metodologia.

A aula teórica recebeu o nome de *"aula magistral"*. E os professores designados para essas aulas têm um programa fechado a ser cumprido semanalmente e que está definido previamente no planejamento de ensino da disciplina. Isso deve ser observado por ele, uma vez que as aulas de exercícios dependem da apresentação da teoria realizada nessas aulas. As aulas magistrais são realizadas em anfiteatros com capacidade para abrigar duas turmas de diferentes cursos. As aulas de exercícios são realizadas em grupos menores. Nesse momento, as turmas que estavam juntas na aula magistral são atendidas separadamente. Para essas aulas de exercícios, são indicados, na maioria das vezes, professores que não são os professores da teoria.

Nas aulas de exercícios, em geral, os professores trabalham sozinhos para atenderem a um grupo inicial de 60 estudantes. A orientação para essas aulas é que o professor coordene e medeie as resoluções de listas de exercícios. Semanalmente, são distribuídas duas listas. Uma delas foi denominada "lista de fixação" da teoria (Anexo A). Ela contém exercícios de resolução mais direta. A segunda lista é a "lista de aplicação" (Anexo B), que traz aplicações práticas do conteúdo ministrado na semana, pertencentes a diferentes áreas. Caso o professor da teoria não consiga abordar algum dos temas prescritos para a semana, ele passa essa informação ao professor da teoria que cuidará de ensiná-lo aos estudantes.

Nessa modalidade, os estudantes têm como apoio extraclasse as monitorias que são oferecidas pelo departamento todos os dias entre 12h e 13h50 ou entre 18h e 19h. Além disso, os estudantes podem tirar dúvidas em fóruns específicos, na página do curso, no ambiente de aprendizagem construído no *Moodle*[3]. Esses fóruns são respondidos por qualquer professor ou monitor da disciplina. Todas as informações sobre o curso, incluindo as listas, bem como *links* para videoaulas e material complementar, com teoria e exercícios para cada tópico do curso, são disponibilizados no *Moodle*. A maior parte desse material foi elaborada por professores da própria instituição.

Os Anexos A e B mostram as listas de fixação e aplicação da primeira semana de aulas, respectivamente. No Anexo C, apresentamos o programa do curso de Cálculo I do

[3] Moodle: acrônimo para *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment*. É um Software livre e gratuito desenvolvido para uso educacional.

segundo semestre de 2016. Todo esse material é fornecido aos professores, estudantes e monitores na página do curso no ambiente de aprendizagem *Moodle* a cada semestre.

O curso é dividido em três módulos, conforme pode ser verificado no Anexo C. Cada um dos módulos tem três tipos de avaliações, os testes, as provas e as atividades em sala. No segundo semestre de 2016, para cada módulo, 50% da nota final foi correspondente à prova escrita, 35% correspondeu a um teste especial de múltipla escolha e 15% às atividades em sala nas aulas de exercícios.

No segundo semestre de 2012, quando se iniciou essa modalidade de ensino, a experiência do modelo magistral foi aplicada em dois grupos do diurno e um do noturno. As outras turmas seguiram o modelo tradicional de curso, a saber, os três encontros foram com um mesmo professor e as aulas de exercícios não eram separadas da teoria.

Os resultados dessa primeira experiência revelaram que, nas turmas em que o modelo magistral foi implantado, obtiveram-se melhores resultados de aprovação do que no outro grupo que permaneceu no modelo convencional. Esses resultados, em termos de números de aprovados, foram apresentados ao colegiado do Departamento de Matemática para motivar a aprovação do modelo no colegiado, com vistas à implantação em todas as turmas, o que ocorreu a partir do segundo semestre de 2013. Os dados do Anexo D trazem as informações e comparações entre notas que foram divulgadas pela coordenação de graduação àquela época.

4.1.1 Sobre o modelo Semipresencial de Cálculo

O Cálculo I Semipresencial é um curso de Cálculo ofertado preferencialmente para alunos que já tenham tido pelo menos uma reprovação no curso de Cálculo I. Este último será denominado, neste trabalho, de curso regular ou magistral, ou seja, aquele conduzido nos moldes descritos no parágrafo anterior. Desse modo, o curso de Cálculo I Semipresencial foi criado para atender à demanda de alunos que ficariam fora da matrícula por faltas de vagas e também para introduzir uma alternativa metodológica no ensino do Cálculo, pois apesar de ter o mesmo programa e ementa do Cálculo regular, esse curso oferece aos discentes somente um encontro semanal para resolução e discussão das listas.

Nesse encontro, o trabalho é direcionado a atividades em grupo de resoluções de exercícios ou situações-problema das listas semanais e conta com a mediação de um professor ou estagiário de docência do Ensino Superior. Como não têm aulas teóricas, aos matriculados nesse modelo é dada a possibilidade de usarem a página do curso com todos os recursos disponíveis como videoaulas, os textos com estudos dirigidos, exercícios suplementares, testes online, entre outros.

As listas, provas e testes são os mesmos do modelo magistral. No sexto capítulo, são reproduzidas entrevistas de dois professores que relatam o processo histórico de criação e implementação dos modelos magistral e semipresencial.

4.2 Índices de Aprovação e Reprovação

No Anexo C, são apresentadas tabelas com os resultados finais gerais em termos das notas médias de aprovação dos estudantes de todas as turmas que fizeram Cálculo no local da pesquisa do primeiro semestre de 2011 ao primeiro semestre de 2016. Esses dados foram fornecidos pela Coordenação de Graduação dos cursos de Matemática da instituição. A comissão tem acompanhado os resultados a cada semestre. A seguir, na Tabela 4, destacamos esses resultados, resumidamente, em termos de porcentagens de aprovação, no período compreendido entre o primeiro semestre de 2011 e o primeiro semestre de 2015.

Tabela 4 – Resultados finais gerais para turmas de Cálculo - aprovação

Semestre	%Diurno	%Noturno	%Presencial	%Semi-P.
2011/1	53,82	38,01	49,56	
2011/2	49,36	33,54	45,02	
2012/1	71,22	58,33	68,10	
2012/2	50,11	40,00	47,69	
2013/1	64,30	39,78	58,37	
2013/2	51,67	41,08	48,90	
2014/1	56,85	30,39	50,05	
2014/2	52,85	27,98	47,07	40,76
2015/1	59,34	35,66	54,56	50,65

Fonte: Relatório da Comissão de Graduação, Julho 2015.

Os índices de aprovação para as turmas do Semipresencial, apurados entre 2014 e 2015 são os constantes na Tabela 5, apresentada a seguir. Nesta tabela, AP, RP, TR são siglas usadas para designar aprovado, reprovado e trancamento, respectivamente.

Tabela 5 – Índices de aprovação em Cálculo I Semipresencial 2014-2015

	2014/2				2015/1				2015/2			
Turma	AP	RP	TR	%AP	AP	RP	TR	%AP	AP	RP	TR	%AP
SP- A	18	14	5	56,25	25	15	1	62,50	9	16	2	36,00
SP- B	20	16	2	55,56	20	17	2	55,56	10	17	2	37,00
SP- C	9	26		25,71	19	20	3	48,72	13	12	5	52,00
SP- D	8	24	4	25,00	23	17	1	57,50	12	17	1	41,38
SP- E	15	22	2	40,54	22	19	7	53,66	6	22	2	21,43
SP- F					24	12	4	66,67	2	22	5	8,33
SP- G	16	17		48,48	15	23	1	39,47	16	12	3	57,14
SP- H	11	22	5	33,33	9	29	2	23,68	10	15	4	40,00
SP- I					18	16	3	52,94				
SP-J					19	21	1	47,50				
Total	97	141	18	40,76	194	189	25	50,65	78	133	24	36,97

Fonte: Comissão de Graduação, Fevereiro 2016.

Com relação aos dados dessa Tabela 5 e das tabelas do Anexo C, destacamos algumas observações gerais:

- ✓ As turmas dos cursos de Matemática do noturno, turmas I nas tabelas do Anexo C, estão com índices mais baixos de aprovação que a média. Por exemplo, nos últimos quatro semestres apresentados, essas médias foram 34,62% (2015/2), 33,33% (2015/1), 28% (2014/2) e 29,09% (2014/1).
- ✓ As turmas do período noturno têm tido resultados mais baixos, em termos de aprovação, que as turmas do diurno. Além disso, os índices estão todos abaixo de 50%, exceto no semestre 2012/1 com 58,33%.
- ✓ O modelo Semipresencial parece apresentar variações imprevisíveis nos índices de aprovação a cada semestre, podendo ser bem diferentes entre as turmas. Por exemplo, no segundo semestre de 2015, a turma A teve 36% de aprovação, enquanto que a turma C, 52%. Nesse semestre, em particular, o índice geral de aprovação foi de 36,97%.
- ✓ Os índices de aprovação foram calculados excluindo os trancamentos.

4.3 Concepção dos Ingressantes sobre a aprendizagem do Cálculo

Para registrar as já conhecidas e tão faladas concepções negativas sobre o Cálculo de estudantes iniciantes, foi solicitado a um grupo deles que respondesse à seguinte pergunta:

"O que você ouviu falar sobre o curso de Cálculo?"

Participaram da atividade um total de 89 estudantes de Cálculo I. A participação foi voluntária e a pergunta foi respondida antes da primeira avaliação. A pesquisadora distribuiu a pergunta no início de uma aula magistral e recolheu as respostas ao final.

Do total de respondentes, vinte e um eram estudantes do curso de Matemática do período noturno, matriculados no segundo semestre de 2015. Os outros participantes estavam matriculados no primeiro semestre de 2015 e eram estudantes dos cursos de Engenharia Civil (20), Engenharia Mecânica (30) e Economia (18), todos do período diurno, totalizando 89 estudantes.

Considerando todas as respostas, a maioria teve um sentido negativo. Essas respostas, com as respectivas frequências, foram as seguintes:

Tabela 6 – Respostas à pergunta inicial

Respostas	**Frequências Absolutas**	**Frequência %**
Difícil	34	38
Muito difícil	14	15
Muito difícil com outros adjetivos	8	9
Disciplina com elevado índice de reprovação	22	24
Total	75	

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Cada uma das 14 respostas que não possuíam palavras com conotação negativa, estão listadas no Quadro 1 apresentado a seguir. Elas representaram um total de 14 das 89 respostas, ou seja, quase 16%.

Tabela 7 – Respostas que não possuíam conotação negativa

Curso do Respondente	Respostas
Matemática	*Muito importante para o curso* *Aprofundamento geral em funções* *Interessante* *Curso de meu interesse e que aprende sobre limite, derivada e integral.* *Base do curso de matemática* *Não é difícil, mas requer estudo* *Muito importante para várias matérias das exatas* *Importante para o currículo* *Início de uma visão superior da matemática*
Engenharia Civil	*Que seria muito bom e ajudaria em várias coisas, principalmente em física.*
Engenharia Mecânica	*Curso é passável, tem que ralar. Se você é bom em matemática é fácil.* *Que é exigente.* *Que exige dedicação.*
Economia	*Nenhuma resposta.*

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Nesses resultados, verificamos que os alunos da Matemática revelam estar mais conscientes que os de outros cursos sobre a importância do Cálculo. Nenhum deles mencionou a preocupação com os elevados índices de reprovação. Por outro lado, os estudantes do curso de Economia somente mencionaram aspectos negativos do curso.

Uma das respostas de um estudante de engenharia Civil destaca-se, pois ele informa que ouviu *"Pouca coisa em relação ao conteúdo em si, mas que reprova bastante".*

4.4 Os Primeiros Grupos de Estudos

Ao iniciarmos essa pesquisa, tínhamos em mente a constituição dos Grupos de Estudos com alunos ingressantes dos cursos de Licenciatura e Bacharelado de Matemática. Nessa época, ainda não havíamos definido as atividades que seriam realizadas no grupo. Por esse motivo, durante dois semestres consecutivos, realizamos os trabalhos práticos aqui descritos com estudantes dos cursos de Matemática. Nossa intenção era observar em que conteúdos matemáticos eles enfrentavam mais dificuldades ao entrarem na universidade e verificarmos de que modo poderíamos contribuir para suas aprendizagens e usar essas informações na construção dos Grupos de Estudos seguintes.

A criação do Grupo de Estudos de Cálculo, que foi proposta e detalhada na metodologia para ser o campo da pesquisa, passou por dois semestres de experimentação. No primeiro semestre em que a proposta foi executada, o segundo semestre de 2014, inicialmente, foram formados dois Grupos de Estudos. Um deles na hora do almoço e outro entre 18 e 19h para atender aos alunos do período noturno.

Durante o tempo de realização da atividade, contamos com o auxílio e a participação ativa de dois estagiários de Regência do curso de Licenciatura em Matemática daquele semestre. Apesar da extensa divulgação pelo *Moodle* e em sala de aula, não houve demanda por parte dos alunos do noturno. Muitos deles trabalham e não têm como chegar à universidade antes das 19 horas quando as aulas iniciam. Apareceu somente um aluno do noturno e ele tinha a disponibilidade de participar no período diurno. A participação de todos foi voluntária.

Assim, apenas um grupo foi formado com vinte participantes e ele se reunia as terças e quintas-feiras no intervalo do almoço. Todos os participantes fizeram o pré-teste apresentado no Apêndice D. Esse pré-teste será estudado no quinto capítulo, quando usaremos algumas resoluções escritas de estudantes de seus temas nas análises. Considerando os resultados dos pré-testes e, por solicitação dos participantes, decidimos trabalhar nessa primeira experiência com assuntos de pré-cálculo.

Sob a orientação da pesquisadora, os estagiários elaboraram listas de exercícios que foram usadas nos dez encontros ocorridos durante o semestre. Os assuntos abordados foram os seguintes: *resolução de Equações e Inequações; valor absoluto; funções Trigonométricas; funções Exponencial e Logarítmica; funções Compostas; Polinômios.* Cada um desses tópicos foi trabalhado paralelamente ao curso de Cálculo, de modo que os tópicos estudados servissem de apoio aos estudantes, à medida que tivessem necessidade de revisar alguns deles.

No primeiro semestre de 2015, repetimos a experiência, mas desta vez ela foi feita como um Projeto de Extensão, ocorrido entre abril e julho de 2015 e contou com 25 participantes. O formato e o programa foram os mesmos da primeira experiência. A única diferença foi que, neste último, puderam participar estudantes de outros cursos além dos estudantes da Matemática. Como consequência de ter sido um projeto de extensão universitária, tivemos maior número de participantes e foram formadas duas turmas do Grupo.

4.5 Expectativas de Alunos Ingressantes sobre suas aprendizagens matemáticas

Neste item, trazemos os resultados de um artigo, escrito pela pesquisadora em coautoria com o Professor Cristiano Alberto Muniz, que foi apresentado no ICME-13-13th International Congress on Mathematical Education (13º Congresso Internacional em Educação Matemática), em 2016, e no VIII CIBEM - Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, em 2017, ambos em forma de comunicações científicas (DÖRR, MUNIZ, 2017). O estudo teve o intuito de investigar em que temas matemáticos estudantes ingressantes esperam aprofundar seus estudos e, especialmente, detectar eventuais lacunas na formação matemática do ensino básico que possam afetar a aprendizagem nos cursos de Cálculo. São apresentadas e analisadas, nesse artigo, as respostas de um grupo de estudantes ingressantes à seguinte pergunta *"Que assuntos de Matemática você nunca aprendeu e gostaria de aprender?"*

A análise dessas respostas pode trazer luz para o entendimento dos elevados índices de reprovação, especialmente no primeiro semestre da vida acadêmica, momento em que fazem o curso inicial de Cálculo. Nesse curso inicial, são apresentados os conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral para funções de uma variável real, o denominado Cálculo I. É nesse curso que a maioria dos estudantes tomará contato, pela primeira vez, com os temas do Cálculo já que eles não fazem parte do currículo de Matemática do Ensino Médio brasileiro.

4.5.1 Participantes da Pesquisa e Método

Participaram do estudo 46 estudantes (39 do sexo masculino e 7 do sexo feminino), ingressantes dos cursos de Matemática da Universidade de Brasília, no primeiro e segundo semestres de 2015, com idades entre 17 e 45 anos, sendo a maioria, 26/46, entre 17 e 20 anos. Destes, 31 eram estudantes do período diurno e 15 do noturno. Todos os alunos participantes são ingressantes dos cursos de Licenciatura ou Bacharelado e cursavam o Cálculo I no momento da pesquisa. Os estudantes do noturno cursam Licenciatura, pois nesse período só há essa opção. O critério de escolha do subgrupo de ingressantes dos cursos de Licenciatura e Bacharelado justifica-se pelo fato de eles vivenciarem mais intensamente as dúvidas e as expectativas inerentes à transição entre a educação básica e a formação universitária. `

Juntando-se a isso, temos o fato de que esses estudantes, especialmente os da Licenciatura, são os potenciais candidatos a professores de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio. É sabido que, no Brasil, há uma grande falta nas escolas de professores de Matemática (GATTI et al, 2010). Foi proposto aos participantes um questionário contendo 16 questões, das quais 10 exigiam respostas imediatas, reunindo informações pessoais como, por exemplo, a idade, o ano de conclusão e a instituição em que cursou o Ensino Médio. As outras seis buscavam o entendimento dos participantes para questionamentos acerca da escolha do curso, relacionadas às experiências vivenciadas por eles no processo de aprendizagem da Matemática, quais eram suas expectativas profissionais, a questão destacada aqui neste trabalho, entre outras.

Para a pergunta analisada, a saber, *"Que assuntos de Matemática você nunca aprendeu e gostaria de aprender?",* foram obtidas as respostas listadas a seguir com as respectivas frequências (colocadas entre parênteses):

> Alunos do primeiro semestre de 2015 do período diurno: (31 participantes)
> Binômio de Newton e Funções; Logaritmo (2); Logaritmo e Matriz; Logaritmos e Trigonometria; Integral; Teoria do Caos; Teoria dos Números (3); Matemática Computacional; Código Binário; Trigonometria; Trigonometria e Geometria Analítica; Geometria Analítica (3); Geometria e Funções Trigonométricas (2); Probabilidade; Análise Combinatória e Probabilidade; Logaritmo e Geometria Analítica; Geometria Espacial; Equação da Reta; Álgebra Linear; Raiz Quadrada e logaritmos; Revisão do Ensino Médio; Demonstrações Matemáticas; Teoria da Informação e Cálculo; Produto de Cubos; Matemática Financeira.
>
> Alunos do segundo semestre de 2015 do período noturno: (15 participantes)
> Teoria dos Números; Derivadas e Integrais; Módulo e Razão Áurea; Geometria; Trigonometria; Logaritmos; História da Matemática; Probabilidade (2); Funções; Revisão de todo o conteúdo; Cálculo; Funções Trigonométricas; Estatística; Logaritmos e Números Complexos.

4.5.2 Análise dos Resultados

Os conteúdos citados com maior frequência foram, em ordem decrescente de ocorrências: Geometria Analítica (3); Teoria dos Números (3); Geometria e Funções Trigonométricas (2); História da Matemática; Probabilidade (2); Logaritmo (2); Trigonometria e Probabilidade (2).

Os Logaritmos, além de terem sido mencionados desconectados de outros temas por duas vezes, também foram citados outras quatro vezes junto de tópicos como a Trigonometria ou Matriz. A Trigonometria, por sua vez, foi mencionada em diferentes versões. Sozinha, ou associada à Geometria Analítica, Logaritmo e Probabilidade por duas vezes. Notamos que não houve menção à Função Exponencial, embora ela esteja diretamente ligada aos estudos de Logaritmos.

A partir das respostas, pudemos observar que esses conteúdos são os que mais preocupam os estudantes que indicaram a necessidade de se aprofundarem ou mesmo os aprenderem. Pesquisas confirmam que um dos principais motivos pelos quais ocorrem elevados índices de reprovação no Cálculo está diretamente ligado ao fato dos alunos ingressantes demonstrarem, em suas produções escritas, lacunas em assuntos do Ensino Básico e que são importantes para a aprendizagem do Cálculo (TALL, 1993; LACHINI, 2001; ALVARENGA; DÖRR; VIEIRA, 2016). Muitos dos participantes da pesquisa, apesar de estarem em seu primeiro semestre, já têm ideia de temas importantes da Matemática e revelam interesse pelas demonstrações, Cálculo, Álgebra Linear e Teoria dos Números e Probabilidades, entre outros mencionados.

Um dos estudantes participantes queria uma “Revisão de todo o conteúdo”. Essa resposta pode revelar uma grave dificuldade com a Matemática elementar de outros sujeitos e foi aqui representada por meio da expressão desse único estudante.

4.5.3 Conclusões

As respostas dos participantes da pesquisa exibem uma variedade de temas que abrangem tanto a Matemática Pura quanto a Aplicada. Essa multiplicidade de respostas demonstra não somente as diferentes necessidades dos sujeitos na busca pelo aprofundamento em conteúdos matemáticos, mas também uma surpreendente diversidade de conteúdos avançados. De um lado, percebemos que os estudantes têm uma noção de termos complexos, mas por outro, têm necessidades de aprendizagens em temas da Educação Básica.

Entre os assuntos mencionados como desejáveis de serem aprendidos pelos participantes, podem ser encontrados objetos de conhecimento que são componentes curriculares do ensino básico. Por exemplo, Funções, Logaritmos, Trigonometria e Geometria Analítica foram comuns aos dois grupos.

4.6 Síntese do capítulo

Neste capítulo foi descrita a sondagem do campo de pesquisa. Para concluí-lo, sintetizamos os principais resultados observados nessa fase da pesquisa:

- Verificam-se índices de reprovação em torno de 50% na instituição onde foi realizada a pesquisa;

- Não existem dados específicos que tratam da evasão. Essa informação pode ser extraída dos dados dos estudantes que trancam o curso antes de concluí-lo;

- Pode ser verificado, através dos resultados dos pré-testes e pela pesquisa sobre os temas citados em que esperam aprofundar seus estudos, que os universitários iniciantes apresentam lacunas na formação matemática do ensino básico em conteúdos basilares para o estudo do Cálculo;

- Existência entre os estudantes iniciantes de áreas ligadas às Ciências Exatas de concepções negativas acerca das aprendizagens do Cálculo.

- A procura pelos Grupos de Estudos sinalizou que há interesse desses estudantes em aprofundarem seus estudos nos conteúdos de pré-cálculo. Isso indica que são conscientes de suas necessidades e que buscam apoio no ambiente acadêmico;

- Nos Grupos de Estudos, os estudantes contavam com pelo menos dois monitores para dar suporte às atividades, além da pesquisadora.

Consideramos o próximo capitulo como um dos pontos principais desta pesquisa já que nele apresentaremos as análises de produções escritas de estudantes em objetos de conhecimentos fundamentais para o estudo e a aprendizagem do Cálculo.

5 ANÁLISES DAS PRODUÇÕES ESCRITAS DE ESTUDANTES DE CÁLCULO

O capítulo anterior apresentou a pesquisa exploratória e seus resultados. Neste capítulo, apresentamos os resultados e análises das produções escritas de estudantes de Cálculo que foram escolhidas dentro das atividades da pesquisa de campo descrita no terceiro capítulo. Mais especificamente, estamos empenhados na busca de respostas para os seguintes objetivos específicos:

- Analisar produções escritas, na forma de protocolos, de estudantes em atividades de Cálculo Diferencial e Integral.
- Identificar e caracterizar erros, procedimentos e estratégias de resolução em atividades de Cálculo Diferencial e Integral com ênfase nos aspectos algébricos de produções escritas de estudantes.

5.1 Construção dos Elementos de Análise

Relembramos que as produções matemáticas consideradas em todo este capítulo foram feitas por estudantes de uma universidade pública que optaram por cursos de graduação que têm como base a aprendizagem de objetos de conhecimento da Matemática avançada como o Cálculo Diferencial e Integral. Por estarmos sondando dificuldades de aprendizagem evidenciadas durante o curso de Cálculo, escolhemos selecionar e agrupar as análises de acordo com os tópicos que determinam o desenvolvimento desse curso, tanto no tratamento de funções de uma variável real, como em mais de uma variável. Esses tópicos são as Funções, os Limites, as Derivadas e as Integrais.

A fundamentação do Cálculo está no estudo das Funções e tem na Álgebra um dos suportes para sua representação. Por esse motivo, na próxima seção, iniciaremos as análises investigando protocolos de estudantes que evidenciem dificuldades em resoluções de questões que envolvam conceitos básicos de Álgebra em exercícios de operações com Números Reais, Equações e Funções. Em seguida, na seção seguinte, passamos para a abordagem dos aspectos algébricos nas resoluções de atividades sobre Limites, depois as Derivadas e, por fim, as Integrais. Por ser o Cálculo uma ferramenta matemática relevante para a modelagem de problemas práticos em diferentes áreas, incluímos, neste capítulo, como um complemento ao tema das Derivadas, uma aplicação em um Problema de Otimização.

5.2 Base da aprendizagem do Cálculo: operações com Números Reais, Equações e Funções

5.2.1 Sobre o pré-teste

A primeira atividade do primeiro encontro do Grupo de Estudos (GE) foi a resolução, pelos participantes, de um pré-teste (Apêndice D) com o intuito de se fazer um diagnóstico do grupo e verificar os conhecimentos dos sujeitos em conteúdos matemáticos considerados básicos para o estudo do Cálculo. Além disso, atividade refere-se ao objetivo específico da pesquisa que diz respeito à análise, a caracterização e a identificação de erros em registros de produções escritas de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral. Pretendemos apontar assuntos específicos em que são observadas dificuldades, ou mesmo a ausência de aprendizagem, bem como verificar a existência e apresentar exemplos dos erros mais frequentes ocorridos, especialmente nos processos algébricos, por constituírem parte essencial na resolução de situações-problema no Cálculo. Ainda de acordo com os objetivos estabelecidos, na análise das resoluções nos temas inerentes ao Cálculo, esperamos poder relacionar certos erros que ocorrem com maior frequência em assuntos matemáticos da Educação Básica e que poderão se constituir como obstáculos ou dificuldades à aprendizagem de Limites, Derivadas e Integrais.

O pré-teste aplicado é constituído por 10 itens (Apêndice D), sendo os primeiros cinco formados por temas do Ensino Fundamental, relacionados às operações e propriedades básicas dos Números Reais que envolvem cálculos de valores absolutos, frações, exponenciais, simplificações e fatoração de expressões algébricas. Todos esses assuntos são considerados como fundamentais para o tratamento de Limites, Derivadas e Integrais.

A questão 5 trata da resolução de duas equações quadráticas e a questão 6 da resolução de duas equações em que aparecem radicais, mas que também recaem na resolução de equações quadráticas. As questões seguintes, 7 e 8, dizem respeito à resolução de funções e as duas últimas abordam a Geometria Plana, mais especificamente, a Trigonometria. Portanto, a maior parte do pré-teste, 6 das 10 questões, é formada por questões relacionadas a conteúdos de Álgebra dos anos finais do Ensino Fundamental. Do total de 10 itens, somente 4 (quatro) deles são de temas relacionados diretamente ao Ensino Médio, dos quais os dois últimos das questões 9 e 10 que não serão analisadas devido à opção de pesquisa feita pelo enfoque nas questões algébricas, mas também por serem questões objetivas.

O pré-teste foi elaborado pela pesquisadora usando como referência o livro de Pré-Cálculo de Paulo Boulos (2006). Os dois últimos itens de Geometria foram sugestão de um professor da disciplina Cálculo 1 da mesma instituição e foram retirados da internet. As fontes estão citadas no Apêndice D que contém todo o texto do pré-teste.

Completaram o pré-teste, dentro de um período de tempo de aproximadamente uma hora, um total de 50 estudantes, sendo 29 do sexo masculino e 21 do sexo feminino. Os pré-testes resolvidos receberam uma numeração de 1 a 50. Os participantes tinham idades entre 18 e 34 anos. A maioria deles estava matriculada em alguma turma de Cálculo I na modalidade semipresencial, ou seja, esses sujeitos já tinham sido reprovados na disciplina, pelo menos uma vez e, no momento da pesquisa, estavam participando do Curso de Extensão onde lhes foi oferecida a oportunidade de buscar a superação das dificuldades de aprendizagem, observadas ao cursarem a disciplina. Entre os componentes do GE, 58% (29/50) dos estudantes cursaram o Ensino Médio em escolas públicas e 42% (21/50) em escolas particulares.

5.2.2 Análises das questões do pré-teste

Esta seção contém uma descrição detalhada de cada item do pré-teste. Para cada uma das oito questões consideradas, apresentamos seu enunciado e um comentário geral sobre a questão, as soluções esperadas, uma listagem dos campos conceituais envolvidos em sua resolução, o nível educacional a que se refere, e uma tabela com os resultados gerais em termos de acertos, de questões deixadas sem resolução e os outros casos que foram considerados como errôneos. Nesses últimos, estão incluídos procedimentos de resolução que não chegaram à resposta esperada, seja por um erro operacional ou pelo uso de alguma estratégia que não se aplica ao contexto do exercício.

As tabelas construídas para cada questão têm três colunas. A primeira coluna é a de “Acertos”, a segunda a dos itens deixados sem nenhuma marca escrita e que estamos denominando de “Brancos” e a terceira, “Outras Resoluções”. Essa última inclui todas as outras expressões escritas diferentes das soluções esperadas. Ou seja, questões total ou parcialmente erradas, bem como outros escritos.

Depois das tabelas, exibimos alguns protocolos de resoluções referentes à questão que está sendo estudada. A apresentação de cada questão termina com comentários, reflexões iniciais e constatações observadas através das análises dos registros escritos dos estudantes. Ao final, essas considerações serão resumidas no último parágrafo do capítulo.

Neste parágrafo, a identificação dos protocolos apresentados para análise e discussão foi feita de acordo com o número da questão do pré-teste, o número do protocolo do estudante e um nome fictício. Para os sujeitos com nomes femininos serão usados os nomes das letras gregas terminados com a letra a. Os nomes masculinos serão designados pelas outras letras gregas. Dessa forma, os protocolos relativos ao pré-teste serão da forma **PTX$\mathbf{Q_i}$LetraGrega**, onde **PT** é uma abreviatura para protocolo, **X** designa o número do protocolo e $\mathbf{Q_i}$ o número da questão, i= 1, 2, ...,8. Logo, **PT50$\mathbf{Q_2}$Alfa** significa que o extrato do protocolo é da questão 2 do pré-teste respondido pela aluna Alfa, participante número 50.

Questão 01

O pré-teste começa com uma questão envolvendo regras e operações básicas dos números reais. Um curso inicial de Cálculo considera como objeto fundamental as funções definidas e assumindo valores no Conjunto dos Números Reais, denotado por $\Re$. Sendo assim, é essencial que os estudantes tenham conhecimentos básicos das operações básicas, bem como de operações com valores absolutos.

Enunciado

1. Calcule:

a) $|-\frac{3}{4}| =$ e) $|-2| - |-2| =$

b) $-|10| =$ f) $|-5-3| =$

c) $| - 7 + 4| =$ g) $\frac{3}{5} . \frac{5}{3} =$

d) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} =$ h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\ (\sqrt{2} - \sqrt{3}) =$

As respostas esperadas para cada item são:

a) 3/4 e) 0

b) -10 f) 8

c) 3 g) 1

d) 5/2 h) -1.

Conteúdos envolvidos: operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números reais com uso de frações, raízes quadradas, valor absoluto.

Nível educacional: Ensino Fundamental e Médio

Tabela 8 – Resultados da Questão 1

Item	Acertos	Brancos	Outras Resoluções
A	43	1	6
B	42	2	6
C	40	1	9
D	42	1	7
E	45	2	3
F	40	2	8
G	44	0	6
H	25	2	23

Fonte: relatório da pesquisa.

O item com maior número de acertos foi a letra e) em um exercício de valor absoluto. Os números altos de acertos indicam que a maior parte dos estudantes não encontra dificuldade nas operações básicas com os números reais. Mesmo assim, somente 18 dos 50 participantes acertaram todos os itens, ou seja, 36%. Três estudantes acertaram somente dois dos itens.

O maior número de erros ocorreu na resolução do item h). Nesse item, temos uma multiplicação de números reais envolvendo fatores com raízes. Possíveis soluções para a resolução desse item são as seguintes:

Solução 1 – Item h

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\ (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = (\sqrt{2)}^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 – 3 = -1$.

Solução 2 – Item h

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\ (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{2}\,\sqrt{2} -\sqrt{2}\,\sqrt{3} + \sqrt{3}\,\sqrt{2} +\sqrt{3}\sqrt{3} = 2 – 3 = -1$.

A primeira resolução usa o resultado de um produto notável e a segunda é feita usando as propriedades operatórias das operações de adição, subtração e multiplicação de números reais. Os estudantes que acertaram usaram uma dessas duas resoluções.

Entre os erros observados, destacamos quatro registros que calcularam a multiplicação da seguinte forma:

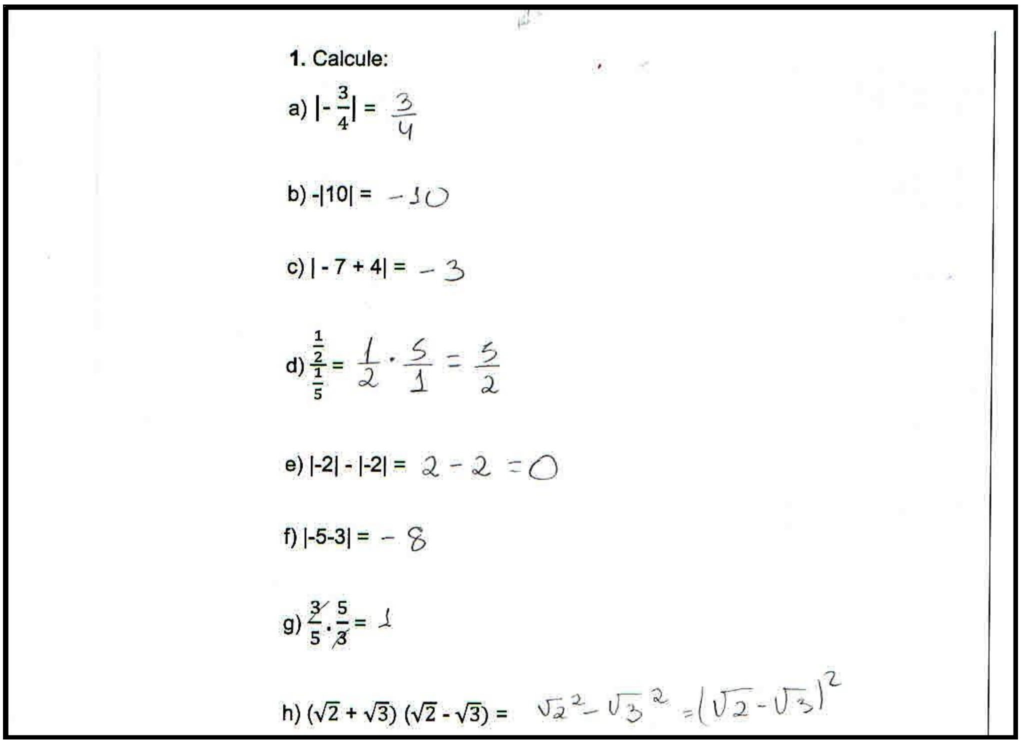
H1) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\ (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2 - 2\sqrt{2}\ \sqrt{3} + 3$.

Aqui se considerou como se a operação fosse o quadrado da diferença entre dois números. Outros dois fizeram:

H2) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\ (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2 + 2\sqrt{2}\ \sqrt{3} + 3$. Ou seja, foi considerado como se a operação fosse o quadrado da soma entre dois números.

Como possíveis respostas para a multiplicação $\sqrt{2}\ \sqrt{3}$ tivemos os valores $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$, 6 e 5.

Figura 9 – PT29Q$_1$ALFA



1. Calcule:

a) $|-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$

b) $-|10| = -10$

c) $|-7+4| = -3$

d) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1} = \frac{5}{2}$

e) $|-2| - |-2| = 2 - 2 = 0$

f) $|-5-3| = -8$

g) $\frac{\cancel{3}}{5} \cdot \frac{5}{\cancel{3}} = 1$

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\ (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

Fonte: relatório da pesquisa.

A resolução da estudante Alfa indica certa imprecisão nos cálculos envolvendo valores absolutos. A resposta da letra a) é dada corretamente, porém as letras b) e f) trazem respostas negativas para os módulos de -3 e -8.

No item h), a estudante no primeiro passo reconhece a situação de um produto notável e opera corretamente, mas, em seguida, usa uma identidade falsa e não avança no desenvolvimento. Verificamos que o problema aqui é que, ao considerar que a diferença de dois quadrados é igual ao quadrado da diferença, ela não faz a distinção entre uma estrutura aditiva de uma multiplicativa ao mobilizar uma propriedade válida para a multiplicação numa adição.

As produções evidenciaram dificuldades dos estudantes em operações com valores absolutos e raízes quadradas. A maior dificuldade nas resoluções ocorreu no item h). Essas dificuldades foram verificadas na operação de multiplicação envolvendo os números irracionais $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Será que o aparecimento desses números foi o fator de desequilíbrio na resolução ou foi a operação de multiplicação de números formados por duas partes $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ e $(\sqrt{2} - \sqrt{3})$?

Questão 02

Nesta questão, são avaliadas a divisão por zero e as desigualdades, além do uso do valor absoluto. As desigualdades são elementos importantes, por exemplo, na definição formal de Limites. A divisão por zero sempre é motivo de dúvidas, mas os quocientes $\frac{5}{0}$ e $\frac{0}{0}$ não têm significado matemático. Isso é consequência da definição de divisão entre dois números reais que estabelece que $\frac{a}{b} = c$ implica que $a = bc$, desde que $b \neq 0$ (LIMA, 1987).

Enunciado

2. Verdadeiro (V) ou Falso (F):

a) $\frac{2}{0} = 2$
b) $\frac{5}{0} = 0$
c) $\frac{0}{5} = 0$
d) $\frac{0}{0} = 1$
e) $2 > x > 5$
f) $-7 > -3$
g) $-|x| \leq x \leq |x|$
h) $\sqrt{x^2} = |x|$

As respostas esperadas para os itens são F, F, V, F, F, F, V e V, respectivamente.

Conteúdos envolvidos: divisibilidade por zero, valor absoluto e representação de números reais por meio de desigualdades.

Nível da questão: Ensinos Fundamental e Médio

Tabela 9 – Resultados da Questão 2

Item	Acertos	Brancos	Outras Resoluções
A	46	1	3
B	37	1	12
C	45	1	4
D	45	1	4
E	38	1	11
F	47	1	2
G	31	1	18
H	38	1	11

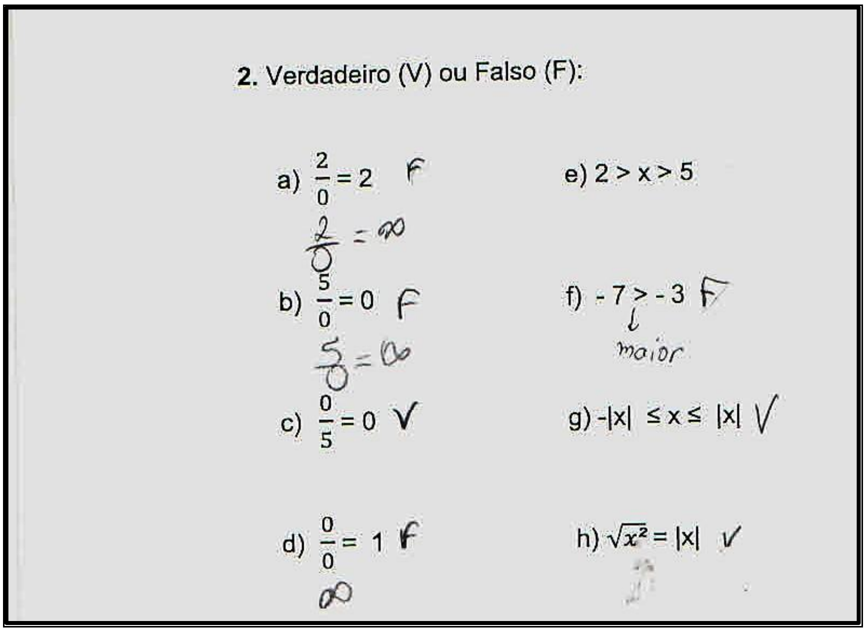
Fonte: relatório da pesquisa

O formato de resposta do item em V ou F impede que façamos uma inspeção mais detalhada da questão, o que é um indicativo de sua não utilização em estudos futuros que tenham as análises de produções matemáticas enquanto processos. Como não foi solicitado aos participantes que justificassem as suas respostas, acreditamos que essa foi umas das razões pelas quais houve a marcação da maioria nos itens e somente um participante deixou toda a questão em branco.

Os itens com mais acertos foram f), c) e d). O item f) traz uma comparação entre dois números inteiros negativos. Esse tipo de desigualdade costuma confundir devido à posição desses números em relação ao zero. Quando isso ocorre, associamos essa dificuldade ao conceito de módulo. Nesse caso, a aprendizagem dos números positivos constitui-se como obstáculo para o avanço na compreensão dos números negativos, sobretudo a distância relativa ao zero.

As questões a), b) e d) apresentam frações que não têm significado matemático de acordo com a definição de divisão de dois números reais. O protocolo da Figura 10, a seguir, mostra as anotações de um estudante que demonstra já ter adquirido noções de Limites ao escrever o símbolo do infinito (∞) como resultado das divisões por zero nas letras a), b) e d). Entretanto, ele ainda não tem bem estabelecidos, em seu aprendizado, o significado e a representação desse símbolo, considerando-o como número, além de escrever que a expressão indeterminada $\frac{0}{0}$ é igual a ∞. Ou seja, o estudante transfere para as resoluções os conhecimentos que se iniciaram nos estudos anteriores de Cálculo.

Figura 10 – PT11Q$_2$Beta



2. Verdadeiro (V) ou Falso (F):

a) $\frac{2}{0} = 2$ F
$\frac{2}{0} = \infty$

b) $\frac{5}{0} = 0$ F
$\frac{5}{0} = \infty$

c) $\frac{0}{5} = 0$ V

d) $\frac{0}{0} = 1$ F
∞

e) $2 > x > 5$

f) $-7 > -3$ F
maior

g) $-|x| \leq x \leq |x|$ V

h) $\sqrt{x^2} = |x|$ V

Fonte: relatório da pesquisa.

O maior número de erros ocorreu na letra g) que apresenta a desigualdade verdadeira, que relaciona todo número real com seu módulo. O entendimento desse item é facilitado quando se tem uma compreensão clara da função módulo e de seu gráfico.

Questão 03

Enunciado

3. Calcule

a) $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} =$ d) $-5^2 =$

b) $\frac{5}{x} - \frac{9}{x} =$ e) $4^0 =$

c) $(-5)^2 =$ f) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} =$

Os resultados esperados para os itens são respectivamente, $\frac{7}{18}$, $\frac{-4}{x}$, 25, -25, 1 e -64.

Conteúdos envolvidos: operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações e potenciação.

Nível da questão: Ensino Fundamental

Tabela 10 – Resultados da Questão 3

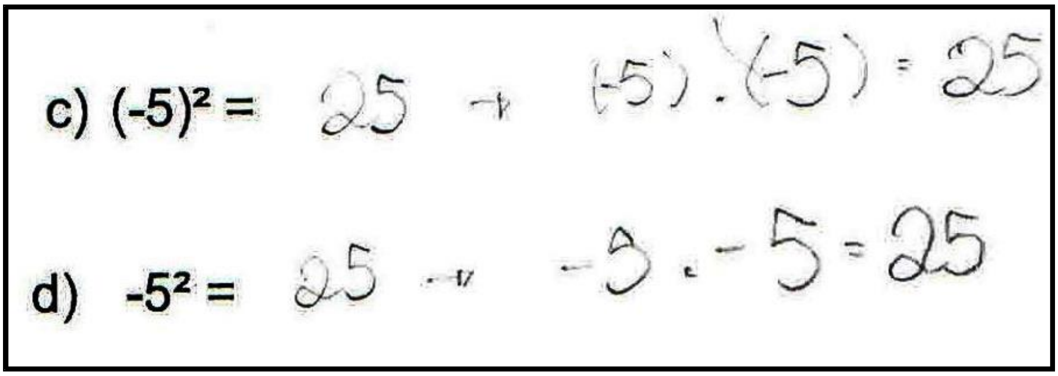
Item	Acertos	Brancos	Outras Resoluções
a	34	3	13
b	42	5	3
c	47	1	2
d	31	1	18
e	47	1	2
f	13	10	27

Fonte: relatório da pesquisa

O maior número de acertos ocorreu nos itens c), e) e b), em ordem decrescente de acertos, respectivamente. Os itens c) e e) são exercícios com potenciação e o b) é uma resolução de subtração de frações.

Enquanto a maioria não teve dificuldades em concluir na letra c) que (-5) elevado ao quadrado é 25, 19 estudantes consideraram o mesmo resultado para -5^2 como sendo 25, como mostrado na Figura 11, a seguir, com os cálculos ao lado.

Figura 11 – PT20Q$_3$Gama

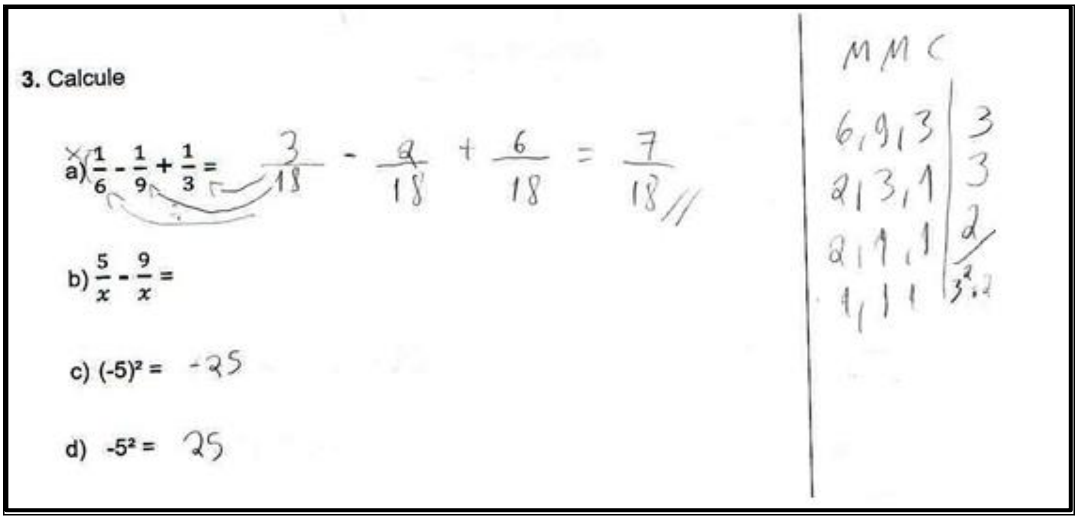


Fonte: relatório da pesquisa.

Esses dois itens c) e d) trazem o mesmo tipo de operação de potenciação. A diferença entre eles está no uso dos parênteses na letra c), indicando que o (-5) é que deve ser elevado ao quadrado. O protocolo da Figura 12, a seguir, mostra uma resposta, não há cálculos registrados, em que os resultados estão invertidos, o que pode indicar a existência de lacunas conceituais na aprendizagem desse aluno relativas às operações com potências.

Pelas resoluções apresentadas para a letra a), percebemos que nas operações com frações alguns conseguiam fazer a letra a), mas não faziam o item seguinte, ou vice-versa. Um exemplo é mostrado no protocolo da Figura 12, a seguir, que também ilustra uma resolução dos itens c) e d) já mencionados no parágrafo anterior.

Figura 12 – PT24Q$_3$Mi



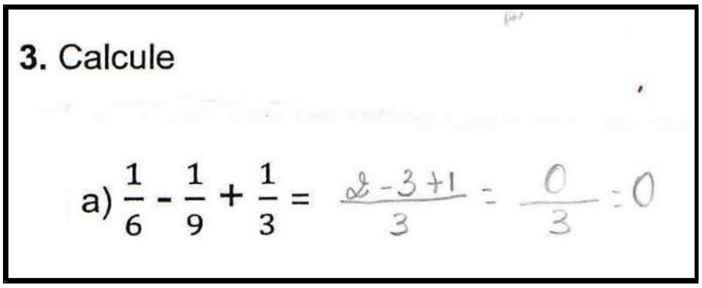
Fonte: relatório da pesquisa.

O protocolo da Figura 12 exibe uma solução em que o estudante transforma as frações em frações de mesmo denominador, no entanto, não resolve a tarefa seguinte da letra b) que, a princípio, é mais simples em termos de quantidade de operações a serem feitas para se chegar à resposta esperada. Será que o *x* no denominador foi a causa da dificuldade? Ou seja, será que os pensamentos dos estudantes estão tão ancorados nos cálculos numéricos que quando o denominador é uma incógnita não conseguem fazer as transferências de saberes?

Ainda no item a), do total de resoluções que estavam em branco ou erradas, tivemos 16 registros que não conseguiram resolver uma operação que faz parte do conteúdo curricular dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Mais uma vez, chamamos a atenção para o fato de que essas dificuldades foram reveladas em procedimentos de estudantes, em sua maioria, selecionados pela universidade para realizarem um curso de formação nas áreas das ciências exatas ou tecnológicas.

Outros tipos de dificuldades identificadas, neste item, em operações envolvendo frações serão exemplificadas nas figuras seguintes.

Figura 13 – PT33Q_3Zeta

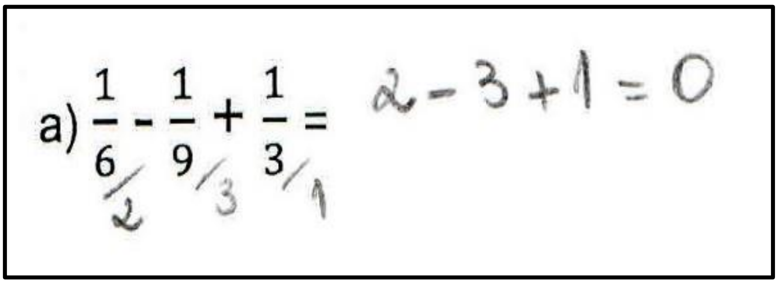


Fonte: relatório da pesquisa.

O registro deste protocolo chama nossa atenção pelo fato de termos identificado mais outras SEIS (6) soluções que seguiram a mesma linha de desenvolvimento. Esses registros sugerem que foi considerado o número 3 como o menor múltiplo comum das frações. Em seguida, foram feitas as divisões 6:3, 9:3 e 3:3, respectivamente, e os valores resultantes escritos no numerador da fração levando ao zero. Como resultado de zero dividido por três chega-se ao zero final. Um dos seis registros errou a conta do numerador.

A Figura 14 traz outro registro desse item, em que na resolução aparece a indicação da operação feita para se chegar ao denominador 2-3+1.

Figura 14 – PT18Q3Epsilon

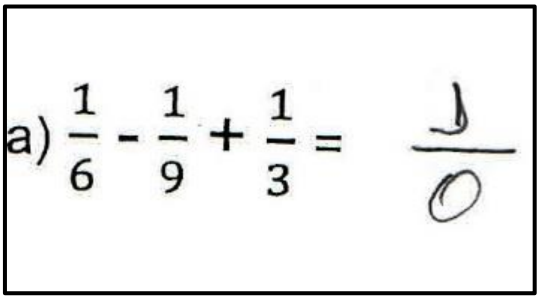


Fonte: relatório da pesquisa.

Para terminar a análise desse item, trazemos um registro em que se pode verificar que para se efetuar a operação pedida resolve-se 1-1+1 = 1 no numerador e 6-9+3 = 0 para o denominador. Tivemos mais um protocolo (PR 27) que trouxe o mesmo modo de resolução, porém operou com as duas primeiras frações obtendo $\frac{0}{-3}$. Em seguida escreveu $\frac{0}{-3} + \frac{1}{3}$ = 1.

Essas produções levam-nos a pensar que esses estudantes de Cálculo não têm a compreensão do significado do número fracionário, o que os leva a efetuarem com as frações, sustentados nos procedimentos dos números inteiros

Figura 15 – PT30Q$_3$Ni



Fonte: relatório da pesquisa.

Completando as análises da Questão 3, vamos considerar o item mais problemático em termos de resoluções: o da letra f). Somando os brancos e os insucessos nas resoluções desse item, encontramos um total de 37 dos 50 (74%) participantes que mostraram ter problemas no cálculo da potência $-\frac{1}{4}$ elevado a -3.

Entre os treze que resolveram corretamente, notamos que foi seguida uma das duas formas de solução:

1ª) $(-\frac{1}{4})^{-3} = -4^3 = -64$.

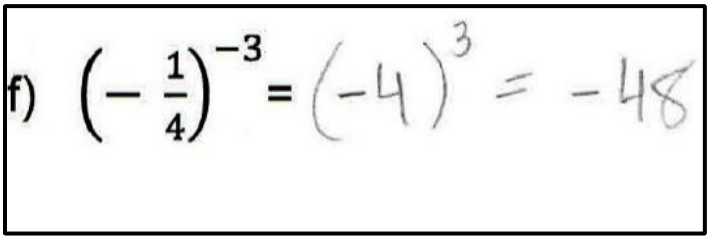
2ª) $(-\frac{1}{4})^{-3} = \frac{1}{(-\frac{1}{4})^{3}} = -\frac{1}{(\frac{1}{4})^{3}} = -\frac{1}{\frac{1}{64}} = -64$

A primeira estratégia de resolução foi usada por nove estudantes e outros quatro fizeram uso da segunda ou de alguma variação dela. Essas resoluções indicam que esses sujeitos compreendem o significado do expoente negativo de uma potência e os procedimentos inerentes ao seu desenvolvimento calculando corretamente o inverso de um número racional.

Nas tentativas de resoluções desse item, observamos a repetição de alguns procedimentos (P_i , i = 1,2,3,4) os quais foram selecionamos em quatro categorias que estão descritas a seguir.

P_1 - Erros de contas

Figura 16 – PT38Q$_3$Eta



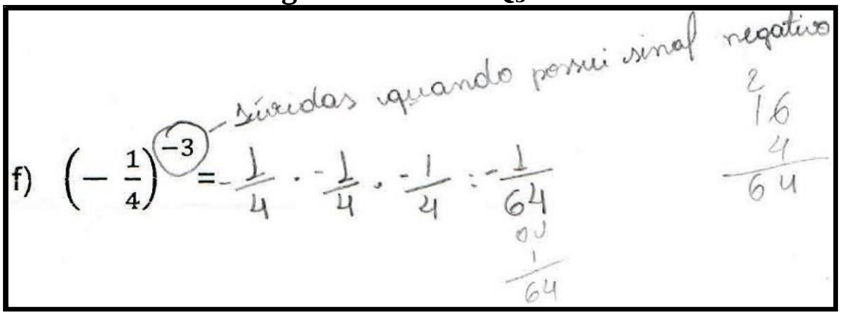
Fonte: relatório da pesquisa.

Soluções deste tipo ocorreram três vezes. O estudante opera corretamente com a fração e o expoente, mas erra na multiplicação final. Como possíveis respostas para $(-4)^3$ encontramos além do -48, -54 e -86.

P_2 - Indícios de dificuldades de operação com expoentes negativos. Tivemos cinco protocolos como o da Figura 16 em que o expoente -3 parece ser ignorado e o estudante opera como se ele fosse positivo. No protocolo da Figura 17, abaixo, a estudante registra por escrito o problema que surgiu na resolução.

Foram sete registros com resoluções deste tipo. Destes, em um dos protocolos (PR10), o registro da conta 4x4x4, que aparece no denominador, como igual a 8x4= 32 e a resposta final sendo dada por $\frac{-1}{32}$.

Figura 17 – PT33Q$_3$Zeta

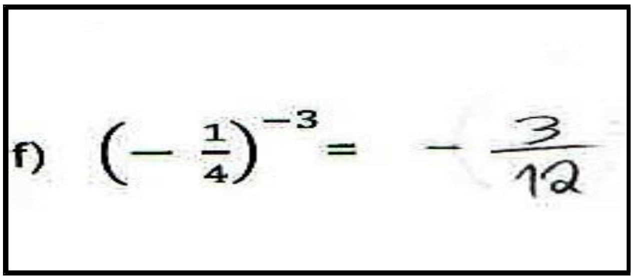


Fonte: relatório da pesquisa.

P$_3$ – Construção de algoritmos para efetuar operações envolvendo potências.

Aqui destacamos dois tipos de alternativas elaboradas a fim de se dar uma resposta para o exercício. A primeira é ilustrada pela Figura 18.

Figura 18 – PT24Q$_3$Mi

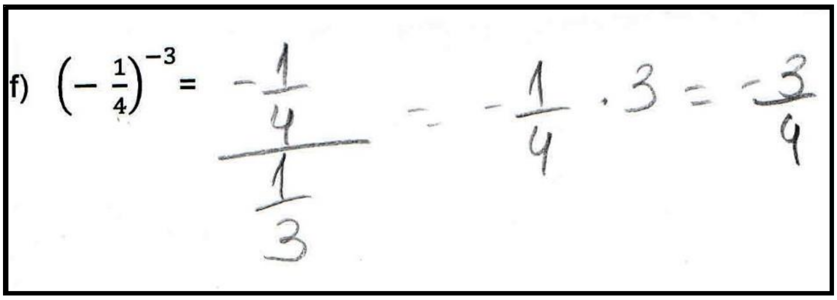


Fonte: relatório da pesquisa.

Essa resposta sugere uma multiplicação do numerador e denominador por três e a manutenção do sinal negativo na resposta. Foram duas produções em que aparece a fração 3/12. A da Figura 18 acima e uma outra em que a resposta é dada sem o sinal negativo. Além dessas duas, tivemos mais duas outras (PR 12 e PR 34) em que, no meio de procedimento de resolução, aparece o número 12 como resposta de 4^3 e outra em que o 9 é considerado como resposta de 3^3 (PR47).

O segundo algoritmo ilustrado pela Figura 19 foi feito por dois estudantes.

Figura 19 – PT41Q$_3$Iota



Fonte: relatório da pesquisa.

O procedimento de resolução no primeiro passo coloca a base da potência ($\frac{-1}{4}$) no numerador e no denominador ($\frac{1}{3}$), gerando uma divisão de frações que é efetuada corretamente no passo final. Ou seja, a estudante sabe que tem "inverter algo" já que o expoente é negativo e indica usar um processo mecânico e sem significado na resolução.

Terminamos a Questão 3 relatando que em três registros tivemos a resposta 64 como resultado de $(-4)^3$. Nesses casos, temos duas possibilidades. A primeira é de se tratar de um erro ocorrido por um descuido na escrita e que não configura uma dificuldade de aprendizagem. A outra opção está ligada a problemas com potências de base negativa. A potenciação é um objeto de conhecimento dos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental e, infelizmente, seu aprendizado sugere se apoiar em memorização de regras sem a produção de significados acerca dos procedimentos operatórios e suas propriedades. Para decidir e saber qual erro ocorreu, deveríamos retomar a resolução em conversa com os estudantes.

Questão 04

Essa questão apresenta dois exercícios de fatoração de expressões literais, ambas com a operação de divisão das expressões. Uma delas envolve expoentes negativos.

Enunciado

4. Simplifique

a) $\frac{21x^8y^7}{3xy^6} =$

b) $\frac{(4x^2y^{-1})^{-1}}{xy} =$

Conteúdos envolvidos: divisão e multiplicação de números inteiros, simplificação de expressões algébricas, operações e propriedades da potenciação.

Nível da questão: Ensino Fundamental.

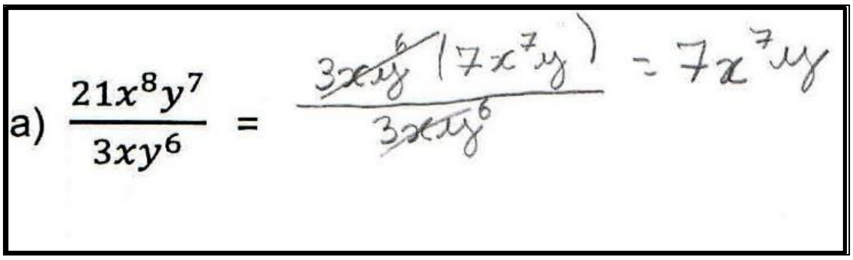
Tabela 11 – Resultados da Questão 4

Item	Acertos	Brancos	Outras Resoluções
a)	34	7	9
b)	8	16	26

Fonte: relatório da pesquisa.

As respostas para os itens a) e b) do exercício proposto são $7x^7$y e $\frac{1}{4x^3}$, respectivamente. Entre os acertos da letra a), 28 das respostas foram dadas diretamente e 6 fizeram algum tipo de desenvolvimento, como mostrado na Figura 20, a seguir, em que o estudante separa o fator igual ao do denominador e faz o cancelamento final. Sete (7) participantes deixaram os dois itens em branco.

Figura 20 – PT40Q$_4$Ni



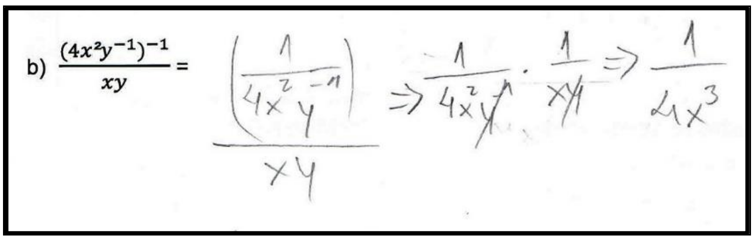
Fonte: relatório da pesquisa.

Alguns registros fizeram o cancelamento por partes: primeiro efetuaram a divisão 21:3, em seguida $x^8 : x$ e, por fim, $y^7 \colon y^6$.

Entre as resoluções que não chegaram à solução desejada, destacamos dois registros em que o erro ocorreu ao darem a resposta da divisão de 21 por 7 mantendo correta a resposta literal e outro que simplificou o termo em *x* e parou a resolução dando a resposta sem a simplificação em *y*. Enquanto no item anterior, o índice de acertos foi de 68%, no item b) esse índice caiu para 16%. A diferença entre os dois exercícios está na existência de uma potência negativa no item b).

A Figura 21 apresenta um protocolo de resolução do item b) que, apesar de estar correta, mostra um descuido muito comum na escrita matemática de alguns estudantes que usam, em lugar do sinal de igualdade, uma seta que em Matemática pode ser confundida com o sinal que indica uma implicação.

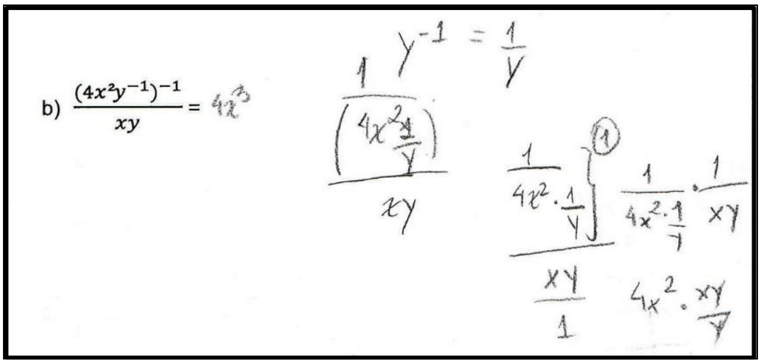
Figura 21 – PT39Q$_4$Ksi



Fonte: relatório da pesquisa.

A falta de organização na resolução é outra situação usual que pode induzir ao erro, como verificado no protocolo a seguir. A estudante, nesse caso, fez todos os passos corretos, porém o não emprego de sinais e a falta de controle na ordem das etapas de resolução fez com que fosse perdido o formato da fração, o que pode ter contribuído para a resposta equivocada.

Figura 22 – PT11Q$_4$Kapa

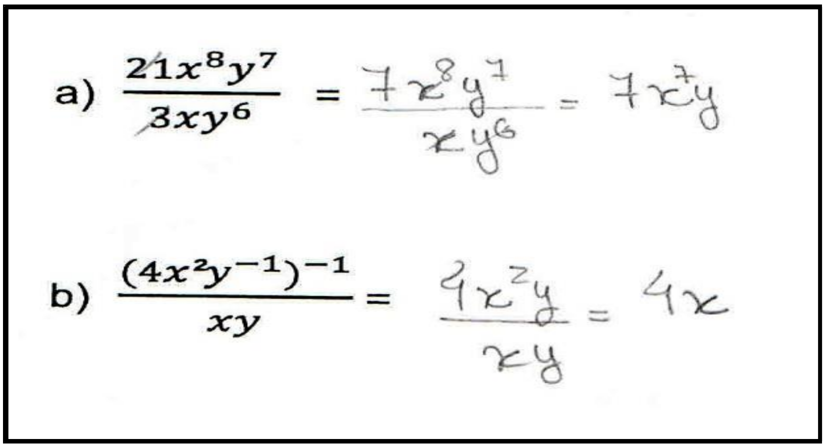


Fonte: relatório da pesquisa.

Portanto, verificamos também que a não apropriação de propriedades fundamentais torna os procedimentos mais longos e complexos, fazendo com que os alunos corram maiores riscos de produção de erros.

Duas das tentativas de resolução obtiveram o resultado *4x*, outras duas $\frac{1}{4x}$ e outra $4x^{-1}$. Essas produções apresentaram em comum o procedimento de resolução exemplificado pela Figura 23, em que se eleva a -1 somente o termo em y e neste caso, como a resposta de (-1)(-1) é o número 1, elimina-se o sinal negativo.

Figura 23 – PT3Q$_4$Omicron



Fonte: relatório da pesquisa.

O protocolo demonstra que o estudante Omicron não teve dificuldades na resolução do item a), porém, não conseguiu resolver uma potenciação com expoentes negativos. Podemos supor que, em sua resolução, o estudante tenha feito a multiplicação do (-1) vezes (-1) somente para o fato *y*.

Questão 05

Fatorar significa decompor em fatores. Na fatoração, os fatores comuns, termos componentes de uma multiplicação, são colocados em evidência. A fatoração como conteúdo curricular aparece no Currículo em Movimento da Educação Básica da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal, SEEDF no 9º ano dentro do conteúdo Expressões Algébricas, que é seguido de Simplificações de Expressões Algébricas (DISTRITO FEDERAL, 2013, p. 95).

A fatoração é o tópico abordado na Questão 5 que é composta por duas atividades, letras a) e b).

Enunciado

5. Fatore:

a) $4x^2 - 3x =$

b) $3y^4 + 3y^2 - 6 =$

Conteúdos envolvidos: fatoração de expressões algébricas, multiplicação e divisão, subtração, potenciação.

Nível da questão: Ensino Fundamental

Tabela 12- Resultados da Questão 5

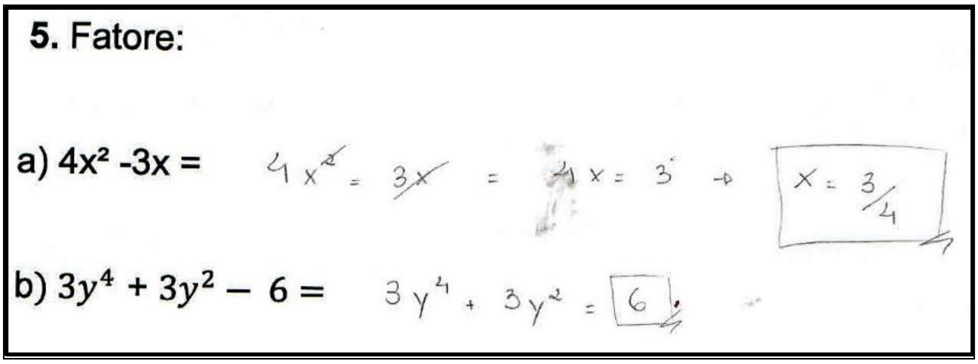
Item	Acertos	Brancos	Outras Resoluções
a)	19	19	12
b)	0	25	25

Fonte: relatório da pesquisa

A fatoração da letra a) tem como solução *X(4X-3)*. O número de acertos é muito pequeno em relação ao nível baixo de complexidade do exercício, tendo em vista que essas produções foram realizadas por estudantes aprovados em cursos superiores para os quais a Matemática da educação básica é um dos pré-requisitos. Diante disso, e da análise das respostas, somos induzidos a supor que os estudantes erraram ou a deixaram em branco por não compreenderem o seu enunciado. Ou seja, podemos inferir que esses estudantes não têm o entendimento do que signifique o termo “fatorar”.

Como evidência dessa suposição, temos quatro registros em que os participantes igualaram à expressão a zero, transformando-a numa equação e depois tentaram achar uma solução para *x*. O protocolo a seguir traz esse procedimento nos dois itens da questão. O autor do protocolo destacado, o estudante Phi, não havia apresentado dificuldades na resolução do teste até esta questão, pois tinha acertado todos os itens anteriores, exceto a letra h) da Questão 2, que foi deixada em branco.

Figura 24 – PT36Q$_5$Phi



Fonte: relatório da pesquisa.

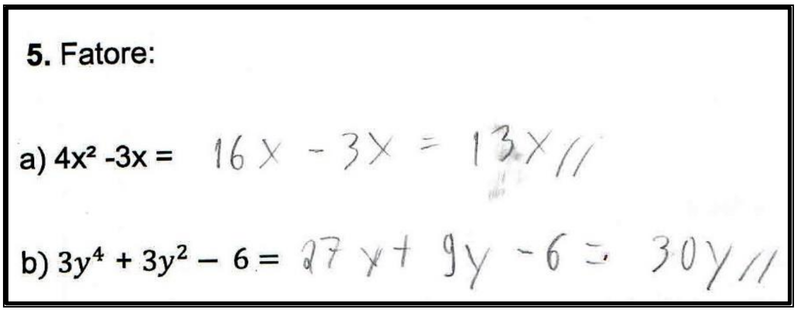
A solução da letra b) exige um processo mais elaborado de fatoração, gradativo e exige também a identificação de um produto notável, como se pode verificar no desenvolvimento:

$$3y^4 + 3y^2 - 6 = 3(y^4 + y^2 - 2) = \qquad (b_1)$$
$$3\,(y^3 + y^2 + 2y + 2)\,(y - 1) = 3(y^2-1)(y^2+2) \qquad (b_2)$$

Pode ser que essa exigência seja a justificativa para o fato de não termos encontrado nenhuma resolução que apresentasse uma das fatorações da linha (b_2) acima. Somente um protocolo exibiu a fatoração final, mas eliminou o 3 que é colocado em evidência como em (b_1) desde o início da resolução. Sete soluções fizeram o primeiro passo mostrado em (b_1), mas não avançaram. Novamente, quatro resolveram como se fosse uma equação, como na Figura 24. Quatro colocaram o y em evidência, dois colocaram o y^2 e mais dois colocaram o $3y^2$. Três interpretaram a questão como um exercício em que deveriam efetuar as operações indicadas. Em um deles, destacamos o protocolo da Figura 25, na qual se observa, nos dois itens em que o estudante, na tentativa de resolução, efetua operações com os termos.

Já na letra a) ele coloca 16x como resultado da operação *4x²* e em seguida subtrai *3x*, resultando ao final *13x*. Percebemos na resolução que o estudante eleva ao quadrado somente o coeficiente, desprezando que o quadrado é da incógnita. Temos aqui a constituição de um teorema em ação, pois o mesmo processo é realizado no item seguinte em que, como resultado de $3y^4$ temos 27y e para $3y^2$ temos 9y.

Figura 25 – PT24Q5Mi


5. Fatore:

a) $4x^2 - 3x = 16x - 3x = 13x$//

b) $3y^4 + 3y^2 - 6 = 27y + 9y - 6 = 30y$//

Fonte: relatório da pesquisa.

Questão 06

A resolução de equações contendo radicais é o assunto dessa questão com dois itens, letras a) e b). O método tradicional de resolução desse tipo de equação eleva os dois membros da igualdade ao quadrado para eliminação do radical. Em seguida, passa-se à resolução de uma equação do segundo grau que é o objeto de nossa análise.

Esse tópico pode ser encontrado no Currículo em Movimento da Educação Básica da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal, SEEDF, no documento com as diretrizes curriculares para o ensino da Matemática na Educação Fundamental Anos Finais, mais especificamente, no 9° ano (DISTRITO FEDERAL, 2013, p. 96).

Essa pode ser considerada como uma das matérias clássicas do ensino da Matemática escolar. Ao lado de temas como a manipulação de expressões algébricas e elementos de funções, ela é classificada como um dos conceitos fundamentais de um currículo da Educação Básica (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009), não importando tempo ou lugar. Um dos motivos para ter alcançado essa posição de destaque é a variedade de situações-problema da Geometria e de fenômenos físicos do cotidiano de diferentes áreas que podem ser modelados por meio de uma equação do segundo grau. Saber identificar uma equação do segundo grau e achar uma possível solução é uma das competências exigidas de estudantes que concluem o Ensino Fundamental.

Genericamente falando, uma equação do segundo grau pode ser resolvida graficamente, ou através de uma técnica algébrica apropriada. Independentemente do modo usado para resolvê-la, exigirá o uso de procedimentos e conceitos aprendidos anteriormente.

Enunciado

6. Resolva as equações:

a) $2 + x = 3\sqrt{x}$

b) $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = 12$

A seguir apresentamos uma possível forma de resolução dos dois itens.

a) $(2 + x)^2 = (3\sqrt{x})^2$

$4 + 4x + x^2 = 9x$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

Uma vez que a soma das raízes é 5 e o produto 4, o conjunto-solução da equação é {1,4}. Nessa seção, serão apresentados os resultados produzidos pelo grupo de estudantes e, em seguida, será feita uma análise qualitativa desses resultados.

b) $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = 12$.

$x + \sqrt{x} = 12$, ou seja, $\sqrt{x} = 12 - x$. Ou ainda, $(\sqrt{x})^2 = (12 - x)^2$.

$x = 144 - 24x + x^2$.

Assim, a equação do segundo grau a ser resolvida é: $x^2 - 25x + 144$, cujas raízes são 9 e 16. Porém, 16 não satisfaz a equação inicial. Com isso, o conjunto solução será: {9}.

Conteúdos envolvidos: fatoração de expressões algébricas

Nível da questão: Ensino Fundamental

Tabela 13 – Resultados da Questão 6

Item	Acertos	Brancos	Outras Resoluções
a)	5	10	35
b)	5	8	37

Fonte: relatório da pesquisa.

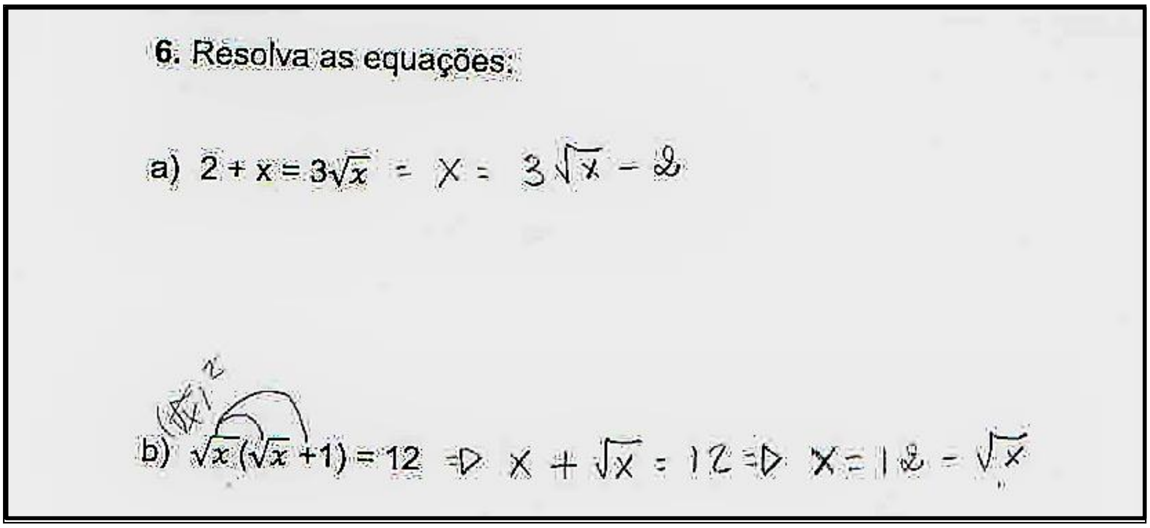
Em “Outras Resoluções” foram incluídas as soluções parciais que eliminaram a raiz quadrada e chegaram até à montagem de uma equação do segundo grau, mas pararam nesse ponto, ou cometeram algum erro a partir daí, bem como as outras tentativas de resolução sem sucesso.

Observamos que a maioria tentou resolver a questão. Isso pode ser confirmado pelo baixo número de estudantes, 5 (cinco) que deixou em branco os itens a) e b) ao mesmo tempo. Um total de 10 sujeitos (20% do grupo) acertou ou o item a) ou o item b. Desses, somente três acertaram os dois itens.

Entre os que acertaram a letra a), todas as resoluções seguiram o método tradicional de desenvolvimento em que se eleva os dois lados ao quadrado para se eliminar o radical. Em seguida, passa-se à resolução de uma equação do segundo grau. Muitos não se preocuparam em verificar a validade das raízes. Esse fato não chega a ser um erro grave no contexto deste diagnóstico.

Ainda no item a), notamos que a maioria das produções foram tentativas frustradas de resolução das equações propostas. Em 30 desses casos, tivemos em 25 deles (a metade dos registros totais e 83% dos que tentaram) um desenvolvimento em que a variável *x* é isolada, entretanto não conseguiram avançar como no exemplo abaixo da Figura 26 em que o estudante usou o mesmo procedimento nos dois itens.

Figura 26 – PT33Q$_6$Zeta

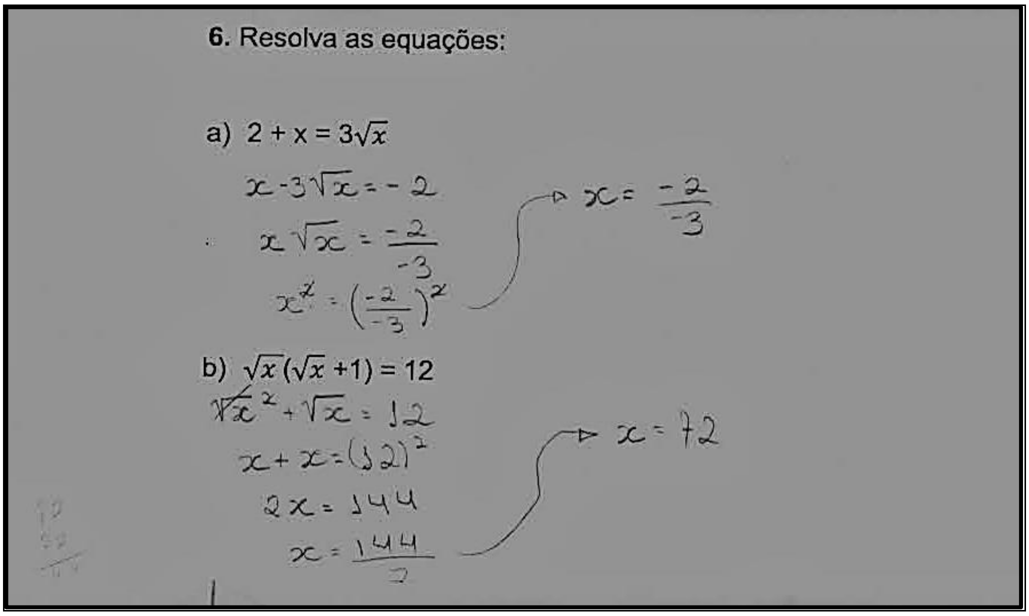


Fonte: relatório da pesquisa.

As produções desse tipo revelam a intenção dos estudantes de usarem o mecanismo de isolarem de um lado da equação os termos com a incógnita e, do outro lado, os termos independentes de *x*. Percebemos, a partir do número alto de dificuldades nessa questão, e da quantidade de registros que não avançaram, que a raiz quadrada parece ser um empecilho, uma vez que, em algumas produções, ela foi ignorada ou simplesmente eliminada como nos dois exemplos das Figuras 27 e 28.

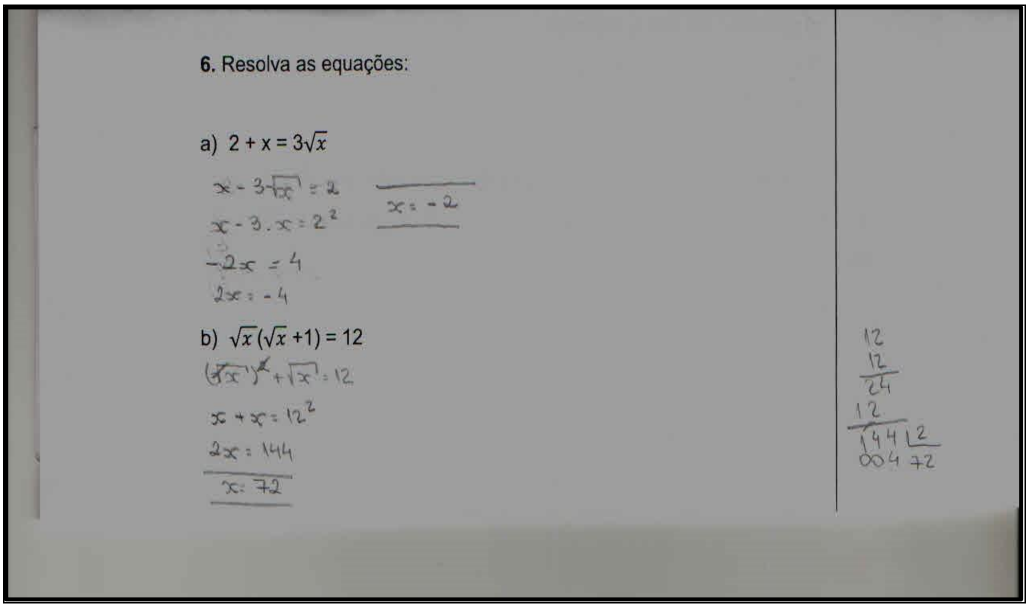
Esses registros apontam que tal mecanismo de resolução de uma equação constituiu-se em um obstáculo didático para o desenvolvimento da questão, por ter sido fruto de uma metodologia comumente praticada em sala de aula. Porém, por estar ligado ao conhecimento que o estudante construiu de que, ao se deparar com uma equação, de qualquer tipo, ele deverá isolar de um lado termos dependentes e de outros termos independentes, pode ser também considerado como um obstáculo epistemológico que levará a erros, como os apresentados (IGLIORI, 2002; IGLIORI, 2015; JOB; SCHNEIDER, 2014; PAIS, 2015; REZENDE, 2003). Do ponto de vista da TCC de Vergnaud (2009), esses procedimentos podem se caracterizar como teoremas em ação falsos que são mobilizados na tentativa de resolução de uma atividade matemática. Para tanto, necessita-se de uma investigação mais profunda com o uso de mais resoluções dos estudantes em situações matemáticas envolvendo o procedimento em questão.

Figura 27 – PT09Q_6Sigma



Fonte: relatório da pesquisa.

Figura 28 – PT16Q_6Omega



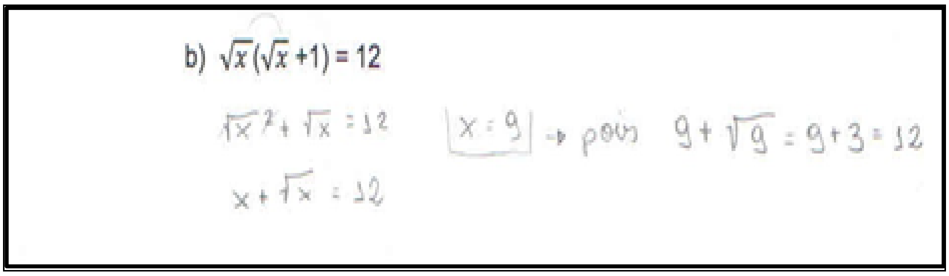
Fonte: relatório da pesquisa.

Ainda destacamos, com relação aos dois itens, que entre aqueles que chegaram a uma equação do segundo grau, somente um chegou à equação esperada na letra b), porém não a resolveu. Com relação à solução do item b), a maior parte dos registros não trouxe nada além do isolamento mencionado e ilustrado na Figura 26. Nesse item, a questão tem duas raízes quadradas na equação.

O método usual de resolução do item b) nas produções foi o mesmo da letra a), mas nesse item uma das respostas da equação do segundo grau, o número 16, deveria ser eliminado da solução final por não satisfazer a equação inicial, o que não foi feito pelo único participante que a resolveu pelo método tradicional de uso da fórmula para as raízes.

Na solução feita anteriormente do item b), após o uso da operação distributiva e, antes de elevar ao quadrado, três sujeitos notaram que estava sendo procurado um número que somado à sua raiz quadrada resultasse em 12, ou seja, deseja-se achar “x” tal que x + $\sqrt{x}$ = 12. Esses sujeitos deram o resultado a partir dessa constatação. Para justificar, um deles deixou a conta verificando o resultado (Figura 28), outro escreveu que “usou a lógica” e o último registrou que a resolução foi “por observação”. Por fim, os dois últimos protocolos evidenciam erros comuns na elevação ao quadrado de ambos os membros com problemas no desenvolvimento do quadrado de uma soma.

Figura 29 – PT01Q$_6$Theta



Fonte: relatório da pesquisa.

O número de acertos nos dois itens foi muito baixo, apenas três dos 50 totais. Temos, portanto, uma confirmação de uma dificuldade comum a muitos estudantes ingressantes que é a existência de lacunas na aprendizagem de resolução de equações que envolvam raízes.

Esse fato é confirmado por meio do alto número de registros de estudantes que usaram a técnica de isolar o termo com o *x* de um lado da equação, mas não avançaram. Eles tentam resolver como se fosse uma equação linear com uma variável, mas não conseguem continuar, uma vez que a técnica não funciona quando se tem uma raiz quadrada na equação.

Em algumas produções, foram encontradas respostas com resultados negativos como soluções para as equações, como, por exemplo, na Figura 28, o que pode ser uma evidência de dificuldades desses estudantes com a raiz quadrada, ou ainda, mais genericamente, em operações com os números reais. Como consequência, por exemplo, no futuro não poderão compreender ou resolver questões de Cálculo em que apareçam raízes quadradas, se essa dificuldade não for superada.

Entre os objetivos listados no Currículo em Movimento da SEEDF temos o “Raciocinar, [...]” e “Estimular o pensamento lógico e a capacidade de abstração da linguagem matemática à solução de problemas do cotidiano”. (DISTRITO FEDERAL, 2013, p. 96). Apesar de a questão estar dissociada de uma situação-problema do cotidiano, verificamos que esse objetivo, associado ao desenvolvimento do pensamento algébrico, não tem sido atingido. Isso porque, na resolução da equação do item b), somente três sujeitos notaram o que se estava procurando e deram a resposta sem precisar de fazer qualquer operação algébrica. Aqui detectamos a falta de senso crítico e de intuição nas resoluções.

Nesse sentido, Polya (1995) recomenda que, ao final de resolução de um problema matemático, sejam feitos retrospectos que considerem uma revisão e discussão dos processos e soluções obtidas. Para Skovsmose (2009), essa questão está ligada aos métodos tradicionais de ensino da Matemática que inibem reflexões sobre o conhecimento, pois o foco da sala de aula está no trabalho docente que determina e conduz as ações.

Nenhum dos participantes registrou a intenção de usar um mecanismo geométrico para a resolução da equação do segundo grau. Somente uma produção resolveu um dos itens observando os coeficientes da equação e aplicou a informação de se ter a soma e o produto das raízes para encontrar a solução. Por que no ensino de resolução de equações não é incentivado entre os estudantes explorarem a solução gráfica antes da introdução de fórmulas?

Questão 07

O estudo das Funções inicia-se na Educação Básica, vai sendo ampliado através dos anos seguintes e é aprofundado nos três anos do Ensino Médio. No Currículo em Movimento da SEEDF, o termo "Funções" ocorre pela primeira vez nos conteúdos de Matemática para o 9º ano do Ensino Fundamental como *"Funções do 1º e 2º grau"* (DISTRITO FEDERAL, 2013, p. 96). O assunto surge em conexão com a resolução de equações, com o estudo de gráficos, de situações-problema em Estatística, Trigonometria, Física, entre outros.

Assim, fica a cargo do Ensino Médio a continuação, o aprofundamento e a extensão desse estudo com a apresentação dos outros tipos de funções. É um conteúdo fundamental para a Álgebra, para o Cálculo e para as outras ciências porque a partir delas é possível a modelagem de fenômenos que ocorrem na natureza (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Para o Cálculo, a Função é o conceito fundamental e a partir do qual o curso é desenvolvido. Por isso, em geral, os livros de Cálculo, dedicam um capítulo inicial ao seu estudo, como, por exemplo, as obras de Ávila (2003), Stewart (2011) e Thomas (2010).

Num primeiro curso de Cálculo, espera-se que os estudantes tenham a habilidade de reconhecer analítica e algebricamente as funções lineares dadas como gráficos de equações de retas e funções modulares, as funções quadráticas cujos gráficos são parábolas, as funções trigonométricas básicas (seno, cosseno e tangente) e as funções logarítmicas e exponenciais.

Enunciado

7. Calcule $f(2 + h)$ para a função $f(x) = x - x^2$.

Conteúdos envolvidos: Funções de primeiro e de segundo grau, operações algébricas de soma, subtração, potenciação.

Nível da questão: Ensino Médio

A solução esperada é dada por:

$f(2+h) = (2+h) - (2+h)^2 = 2 + h - (4 + 4h + h^2) = 2 + h - 4 - 4h - h^2 = -2 - 3h - h^2$.

Tabela 14 – Resultados da Questão 7

Item	Acertos	Brancos	Outras Resoluções
a)	11	3	36

Fonte: relatório da pesquisa.

Comparada à questão anterior, vemos que houve um maior interesse dos estudantes em resolver essa questão, pois somente três registros estavam em branco. Esse fato é justificável pelo nível de dificuldade da questão. Apesar disso, do total de 50 participantes, somente 11 (22%) conseguiram concluí-la adequadamente. Os outros (78%) apresentaram dificuldades na resolução, o que nos surpreende, considerando que os respondentes são estudantes de Cálculo.

A manipulação algébrica de uma função quadrática, tal como a apresentada aqui nesse exercício, é uma atividade que surge no ensino de funções, no Ensino Médio. Sua importância para nosso estudo se dá pelo fato de ser um exercício necessário na determinação da derivada de uma função pela definição usando Limites.

Essas dificuldades e obstáculos surgidos e manifestados, nas produções pelos erros mais frequentes observados, foram categorizados em dois tipos: os erros ***conceituais*** e os ***algébricos.*** Estamos chamando de erros conceituais aqueles em que foi verificada a falta de entendimento ou conhecimento do conceito de função, ou seja, quando são encontradas dificuldades na própria construção conceitual e representacional de uma função no seu trato algébrico.

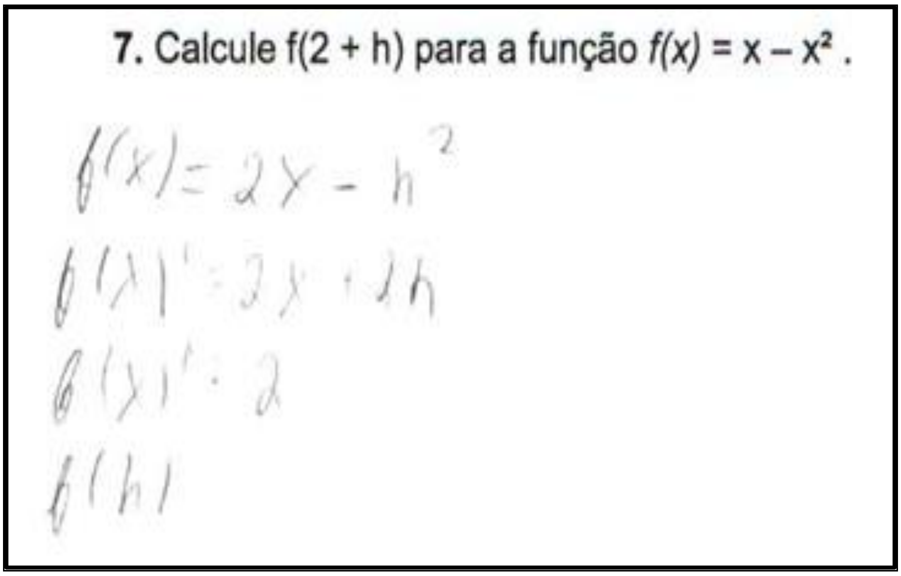
Dificuldades conceituais e algébricas dessa natureza podem afetar o entendimento do conceito algébrico de uma derivada de uma função num ponto de seu domínio (TALL, 1993) como veremos nas próximas seções deste capítulo. O erro algébrico foi considerado como aquele em que se evidenciou a ocorrência de erros procedimentais referentes ao trato algébrico das expressões.

As considerações deste parágrafo são parte de um artigo escrito pela pesquisadora em colaboração com seu orientador e de outra pesquisadora de Educação Matemática da Universidade de Brasília. O artigo foi apresentado no 1º Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática ocorrido em novembro de 2016, em Bonito, Mato Grosso do Sul e publicado em seus anais (DÖRR; MUNIZ; PINA NEVES, 2016).

5.2.3 Registros com erros conceituais e algébricos

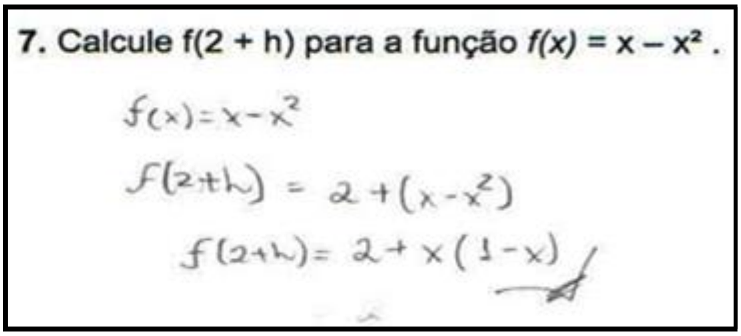
Exemplificamos os erros conceituais por meio das seguintes resoluções, conforme as Figuras 29 e 30 apresentadas a seguir.

Figura 30 – PT24Q$_7$Mi



Fonte: relatório da pesquisa.

Figura 31 – PT37Q$_7$Tau

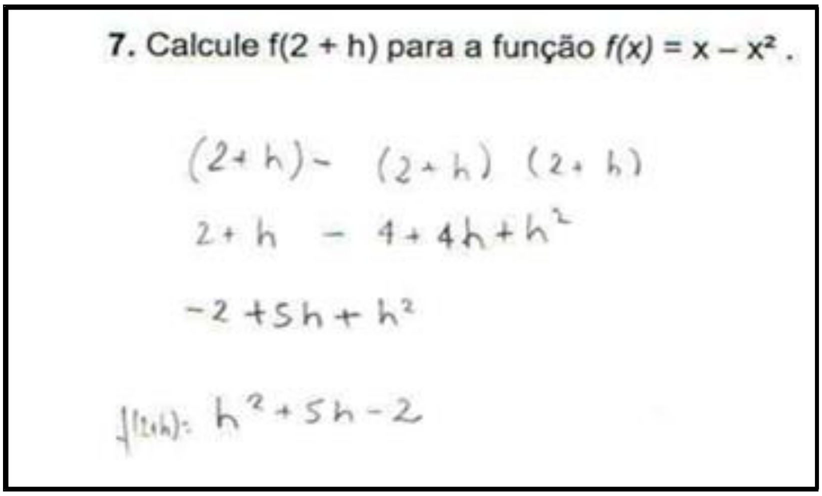


Fonte: relatório da pesquisa.

Esses registros apontam que tal mecanismo de resolução de uma equação constituiu-se em um obstáculo didático para o desenvolvimento da questão por ter sido fruto de uma metodologia comumente praticada em sala de aula. Porém, por estar ligado ao conhecimento que o estudante construiu de que, ao se deparar com uma equação, de qualquer tipo, ele deverá isolar de um lado termos dependentes e de outros termos independentes, pode ser também considerado como um obstáculo epistemológico que levará a erros, como os apresentados.

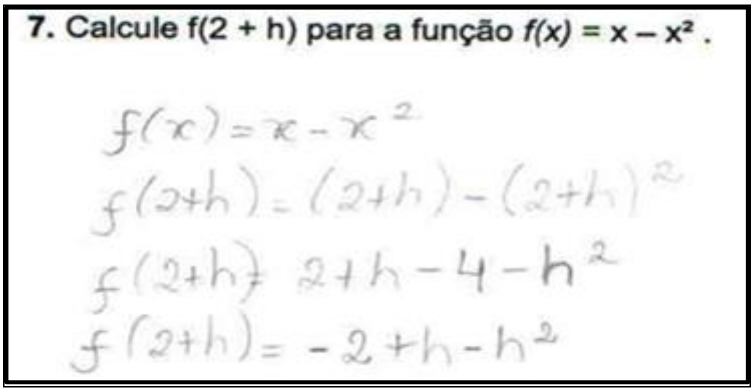
Os dois protocolos seguintes evidenciam a situação em que os estudantes têm o conceito de função, porém incorrem em erros algébricos comuns do uso da distributividade em presença de um sinal negativo antes da expressão ou na resolução do quadrado de uma soma escrita como soma dos quadrados (COXFORD et al, 1995).

Figura 32 – PT44Q_7Upsilon



Fonte: relatório da pesquisa.

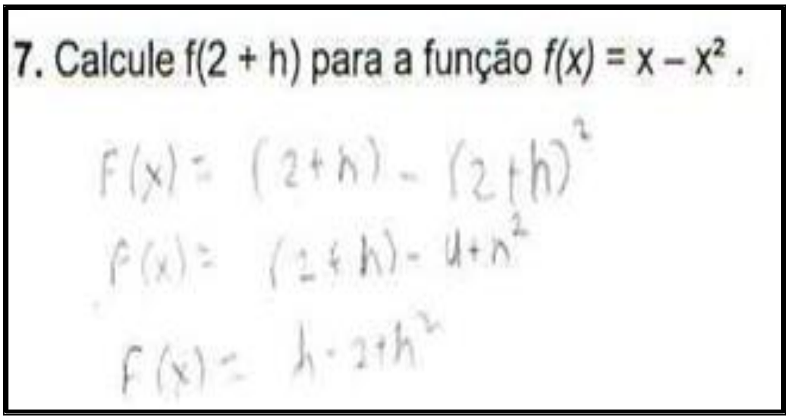
Figura 33 – PT38Q_7Eta



Fonte: relatório da pesquisa.

Algumas resoluções apresentaram procedimentos onde ocorreu uma combinação das duas dificuldades algébricas. Nelas aparecem erro no uso da propriedade distributiva bem como no desenvolvimento de $(2+h)^2$, como no exemplo mostrado pela Figura 33 a seguir:

Figura 34 – PT43Q_7Chi



Fonte: relatório da pesquisa.

Os protocolos das figuras 30 e 34 apresentam outro fenômeno observado nas produções. Ele diz respeito ao costume de se calcular o valor da função usando sempre a variável *x*. A questão proposta, inicialmente solicitava que se calculasse *f(2+h)* e, por isso, a resposta final deve ser uma função da variável h. As duas produções citadas não dispensam o uso de *f(x)*. Do mesmo modo, outros cinco protocolos mantiveram o resultado *f(x)* até o final.

Desta forma, essas produções sinalizam que o conceito de função não está adequado para a aprendizagem do Cálculo, tendo de ser remobilizado desde o início, voltando à noção de variável independente. Elas revelam a falta de compreensão da distinção entre varável independente e variável dependente, isto é, a falta de conceitos e representações para o estudo de funções, o que é essencial para o estudo de Cálculo. Erros algébricos dessa natureza podem ser observados por professores de Matemática que lecionam a partir dos anos finais do Ensino Fundamental. Os erros destacados aqui nesse trabalho são citados no livro de Coxford et al. (1995) no capítulo que trata dos erros mais comuns em Álgebra.

Novamente, os registros das questões 6 e 7 produzidos nos levam a identificar a presença de obstáculos didáticos tanto quanto epistemológicos, revelando conhecimento algébrico errôneo, cuja produção matemática é calcada em malabarismos incompletos e falsos. Isso evidencia pouca compreensão por parte dos alunos dos significados das operações algébricas realizadas, não apoiadas em definições e nem em propriedades, que são objetos de ensino e aprendizagens nos anos finais do Ensino Fundamental.

Questão 08

As funções compostas são uma parte do estudo de funções que exigem dos estudantes o entendimento e a identificação das leis de formação de cada função componente da composição. Além disso, também requer habilidades manipulativas na construção da função composta a partir de uma ou mais funções. Por serem funções especiais, sua regra de derivação tem nome próprio e é chamada a Regra da Cadeia.

Enunciado

8. Encontre *fogoh* se $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$.

Conteúdos envolvidos: Funções compostas; potenciação, divisão; soma.

Nível da questão: Ensino Médio

Tabela 15 – Resultados da Questão 8

Acertos	Brancos	Outras Resoluções
12	24	14

Fonte: relatório da pesquisa.

Durante a resolução do pré-teste, foram constatadas algumas dúvidas com relação ao enunciado desta questão. Sendo assim, a pesquisadora esclareceu oralmente e escreveu no quadro o que se pretendia com a escrita *fogoh*, pois a formulação não foi entendida por parte dos alunos. Ou seja, foi solicitado que substituíssem “f bola g bola h” por “f bola g de h de x. Em símbolos, foi pedido que escrevessem $fogoh(x) = f(g(h(x)))$ em lugar de *fogoh.*

O tipo dessa questão não favorece resoluções diferenciadas ou alternativas. Por isso, a maior parte das doze soluções consideradas pertinentes seguiu o caminho apresentado a seguir:

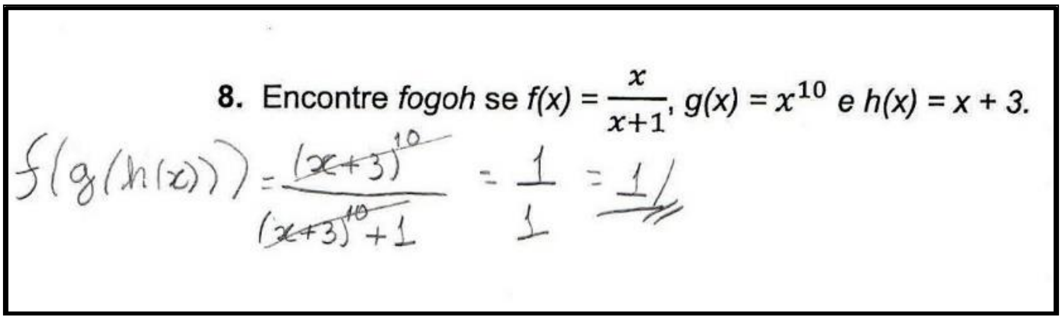
$$f(g(h(x))) = f(g(x+3)) = f((x+3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$$

Primeiramente resolve-se a função mais interna da composição $g(x+3)$ e por fim, calcula-se $f((x+3)^{10})$.

Nas manipulações elaboradas nas resoluções, selecionamos dois grupos os quais serão apontados a seguir.

No primeiro grupo, ilustrado pelo protocolo da Figura 34, encontramos uma resolução em que o resultado final é apresentado corretamente num primeiro passo, porém é feito o cancelamento do termo $(x+3)^{10}$ do numerador com o do denominador, resultando 1 dividido por um. Seguiram o mesmo caminho outros três protocolos, dois com resposta 1 como na Figura 26 e um com resposta $\frac{1}{2}$. Ou seja, percebe-se o entendimento do conceito da função composta, porém comete erros no processo algébrico da simplificação.

Figura 35 – PT40Q_8Ni

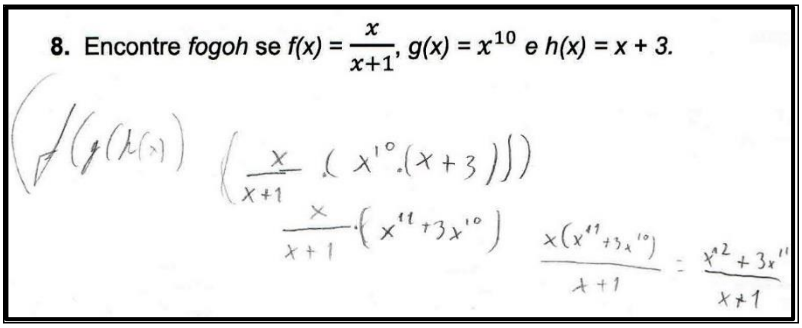


Fonte: relatório da pesquisa.

Mais uma vez, de forma reincidente, verificamos a dificuldade comum entre os estudantes na diferenciação entre uma situação aditiva de uma multiplicativa, o que nos remete, necessariamente, às construções de aprendizagens essencialmente do 8º ano do Ensino Fundamental.

Apesar de não ser um produto de funções, a notação (*fogoh)(x)* pode sugerir um produto de funções. Nessa linha, tivemos quatro resoluções, das quais exibimos uma delas na Figura 36.

Figura 36 – PT35Q_8Rho



Fonte: relatório da pesquisa.

O protocolo mostra um desenvolvimento com o uso do produto das funções f, g e h como resultado para *fogoh(x).*

Questões 9 e 10

Ao finalizar a apresentação e análise dos itens do Pré-teste e devido à opção pela ênfase nos aspectos algébricos das resoluções, para as questões 9 e 10 finais, somente apresentaremos os resultados e informações gerais das respostas numa mesma tabela (Tabela

16), sem incluir comentários ou análises mais elaboradas. Ademais, são questões objetivas e juntamente com a questão de número dois não são apropriadas para as análises.

Ambas as questões são de nível difícil. A questão nove envolve comparação de senos e cossenos usando argumentos em graus e radianos. A questão dez exige o conhecimento das funções trigonométricas, bem como os valores dos arcos conhecidos como fundamentais. Nenhum dos participantes acertou um dos dois itens e tivemos 5 protocolos com os dois itens em branco.

Questão 09

Enunciado

9. Dadas as desigualdades

I) sen2 > sen3

II) sen1 > sen30º

III) cos2 > cos3

é correto afirmar que:

a) todas são verdadeiras.

b) todas são falsas.

c) somente I e II são verdadeiras.

d) somente II e III são verdadeiras.

e) somente I e III são verdadeiras.

Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/6165682

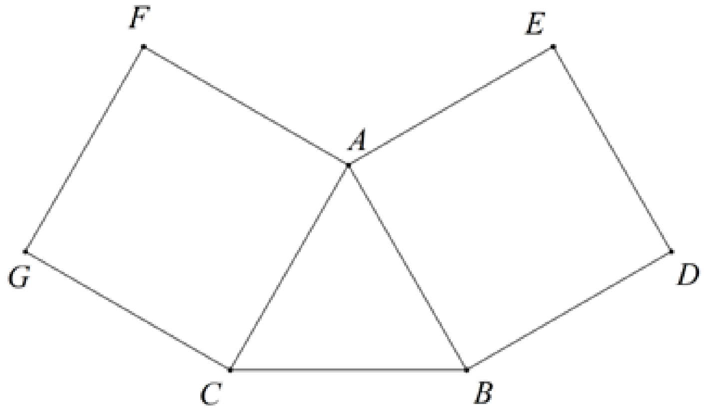
Conteúdos envolvidos: desigualdades, funções trigonométricas, cálculo de valores das funções trigonométricas fundamentais.

Nível da questão: Ensino Médio

Questão 10

Enunciado

10. Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero de lado l e ABDE e AFGC são quadrados. Expresse a distância DG em função de l.



Fonte: http://material.descomplica.com.br/matematica/Listadeexercicios-matematica1-trigonometria-linhas-trigonometricas-funcoes-graficos-10-11-2016.pdf

Conteúdos envolvidos: triângulos, distância entre dois pontos, trigonometria.

Nível da questão: Ensino Médio

Tabela 16 – Resultados Questões 09 e 10

Questão	Acertos	Brancos	Outras Resoluções
09	01	22	27
10	0	22	28

Fonte: relatório da pesquisa.

É surpreendente o baixíssimo índice de acerto nessas questões de Geometria, sobretudo na última, número 10, em que a visualização geométrica faz parte da problematização. Será que a figura associada à questão serviu como um obstáculo à tentativa de resolução? Será que no Ensino Médio as aprendizagens de Geometria e Trigonometria ficam arraigadas aos cálculos de áreas e volumes e aos procedimentos algébricos associados a esses cálculos?

Em suma, da mesma forma que em relação aos conteúdos e processos algébricos, os resultados da tabela acima sinalizam que os estudantes ingressantes têm lacunas em conceitos e procedimentos geométricos. De fato, os fenômenos aqui descritos não são inéditos. Em um prefácio de 2003, de seu conhecido livro “Cálculo das funções de uma variável”, Volume 1, o Professor Geraldo Ávila escreve

> Quando esse texto foi escrito, há mais de duas décadas, os estudantes chegavam ao Ensino Superior com graves deficiências de formação básica, daí a necessidade da inclusão de tópicos do Ensino Médio, como noções de Geometria Analítica, funções - particularmente o logaritmo e a exponencial – e Trigonometria. Infelizmente, a situação não melhorou, desde, pelo

> menos, 1968, ano que marca o início da grande expansão do Ensino Superior. (ÁVILA, 2003)

5.2.4 Resultados Gerais do Pré-teste

A Tabela 17, apresentada a seguir, resume os resultados gerais, em porcentagens, de todas as questões do pré-teste. Nela foram destacados, em todas as colunas, em azul os três maiores índices e os dois menores em amarelo, conforme a legenda.

Tabela 17 – Resultados Gerais do Pré-teste

Questão	Acertos (%)	Brancos (%)	Outras Resoluções (%)
01	80,25	2,75	17,00
02	81,75	2,00	16,25
03	71,33	7,00	21,67
04	42,00	23,00	35,00
05	19,00	44,00	37,00
06	10,00	18,00	72,00
07	22,00	6,00	72,00
08	24,00	48,00	28,00
09	2,00	44,00	54,00
10	0,00	44,00	56,00

Fonte: relatório da pesquisa.
Legenda: Maiores frequências Menores frequências.

5.2.5 Síntese das análises

Os dados gerais indicam que a maior quantidade de acertos ocorreu nas três primeiras questões que abordaram operações básicas no conjunto dos números reais. Esse resultado é um bom indício, apesar dos problemas pontuais nas resoluções com valor absoluto, frações e potenciação.

O maior número de registros em branco aconteceu nas três questões finais, mas como não estamos considerando os temas das questões nove e dez, temos as questões quatro, seis e oito que foram destacadas. Seus temas são a simplificação de expressões algébricas, a resolução de equações e funções compostas, respectivamente. Das três, o maior número de brancos ocorreu no cálculo da função composta da questão oito. O maior número de insucessos ocorreu nos procedimentos apresentados para as questões seis, sete e oito cujos temas são equações e funções, respectivamente.

Nesta seção, fizemos análises de produções escritas de estudantes de Cálculo que estavam em situação de dificuldade de aprendizagem por terem tido insucesso no curso anteriormente. Os autores desses registros, além de terem vivenciado o insucesso por pelo menos uma vez, eram estudantes de graduação de cursos das áreas das ciências exatas ou tecnológicas e, por terem feito a opção por essas áreas, supomos que não tiveram dificuldades com a Matemática do Ensino Básico.

Os protocolos analisados evidenciaram dificuldades específicas dos estudantes no tratamento algébrico e na formação de conceitos em temas matemáticos ligados aos anos finais do Ensino Fundamental. Os principais foram:

- operações com números e potências negativas das Figuras 11, 16, 17, 18, 21 e 22;
- operações com valor absoluto (Figura 9);
- operações com frações (Figuras 14, 15 e 21);
- diferenciação entre as operações de multiplicação e potenciação (Figura 12);
- não distinção entre estruturas aditivas e multiplicativas (Figura 27).

Evidenciamos, também, dificuldades com o simbolismo algébrico e com o uso da escrita matemática, como, por exemplo, aquelas evidenciadas pelas das Figuras 22, 23 e 36.

O ensino da Álgebra é frequentemente pautado em um conjunto de procedimentos e técnicas, muitos deles, sem significados para os alunos (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; RIBEIRO; CURY, 2015). Isso acaba se refletindo nos usos que os estudantes fazem dos símbolos matemáticos, elementos essenciais para a expressão simplificada de operações.

Diante dessas dificuldades em conteúdos e procedimentos básicos, levantamos alguns questionamentos: até que ponto o professor de Cálculo consegue assimilar a natureza dessas dificuldades de seus alunos?

Ou ainda, como introduzir conceitos complexos como Limites e Derivadas que requerem maturidade em processos algébricos e intuição matemática na resolução de problemas se os estudantes não têm a conceitualização de funções? Como administrar essa situação em um curto período de tempo de um semestre?

Em termos gerais, notamos ainda a ausência de criatividade ou soluções alternativas nas resoluções ou ainda falta de senso crítico nas resoluções. Destacamos também a ocorrência de teoremas em ação falsos, bem como a reprodução de processos matemáticos mecânicos, assimilados ao longo da escolarização básica.

Foram identificados obstáculos epistemológicos e didáticos a serem superados. Essa distinção foi feita especialmente nas questões seis e sete que envolveram temas ligados diretamente aos conteúdos basilares do Cálculo. Dificuldades no trabalho com Equações e

Funções podem gerar obstáculos à compreensão de temas mais complexos e abstratos do Cálculo, como o estudo de Limites, como veremos na próxima seção.

Apesar de termos enfatizado nossas análises nos aspectos conceituais e procedimentais algébricos, também pudemos verificar dificuldades em questões de Geometria. Todas as dificuldades algébricas e geométricas conceituais ou procedimentais, aqui apresentadas, são essenciais às aprendizagens da Matemática do Ensino Superior, em especial, para o Cálculo, e podem se constituir como obstáculos a sua aprendizagem.

Finalmente, consideramos que o teste é limitado em certos aspectos e que, por esse motivo, pode ser reformulado em seus enunciados e ampliado de modo a abranger outros tópicos importantes para a Matemática do Ensino Superior. Entre eles, temos as funções logarítmicas e as exponenciais, ambas não comtempladas em nosso estudo. A próxima seção apresenta análise de produções de estudantes de Cálculo acerca dos Limites.

5.3 O Estudo de Limites: rupturas relativas às aprendizagens da educação básica

Neste item, serão apresentadas alguns dos registros escritos de estudantes em duas atividades de Limites. Em ambas, verificavam-se as habilidades operatórias dos estudantes em cálculos Limites de funções.

5.3.1 Análise de Procedimentos na determinação de Limites de funções racionais

O Cálculo de Limites é um dos conteúdos da primeira prova de Cálculo. Assim, a atividade apresentada foi proposta no Grupo de Estudos antes dessa prova. Foi recomendado aos participantes que fizessem as resoluções em duplas. Por isso, nesta seção a identificação dos registros será feita usando as denominações D_i em que i indica as duplas 1, 2, 3, e 4, respectivamente. Retornando aos nossos objetivos, buscaremos identificar, nos procedimentos dos protocolos apresentados, as dificuldades relacionadas à falta de domínio de temas matemáticos relativos ao Ensino Básico.

A primeira atividade a ser analisada é a seguinte:

Questão de Limites de Funções Racionais

Calcule o limite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

A função para a qual se quer calcular o Limite é uma função racional, isto é, uma função que é quociente entre duas funções polinomiais. Esse exemplo é típico do surgimento de uma indeterminação do tipo 0/0 ao se tentar substituir o x por 2 na expressão que se deseja calcular o Limite. Portanto, para o cálculo do Limite, a solução deve eliminar tal indeterminação.

Solução 1

Fatora-se o numerador em dois passos para ser possível a eliminação, por cancelamento, do termo comum *(x-2)* no numerador e no denominador, retirando-se a indeterminação e passando, por fim, ao cálculo do Limite como mostrado na resolução a seguir:

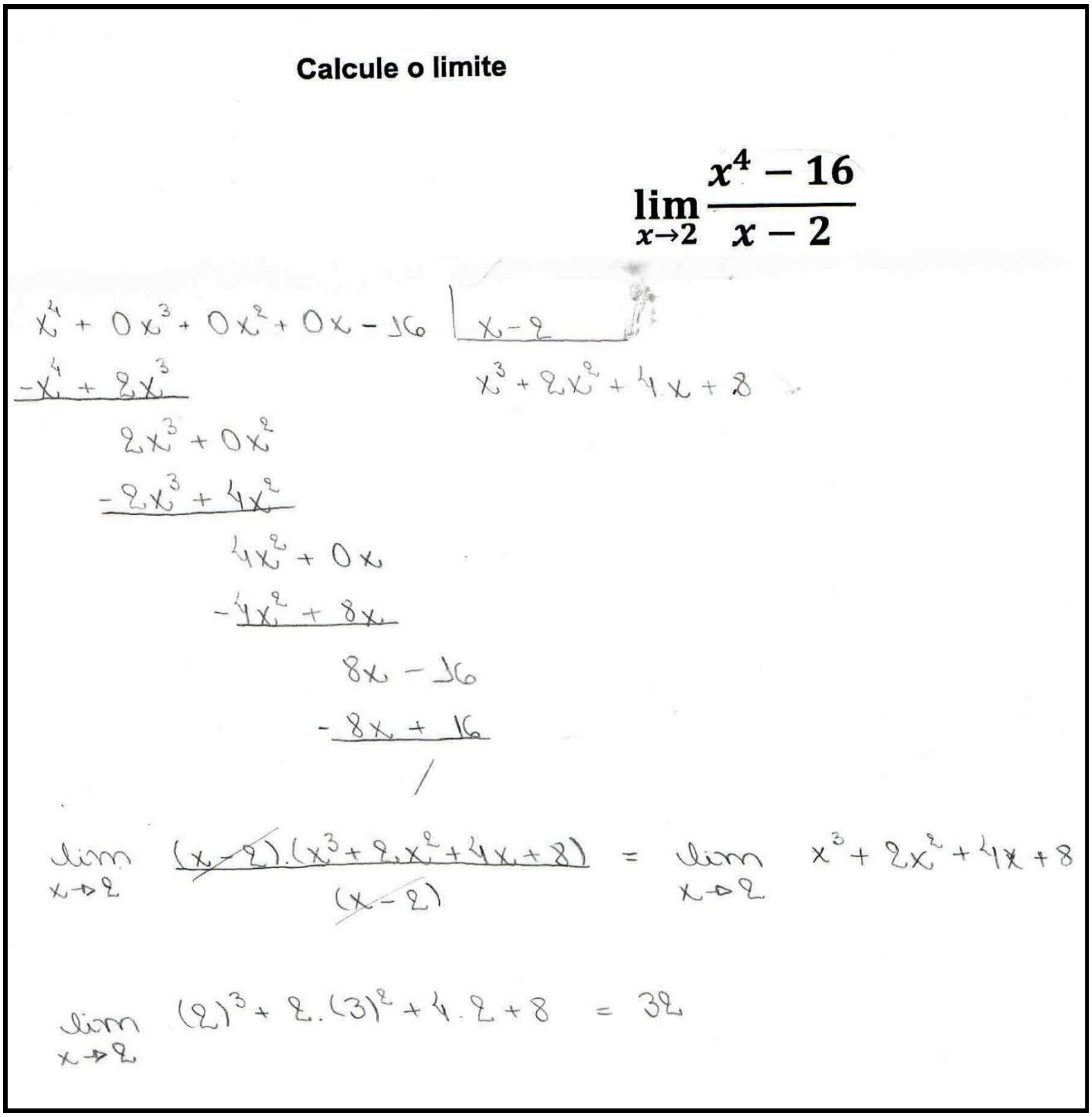
$$\boldsymbol{\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2} =}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 2}(x+2)(x^2+4) = (2+2)(2^2+4) = 32}.$$

Solução 2

Faz-se uma divisão de polinômios. A divisão entre os polinômios $(\boldsymbol{x^4-16})$ e $(\boldsymbol{x-2})$ é exata e tem como quociente o polinômio $(\boldsymbol{x^3+2x^2+4x+8})$. Uma resolução desse tipo é exemplificada na Figura 36 seguinte pela dupla D_1.

Figura 37 – Resolução da dupla D_1



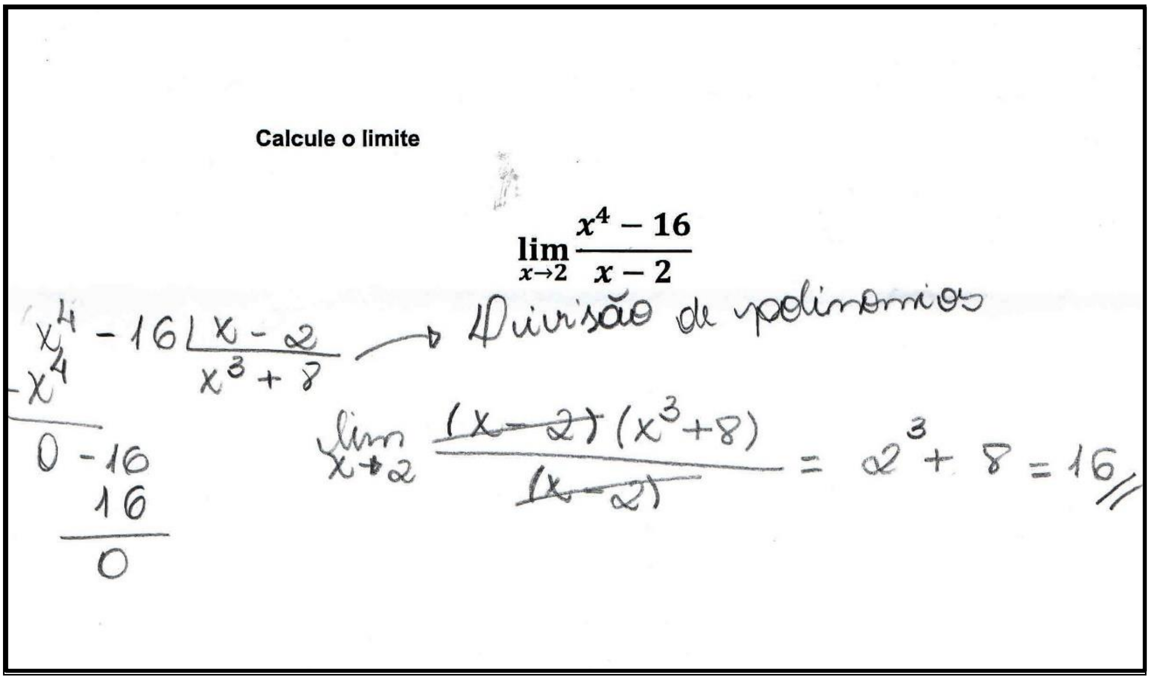
Fonte: relatório da pesquisa.

Em sua resolução, essa questão requer certa familiaridade com a fatoração ou com a divisão de polinômios, além de habilidades algébricas envolvendo as operações de adição, multiplicação e potenciação de números inteiros. Na primeira solução apresentada, são feitas fatorações com emprego de duas expressões de produtos notáveis que é objeto de conhecimento do 8º do Ensino Fundamental.

A resolução da Figura 37 usa uma divisão de polinômios. Como as operações com polinômios são tratadas somente no Ensino Médio (DISTRITO FEDERAL, 2013), a educação básica valoriza os procedimentos com uso das fatorações, como na Solução 1 apresentada.

Exemplificamos, a seguir, protocolos em que dificuldades nessas operações conduziram a insucessos nas resoluções.

Figura 38 – Resolução da dupla D_2

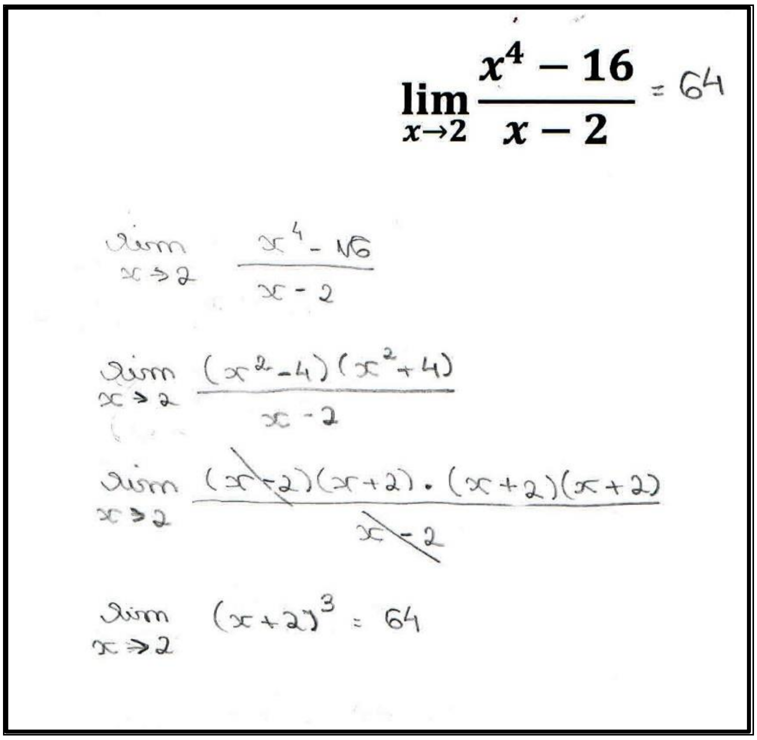


Fonte: relatório da pesquisa.

No protocolo desta Figura 38, o procedimento de divisão polinomial $(\boldsymbol{x^4-16})$ por $(\boldsymbol{x-2})$, é efetuado fazendo-se $\boldsymbol{x^4}$ dividido por $\boldsymbol{x}$, menos dividido por menos e finalmente, 16 dividido por dois, gerando o quociente $(\boldsymbol{x^3+8})$. O mesmo processo de cálculo efetuado pela dupla $\boldsymbol{D_2}$ ocorreu em outro protocolo. Nele, a divisão de polinômios é considerada como uma divisão em que cada elemento constituinte do dividendo é dividido pelo elemento correspondente do polinômio divisor. Seguindo esse mecanismo de operação, se fosse mantido o polinômio divisor $(\boldsymbol{x-2})$, mas trocando o polinômio do dividendo por outro composto por três ou mais termos, como seria feita a divisão? E se a divisão entre os termos correspondentes não resultasse numa divisão exata?

Tall e Schwarzenberger (1978), em referência ao trabalho sobre o processo cognitivo da formação de conceitos matemáticos em estudantes, chamam de conflitantes essas situações em que o esquema criado pelo estudante não se mostra mais adequado. Provavelmente, esses estudantes têm dificuldades no uso do algoritmo da divisão de números reais, não compreenderam, ou não lhes foram apresentadas as operações com polinômios no Ensino Médio e, portanto, criam seus teoremas em ato, ou seja, uma proposição tida como certa para uma determinada situação (VERGNAUD, 2007). Ainda na resolução do mesmo item, apresentamos a produção escrita da dupla $\boldsymbol{D_3}$ na ilustração da Figura 39, a seguir, em que ocorrem problemas na fatoração.

Figura 39 – Resolução da dupla D_3



Fonte: relatório da pesquisa.

A fatoração de $(\boldsymbol{x^4 - 16})$ nesse registro é feita corretamente como produto de $(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{4})(\boldsymbol{x^2 + 4})$. Porém, na terceira linha, o binômio $(\boldsymbol{x^2 + 4})$ é fatorado como $\big(\boldsymbol{x + 2}\big)\big(\boldsymbol{x + 2}\big)$ levando o resultado, após o cancelamento, a $(\boldsymbol{x + 2})^{\boldsymbol{3}}$ que, no Limite para x tendendo a 2, resulta em 64. Essa última operação, porém, pode ter sido apenas um deslize ou falta de atenção, isto é, um *glissement cognitif.* [4]

Curiosamente, a fatoração do produto notável *$(a^2$-$b^2)$ = (a-b)(a+b)* é efetuada por duas vezes corretamente, porém o caso *$(a^2$+$b^2)$*, que não é um produto notável, é substituído por *(a+b)(a+b).* Levando em conta que isso pode ter sido um equívoco por distração, podemos também inferir que, uma possibilidade para esse último resultado seria a troca em *$(a^2$-$b^2)$ = (a-b)(a+b)* do sinal menos (-) pelo sinal de mais (+).

As fórmulas de produtos notáveis já trazem em seu nome sua importância na simplificação de cálculos. Entretanto, por que decorá-las? Em caso de insegurança com as

[4] Expressão criada pelo Professor Cristiano Alberto Muniz para designar esse tipo de erro.

fórmulas, por que não fazer o desenvolvimento da multiplicação de binômios para verificação ou usar a divisão de polinômios?

Da mesma forma que observamos no parágrafo anterior, esse tipo de procedimento sugere que os estudantes estão habituados à repetição de fórmulas e processos e não são levados a avaliarem criticamente suas produções (POLYA, 1995). Em outra atividade, no mesmo contexto de revisão de conteúdos para a primeira prova, foi proposto, novamente em duplas, que se resolvesse a seguinte questão que envolve cálculos de Limites laterais.

5.3.2 Análise de procedimentos na determinação de Limites de uma função dada por duas expressões

Questão de Limites Laterais

Seja f: $\Re \rightarrow \Re$ dada por :

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 + 1, & se\ x < 1 \\ x + 1, & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

onde *a* é um número real.

a) Calcule os limites laterais no ponto x = 1.
b) Para que valores de *a* o $\lim_{x \to 1} f(x)$existe? Justifique.
c) Para os valores de *a* encontrados no item b) a função é contínua em x = 1?

Solução

a) Cálculo do Limite lateral à esquerda de x =1:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} a^2x^2 + 1 = a^2 + 1$$

Cálculo do Limite lateral à direita de x =1:

$$lim_{x \to 1^+} f(x) = lim_{x \to 1^-} x + 1 = 1 + 1 = 2\ .$$

b) O Limite $\lim_{x \to 1} f(x)$ existirá quando os Limites laterais à direita e à esquerda, calculados no item a) forem iguais. Ou seja, quando $a^2 + 1$ = 2. Logo, *a* pode assumir os valores 1 e -1.

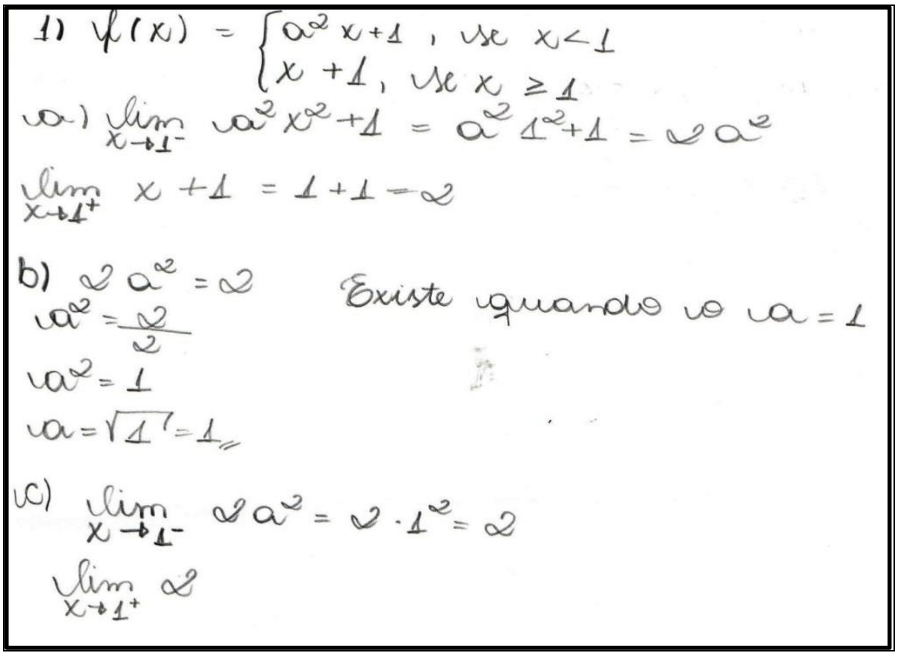
c) Sim. A função será contínua para os valores de ***a*** do item anterior, pois, nesses dois casos, teremos válida a definição de continuidade da função *f(x)* em x =1 verificada por:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 2.$$

Na resolução dessa questão, além dos mecanismos algébricos de resolução, temos envolvidos objetos de conhecimentos acerca da existência do Limite de uma função e continuidade em um ponto. Para a existência do Limite em um ponto, é estabelecido, pelo teorema de existência de Limites, que a condição necessária e suficiente para a existência de Limite em um ponto é que os Limites laterais existam e sejam iguais (ÁVILA, 2003).

Para finalizar a análise de resolução de Limites, apresentamos a seguir um protocolo com resolução dessa questão, porém atentaremos para a solução apresentada pela dupla $\boldsymbol{D_4}$ dos itens a) e b).

Figura 40 – Resolução da dupla D_4



Fonte: arquivo da pesquisa.

Para o cálculo do Limite lateral à esquerda da letra a), na solução apresentada, foi escolhida a função adequadamente, mas na finalização do cálculo *a² 1 +1* temos como resultado 2 a². Isso sugere ter sido decorrência do cálculo de *1 + 1* primeiramente, o que leva a *2a²* como resposta desse Limite. Na produção dessa dupla não houve problemas no cálculo do Limite lateral à direita.

Nessa resolução, notamos dificuldades em operar com representações literais nas expressões algébricas. Os sujeitos priorizam, neste protocolo, o cálculo numérico (1+1), desconectando o número 1 coeficiente da parte literal *a²*.

Na letra b), a solução apresentada no protocolo da figura 40 sugere domínio da condição de existência do Limite, a saber, que os dois Limites laterais à direita e à esquerda sejam iguais. Entretanto, a dupla apresenta como solução da equação *a² =1*, somente a possibilidade *a = 1*. Considerando que o enunciado diz ser *a* um número real, porque -1 não aparece como solução?

Temos uma questão cujo enfoque é a verificação de saberes de Limites e Continuidade, mas que se apresenta aos estudantes com desafios quanto às dificuldades associadas aos conteúdos matemáticos de resolução de uma equação do tipo das que surgem nos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental. De fato, essas produções são coerentes com nossas análises das produções do pré-teste na seção anterior.

5.3.3 Síntese das análises

Este item apresentou protocolos de estudantes de Cálculo em exercícios de cálculos de Limites. Assim como na seção anterior, os registros estudados ressaltam a ocorrência de dificuldades em conteúdos matemáticos básicos do Ensino Fundamental relacionados à manipulação de estruturas algébricas usando símbolos. De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), a inaptidão no trabalho com expressões algébricas é um indício de problemas na constituição de um pensamento algébrico.

De um lado, percebemos que os estudantes têm domínio de objetos teóricos avançados, como a condição de existência de um Limite em um ponto (Figura 40), mas, por outro lado, não avançam na compreensão e resolução de operações algébricas básicas. Será que esses estudantes têm condições de prosseguir no estudo de fenômenos abstratos como a determinação de Limites? Ou ainda, uma vez que não obtém êxitos nas resoluções, até que ponto o aluno que apresenta dificuldades nos procedimentos resolutivos, por imaturidade ou despreparo, pode julgar-se equivocado quanto ao conceito de Limite?

O estudante ingressante no Ensino Superior, ao obter insucessos nas atividades de determinação de Limites, devido aos procedimentos resolutivos errôneos no trato algébrico, terá, por certo, desestabilizado seu processo de conceitualização, mesmo que a construção conceitual, aparentemente, esteja bem encaminhada. A formação de um conceito não ocorre isoladamente, mas vinculada a outros conceitos (MOREIRA, 2002; FRANCHI, 2015; VERGNAUD, 2007). Especificamente no caso de Limites, o processo de aprendizagem desse campo conceitual está ligado à conceitualização de diferentes tipos de funções, habilidades nas operações algébricas, representações gráficas e simbólicas, entre outros.

Nesse sentido, não podemos desconectar o processo de desenvolvimento conceitual do procedimental, pois um dá significado ao outro, um participa na estrutura formativa do outro. Na próxima seção, investigaremos registros escritos de estudantes de Cálculo na construção das aprendizagens das Derivadas.

5.4 Derivadas: novos conceitos e procedimentos

Nas seções anteriores, foram analisados protocolos de estudantes de Cálculo observando seus procedimentos mobilizados na resolução de atividades matemáticas acerca de funções, equações e operações no conjunto dos números reais e em Limites. As produções escritas dos estudantes são um dos elementos centrais da investigação desta tese, por isso, como fizemos nas seções anteriores, apresentaremos resoluções e cálculos de derivadas em que serão examinadas algumas técnicas algébricas subjacentes às escritas no estudo do novo conceito: a derivada de uma função. A pesquisa está centrada nos processos algébricos das produções, por isso não abordaremos os saberes relacionados à interpretação ou conceitualização das Derivadas.

O contexto do estudo das derivadas no Cálculo abrange as muitas regras de derivação associadas às suas aplicações em situações-problema de diferentes áreas. Dentro desse vasto campo de assuntos e atividades, fizemos a opção por contemplar os tópicos: cálculo de derivadas pela definição, as regras do quociente e da cadeia e, por fim, uma aplicação em problemas de Otimização. A escolha foi estabelecida a partir do material escrito disponível e dos objetivos propostos para a pesquisa.

Os registros, exemplificados nas seções anteriores, sinalizam dificuldades em temas que são basilares para a aprendizagem do Cálculo. Vimos que essas dificuldades podem se constituir em obstáculos à aprendizagem de Limites e impedem o seu avanço em atividades de determinação do Limite de funções. Seguindo essa linha de estudo, esperamos, nesta seção, complementar as anteriores através da apresentação de três atividades que envolvem cálculos de derivadas.

Nesta seção e nas seguintes, usaremos nomes próprios fictícios para nomear os sujeitos participantes da pesquisa.

5.4.1 Produções de estudantes sobre cálculos de Derivadas pela definição

No ensino de Derivadas, uma abordagem comum em sala de aula, e nos livros de Cálculo, é incentivar os aprendentes a determinarem derivadas usando a sua definição com Limites antes de serem apresentadas as regras de derivação. Tal prática metodológica favorece a compreensão do novo conceito, contribui para reforçar o significado geométrico da derivada, para a importância dos Limites e, sobretudo, leva o estudante à compreensão da necessidade de se desenvolverem as técnicas de derivação já que, para determinados tipos de funções, os cálculos de Limites podem ser extensos e complexos.

Os dois primeiros protocolos apresentados nas Figuras 41 e 42, a seguir, são soluções de uma atividade proposta em abril de 2016 no GE. A atividade era a primeira de uma lista de exercícios complementares envolvendo tópicos de revisão para a primeira prova. O enunciado é o seguinte:

Questão de Determinação de Derivada pela Definição

1. Considere a função y = $\sqrt{3-x}$.

a) Dê o conjunto que representa o seu domínio.

b) Usando a definição, calcule a sua derivada *y'(x)* em x = 0.

c) Faça seu gráfico.

Solução da letra a)

Para a função ficar bem definida, devemos exigir que $3-x \geq 0$. Ou seja, $x \leq 3$.

Logo, o domínio dessa função é o conjunto $\{x \in \mathfrak{R} : x \leq 3\}$.

Solução da letra b)

A partir da definição de derivadas, temos que

$y'(x) = lim_{h \to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3-(x+h)}-\sqrt{3-x}}{h}$. Fazendo $h \to 0$, temos uma indeterminação do tipo 0/0 que neste caso, é eliminada pelo processo de racionalização como indicado:

$$y'(x) = lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3-(x+h)}-\sqrt{3-x}}{h} \left(\frac{\sqrt{3-(x+h)}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3-(x+h)}+\sqrt{3-x}}\right)$$

Fazendo a multiplicação do numerador resulta:

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3-(x+h)-(3-x)}{h\left(\sqrt{3-(x+h)}+\sqrt{3-x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{3-x-h-3+x}{h\left(\sqrt{3-(x+h)}+\sqrt{3-x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h\left(\sqrt{3-(x+h)}+\sqrt{3-x}\right)} =$$

Cancelando o *"h"* comum no numerador e denominador da última expressão, elimina-se a indeterminação e passa-se ao Limite para $h \to 0$, resultando:

$$y`(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{\left(\sqrt{3-(x+h)}+\sqrt{3-x}\right)} = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

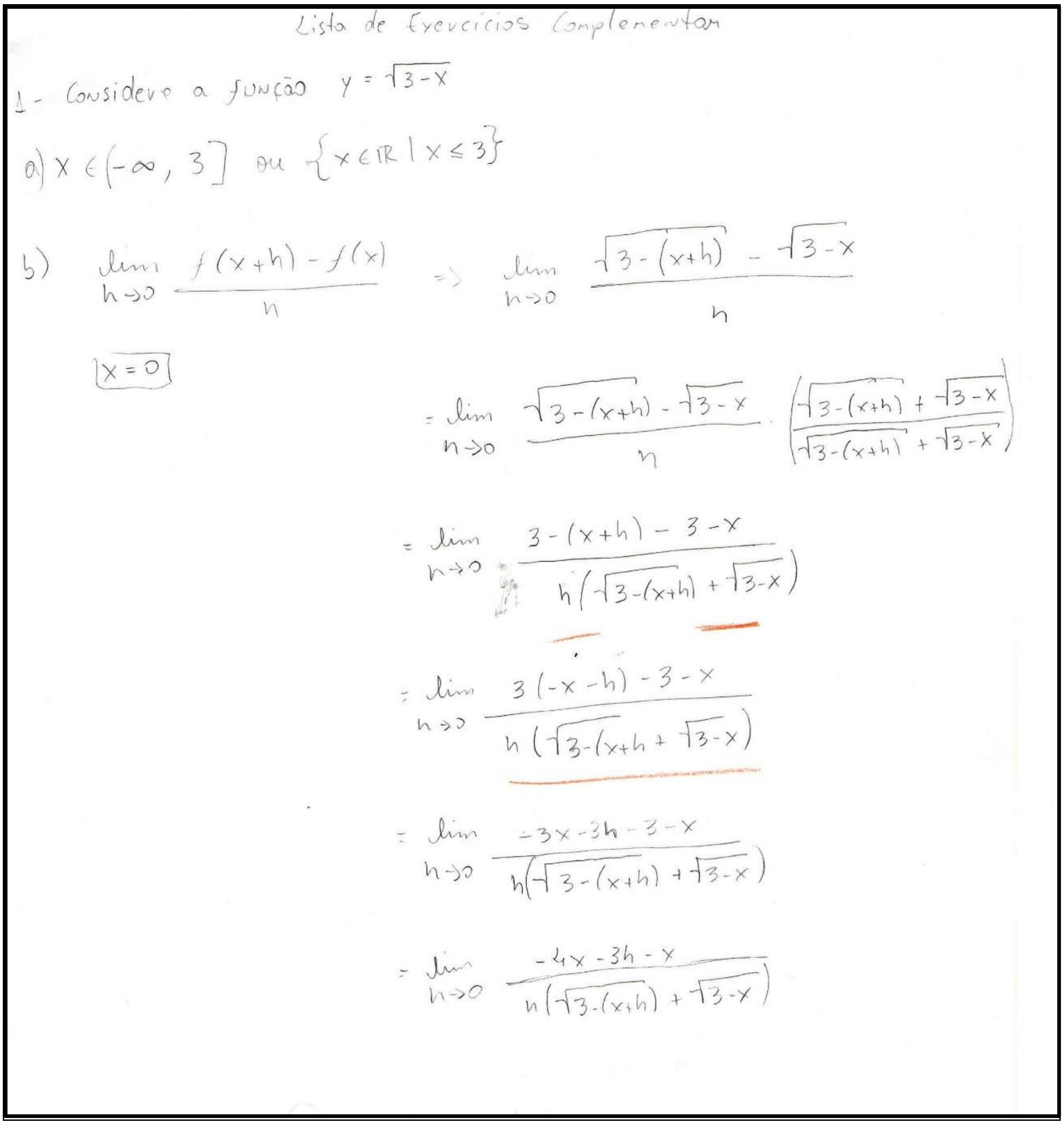
Fazendo x=0, temos o resultado esperado $y`(0) = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$..

Outra possibilidade de resolução é fazer cálculo solicitado usando a expressão y´(0) $= lim_{h \to 0} \frac{y(0+h)-y(0)}{h} = lim_{h \to 0} \frac{y(h)-y(0)}{h} = lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3-h}-\sqrt{3}}{h}$

Os passos para a resolução desse último Limite compreendem manipulações algébricas um pouco mais simples, mas semelhantes às anteriores. A função y(x) dessa atividade é composta por uma raiz quadrada. Como já pudemos verificar pelos resultados do pré-teste, esse é um dos temas componentes dos anos finais do Ensino Fundamental em que os estudantes têm dificuldades na compreensão e nos procedimentos em atividades que os envolvam. Além da raiz, a função que forma o radicando *(3-x)* é apresentada com a variável dependente *x* na segunda posição e seguida por um sinal de menos.

Tendo como interesse de nosso estudo o cálculo de derivada da letra b), apresentamos, a seguir, dois registros de estudantes relativos ao item da questão proposta.

Figura 41 – Protocolo Derivada I - Xisto



Lista de Exercícios Complementar

1- Considere a função $y = \sqrt{3-x}$

a) $x \in (-\infty, 3]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$

b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3-(x+h)} - \sqrt{3-x}}{h}$

$\boxed{x=0}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3-(x+h)} - \sqrt{3-x}}{h} \cdot \left(\frac{\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}} \right)$

$= \lim_{h \to 0} \frac{3-(x+h)-3-x}{h\left(\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}\right)}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{3(-x-h)-3-x}{h\left(\sqrt{3-(x+h} + \sqrt{3-x}\right)}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-3x-3h-3-x}{h\left(\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}\right)}$

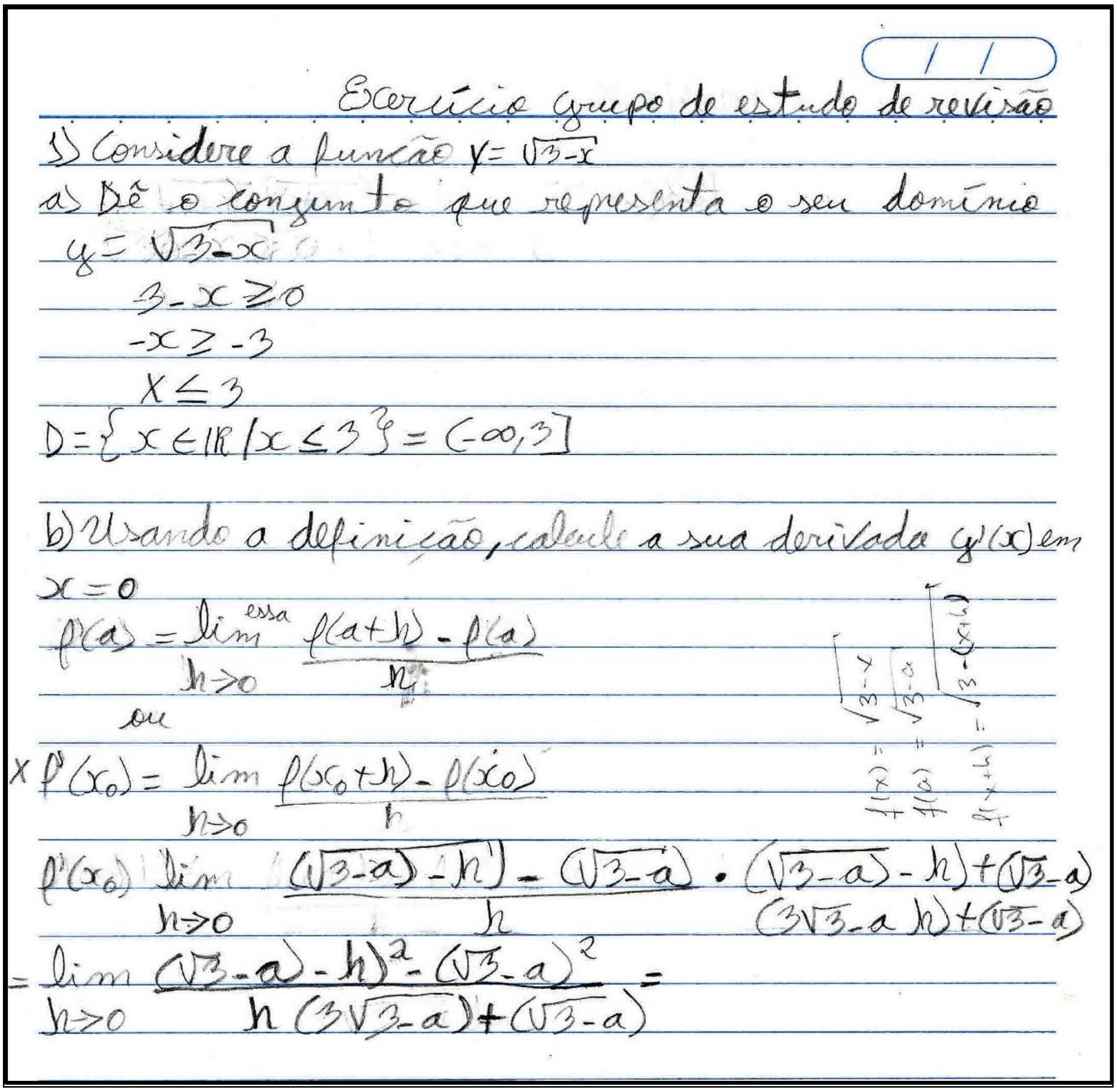
$= \lim_{h \to 0} \frac{-4x-3h-x}{h\left(\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}\right)}$

Fonte: relatório da pesquisa.

Em sua tentativa de resolução, o estudante Xisto não adapta a definição de derivada à função do exercício, *y (x),* chamando-a de *f(x).* Esse procedimento, como se pode verificar, não traz consequências graves para a resolução, mas mostra o costume de muitos de chamar qualquer função de *f (x).* Na primeira linha, é usada uma seta em lugar do sinal de igualdade, mas depois substituída pelo sinal de igualdade nos outros passos.

O quociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ é calculado adequadamente, bem como o processo de racionalização para eliminar a indeterminação do tipo 0/0. Entretanto, na terceira linha da resolução o mecanismo algébrico de cálculo de -(3-x*)* falhou e foi substituído por -3-x*,* gerando a impossibilidade de o estudante de concluir sua resolução. Observamos que, um pequeno deslize como esse, compromete todos os cálculos finais. Ilustramos a seguir mais um registro escrito acerca da mesma atividade.

Figura 42 – Protocolo Derivada II - Esmeralda



Exercício grupo de estudo de revisão

1) Considere a função $y = \sqrt{3-x}$

a) Dê o conjunto que representa o seu domínio

$y = \sqrt{3-x}$

$3 - x \geq 0$

$-x \geq -3$

$x \leq 3$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\} = (-\infty, 3]$

b) Usando a definição, calcule a sua derivada $y'(x)$ em $x = 0$

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ essa

ou

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$f'(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{3-a}) - h) - (\sqrt{3-a})}{h} \cdot \frac{(\sqrt{3-a}) - h) + (\sqrt{3}-a)}{(3\sqrt{3}-a\, h) + (\sqrt{3}-a)}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{3}-a) - h)^2 - (\sqrt{3}-a)^2}{h(3\sqrt{3}-a) + (\sqrt{3}-a)} =$

$f(x) = \sqrt{3-x}$

$f(a) = \sqrt{3-a}$

$f(x+h) = \sqrt{3-(x+h)}$

Fonte: Relatório da pesquisa.

No momento em que essa atividade foi proposta ao GE, foi esclarecido aos estudantes o significado do comando “*Usando a definição, calcule a sua derivada y'(x) em x = 0*”, isso se fez necessário porque, mesmo não sendo o primeiro contato dos participantes com o curso, muitos ainda demonstraram ter dificuldades de entendimento do enunciado. O enunciado é um texto matemático, contém jargões da área e isso implica em necessidade de interpretação e mobilização de conceitos dos estudantes. Reforçamos o que queríamos porque nosso objetivo não era usar uma técnica de derivação, pois, até aquela etapa do curso, elas ainda não haviam sido introduzidas.

As possíveis representações das fórmulas para o cálculo da derivada pela definição também foram explicadas. Isso justifica o fato da estudante Esmeralda (Figura 42) anotar duas dessas expressões, uma para $f'(a)$ e outra para $f'(x_0)$, além de registrar com a palavra "essa" a fórmula escolhida por ela para resolver a questão. Apesar de ter escolhido usar a primeira, a estudante se confunde e acaba misturando as duas fórmulas por ter escrito na terceira linha $f'(x)$ e, sem usar o conector de igualdade, escreveu a expressão para $f'(a)$.

Em seus registros, podemos ver que suas dificuldades estão relacionadas ao cálculo do valor $f(a+h)$. Por outro lado, a estudante constrói corretamente o conjugado do termo e não avança na solução. Como no registro anterior, é usado novamente $f(x)$ e não $y(x)$ para denotar a função considerada. Para concluir essa parte, verificamos que ambos responderam a letra a) adequadamente.

5.4.2 Produções de estudantes sobre cálculos de Derivadas usando uma regra de derivação

A tarefa de calcular derivadas é simplificada de modo prático, rápido e eficaz por meio do uso das regras de derivação. Num curso inicial de Cálculo, são estudadas as regras básicas de derivação. São elas: a regra de derivação de funções do tipo x^n, onde n é um número real, as regras da soma, do produto, do quociente e a Regra da Cadeia. Também estão entre essas as regras de derivação das funções trigonométricas e das funções exponencial e logarítmica. Para os estudantes do Ensino Superior que farão outras disciplinas matemáticas ou alguma disciplina de suas áreas específicas que têm o Cálculo como pré-requisito, é essencial que saibam usar as técnicas de derivação, pois elas surgirão em diferentes contextos e aplicações.

Os dois protocolos, que serão exibidos a seguir, são resoluções de cálculo da derivada da função da letra c) do exercício 5 da Lista de Exercícios da Semana 09 (Anexo E) cujo recorte contendo a atividade proposta é dada na Figura 43.

Questão de Determinação de Derivada pela Regra do Quociente

Figura 43 – Recorte da lista de exercícios da semana

5) Para cada uma das funções abaixo, determine os pontos críticos, classifique-os como máximos ou mínimos locais, quando for o caso, e determine os intervalos onde f é crescente e decrescente. (veja Exemplo 1 do Texto 1)

(a) $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$

(b) $f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{1 + x^2}$

(c) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2(x-1)}$

(d) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

(e) $f(x) = x^3 - 12x - 5$

(f) $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

(g) $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

(h) $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$

(i) $f(x) = x - \ln x$

(j) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(k) $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$

(l) $f(x) = x + \mathrm{sen}(x), \quad x \in (0, 2\pi)$

Fonte: Relatório da pesquisa.

Solução da letra c):

$$f`(x) = \frac{(x^2-x+1)`2(x-1) - (x^2-x+1)[2(x-1)]'}{[2(x-1)]^2}$$

$$f`(x) = \frac{(2x-1)2(x-1) - 2(x^2-x+1)}{[2(x-1)]^2} = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2-x+1)}{2(x-1)^2}$$

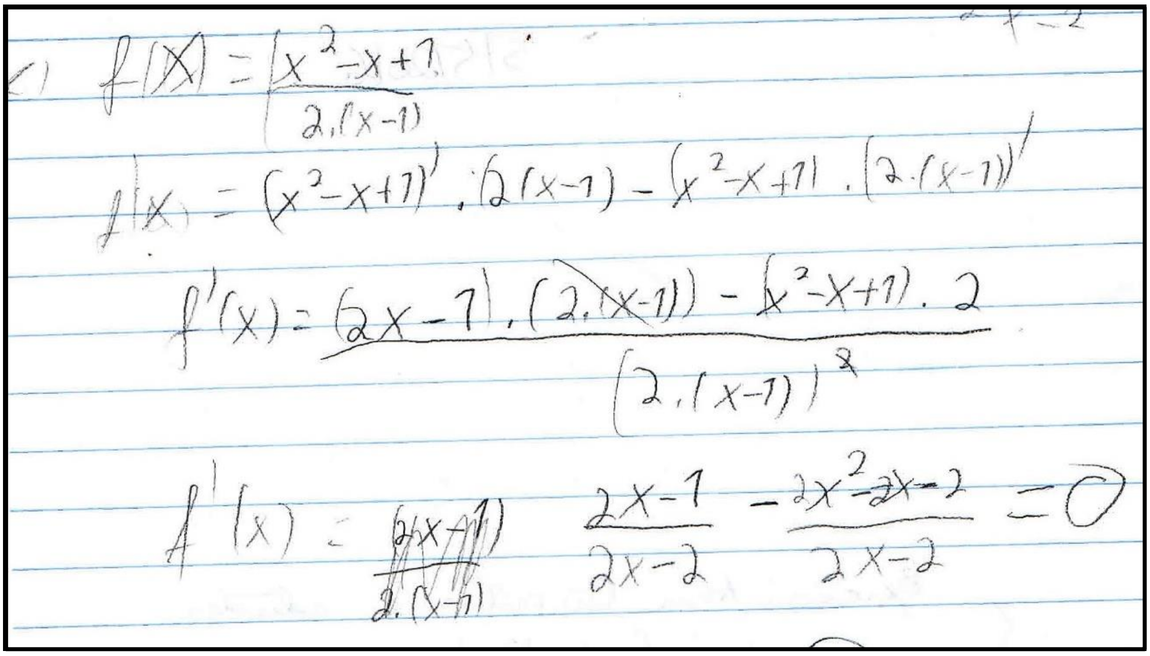
$$f`(x) = \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{[2(x-1)]^2} = \frac{x^2-2x}{[2(x-1)]^2} = \frac{x(x-2)}{[2(x-1)]^2}$$

O comando da atividade pede que se determinem os pontos críticos, e os intervalos de crescimento e decrescimento da função *f(x)*, em cada item. Para responder a todas as solicitações, o primeiro passo é o cálculo da derivada de primeira ordem *f`(x).*

Para o cálculo de *f`(x),* usa-se a regra de derivação do quociente e a derivação de uma função polinomial, uma vez que *f(x)* é uma função racional (quociente de dois polinômios). Na determinação da derivada das funções polinomiais componentes de *f(x)*, estão embutidas outras regras de derivação básicas como as regras da soma, da diferença e da multiplicação de uma função por um número. Operações algébricas como fatoração e simplificação também são necessárias na resolução deste item, após a aplicação das regras de derivação. Nessas operações, os estudantes devem mobilizar conteúdos associados aos anos finais do Ensino Fundamental.

Os dois protocolos que serão mostrados a seguir estão relacionados à solução desse item.

Figura 44 – Protocolo Derivada III - Pedro



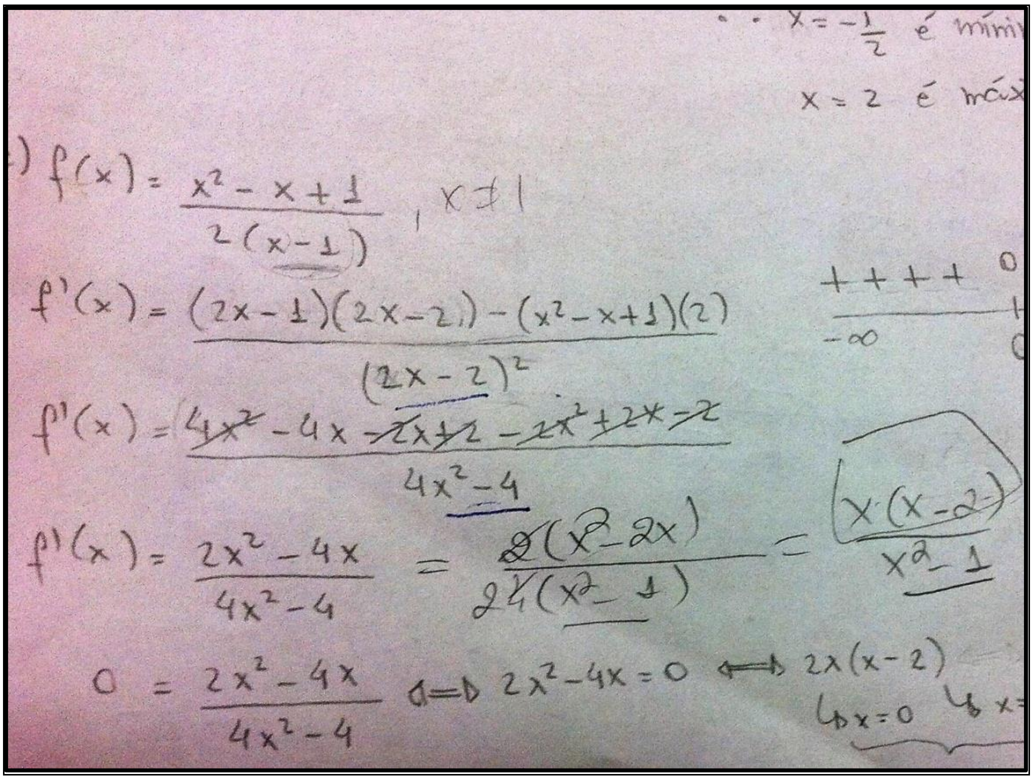
Fonte: Relatório da pesquisa.

A resolução desse protocolo mostra o emprego adequado da regra de derivação, tema específico do Cálculo. O restante da resolução é composto por processos algébricos que o estudante passa a fazer, mesmo sem a preocupação com a formalização na escrita matemática, como na segunda linha, em que é escrito somente o denominador do quociente em questão.

Ao serem questionados sobre essa prática de eliminação de partes das expressões, os estudantes respondem que estão somente praticando ("é um rascunho") e acrescentam, também, que sabem que escreveram só uma parte da expressão, como verificado na linha seguinte e garantem que na prova farão do jeito certo. As derivadas do numerador são feitas corretamente. O problema surge na simplificação da penúltima linha no momento em que, antes de separar a fração em duas, Pedro simplifica o $(x-1)$ riscado no numerador na terceira linha com o $(x-1)$ do denominador e risca o 2 do expoente no denominador. Dessa simplificação, resta no denominador o termo $2(x-1)$ escrito como $2x -2$. Porém, esse cancelamento é inadequado, uma vez que o termo (x^2-x+1) não pode ser fatorado em potências de $(x-1)$. Logo, ele não pode ser um fator comum do numerador.

Nota-se ainda que o 2 do numerador que múltipla $(x-1)$ desaparece quanto é feito o "corte" e não é observado por Pedro que o quadrado da função do numerador, $2(x-1)$, também incluía o 2. Ainda sobre a mesma questão, apresentamos o registro da Figura 45.

Figura 45 – Protocolo Derivada IV - Artur



Fonte: Relatório da pesquisa.

O estudante Artur, da mesma forma que no protocolo anterior, usou a regra de derivação corretamente, fez as simplificações devidas, porém, na segunda linha, escreveu o quadrado de (2x-2) como $4x^2$-4. Mais uma vez, aqui, os dois estudantes demonstram ter dificuldades em operações com raízes quadradas. Na figura 45 podemos supor a ocorrência de um teorema em ato, muito comum em procedimentos algébricos, em que se estabelece que o quadrado da diferença é igual à diferença dos quadrados (COXFORD et al, 1995).

5.4.3 Produções de estudantes sobre a Regra da Cadeia

Após a primeira prova, momento em que os estudantes já haviam trabalhado as principais regras de derivação, foi apresentado ao grupo a atividade de aplicação da Regra da Cadeia. A Regra da Cadeia é a regra de derivação para funções compostas e uma das mais importantes e utilizadas (STEWART, 2011; THOMAS, 2009). Do ponto de vista teórico, ela é uma ferramenta prática para a construção das derivadas de funções invertíveis e para a aplicação do igualmente importante método de integração da substituição ou mudança de variáveis, como também é conhecido.

A Regra da Cadeia (STEWART, 2011, p. 182)

Se g for derivável em x e f for derivável em g(x), então a função composta F= fog, definida por F(x)=f(g(x)) será derivável em x e F´ será dada pelo produto **F´(x) = f`(g(x))g`(x)**

Na notação de Leibniz, se y=f(u) e u=g(x) forem funções deriváveis, então $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

Os protocolos que analisaremos a seguir são soluções da questão:

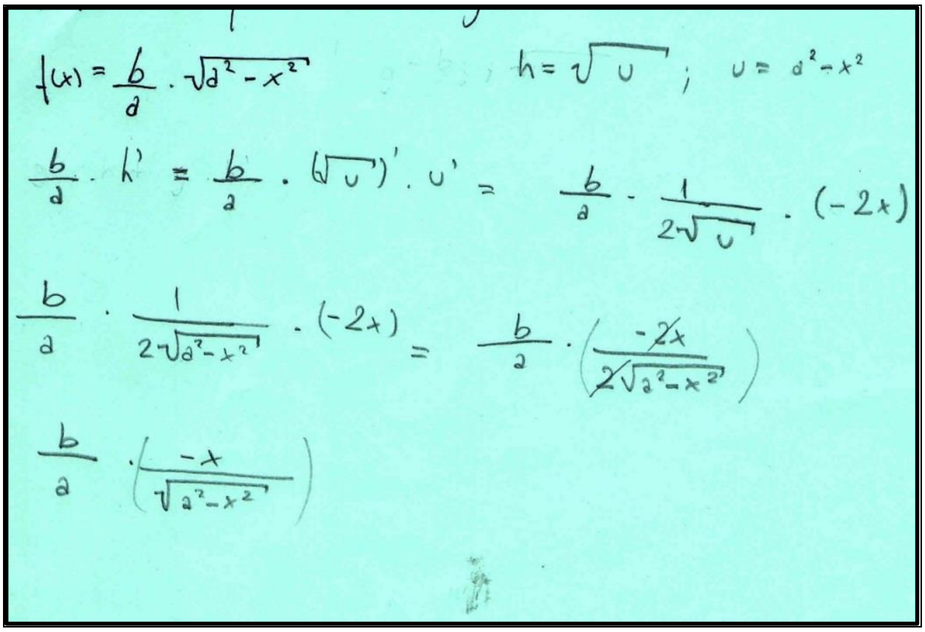
Questão de Regra da Cadeia

Seja $f(x) = \frac{b}{a}\ \sqrt{a^2 - x^2}$, sendo $,a, b$ constantes e $a, b > 0$. Usando a Regra da cadeia, calcule *f´(x).*

Uma possível solução é a ilustrada pelo registro do estudante Alan, mostrada na Figura 46. Uma alternativa à solução mostrada seria o uso direto da regra, fazendo a multiplicação da derivada da função de fora da composição $(\sqrt{u})$ aplicada na função de dentro (a^2-x^2) pela derivada da função de dentro *(-2x).*

Solução

Figura 46 – Derivada V - Alan

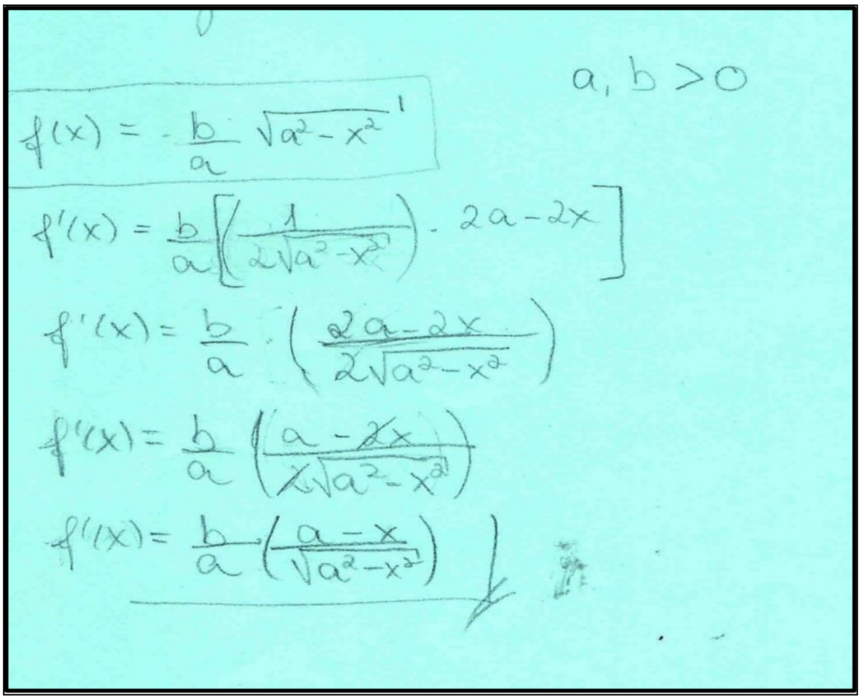


Fonte: Relatório da pesquisa.

Na resolução de Alan, as funções que formam a composição são identificadas e nomeadas como *u* e *v.* O estudante usa esse procedimento para facilitar o uso da Regra da Cadeia e a aplica devidamente, identificando em sua resolução as funções componentes e aplicando a Regra da Cadeia para derivação da função composta f(x).

Os dois protocolos seguintes ilustram dificuldades que podem surgir na resolução de uma questão desse tipo.

Figura 47 – Derivada VI - Pietro

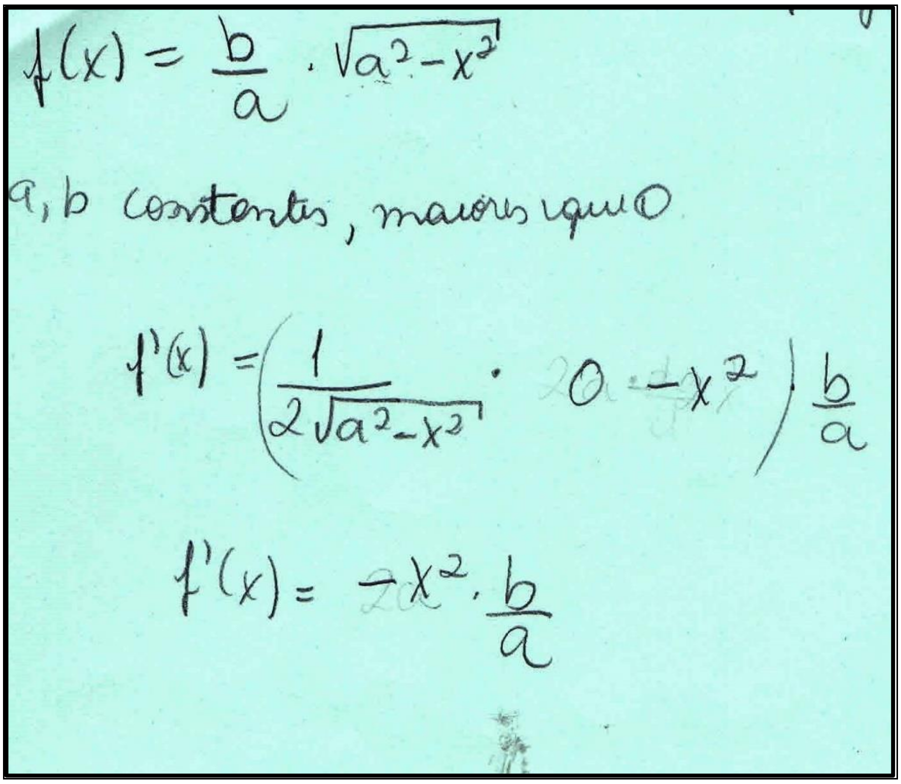


Fonte: Relatório da pesquisa.

O protocolo de Pietro apresenta uma resolução em que a derivada da função de fora é calculada, mas a derivada da função de dentro $(a^2\text{-}x^2)$ é escrita como $(2a\text{-}2x)$, mesmo sendo informado que a e b são constantes no enunciado, o a foi considerado como uma variável. Das 22 resoluções que foram selecionadas, sete delas fizeram esse mesmo procedimento de derivarem tanto a quanto x na função de dentro. Esses casos evidenciam dificuldades dos estudantes com relação à diferenciação entre variáveis e constantes literais.

Para concluir, apresentamos ainda um registro em que podemos identificar dificuldades no trato algébrico no uso da propriedade distributiva.

Figura 48 – Derivada VII - Ágata



Fonte: Relatório da pesquisa.

Nessa derivação, a estudante faz constante $(\frac{b}{a})$ vezes derivada da função $(\sqrt{a^2 - x^2})$. Como a função é composta, usa-se a regra da cadeia conforme o enunciado. Faz-se a derivada da função do radicando $(a^2\text{-}x^2)$, mas ela é posta como ($0-x^2$). Notamos aqui que a estudante registrou que a é constante, logo a derivada de a^2 é zero, entretanto, ela não deriva o x^2 e o repete.

Como no protocolo da Figura 48 anterior, a estudante aparentemente revela um problema conceitual fundamental no cômputo de derivadas e que diz respeito à identificação e distinção entre uma constante e uma variável, isso porque o processo algébrico do último passo indica que dentro dos parênteses é feita a multiplicação do zero vezes a fração $\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}$, sobrando somente o $-x^2$ da resposta vezes a constante $\frac{b}{a}$.

Esse último procedimento é muito comum entre os estudantes e podemos verificar que é consequência da falta do uso de um parêntese na penúltima linha para indicar que (0-x^2) está multiplicando o termo $\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}$.

Essa atividade de aplicação da Regra da Cadeia foi proposta aos estudantes do GE após a primeira prova. Isso porque o cálculo da derivada da função composta $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ocorreu em um dos itens dessa primeira prova, dentro do contexto de uma situação-problema. Contudo, na prova pedia-se que a sua derivada fosse calculada usando a definição de derivadas com Limites. Foi um item considerado difícil pelos estudantes e que muitos deles não conseguiram realizar completamente.

Apesar dessa proposta de atividade exigir o emprego da Regra da Cadeia, nosso objetivo, ao propô-la, foi o de chamar a atenção dos estudantes para o fato de que a função dada na prova era do mesmo tipo da questão y = $\sqrt{3-x}$ que fez parte da lista de revisão aplicada ao GE dias antes da prova e foi analisada na seção 5.4.1 deste capítulo.

Perguntados sobre o porquê de terem tido dificuldades com a função *f(x)* da prova e a maioria deles disse não ter certeza sobre o fato de $\frac{b}{a}$ ser uma constante. Ou seja, as constantes a e b em lugar de números, ou de uma variável, foi o principal elemento de desestabilização na resolução.

5.4.4 Uma atividade prática: o dilema da interpretação

Com a intenção de encorajar os estudantes ao estudo, tanto docentes quanto os autores de livros didáticos têm frisado a importância do uso das ferramentas do Cálculo na resolução de situações-problema reais nos mais variados campos do saber (LACHINI, 2001). Nossa investigação priorizou a análise de atividades de resolução em que são destacadas regras e procedimentos, desconectados de contextos aplicados. Por isso, apresentamos uma questão de cálculo de derivadas dentro de uma situação-problema geométrica.

Não foi fácil encontrar uma atividade prática de algum participante do GE para ser usada. Isso ocorreu porque o centro das atividades dos GE foram as necessidades dos estudantes de praticarem e aprimorarem suas técnicas de resoluções de exercícios a fim de se sentirem mais seguros para as provas.

A questão a seguir é um típico problema de Otimização. No contexto do Cálculo, otimizar significa achar o ponto de máximo ou ponto de mínimo de uma função que é chamada de função-objetivo. Essa função deve cumprir algumas condições que são estabelecidas pela situação-problema. Os problemas de Otimização são aplicações do uso das derivadas na determinação dos pontos ótimos, ou seja, os pontos que maximizam ou minimizam as funções-objetivo.

Na Figura 49 é apresentada a questão de otimização que consideraremos. Ela fez parte de uma prova de Cálculo e a resolução é de uma estudante que participou do GE. Para a resolução da letra a), são requeridos conhecimentos de tópicos geométricos como a equação de uma elipse, a área de um retângulo e a posição de pontos no plano cartesiano. Para construção da função área $A(x)$, é necessário operar com a equação da elipse para isolar o valor de y. A figura dada é auxiliar na montagem da função área $A(x)$.

Na letra b), calcula-se a derivada de primeira ordem da função $A(x)$, usando a Regra da Cadeia para obtenção dos pontos críticos. Este é um item independente dos outros, já que a expressão de $A(x)$ é disponibilizada no enunciado da letra a). Na letra c), tem-se um exercício de determinação de valores para a função $A(x)$ e esse cálculo depende da solução encontrada no item anterior.

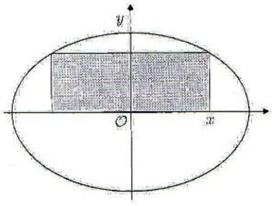
Figura 49 – Derivada VIII

2) Para cada $x \in [0,3]$, denote por $A(x)$ a área do retângulo que tem base no eixo Ox e seus dois vértices superiores na elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, conforme ilustra a figura abaixo.

(a) [1,0 ponto] Mostre que $A(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{9-x^2}$.

(b) [1,0 ponto] Determine os pontos críticos de A no intervalo $(0,3)$.

(c) [1,0 ponto] Determine o valor de x que maximiza a área, justificando sua resposta.



(a) [1,0] **Solução**: Do desenho, segue que Área $= 2xy$, com $x \in (0,3)$ e $y > 0$ dado por $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, ou seja,

$$\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9} = \frac{9-x^2}{9} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{4}{9}(9-x^2) \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{\frac{4}{9}(9-x^2)} = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}.$$

Portanto, $A(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{9-x^2}$.

(b) [1,0] **Solução**: A função $A(x)$ é derivável para $x \in (0,3)$. Desse modo, só há ponto crítico se $A'(x) = 0$ para algum $x \in (0,3)$. Por sua vez,

$$A'(x) = \left(\frac{4}{3}x\sqrt{9-x^2}\right)' = \frac{4}{3}\left(\sqrt{9-x^2} + \frac{x}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)\right) = \frac{4}{3\sqrt{9-x^2}}\left(9-2x^2\right),$$

de modo que

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Como $x \in (0,3)$, o único ponto crítico é $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

(c) [1,0] **Solução**: O ponto que maximiza a área é dado pelo ponto de máximo global da função $A(x)$. Como $A(x)$ é definida e contínua no intervalo fechado $[0,3]$, podemos encontrar tal ponto comparando o valor da função nos extremos do intervalo, ou seja, $x = 0$ e $x = 3$, com o valor da função no ponto crítico encontrado acima. Temos

$$A(0) = \frac{4}{3}0\sqrt{9-0^2} = 0$$

$$A(\frac{3}{\sqrt{2}}) = \frac{4}{3}\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{9-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 6$$

$$A(3) = \frac{4}{3}3\sqrt{9-3^2} = 0.$$

Desse modo, o ponto de máximo da função $A(x)$ é $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Logo, a área é maxima para $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

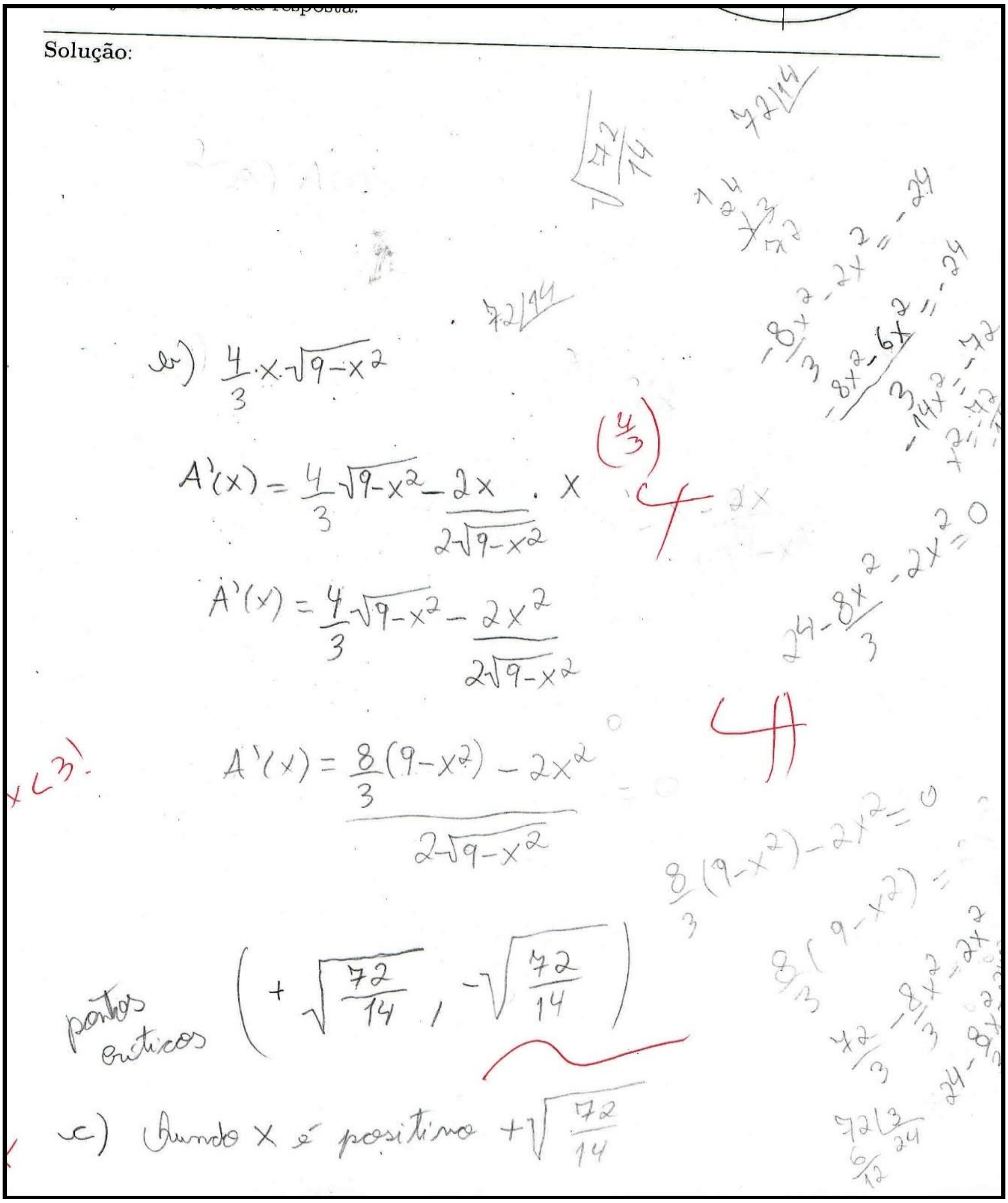
3

Fonte: relatório da pesquisa.

Questão de Otimização com Solução esperada

A resolução ilustrada na Figura 50 foi realizada por uma estudante participante do GE no semestre anterior à realização da prova. Ela reprovou naquele semestre e quando a prova aconteceu, a estudante, que será chamada de Safira, fazia o curso pela terceira vez. Logo essa produção é a única neste trabalho que foi coletada após a realização da pesquisa de campo.

Figura 50 – Derivada IX - Safira



Fonte: relatório da pesquisa.

O registro da solução de Safira mostra-nos que a estudante não executa a letra a). Do ponto de vista de conteúdos, se comparado com a letra b), o item a) é mais simples por envolver o cálculo da área de um retângulo, ou seja, um tema do Ensino Básico. Contudo, Safira tem a técnica para resolver a letra b), mas sugere ter problemas de interpretação ou dificuldades com os conceitos exigidos.

Por ter encontrado pequenas dificuldades nos procedimentos algébricos da letra b), Safira não encontrou os pontos adequados para responder a letra c), não podendo concluí-la corretamente, mas escreveu uma possível solução, indicando que o valor escolhido satisfaz a restrição do problema que estabelece que x deve pertencer ao intervalo [0,3].

Após a primeira prova, em um questionário de Avaliação Inicial (Apêndice B), no item 2 foram explicitadas algumas dificuldades experimentadas nos estudos. Os estudantes deveriam marcar aquelas correspondentes às suas respostas. A última opção era um espaço em que podiam escrever outras dificuldades. Dos 27 respondentes, 12 expressaram, de diferentes modos, ter dificuldades na interpretação, especialmente nos exercícios de aplicação. Destacamos aqui duas dessas respostas:

Estudante Jade: *Interpretação da linguagem matemática, bem como não entender muito bem os enunciados, símbolos e por isso, não saber desenvolver as questões.*

Estudante Cristal: *Dificuldade em entender o enunciado das questões (principalmente nas listas de aplicação).*

Neste questionário, somente três explicitaram ter dificuldades em manipulações algébricas.

5.4.5 Síntese das análises

Os registros apresentados confirmam que ocorrências de erros procedimentais são frequentes em resoluções que exigem um certo número de habilidades algébricas e que são típicas situações de determinação de Limites e de Derivadas. Compete aos educadores levarem seus educandos a perceberem suas dificuldades durante o processo de aprendizagem e produção de conhecimento e, com eles, corrigi-los de tal forma que os percebam e para que sejam mais cuidadosos nos seus próximos cálculos algébricos, pois o resultado final satisfatório de uma questão depende deles, principalmente numa avaliação escrita.

Todos os protocolos desta seção têm em comum o fato de os alunos mostrarem familiaridade com técnicas elaboradas como a racionalização, com as regras de derivação, esse último um conteúdo específico do Ensino Superior. Porém, falham em mecanismos operatórios mais simples, relacionados aos saberes do Ensino Fundamental, tais como o uso da distributividade, o cálculo de um quadrado perfeito ou ainda na determinação do valor de uma função, como, por exemplo, no cálculo de $f(x+h)$.

Em particular, os protocolos das Figuras 42, 48 e 50 revelam dificuldades conceituais. No primeiro deles, a estudante Esmeralda sugere ter problemas no cálculo de $f(a+h)$. No terceiro, o da estudante Safira, a não resolução da letra a) que envolve conceitos de área e geometria analítica e sugere fragilidade com relação a esses pontos do Ensino Básico, mesmo ela sendo capaz de aplicar a Regra da Cadeia.

A derivada é o Limite de uma taxa de variação, ou seja, envolve relação entre funções. A resposta desse Limite pode ser um número, porém, também pode ser uma função, a função derivada. Problemas na distinção entre essas duas concepções de derivada pode ser um dos motivos pelos quais nos protocolos das figuras 41 e 42 os estudantes não substituíram a variável x pelo 0 no cálculo de $y'(0)$.

Sobre as dificuldades de cálculo de derivadas com Limite em casos de funções formadas por elementos literais que representam constantes, podemos supor que o problema seja uma consequência da não compreensão do conceito de função. Pelos exemplos mostrados, verificamos que, quando há ocorrência de funções desse tipo, os estudantes não fazem distinção entre constantes e variáveis.

As respostas do questionário sobre as dificuldades dos estudantes revelaram dificuldades na interpretação e modelagem de situações-problema. Essa preocupação estava associada à primeira avaliação que havia ocorrido pouco antes e porque esse tipo de questão faz parte, e tem peso significativo, nas avaliações. Dificuldades de interpretação têm sido apontadas por pesquisadores como consequências da preferência de muitos estudantes pelo emprego de mecanismos procedimentais em lugar de uma compreensão conceitual (TALL, 1993).

Essa última dificuldade, que se revela já no ensino básico (COXFORD et al, 1995), é estendida ao Ensino Superior. Sendo assim, de que forma dificuldades de interpretação e modelagem poderiam ser trabalhadas no Ensino Superior? As metodologias de ensino de Matemática em todos os níveis educacionais deveriam privilegiar momentos de prática de resoluções de situações-problema como estratégia facilitadora da compreensão e assimilação de novos conceitos complexos, como os Limites e as derivadas.

Para concluir, assim como nas seções anteriores, evidenciamos, aqui nesta seção, que as dificuldades dos estudantes nos processos algébricos que integram as resoluções de Limites e Derivadas são causadoras de insucesso nas resoluções. Para complementar nossa afirmação, traremos, na próxima seção, o estudo e a discussão de registros de estudantes em resoluções de Integrais, ocorridas nos encontros do Grupo de Estudos de Cálculo.

5.5 Integral: cálculo de áreas e processos algébricos associados aos métodos de integração

Esta seção encerra nossas análises com as produções escritas de estudantes acerca da determinação de áreas usando Integrais e de alguns métodos de integração.

5.5.1 Produções de estudantes em cálculos de áreas

Inicialmente, analisaremos uma situação-problema que diz respeito ao cálculo de áreas.

Enunciado da questão de cálculo de áreas:

Responda às questões a seguir:

1) **Calcule a integral definida** $\int_{-1}^{2}|x|dx$.
2) **O que significa, em termos de área, o resultado obtido anteriormente?**
3) **Desenhe a região do plano cuja área é dada pela integral em 1) e calcule a área <u>sem o uso da integral</u>.**

Solução:

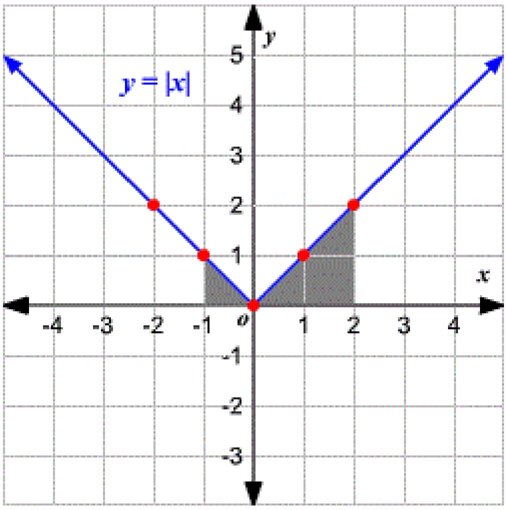
1) $\int_{-1}^{2}|x|dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx = \left.\frac{-x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left.\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} =$

$0 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2^2}{2} - 0 = \frac{5}{2}$

2) O número $\frac{5}{2}$ representa a área da região plano limitada pelo eixo dos x, pelo gráfico da função y = |x| para x pertencente ao intervalo [-1,2].

3) A região destacada no gráfico abaixo é a região descrita no item anterior.

Figura 51 – Atividade cálculo de área



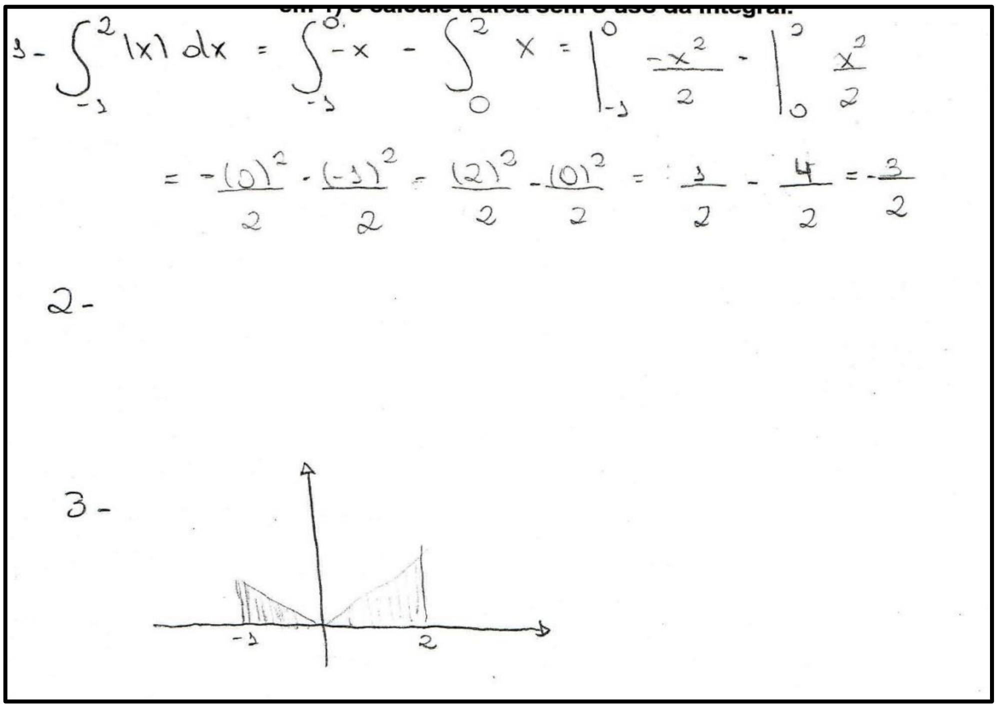
Fonte: https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/topics/absolute-value-functions (com adaptações)

Chamemos de A área da região destacada na Figura 51 acima. A área A é igual à área de dois triângulos. O primeiro deles tem lados de comprimento 1 e 1 e situa-se no 2º quadrante. O segundo tem lados de comprimento 2 e 2 e situa-se no primeiro quadrante.

Assim, A = $\frac{1.1}{2} + \frac{2.2}{2} = \frac{5}{2}$.

Apresentaremos a seguir três soluções para a atividade considerada.

Figura 52 – Integral I - Pierre



$1 - \int_{-1}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} -x - \int_{0}^{2} x = \Big|_{-1}^{0} \frac{-x^2}{2} - \Big|_{0}^{2} \frac{x^2}{2}$

$= -\frac{(0)^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}$

2 -

3 -

Fonte: relatório da pesquisa

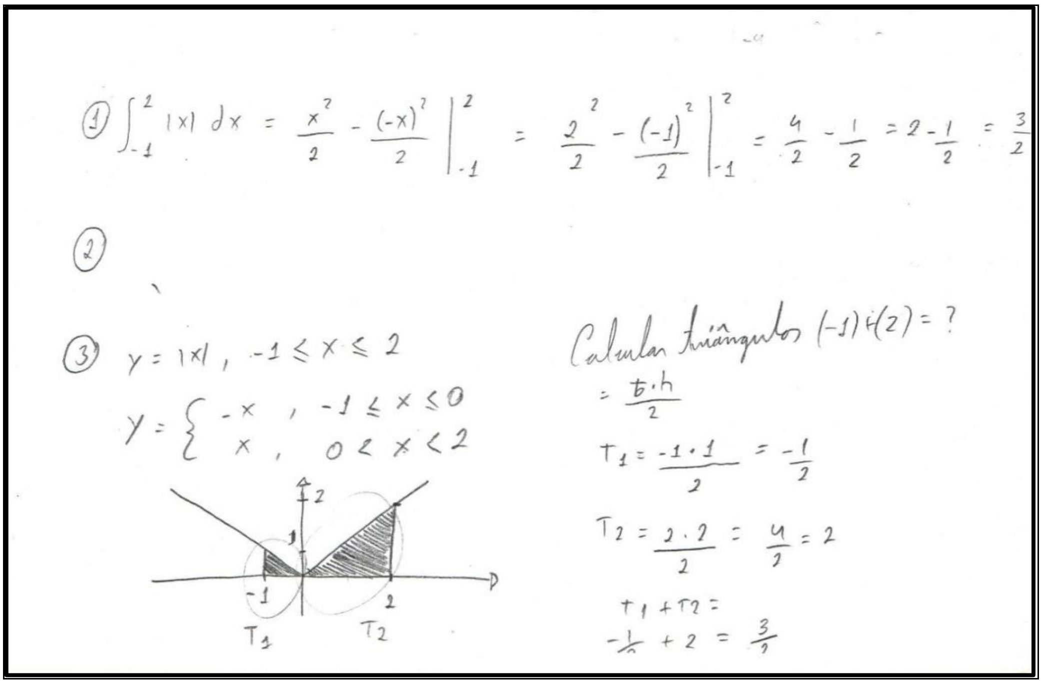
Na solução da alternativa 1, Pierre desenvolve a integral da função módulo como duas integrais, porém não se atem à notação e ao invés de somar, subtrai as duas integrais. Seu registro indica que o estudante tem conhecimento associado às novas aprendizagens do Cálculo, como o uso da regra de integração de uma função polinomial. Ele não usa o símbolo dx em nenhuma das integrais que escreve e coloca a barra com os limites de integração na frente das primitivas, ao contrário da escrita usual que os posiciona após as primitivas.

O fato de estar subtraindo as integrais, um erro advindo do não entendimento do significado da integral, ou do desmembramento da função modular, fez com que se tivesse um menos antes de $\frac{4}{2}$, na segunda linha de sua resolução. Como consequência, chega à resposta final $\frac{-3}{2}$.

Aqui, como ocorreu em outros registros das seções anteriores, temos um protocolo de resolução em que o estudante consegue aplicar os novos saberes, como a regra de derivação e o TFC, porém equivoca-se nas contas finais. Por não ter solucionado a segunda alternativa, juntamente com o fato de ter obtido uma resposta negativa na anterior, podemos supor que este estudante revela não ter compreensão do significado geométrico da integral definida, pois, do contrário, não poderia ter encontrado um valor negativo como resposta.

Apesar de ele ter indicado a região corretamente na alternativa c), Pierre não calcula as áreas dos dois triângulos da figura, ou seja, o item c) é uma atividade de um objeto curricular do Ensino Fundamental e não foi realizada pelo estudante.

Figura 53 – Integral II - Lana



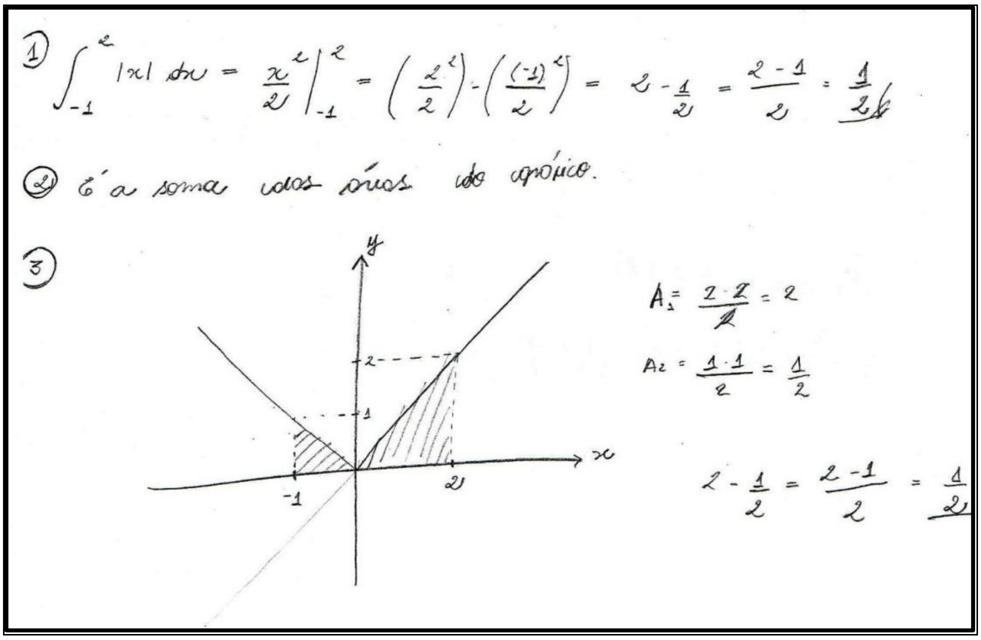
Fonte: relatório da pesquisa

A estudante Lana, na alternativa 1, escreve as primitivas da função modular no intervalo de definição dado, porém na ordem invertida e sem separar os limites de integração. Ela substitui as primitivas para os limites de integração -1 e 2, inferiores e superiores, respectivamente.

Seus registros estampam conflitos conceituais relativos à formação da função modular já que, de um lado na alternativa 3), a estudante escreve corretamente as sentenças que formam essa função nos intervalos correspondentes, além de esboçar seu gráfico, mas, por outro lado, não consegue associar essa definição ao cálculo da integral na alternativa 1 e não desmembra a integral em duas. Pelo modo que ela aplica o TFC, notamos que a estudante consegue colocá-lo em prática, mas não compreende seu significado geométrico ao deixar em branco o item b).

Na alternativa 3), Lana indica ter problemas no cálculo das áreas dos triângulos, apesar de ter desenhado a região. Em seu gráfico, ela destaca os dois triângulos denotando-os por T_1 e T_2, respectivamente. Entretanto, usa a mesma notação para designar as áreas desses triângulos. Ao calcular a área do triângulo menor (T_1), ela registra sua dúvida, por meio de um sinal de interrogação, relacionada a ter a uma medida de comprimento negativo para um dos lados. Ela encontra um valor negativo para a área e isso parece ser conveniente, porque a soma das áreas dos dois triângulos dá o mesmo valor encontrado na primeira alternativa. Esse fato é mais uma evidência de problemas na compreensão do módulo. Neste caso, ela deveria ter considerado a medida do lado como o valor absoluto de -1.

Figura 54 – Integral III - Jade



Fonte: relatório da pesquisa

Nesse protocolo, a estudante Jade considera a primitiva da função módulo de x como $\frac{x^2}{2}$ e aplica o TFC apropriadamente na solução do item 1). Logo, sua dificuldade reside na compreensão dessa função. Na alternativa dois, a estudante tentou expressar o significado da integral da alternativa anterior por meio da expressão “É a soma das áreas do gráfico”, sinalizando perceber que integrais e áreas têm alguma relação, porém não sabe precisar a região. A que gráfico ela estava se referindo? O gráfico da região foi solicitado somente no item subsequente.

Dos poucos respondentes que completaram a pergunta da alternativa 2), tivemos respostas como:

> “Significa que área entre de -1 e 2 é de $\frac{5}{2}$.”
>
> “Significa que o resultado obtido é a área dentre os intervalos determinados. ”
>
> “Significa que se pegarmos cada parte dos pequenos retângulos, e somarmos, obteremos o resultado $\frac{5}{2}$.”
>
> “Que a soma das duas áreas resulta $\frac{3}{2}$.”

Notamos, por essas justificativas e pela de Jade, uma dificuldade em expressar, por escrito, uma imagem de área construída mentalmente, a qual supomos seja a imagem da região que desenharam, pois fazem referências a elas.

Por fim, na alternativa 3), o gráfico e os cálculos de áreas foram executados de acordo, mas, ao final, há uma contradição entre a resposta $(\frac{1}{2})$ e a resposta do item anterior em que foi dito que a área seria uma “soma” de áreas. Na resolução apresentada, o valor da área foi efetuado como uma diferença de áreas $(2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2})$. Uma vez que o resultado dessa operação é incorreto, podemos supomos que ele tenha acontecido para que os valores encontrados nesse item e no item 1) fossem iguais. Na próxima seção, consideraremos para análise e discussão dois protocolos relacionados às técnicas de integração.

5.5.2 Produções de estudantes no uso de técnicas de integração

Ao avançarem nos estudos de integrais, os estudantes percebem que o cálculo de integrais pelo processo da determinação de antiderivadas é insuficiente e que, por isso, é preciso que as possibilidades de cálculo sejam ampliadas. Nesse contexto, são introduzidas as técnicas de integração para permitirem o cálculo de integrais de funções logarítmicas, de funções compostas, de funções trigonométricas inversas, de funções racionais, dentre outras.

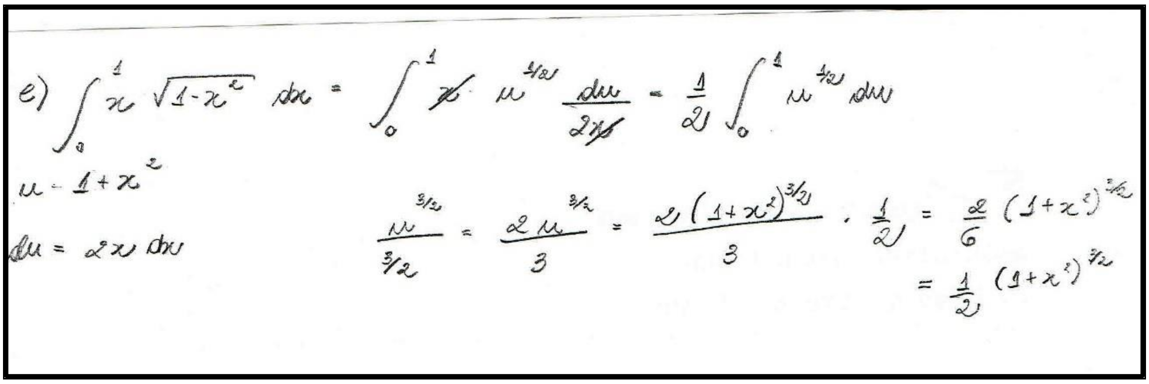
As duas produções escritas de estudantes, que serão apresentadas, são resoluções de integrais propostas aos participantes do Grupo de Estudos com o objetivo de que fosse praticado o Método de Substituição (ou Mudança de Variáveis).

Integral proposta e solução:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_1^0 \sqrt{u}\,du = \int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{2u^{3/2}}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}.$$

A solução usa a substituição $u = 1 - x^2, du = -2xdx$.

Figura 55 – Integral IV - Pietra



Fonte: relatório da pesquisa

Nesse protocolo, a substituição foi feita considerando $u = 1 + x^2$ como sendo a função de dentro da função composta que forma o integrando, ao invés de $u = 1 - x^2$. Mesmo sendo outra função, podemos observar que a estudante sabe usar a técnica de mudança de variável, porém tem problemas com os limites de integração. Em sua resolução, esses limites não são atualizados para os correspondentes a nova variável u e são considerados como sendo os mesmos limites de integração para a variável *x*. Por fim, esses limites são desconsiderados e a resolução é concluída colocando-se como resposta uma função de *x*. A estudante Pietra indica não distinguir entre integral definida e indefinida, o que faz com que os limites não sejam levados em conta na resolução e na resposta final. Temos, portanto, um problema conceitual.

O segundo protocolo de resolução é relativo a uma integral indefinida, que pode ser resolvida pelo mesmo método do anterior.

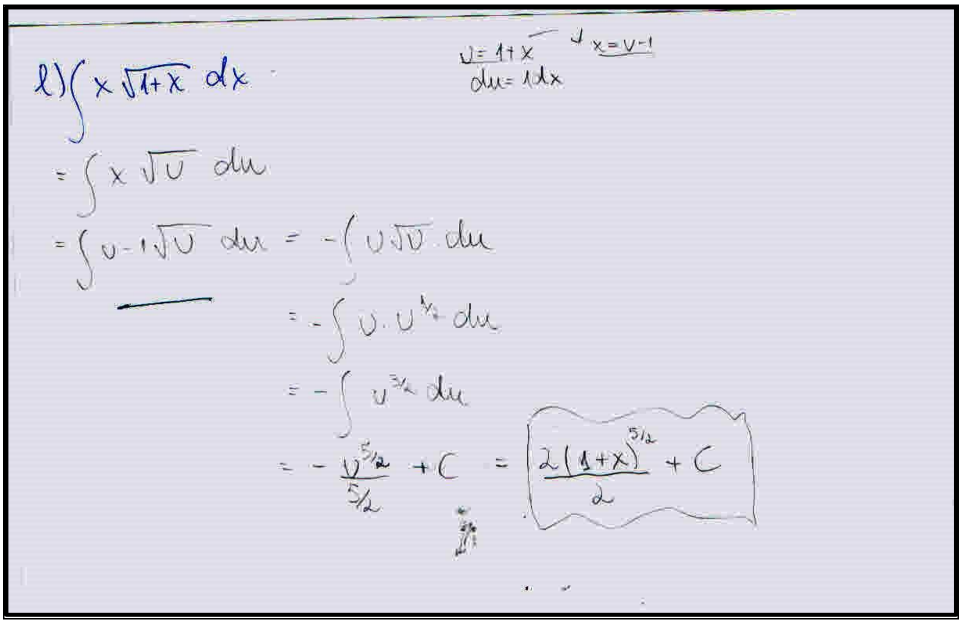
Integral proposta e solução:

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \int (u-1)\sqrt{u}\,du = \int (u\sqrt{u} - \sqrt{u})du = \int (u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u})du =$$

$\frac{2}{5}u^{5/2}$- $\frac{2u^{3/2}}{3} + k = \frac{2}{5}(1+x)^{3/2}$- $\frac{2(1+x)^{3/2}}{3} + k$, onde k representa uma constante real qualquer.

Essa solução usa a substituição $u = 1 + x, du = dx\ e\ x = u - 1$, transformando a integral inicial em duas outras de resolução direta. A mesma integral também pode ser resolvida pelo Método da Integração por Partes.

Figura 56 – Integral V - Rocha



Fonte: relatório da pesquisa

O estudante chamado de Rocha, na primeira linha de sua resolução, faz a substituição indicada no canto superior direito do protocolo da Figura 56, mas por etapas. Inicialmente, ele substitui somente a função do integrando. Como consequência, ele tem uma integral com duas variáveis x e u. Na próxima etapa, segunda linha da resolução, é concluída a substituição e a integral resultante é função de u. Por não ter realizado a propriedade distributiva no produto $(u-1)\sqrt{u}$, esse último produto é feito como se resultasse $-u\sqrt{u}$. A partir desse ponto, a resolução da integral é concluída devidamente.

Embora o estudante demonstre ter habilidade com a técnica de substituição, a dificuldade no uso da distributividade nessa operação levou-o a obter uma resposta incorreta. Mais uma vez, temos aqui evidenciada uma situação em que um processo operatório típico do Ensino Básico, gera uma desestabilização na produção do sujeito.

Para fechar essa seção e as apresentações de registros escritos de estudantes, mostramos uma resolução ocorrida em uma atividade do Grupo de Estudos em que o estudante exercitava a técnica de integração por partes, usando a lista de exercícios semanal do curso. Neste caso, exercício 1, letra i, da Lista de Exercícios da Semana 14 (Anexo I).

Exercício de cálculo de integral proposto e solução:

Use Integração por Partes para calcular a integral: $\int \boldsymbol{arcos(x)dx}$

Essa integral é apresentada como um dos exemplos típicos de aplicação do Método de Integração por partes. Em sua aplicação, para esse caso, faz-se a escolha para integrar a função constante 1 e, para derivar, a função *arcos(x).* Assim, considerando essa escolha e usando a fórmula de integração por partes, obtêm-se:

$$\int arcos(x)dx = xarcos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

A integral que aparece para ser resolvida é solucionada pelo método da substituição fazendo $u = 1 - x^2, du = -2xdx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{2}{2}\sqrt{u} + k = -\sqrt{1-x^2} + k,$$

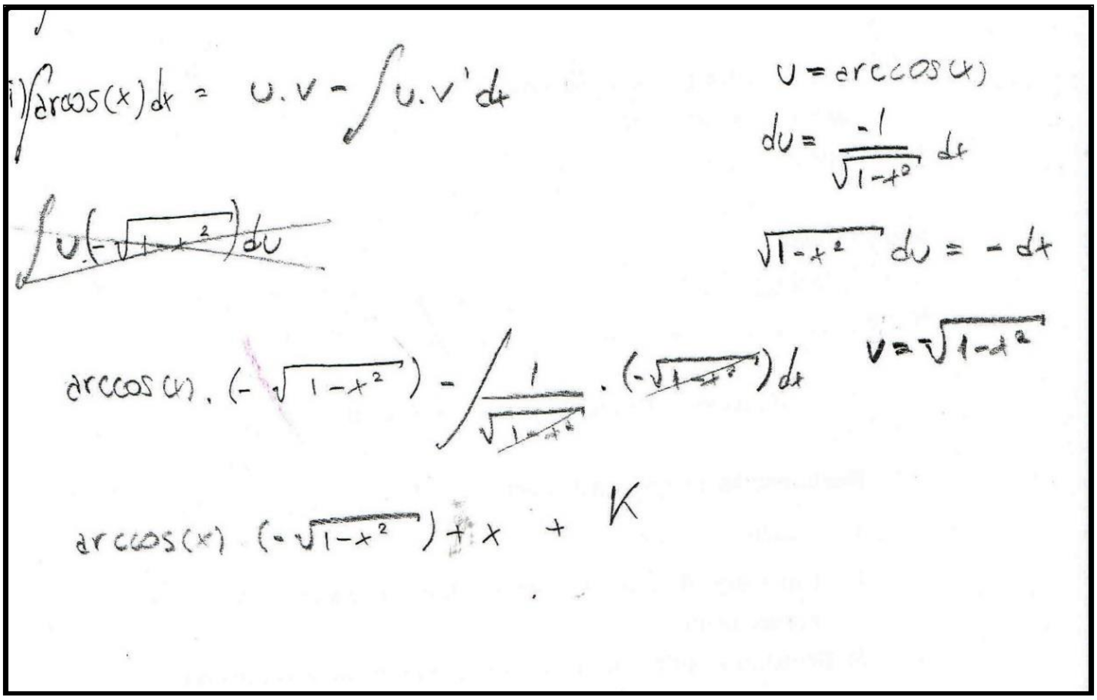
onde k representa uma constante real qualquer.

Substituindo esta última na integral anterior, temos

$$\int arcos(x)dx = xarcos(x) + -\sqrt{1-x^2} + k.$$

No protocolo da Figura 57, apresentamos uma tentativa de solução para essa integral.

Figura 57 – Integral V - Ebenezer



Fonte: relatório da pesquisa.

Em sua solução, Ebenezer tem a intenção de usar o método de integração por partes ao escrever a fórmula em frente à integral. Ao colocá-la em prática, faz a escolha certa para *u*, mas usa a função $v = \sqrt{1 - x^2}$. A partir daí, mescla o método da substituição com o de integração por partes, pois opera com os diferenciais, *du* e *dx*, pelos registros feitos no canto superior direito da resolução. Seu uso da fórmula não condiz com as escolhas feitas inicialmente, não segue a regra, e supomos que foram montadas a fim de se poder cair em uma integral que fosse possível de ser resolvida.

Apesar das inconsistências nas resoluções, não podemos afirmar que esse sujeito não tenha as técnicas ou que não as tenha aprendido. Pelo contrário, na resolução, ele aponta para vários saberes, mas que estão desestabilizados, em movimento. Essa situação é parte do processo de construção da aprendizagem (VERGNAUD, 2007).

As técnicas de integração são ferramentas efetivas de resolução, porém precisam ser devidamente colocadas em prática. Esse exemplo ilustra o fato de que não é suficiente saber uma fórmula de integração. Em primeiro lugar, deve-se saber o significado das funções e símbolos que a compõem, especialmente se ela é composta por simbologia tão particular, como o caso da fórmula de integração por partes.

5.5.3 Síntese das análises

O estudo de integrais demanda dos aprendentes domínio de elementos básicos da geometria e da álgebra em seus aspectos gráficos, interpretativos e procedimentais. Além desses, para resolver integrais deve-se ter domínio de derivadas, pois a integração pode ser considerada como o processo inverso da derivação.

Por ser um campo conceitual tão vasto e complexo, é compreensível que sejam encontrados um número expressivo de estudantes que manifestem dificuldades na compreensão e aplicação de seus conceitos (BARROSO et al, 2013; THOMPSON; SILVERMAN, 2008).

Os protocolos mostrados nesta seção ilustraram problemas conceituais e algébricos relacionados ao cálculo de integrais dentro de um contexto aplicativo ou fora dele. Em particular, os problemas conceituais estavam associados aos campos da função modular, determinação de área e de uso do TFC, na primeira atividade. Esses tópicos criaram dificuldades para a determinação das integrais. Foram também encontradas produções com dificuldades em operações com aparecimento da propriedade distributiva.

Pesquisas, como a de Tall e Schwarzenberger (1978) ressaltam a necessidade da construção intuitiva de novos conceitos, antes de sua definição e introdução na aprendizagem.

Essa deveria ser a prática nas salas de aula de Cálculo como um mecanismo não só de motivar, por exemplo, o ensino de Integrais, mas também de auxiliar na justificativa da notação de Leibniz nesse contexto.

Apesar dessa prática, e como foi aqui verificado, muitos estudantes apresentam dificuldades em cálculos de áreas, apresentando valores negativos para a área de uma região plana. Se eles têm problemas em cálculos de áreas de figuras planas, como poderão avançar nos cálculos de áreas de figuras limitadas por curvas?

A área de uma região é representada no contexto do Cálculo por integral do tipo $\int_a^x f(t)dt.$ O símbolo dt tem um papel importante nessa notação ao indicar a variável de integração da função considerada. Entretanto, para muitos ele não contém significado e desaparece quando a integral é resolvida. Por isso, muitos não o consideram, como vimos no protocolo de Pierre. Integrais podem ser definidas ou indefinidas. Essas duas concepções ocorrem simultaneamente na aprendizagem do Cálculo. O registro de Pietra sugere que essa coexistência dos dois conceitos não é tão óbvia para os estudantes iniciantes.

Considerando os outros significados da integral, encerramos este capítulo com a certeza de que um dos grandes desafios de educadores matemáticos do Ensino Superior é o desenvolvimento e a aplicação de ações pedagógicas e metodológicas que possibilitem aos estudantes superarem as dificuldades, os conflitos e os obstáculos surgidos no processo de transição de um conceito para outro (ARTIGUE, 1991). Caminhando para a finalização desta tese, abordaremos e discutiremos, no próximo capítulo, as concepções de professores e estudantes sobre as aprendizagens do Cálculo.

6 PERCEPÇÕES DE PROFESSORES E ALUNOS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CÁLCULO

Os capítulos anteriores descreveram os percursos metodológicos, teóricos e práticos da investigação e as análises de produções escritas de estudantes, sempre considerados à luz dos objetivos iniciais. Até aqui, foram contemplados principalmente os objetivos referentes às análises de resoluções dos estudantes em atividades de Cálculo. Neste capítulo, caminhamos para a finalização do relato de pesquisa e, para isso, abordaremos o objetivo específico que versa sobre as percepções e concepções de professores e estudantes sobre as aprendizagens do Cálculo.

O período da pesquisa que envolveu os encontros nos Grupos de Estudos (GE) viabilizou momentos de interações frequentes, dialógicas e com certo grau de proximidade física e relacional entre os participantes, jovens aprendentes do Cálculo Diferencial e Integral, egressos recentes do Ensino Médio. Esse momento interativo foi consequência do tempo de duração da prática ocorrida durante todo um semestre, composta de dois encontros semanais, cada um deles de quase duas horas de duração. Além disso, fatores como a dinâmica de organização dos encontros, o tamanho do grupo, a disposição das mesas, além do número de mediadores (professora-pesquisadora, monitores e estagiários) possibilitaram a criação de um círculo diferenciado de contato e comunicação entre os envolvidos.

Esse convívio dialógico entre os sujeitos, todos em suas respectivas situações momentâneas de aprendizagem: os estudantes do Cálculo, a educadora matemática e os monitores fizeram com que, além da documentação escrita produzida para a pesquisa, fossem observadas percepções e sentimentos dos estudantes sobre suas vivências nas aulas de Cálculo, sobre suas aprendizagens, sobre suas relações com os colegas e os professores, sobre suas dificuldades pessoais e que foram constituídas ao longo de seu processo de escolarização desde os anos de educação básica até esses primeiros anos do Ensino Superior. Esses fatores, e outros não considerados aqui, interferiram em alguma medida no aprendizado naquele momento. São aspectos subjetivos relevantes, que devem ser cuidadosamente estudados, mas que não serão aqui tratados em sua profundidade teórica devido à sua complexidade e também porque não constituem objeto direto de nosso estudo. Alguns desses aspectos emocionais e subjetivos foram comunicados nos questionários iniciais e finais que os estudantes preencheram e captados no cotidiano da pesquisa pelas observações dos pesquisadores.

A partir do contexto dos GE, das vivências e dos protocolos dos estudantes, serão construídas nossas conjecturas, observações e análises críticas do fenômeno da aprendizagem no Cálculo. Sabemos, por nossa experiência e pelo respaldo da pesquisa, que o processo educativo é construído por uma relação dinâmica e intricada entre os aspectos conteudistas, os cognitivos e os valores afetivos (CARVALHO, 2009; TACCA; GONZÁLEZ REY; 2008; D'AMBROSIO, 2012).

Isso é corroborado por González Rey (2001) ao tratar as conexões entre pesquisa e subjetividade. Esse autor coloca o indivíduo e a sociedade numa relação única em que ambos aparecem como momentos da subjetividade social e individual, a saber:

> As subjetividades social e individual atuam na qualidade de constituintes e constituídas do outro e pelo outro. Isso conduz a uma representação do indivíduo na qual a condição e o momento atual de sua ação expressam, o tempo todo, sentidos subjetivos procedentes de áreas diferentes de sua experiência social, que passam a se constituir como elementos de sentidos de sua expressão atual. Assim, dessa perspectiva, o sujeito que aprende expressa subjetividade social dos diferentes espaços sociais em que vive no processo de aprender. **Nenhuma atividade humana resulta numa atividade isolada do conjunto de sentidos que caracterizam o mundo histórico e social da pessoa. (**GONZÁLEZ REY 2001, p. 9, grifo nosso)

Deste modo, por consideramos que a realização de entrevistas para conversarmos e verificarmos pontos de vista dos estudantes e de professores sobre suas vivências no Cálculo poderia valorizar nosso trabalho de pesquisa, escolhemos alguns deles para comunicarem suas impressões, juízos e entendimentos a respeito dos elementos que permeiam o processo de aprendizagem do Cálculo.

Começaremos pelas entrevistas de dois estudantes que participaram da última versão dos Grupos de Estudos. Eles compartilharam suas práticas de estudos, suas impressões gerais acerca de suas dificuldades ao ingressarem na universidade, entre outros. Nossa intenção é buscar subsídios para a fundamentação das discussões acerca das necessidades e dificuldades dos ingressantes que estudam Cálculo. Após a apresentação das entrevistas dos estudantes, apresentaremos três entrevistas realizadas com professores de Cálculo, alguns apontamentos e concluiremos com uma síntese sobre as percepções, buscando o estabelecimento de conexões entre as duas falas.

6.1 Entrevistas com dois estudantes

Os critérios iniciais de escolha dos estudantes entrevistados são relativos à participação ativa e frequente nos Grupos de Estudos e ao fato de terem tido êxito com a aprovação naquele semestre. Dentre os muitos sujeitos aprendentes que participaram dos encontros dos GE, os dois estudantes selecionados satisfizeram esses critérios. Ambos foram integrantes assíduos, demonstraram interesse com a proposta de estudos que lhes foi oferecida, mas, sobretudo, foram aprovados no Cálculo naquele semestre. Essa foi uma grande conquista para ambos, uma vez que, nessa ocasião, o índice médio geral de aprovação em Cálculo foi de 43,15 %.

Para as entrevistas com os estudantes, foi elaborado um roteiro estruturado de perguntas sobre suas vivências anteriores e atuais no Cálculo (Apêndice E). As transcrições das duas entrevistas são apresentadas nas páginas seguintes. Nelas, as perguntas da pesquisadora foram grafadas em negrito e as respostas em itálico. Para todos os entrevistados, professores e estudantes, foram atribuídos nomes fictícios, preservando suas identidades.

Entrevista com Germano

O sujeito entrevistado será chamado de Germano, é um estudante de 25 anos, matriculado, no momento da entrevista, no 6º semestre do curso de Engenharia Mecânica. Ele foi escolhido por ter participado de todos os encontros do Grupo de Estudos. Germano sempre demonstrou interesse em aprender os conteúdos e já chegava aos encontros com parte das duas listas semanais resolvidas, tirava muitas dúvidas sobre as resoluções e mostrava-se disposto a ajudar os colegas do grupo. A entrevista foi feita no dia 30 de maio de 2017 e foi gravada em áudio. O estudante entrevistado já tinha assinado o Termo de Consentimento (Apêndice A), mas reforçou não ter oposição quanto à divulgação da conversa e que permitiria o uso do seu nome verdadeiro. Entretanto, optamos pelo uso de um nome fictício. A conversa durou cerca de meia hora. No semestre em que participou do GE, ele estava cursando o Cálculo pela quinta vez , mas foi aprovado no curso.

Raquel: Qual o curso de graduação que você está cursando e porque o escolheu?

Germano: Engenharia Mecânica. Eu escolhi, assim, porque desde pequeno fui sempre muito ligado com automóveis. Sempre gostei muito da área de automobilística. E é um curso que eu sempre me identifiquei. No início do curso como é um curso de engenharia geral não dá assim para você ter muita ideia, mas com algumas equipes de competição que eu acompanho aqui da engenharia, é algo assim que eu vejo, sabe, olhar aquilo funcionando. Né, então, foi uma coisa assim que mesmo eu estando no básico e tendo algumas reprovações, e tal, é algo que não me desmotivou, mas me motiva ainda a continuar.

Raquel: Você estudou o Ensino Médio em que tipo de escola, pública ou particular?

Germano: Completamente pública. Tanto a fundamental quanto o médio.

Raquel: Não foi no DF, né? Onde foi?
Germano: Em Rondônia.

Raquel: Qual era a sua relação com a Matemática no Ensino Básico (antes de entrar no Ensino Superior)?
Germano: Eu, assim, sempre tive as maiores notas em Exatas. E a única coisa é que, quando você não acerta muito um exercício que você estava fazendo, é algo que me desmotivava um pouco. Mas, assim, sempre que eu conseguia resolver um problema para mim era algo assim ...
Raquel: Então, você gostava?
Germano: Sim.

Raquel: E da Física também?
Germano: Assim, a Física para mim era uma matéria neutra, sabe. Até porque foi muito básico o que aprendi na Física.

Raquel: E como foi na Matemática?
Germano: A Matemática, assim, eu peguei um período onde na Matemática eu sempre tive professores formados em Matemática. Mas já aconteceu, por exemplo, de eu pegar professor que me deu aula de Física e era formado em Biologia. Era um professor excelente porque era um professor que eu via que ele amava o que ele fazia. Então, assim, ele procurou sempre aprender e ajudar os alunos. Por mais que ele não fosse formado naquela área, as aulas dele eram excelentes. Mas eu já tive o caso, por exemplo, de pegar uma professora que era formada em Matemática, pegava um livro de Química e lia o conteúdo para a gente. Ou seja, meu conhecimento em Química, inclusive para Engenharia Mecânica é praticamente zero. Para Matemática, eu acho que por mais que eu tenha tido professores formados na área, voltado especificamente para essa universidade, eu acho que não foi bom. Tanto é que eu não consegui ingressar pelo ensino público. Assim, com o conhecimento do ensino público. Eu tive que fazer cursinho pré-vestibular.

Raquel: Você entrou pelo vestibular normal?
Germano: Sim. Foi na época que tinha vestibular no meio do ano ainda.

Raquel: Então podemos dizer que você teve uma boa experiência antes com a Matemática.

Germano: Sim.

Raquel: Como foi sua primeira experiência no Cálculo I?

Germano: Foi assustador! (Suspirou e ficou em silêncio por alguns segundos). Foi assim uma coisa que mesmo eu tendo.... Tanto é que quando eu entrei eu peguei um professor muito bom, o professor XX, não sei se posso mencionar o nome, mas assim um professor com uma didática excelente. Tanto é que as turmas dele geralmente vêm alunos de outras turmas de outros professores para assistir. A turma era muito grande. E, assim, primeira experiência com o professor, você não conhece direito. É um conteúdo que eu nunca tinha visto, principalmente a parte de funções. Era uma coisa assim, sabe, no meu Ensino Médio eu não tinha muita relação com isso. Então, assim, foi muito puxado. A primeira parte, como eu perdi toda a primeira parte de Limite. Assim, eu não consegui ver direito. Aí o resto todo é consequência. Então, assim, realmente foi assustador o primeiro contato até que eu consegui, sabe, assimilar o conteúdo, demorou um tempinho.

Raquel: Tem como você citar a principal dificuldade nesta primeira vez, aquela que foi um empecilho?

Germano: Eu acho que foi uma questão de nervosismo com prova também. Assim, eu sempre ficava assustado com o conteúdo e com, assim, meio que medo de não fazer as coisas do jeito certo. Isso meio que persiste ainda até hoje, sabe. Eu tento fazer as coisas do jeito mais certo possível e às vezes falta muita confiança. Eu, às vezes, sempre acho que estou fazendo o exercício da maneira errada, né?

Raquel: Então, você falou de dificuldades com conteúdo e também de questões que afetaram o seu estado emocional na hora de fazer provas. Por que você acha que isso aconteceu?

Germano: Talvez, acho que até pelo ambiente universitário. Assim, que você já sabe que é uma pressão que você tem de que daqui você vai ter que sair empregado. Você vai sair com uma formação, a responsabilidade aumenta. Mas eu pelo menos percebo que, às vezes, o pessoal que teve uma formação um pouco melhor, por exemplo, numa escola particular aqui do DF, onde o pessoal geralmente é mais preparado para o vestibular desta universidade, é *um pessoal que parece ser mais tranquilo, sabe. Então, eu acho que um pouco do nervosismo também é em função do ensino público, né. Que falta muita coisa. Então, isso assim é uma coisa que assim, às vezes, me preocupa um pouco porque, eu acho que dependo se o nível do Ensino Médio no Brasil não melhorar, a universidade ela vai ter que regredir um pouco. Porque acho que vai começar a acumular muito aluno que não vai conseguir seguir adiante.*

Raquel: Muitos outros estudantes passam pelas mesmas dificuldades que você e por outras. Você representa aqui uma parte dos estudantes dentro de um grupo bem maior. O que você sentiu falta em termos de apoio. Ou melhor, que tipo de apoio seria recomendado para pessoas com essas dificuldades do mesmo tipo das que você teve?

Germano: Eu acho, por exemplo, nesse grupo que foi feito de estudos, como era um grupo menor, eu me sentia muito à vontade para tirar dúvidas assim básicas. Dúvidas, às vezes, como é que chegou naquilo? Então, em grupos menores às vezes conversas individuais com cada aluno. E tentar no máximo cativar ele, ganhar a confiança dele, porque às vezes eu sentia, e isso até hoje inclusive, eu tenho meio que vergonha de perguntar em sala de aula pro professor, com medo dos outros alunos achar a pergunta muito boba. Isso é muito ruim porque às vezes uma pessoa ali no meio, ela sabe aquilo, ela não tem a humildade de reconhecer que aquela pessoa às vezes não teve a mesma formação que ela. Então ela começa a tirar sarro. Então, isso assim é muito ruim. Então, eu no grupo de estudos eu me sentia muito à vontade. Eu sentia a confiança de fazer a pergunta, né. Porque eu sentia que dava, no caso, pra confiar em você, eu posso fazer as perguntas, nos monitores.

Raquel: E sobre o professor? Como você observa a atuação dele em sala de aula? De que forma, tanto na teoria quanto na prática, ele poderia auxiliar o estudante nas aulas de Cálculo de modo a promover a aprendizagem?

Germano: É assim... O problema às vezes, por exemplo, o professor XY, ele tem uma didática excelente. Não sei como ele é para tirar dúvida, né. Porque ele dá a entender que ele é um pouco, assim. Não gosta muito de tirar dúvida. Mas eu acho que o professor, ele teria que de alguma maneira cativar o aluno, sabe, fazer com ele demonstre de uma forma que o aluno consiga confiar nele. Porque eu, por exemplo, peguei um professor... No semestre seguinte, se não me engano, quando eu reprovei com o professor XX, eu peguei um professor que as aulas dele eram todas em Datashow. Para mim essa é uma aula muito cansativa. Às vezes eu acho que seria interessante você usar a mídia, por exemplo, para você mostrar um programa de computador e mostrar para o aluno como usa aquele programa de computador. Isso eu acho *que seria muito válido e muito interessante. Vamos jogar uma função aqui e vamos ver o que o computador dá pra gente. Joga lá, mostra. Bom, eu acho muito interessante. Tinha um outro professor que, assim, foi uma das vezes que eu arrisquei fazer uma pergunta básica para ele na aula prática e ele foi extremamente estúpido. Foi a primeira e última vez que eu fiz pergunta para ele nas aulas. Isso realmente não ajuda. Eu acho, então que o principal seria tentar cativar os alunos.*

Raquel: Como você se preparava para as provas de Cálculo I?

Germano: Eu geralmente já me preparava desde o início do semestre fazendo os exercícios e tentava ao máximo não deixar pra última hora. Só que é meio difícil assim, se eu pudesse estudar só Cálculo, seria muito mais simples para mim. Então, querendo ou não tem vezes que você não consegue. Às vezes num dia que você não tá bem de saúde. Você não consegue estudar nada, atrasa tudo. Eu sempre tentei manter um ritmo de estudo. No início, no meu primeiro semestre, não. Porque é uma coisa, assim, sabe, muito nova. Eu meio que entrei um pouquinho com confiança, sabe. Também foi um dos motivos que eu reprovei. Eu entrei com confiança, achando que eu não precisaria estudar tanto como tava no cursinho. E um dos motivos, quando o professor entregou a primeira lista de funções, eu fiquei pelo menos umas duas ou três semanas tentando resolver aquela lista. Porque para mim, não sei se é coisa de alemão, assim, é uma coisa meio sistemática. Eu tinha que fazer tudo. Eu não conseguia pular exercícios para deixar e voltar depois. Então eu perdia muito tempo em uma coisa. E isso é uma coisa que agora eu estou tentando mudar. Se eu não consigo fazer aquilo eu pulo para outro.

Raquel: Você usou algum livro de Cálculo? O que você usou para estudar a teoria?

Germano: Eu dificilmente uso o livro. Geralmente eu vou mais para a Internet. Por exemplo, porque hoje em dia tem muita videoaula na Internet. Agora no Cálculo 2 eu tô usando o livro do professor YY.

Raquel: Você tem algum livro de Cálculo?

Germano: Eu tenho o Thomas. Eu comprei o Thomas. Assim, algumas vezes eu dava uma olhada nele, mas como tinha as videoaulas no Moodle e eram muito didáticas, então, assim, eu não senti muito a necessidade de buscar no livro.

Raquel: Você está no Cálculo 2 agora. Como está sendo sua experiência de aprendizagem?

Germano: A experiência está sendo assim. O professor ele é bom, mas as provas são puxadas, no sentido, assim, tudo é muito detalhado. Você tem que fazer as coisas muito detalhadas, e por conta desse detalhamento que eu precisava colocar na Prova. E o professor descontava muito ponto por você não detalhar. Por conta disso eu acabei perdendo um pouco, né. Minha nota na primeira prova foi muito baixa. Se eu não tivesse que trancar o semestre agora, eu acho que possivelmente eu ia reprovar de novo em Cálculo 2. Porque, assim, não é uma coisa, a matéria é isso aqui. Você faz exercício o exercício assim. Ele cita os exemplos. Você tinha que detalhar o que ele tava fazendo. Explicar o que você está fazendo. Não é escrever um textão, mas assim, cheguei aqui nesse ponto, fiz isso aqui. Agora o que eu faço? Uso L'Hôpital. Aí você detalhava. Você ia usar L'Hôpital porque dava uma, uma, não é indefinição! É indeterminação! (Com a ajuda da pesquisadora). É indeterminação do tipo infinito sobre infinito, zero sobre zero. Tá. Você demonstrava isso. Aí você ia para o passo seguinte. Derivava tá. Então, era muito detalhado. E às vezes é algum detalhe, assim, que você não pega perdia muito tempo. Mas, assim, o professor é muito bom.

Raquel: Estando agora em um semestre mais avançado do seu curso, e já tendo cursado pelo menos o Cálculo I, como você associa os conteúdos do curso inicial de Cálculo com as disciplinas mais avançadas do seu curso? Você vê aplicações e/ ou utilidades?

(Neste caso a pergunta não se aplicou porque Germano ainda não havia feito nenhuma disciplina específica da Engenharia Mecânica).

Raquel: Como você avalia as atividades do Grupo de Estudos de Cálculo?

Germano: Basicamente me ajudou muito. Sem dúvida nenhuma até porque tem aquela questão de confiança, de poder perguntar, sabe, e não ter problema com isso. Até poder me inteirar com outras pessoas e poder ajudar, tal. Então para mim foi muito bom.

Raquel: A próxima pergunta é mesmo sobre essa interação com os outros colegas do grupo. Você teve a oportunidade de ajudar os seus colegas, não é?

Germano: Sim. Eu tive a oportunidade de ajudar, compartilhar, assim, o que eu já sabia. Porque eu já estava bastante tempo no Cálculo I e eu já tinha bastante sacada. Então, para mim foi muito bom poder ajudar a quem tava iniciando. Tanto é assim, se tiver a *oportunidade, talvez, algum detalhezinho de Cálculo I eu não tenha mais. Para mim, se tiver outro grupo desse e quiser me chamar, eu tenho inteira disposição em ajudar.*

Raquel: Ótimo! Muito obrigada!

Entrevista com Betina

A segunda estudante entrevistada será chamada de Betina, tem 20 anos e estava matriculada, no momento da entrevista, no 2º semestre do curso de Engenharia Mecânica. Isso porque ela iniciou seus estudos universitários no curso de Engenharia de Redes, mas, há dois semestres, transferiu-se para a outra engenharia. Da mesma forma que Germano, a estudante foi escolhida por ter participado da maioria dos encontros do Grupo de Estudos (GE) e por ter demonstrado interesse em aprender os conteúdos e avançar nos estudos, já que sempre solicitava ajuda na resolução de exercícios diferentes dos propostos, por já tê-los resolvidos. Ela tirava muitas dúvidas sobre as resoluções e interagia com um grupo específico de participantes. No semestre em que participou do GE, ela estava cursando o Cálculo pela terceira vez e foi aprovada no curso. A entrevista foi feita no dia 12 de junho de 2017 e foi gravada em áudio. A estudante entrevistada já tinha assinado o Termo de Consentimento (Apêndice A).

Raquel: Qual o curso de graduação que você está cursando e porque o escolheu?

Escolhi meu curso porque tenho interesse em trabalhar na área militar com aerodinâmica ou materiais e engenharia mecânica se encaixa muito bem.

Raquel: Você estudou o Ensino Médio em que tipo de escola, pública ou particular?

Betina: Escola pública. Fiz o Ensino Médio no Centro de Ensino Médio 1 de Sobradinho.

Raquel: Qual era a sua relação com a Matemática no Ensino Básico (antes de entrar no Ensino Superior)?

Betina: Boa. Sempre gostei de Matemática.

Raquel: Como foi sua primeira experiência no Cálculo I?

Betina: Foi ruim. Eu tinha muita dificuldade porque tinha muita coisa que eu não tinha aprendido direito na escola. Mas as duas primeiras vezes que não passei foi porque eu não tinha estudado mesmo direito. Aí na terceira eu estudei e consegui passar.

Raquel: Quais as principais dificuldades nos conteúdos matemáticos que você encontrou na primeira vez que fez o Cálculo?
Betina: Foram: multiplicação de raízes, que eu não lembrava. Trigonometria que na escola eu não tinha visto muito. E acho que basicamente foi isso.
Raquel: A que você atribui as dificuldades apresentadas quando fez o Cálculo I?
Betina: Falta de acompanhamento e ajuda nas dificuldades básicas da matéria. Mas aí, na terceira vez, eu fui para o GE e achei que teve esse acompanhamento.

Raquel: O que você sugere para outras pessoas que passam ou passaram pelas mesmas dificuldades?
Betina: Eu acho que poderia ter, ou ser criada, uma matéria de Pré-Cálculo. Ou então, no início do Cálculo I revisar bem as dificuldades básicas dos alunos.

Raquel: E sobre o professor? Como você observa a atuação dele em sala de aula? De que forma, tanto na teoria quanto na prática, ele poderia auxiliar o estudante nas aulas de Cálculo de modo a promover a aprendizagem?
Betina: Eu acho que a linguagem porque quando a gente entra no Cálculo I é uma linguagem diferente. Aí, talvez adaptar mais pro que a gente é acostumado e depois evoluir.

Raquel: Como você se preparava para as provas de Cálculo I?
Betina: Eu fazia as listas. Eu via os vídeos do Moodle. E só.

Raquel: Você não usou algum livro?
Betina: Na primeira vez eu usei o Thomas. Mas no semipresencial só via os vídeos mesmo.

Raquel: E no Cálculo 2, como foi (ou está sendo) sua experiência de aprendizagem?
Betina: Estou fazendo de novo, pela segunda vez. No semestre passado eu reprovei por causa da ocupação[5]*. Eu só não gosto muito da didática dos professores. Porque, por exemplo, no semestre passado eu peguei Cálculo 2 com um professor que falava espanhol. Eu não conseguia entender nada. E muita gente da turma reprovou. Aí, esse semestre eu tô pegando com outro professor. Mas ele também junta muita coisa de Física. Aí tá um pouco difícil, mas talvez eu passe. Vai dar para passar.*

---

[5] Referência a evento de ocupação estudantil a alguns prédios da universidade ocorrido no segundo semestre de 2016.

Raquel: Mesmo estando ainda no segundo semestre de Engenharia Mecânica, mas como fez alguns semestres de Engenharia de Redes e está fazendo Cálculo 2 , tem como você associar os conteúdos do curso inicial de Cálculo com as disciplinas mais avançadas do seu curso? Você vê aplicações ou utilidades?
Betina: Das que eu fiz até agora na Mecânica, ainda não. Mas, de Redes tem uma matéria que eu fiz que eu acho que precisava de Cálculo. É Algoritmos e Estruturas de Dados que usava noções de matemática. Não tinha que usar especificamente o Cálculo. Mas era programação. E se tivesse que programar uma derivada, tinha que usar a derivada.

Raquel: Como você avalia as atividades do Grupo de Estudos de Cálculo?
Betina: Boas. Eu gostei.

Raquel: De que forma elas te ajudaram?
Betina: Me incentivaram a estudar mais porque eu deixava as listas em dia. Chegava com dúvidas e tirava as dúvidas. Eu pude estudar bastante lá com a Rosa [6]e com a Moema. A gente trocava informações.

6.2 Considerações sobre as entrevistas dos estudantes

A análise das falas das duas entrevistas aponta questões comuns e recorrentes nas experiências e aprendizagens dos estudantes universitários iniciantes. Assim, fizemos uma síntese daquelas que estão associados ao nosso objeto de pesquisa, buscamos categorizá-los e os apresentamos em forma de proposições.

C1) Os estudantes tiveram boa relação com a Matemática do Ensino Básico e reconhecem que carregam lacunas conceituais em temas do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Essa afirmação é verificada pelas falas dos entrevistados, porém nos remete ao primeiro tópico do capítulo anterior em que ela pode ser evidenciada pelos registros escritos apresentados nas resoluções de itens do pré-teste. Nessa seção 5.1 foram listados temas específicos do Ensino Básico em que os estudantes têm dificuldades. Pesquisadores como

[6] Rosa e Moema são nomes fictícios de outras duas estudantes participantes dos GE.

Igliori (2015) e Nasser (2009), ao tratarem dos obstáculos de aprendizagem no Cálculo corroboram a afirmação acima ao apontarem que concepções que geram obstáculos no ensino da Matemática são, em geral, consequências de aprendizagens anteriores.

A esse respeito, numa investigação realizada por Dörr e Muniz (2017) com o intuito de verificar em que assuntos matemáticos do Ensino Básico estudantes ingressantes dos cursos de Matemática da instituição onde atuam desejariam aprofundar seus estudos e, a partir dos resultados, detectar eventuais lacunas na formação matemática anterior que podem afetar a aprendizagem nos cursos de Cálculo, alguns dos estudantes responderam que queriam uma "revisão de todo o conteúdo". Essa resposta pode revelar uma grave dificuldade com a Matemática elementar de outros sujeitos e foi aqui representada por meio da expressão desse único estudante.

Um dos estudantes admite não ter estudado funções e outro Trigonometria. Notemos que ambos admitem ter tido dificuldades não somente com a Matemática. Germano cita disciplinas como Física e Química. Betina menciona ter tido problemas com a Física e os dois estavam vivenciando dificuldades no Cálculo 2 no momento da entrevista.

C2) Os estudantes revelam ter métodos de estudos focados em procedimentos de resolução de listas de exercícios.

Ao serem questionados a respeito dos seus métodos de estudos, os sujeitos entrevistados afirmaram terem priorizado as resoluções das listas de exercícios, o uso dos recursos da Internet como videoaulas e pouco uso de livros didáticos. É sabido que a ausência ou a técnica equivocada nos estudos individuais têm influenciado o processo de adaptação ao Ensino Superior. Além disso, podem afetar o rendimento acadêmico dos universitários nesse processo de adaptação ao novo meio escolar (CUNHA; CARRILHO, 2005; ALMEIDA et al., 2007; ALMEIDA, 2007).

Nossa observação revela que, em geral, os estudantes iniciantes trazem do Ensino Básico seus métodos de estudos que funcionaram bem até à entrada na universidade, mas que se mostram ineficazes ou insuficientes para obterem êxitos. Isso está relacionado ao tipo de trabalho desenvolvido nas salas de aula e às orientações de livros didáticos do Ensino Básico, que tradicionalmente foi construído na resolução repetida de um número excessivo de exercícios (FROTA, 2001; NASSER, 2007). Logo, a escola transmite aos estudantes uma concepção limitada de como se realizam os estudos em Matemática e não os prepara para o ambiente educacional do Ensino Superior. Este último tem novos pressupostos e relações de aprendizagem e, aparentemente, espera que os estudantes ingressantes já cheguem preparados para a nova realidade educacional.

Tall (1992) acredita que os estudantes concentram seus estudos na realização de procedimentos repetitivos, como a de resolução de listas de exercícios, por terem dificuldades no entendimento dos conteúdos e porque têm que se preparar para as avaliações. A obtenção de sucesso nelas acaba sendo a prioridade em detrimento de uma aprendizagem significativa que inclui elementos de pesquisa e investigação matemática (SKOVSMOSE, 2009). Por outro lado, Tall (1992) ainda pondera que o professor, ciente das dificuldades conceituais de seus alunos, passa a exigir nos testes questões procedimentais. Assim, fica estabelecido um ciclo vicioso.

Entretanto, ao entrarem na universidade os estudantes serão desafiados a fazerem demonstrações ou a se ocuparem com situações-problema, nas quais lhes serão exigidas capacidades de argumentação e de expressão matemáticas para os quais não foram devidamente preparados. Por exemplo, os entrevistados falam que não imaginavam que teriam que estudar tanto ao entrar na universidade. Germano relata ter ficado, em certo semestre, semanas a fio tentando resolver uma lista inicial de funções. Para ambos, o estudo matemático se limita à repetida resolução de exercícios das listas.

C3) As práticas de ensino como barreiras à aprendizagem matemática no Ensino Superior.

Nossos entrevistados indicam sentirem falta de que haja mais espaço para comunicação com os professores em sala de aula e de terem mais liberdade para tirarem dúvidas. Voltando ao tema da transição do Ensino Básico para o Superior, recorremos mais uma vez a Almeida (2007). Esse autor aponta a relação com os docentes entre os fatores associados aos resultados de aprendizagem de universitários ingressantes e as classifica como raras e distantes.

O aluno entrevistado valoriza em sua fala “a didática” do professor, sinalizando que ele apresentava de forma clara os conteúdos, porém teve dificuldades de se comunicar com ele ao sentir que o professor não esteve aberto às suas dúvidas.

C4) Em busca da superação de suas já identificadas dificuldades em conteúdos de Matemática do Ensino Básico, os estudantes sugerem a necessidade de criação de espaços de apoio institucional que sejam mais dialógicos para estudos desses conteúdos.

Os estudantes esperam que conteúdos matemáticos básicos sejam revisados no início do Cálculo e buscam atividades de suporte aos seus estudos, além dos já oferecidos pelas monitorias. Embora haja oferta diária e em dois períodos de monitoria, os dois estudantes ouvidos não mencionam buscar ajuda nelas e nem nos fóruns de dúvidas disponíveis na página do curso no *Moodle.*

Um dos estudantes expressou satisfação em poder ajudar os colegas e a outra relatou o fato de ter podido interagir com eles. Essas posturas levam-nos à perspectiva freireana (FREIRE, 2011) de utilização do diálogo como ferramenta de construção de saberes. Nesse caso, o diálogo entre os educandos, unidos pela busca de superação das dificuldades no Cálculo é fator de estímulo à sua autonomia como sujeito aprendente.

O espaço de apoio proporcionado pelo Grupo de Estudos foi avaliado positivamente pelos entrevistados. Nesse espaço, lhes foi possibilitado o aprofundamento em seus estudos num ambiente de interação dialógico e de compartilhamento não somente de suas dificuldades, mas também de seus avanços nos conteúdos.

6.3 Entrevistas com três professores

Conforme relatado na pesquisa exploratória, a metodologia do Cálculo na universidade em que foi realizada a pesquisa é singular. Assim, sentimos a necessidade de entender o porquê do formato usado e de complementar nossa investigação sobre suas vivências, opiniões, pensamentos e visões acerca das aprendizagens dos estudantes iniciantes. Por esse motivo, decidimos pela entrevista de três docentes.

Todos os três professores escolhidos para partilharem e relatarem suas experiências no Cálculo I participaram da criação e implementação dos dois modelos magistral e semipresencial, usados hoje na universidade em que foi realizada a pesquisa. Eles continuam envolvidos na docência do curso e têm acompanhado seu desenvolvimento a cada semestre. Esse foi o principal critério de escolha desses docentes.

Da mesma forma que aconteceu com as entrevistas dos estudantes, foi elaborado um roteiro estruturado de perguntas (Apêndice F). As transcrições das entrevistas são apresentadas nas páginas seguintes. Nessas transcrições, as perguntas da pesquisadora foram grafadas em negrito e as respostas em itálico. Todos os professores autorizaram a utilização de seus nomes reais na pesquisa. Entretanto, reiteramos que estão sendo usados nomes fictícios para todos os entrevistados.

Entrevista com o professor Kepler

O professor Kepler leciona o Cálculo I e os outros Cálculos no Departamento de Matemática da universidade em que foi feita a pesquisa há, pelo menos, 30 anos. Ele foi o idealizador da criação do Cálculo I Semipresencial e, por isso, coordena as suas atividades. A entrevista com o Prof. Kepler aconteceu no dia 8 junho de 2017.

Raquel: Como surgiu a ideia de criação do Cálculo I na modalidade semipresencial (SP)? Por favor, descreva a metodologia do curso.

Kepler: *Isso foi por volta do ano 2000 quando houve uma expectativa muito grande de uso da internet como veículo da educação. O Cálculo I era unificado e tinha muita coisa na internet, ainda elementar, mas tinha coisas como fóruns, textos, vídeos. E tinha uma plataforma pequena de HTML*[7] *que a gente mesmo mexia. Mas a ideia era colocar conteúdos, as provas estavam online, as listas, os fóruns. Tinham trabalhos de Maple*[8] *que eles faziam e colocavam lá. Ela tinha um princípio de plataforma a distância. E aí a gente pensou no Cálculo. Por que não usar essa plataforma para atender os alunos já reprovados? O público natural seria esse. Para esse público você disponibilizaria o material e faria avaliações apenas. As mesmas avaliações das turmas presenciais. Com aulas de exercícios entre uma prova e outra. E aí surgiu essa ideia de fazer uma monitoria, quase uma monitoria. É uma aula de dois créditos por semana, um encontro só por semana, em que você tira dúvidas das aulas que eles fizeram. E com isso você procura atender um público bem maior porque você não dá um curso formal de novo. Eles já assistiram aula. Esse é um ponto importante. Então, essa questão de, por exemplo, presença, etc., supostamente foi atendido lá nesse curso anterior. Você complementaria com exercícios e faria as mesmas avaliações do presencial. Então é importante ser unificado porque senão passa a ser um curso diferente. Podia ser um curso, enfim, diferente do Cálculo I. Sendo as provas as mesmas, os critérios e tudo passam a ser os mesmos. Aí ele funcionou de 2000 a 2004. Foi uma experiência boa. A gente fez relatórios disso daí, tem registros dos rendimentos dessas turmas lá no DEG. Foi nessa época também de 2000 em que a própria universidade estava muito interessada nisso: em usar as ferramentas computacionais, de rede, para o ensino. Foi nessa época que veio uma Resolução do MEC de que até 20% do curso podia ser a distância. Foi nesse contexto que ela apareceu e foi aprovada.*

---

[7] Html é uma abreviação para a expressão inglesa *Hyper Text Markup* Language. É uma linguagem de marcação utilizada na construção de páginas da *Internet.*
[8] Ambiente computacional algébrico.

Raquel: Eram quantas turmas nesse começo?

Kepler: *Eram duas turmas. Eu e um outro professor. Cada uma com 30 alunos. Era muito pequeno, mas foi o início. Mas, depois de 2004, o Cálculo I teve um colapso e deixou de ser unificado. E o Semipresencial ficou esquecido. Muito tempo esquecido porque não sendo unificado, ficava um pouco sem sentido. E foi o Newton, já em 2013, quase dez anos depois, que depois de unificado de novo, passou a ser usado o semipresencial.*

Aí de lá para cá, de 2014 para cá, tem aumentado sistematicamente a oferta. Você usa os estagiários de docência que é uma mão de obra que você não teria como usar de outra forma. Eles dão um acompanhamento muito bom. Têm uma orientação que eu dou para todo mundo. Toda semana eu digo: olha é isso aqui que vocês vão fazer nessa semana. E eles vão fazendo tudo direitinho. Eles seguem o mesmo cronograma do curso regular de Cálculo I. Inclusive fazem a mesma prova.

Raquel: Podemos então resumir a metodologia?

Kepler: *Resumindo, o curso tem um encontro semanal de aula de exercícios. Mas as dúvidas são estimuladas. Você não espera o aluno ter dúvida para depois tirar a dúvida. Você apresenta o problema e diz: Bom, neste problema qual é a dúvida? Eu acho que essa é uma diferença importante, porque, por exemplo, a monitoria comum feita aqui em baixo (no subsolo do departamento) não funciona porque não é estimulada. Ninguém tem dúvida para ir lá.*

Só tem um monitor em sala?

Kepler: *Sim. E são trinta alunos para um professor ou o estagiário de docência.*

Eles fazem atividades em grupos?

Kepler: *Sim. Eles fazem os trabalhos em grupos. A ideia é de uma aprendizagem colaborativa, de modo que um aluno pode explicar para ao outro. É claro que tem lá o professor, mas o fato dele conversar, dele trocar ideias, dele tentar convencer o colega de como funciona isso é que é o ponto importante.*

Raquel: São quantas turmas hoje?

Kepler: *São quatorze turmas. Onze diurnas e três noturnas. E é segunda vez que temos turmas no noturno. No semestre passado tivemos uma turma.*

Raquel: O que mudou na estrutura inicial para o formato que o curso tem hoje?

Kepler: *Nada. É a mesma estrutura.*

Raquel: Quais as principais dificuldades que você observa nos estudantes que estão matriculados no Cálculo I SP?

Kepler: *Bom, tem um problema. É um público, em princípio, mais problemático porque já são 99% deles de reprovados. Então, eles já chegam com uma autoestima muito baixa, por assim dizer. Eles são muito tímidos, tem medo de fazer perguntas. Então são pessoas que já tiveram experiências ruins no Cálculo. Nossa tarefa lá é desmanchar essa expressão deles.*

Agora, a dificuldade deles é patente: é principalmente do 2º grau. Eles conseguem entender as ideias do Cálculo, mas não conseguem implementar as ideias. Eles sabem intuitivamente o que significa o Limite, mas se tem que simplificar um quociente, se tem que fazer uma operação para você chegar a um resultado, é cruel para eles porque eles erram muito e não sabem que erraram. Eles não têm um senso crítico de o quanto está certo ou errado nas contas. Então, o principal problema hoje não é o Cálculo. É essa formação anterior que não vou dizer que é só em frações, mas é de uma maturidade na matemática de 2º grau. Eles têm uma dificuldade muito grande e esse é o principal problema.

Teve um caso curioso, né. Tinha uma fração assim: $\frac{p}{q} = 0$*. O aluno então fez assim: então,* $p = q$*.*

Quer dizer, ele está tão acostumado a resolver passando um número de um lado para o outro que ele tentou resolver essa equação desse jeito. Quer dizer, é uma falta de maturidade e pensamento crítico. Não é que ele não saiba fração.

Raquel: Sobre as atividades em grupo, como você avalia essa experiência?

Kepler: *É uma experiência boa e bem interessante: a construção coletiva do conhecimento. Acho que é esse é o nome. Um ambiente em que eles discutem, fazem e participam. É bem ativo. E ser em grupo é essencial. Não adianta estar lá e resolver exercícios isolados. Isso não é o ponto.*

Raquel: Você não acha pouco somente um professor por turma?

Kepler: *Acho sim. O bom seria ter mais, pelo menos mais um seria o conveniente.*

Raquel: Obrigada!

<u>Entrevista com o professor Newton</u>

O professor Newton leciona o Cálculo I na universidade desde o ano de 2010. Ele pertence ao grupo que montou e colocou em operação, desde 2012, o modelo chamado de magistral, que foi descrito no Capítulo 4. Nessa entrevista, além do professor narrar a história de criação do sistema usado hoje na universidade em que foi feita a pesquisa, ele responde a perguntas acerca do seu olhar sobre as dificuldades e aprendizagens dos estudantes de Cálculo. A entrevista com o Prof. Newton aconteceu no dia 26 junho de 2017.

Raquel: Como você participou da criação e implementação da metodologia que hoje é usada no Cálculo I deste Departamento de Matemática, explique como surgiu a ideia desse modelo.

Prof. Newton: *Uma das pessoas que pensou esse modelo, e talvez foi a primeira pessoa que falou sobre isso foi o Prof. Arquimedes. Eu sei também que ele se baseou em coisas que acontecem especialmente em boas universidades dos Estados Unidos, onde você tem professores que dão aula e depois tem monitores, ou outros professores que podem ser alunos de mestrado ou professor substituto que depois vão dar suporte para o aluno durante aquela semana ou durante algum período. Tem vários tipos de suporte. Pode ser uma aula no quadro, mas não é aquela aula que introduz a matéria. Pode ser um suporte de fazer exercício, pode ser uma monitoria ou coisas assim. E a ideia dele é que no Cálculo I, especificamente, essas seis horas por semana é muito tempo porque se você fosse ficar só com aulas expositivas você vai dar a matéria e vai fazer todos os exemplos, vai fazer tudo e acaba que o aluno fica recebendo aquilo tudo mastigado e copiando. Segundo ele, daria tempo, e seria bom para incentivar, se a gente tivesse aulas com o professor na sala de aula acompanhando os alunos, cada um no seu ritmo de fazer exercícios, cada um com suas dúvidas, pelo menos em pequenos grupos porque eles fazem duplas e trios. E aí o professor poderia sanar aquilo. Uma vez que o professor tivesse a sensibilidade de que tem alguma coisa aqui que está difícil para muita gente, aí ele pode ir no quadro e explicar. E aí ele falou: dá para fazer uma aula magna, uma aula grande, onde fosse lá um professor e desse aquela coisa teórica de dar uma motivação, explicar o porquê de um teorema, dar uma aplicação, coisas assim. E depois, os caras vão fazer exercícios. Coloca as definições, os teoremas e os exemplos básicos. E aí depois separa as turmas em grupos menores para fazer os exercícios da semana.*

Então, respondendo como que surgiu, nós compramos a ideia na época. Éramos quatro professores. Nós juntamos duas turmas para fazer esse esquema que hoje é feito com todas as *turmas. Então, na aula a gente juntava duas turmas na aula teórica. Isso foi em 2012 que nós fizemos a primeira vez. Ou seja, nós falamos com a coordenação de graduação e aí começamos. Colocamos algumas pessoas para dar uma aula, juntamos duas turmas, depois separava e fazíamos exercícios e tudo mais.*

Concomitantemente a gente tava fazendo o Moodle. O Moodle foi crescendo e mais professores foram querendo testar ou participar. Então nós fizemos com 4 turmas, depois com 6, oito, dez. Quando a gente viu já tinha mais da metade das turmas já nesse modelo.

Alguns professores não queriam participar de jeito nenhum. Mas daí, como já tinha muita gente, tinha o Moodle muito bom, a gente submeteu para o colegiado para fazer um teste com todas as turmas o que seria um teste de verdade porque era o curso de Cálculo I da Matemática aqui do departamento. E vem sendo feito desde então.

Como isso, ainda por cima, economiza um pouco de horas, economiza uma certa carga eu nem sei dizer se um dia a gente vai voltar atrás nesse sistema. Porque voltar atrás significa aumentar muito essas horas. Mas a criação foi basicamente isso.

Raquel: Quais foram as motivações para criação e implementação dessa metodologia?

Prof. Newton: *As motivações foram basicamente de que o aluno tem que ser mais participativo. Se ele fica só como telespectador, assistindo, e às vezes, copiando, aparentemente a cabeça dele não está funcionando muito bem. Então a gente quer promover uma certa independência do aluno e o fato dele ser protagonista no processo. Ele tem que pegar a lista e tentar fazer. Já assistiu uma aula, já leu algum texto, já viu os materiais que nós temos no Moodle, um vídeo, um exercício resolvido, agora ele tem que fazer. E o professor está lá para dar assistência, para ser um coadjuvante mesmo. Então, a ideia básica é que a gente quer ter um aluno mais proativo, que tenha mais iniciativa, que saiba correr um pouco mais atrás, que o professor não tenha que resolver para ele, mas possa dar uma dica e ele mesmo ver se cai a ficha e ele faz e tem um procedimento mais ativo nesse processo.*

Raquel: Como funcionam as aulas de exercícios?

Prof. Newton: *A turma tem em torno de 50 alunos a 60 alunos. Eles formam trios, vamos supor, e o professor vai passear entre esses trios. No começo ele pode até fazer um exemplo, coloca alguns exercícios que já são da nossa lista que ele já selecionou. Aí os outros exercícios os alunos vão fazer em casa. Então ele teve ao menos um suporte ali presencial naqueles (exercícios). E os alunos vão fazendo no ritmo deles. Quem acaba tudo, o professor* *pode dar outros exercícios, quem ainda não conseguiu, ele já sabe que tem que terminar em casa e por aí vai. O professor vai dimensionando de acordo com a turma.*

Raquel: Quais foram as maiores barreiras para a sua implementação?

Prof. Newton*:* *Bom, uma barreira grande é desenvolver um material de suporte que seja bom no sentido de que você vai colocar para os professores. Você vai falar assim: olha, eu quero fazer assim com esse material, o material tem que ser bom porque senão eles vão falar: esse material não presta. Então isso é importante.*

Raquel: Certamente foi um processo longo e trabalhoso a construção desse material de apoio no *Moodle.*

Prof. Newton: *O nosso Moodle demorou anos para ficar pronto. A gente tem hoje essa plataforma de ensino a distância com cronograma semanal, textos, cada texto tem tarefa com solução, tem teste online, tem fóruns, tem vídeos, lista de exercício e lista de aplicação. A lista de exercício tem gabarito e a de aplicação tem solução completa. Eu comecei a montar esse material como monitor na época. Eu não tinha ideia ainda do magistral. Eu estava construindo uma página no Moodle para a disciplina que eu pegasse.*

Depois o Marcelo entrou e a gente estava fazendo um teste online. Porque no teste online o aluno marca a reposta e ele tem como na hora falar se está certo, se está errado, dar uma dica. E é o que está feito. A gente acha isso legal porque é uma coisa para o cara continuar. Em geral, no livro ele faz, e olha no gabarito. Se estiver certo, bem. Se estiver errado, ele só vai saber que está errado.

Raquel: Teve uma época que a participação nesses testes valia nota, não é?

Prof. Newton: Sim. *Chegou a valer nota. Mas depois os alunos colocaram o solucionário no Facebook. Aí a gente resolveu tirar.*

Mas uma barreira foi a gente ter um material que realmente unificasse a coisa. Ou seja, em cada semana você tem toda a estrutura bem certa, bem testada, bem montada para dizer: vamos usar porque vai dar certo.

Outra barreira grande para implementar são os nossos professores. Muitos deles são contrários, querem dar o curso com total autonomia, com total liberdade, acham que o negócio fica muito engessado, pois semana após semana tem que dar esse conteúdo e aquele. Não concordam com alguma coisa. Enfim, querem de fato ser totalmente autônomos na sua turma e fazer exatamente o que eles querem. E muitos com boas ideias com respeito a isso.

Por exemplo, peguei uma turma mais fraca. De repente eu acho que tenho que ir mais devagar nessa parte para ver se eu não perco. Aí ele quer ir mais devagar um pouco. E em nosso sistema teoricamente não tem como. Ou então, peguei uma turma mais forte, vamos dar um curso mais puxado. Em suma, os colegas têm uma resistência de mexer com a zona de conforto. Que é natural do ser humano.

Tudo foi uma implementação passo a passo para chegar no estágio que a gente está hoje. Nós cometemos erros, nós aperfeiçoamos, semestre após semestre, a gente mudou algumas coisas. Aí vimos o que estava pior e voltamos atrás. Enfim, teve um processo nesse negócio.

Mas as principais dificuldades hoje são: montar um Moodle daqueles e convencer os professores de que isso vai ser melhor.

Por exemplo, a prova unificada causa muita controvérsia. Muita. Porque teoricamente são algumas cabeças que fazem a prova para todo mundo e aquele professor não manda na prova dele. Ele só corrige. Então, às vezes o professor não concorda e fala: Não, eu acho que essa prova não foi legal. Eu faria melhor. É o que a gente escuta. Ou, essa prova não deu tempo dos alunos fazerem. Mas a gente tem ouvido esse tipo de reclamação e vai ajustando. Hoje temos um sistema de provas também que tá rumando para se tornar um sistema mais autônomo. Tem a Teoria de Resposta ao item que estamos colocando nas nossas provas. Mas enfim, aparentemente vem dando certo porque tem gente que gosta de prova objetiva, tem gente que gosta de questão aberta e a gente tem as duas coisas justamente para dar meio que uma equilibrada nesse debate. Essa questão de unificação, pelo menos aqui em nosso departamento, as pessoas não enxergam como uma economia de tempo e de energia, uma ferramenta que vai facilitar. Algumas pessoas enxergam como uma cadeia, uma prisão. Parece que a pessoa está algemada naquele curso que ela tem que dar daquele jeito e ela não tem liberdade para fazer o que ela gosta, o que ela quer. São essas as duas maiores dificuldades.

Raquel: Quais os projetos futuros para atualização ou melhora do curso?

Prof. Newton: *Estamos tentando montar um banco de itens bem calibrado para usar a Teoria de Resposta ao Item e, no futuro, usar um sistema de teste adaptativo para o computador de tal forma que se possa montar uma prova de proficiência no Cálculo. É um projeto futuro que se a gente puder colocar em prática aqui vai ser muito bom.*

Em termos de plataforma, talvez alguns recursos computacionais como Geogebra e coisas assim que mostrem melhor com animações, talvez para a reta tangente, a Soma de Riemann, para o cara fazer experiências. Com o tempo talvez surjam mais professores com energia *para implementar mais coisas. No momento estamos fazendo a proficiência. São itens que tem que ser testados.*

Raquel: Há quanto tempo você leciona Cálculo I?

Prof. Newton: *Nesta universidade desde 2010, mas comecei antes em outras instituições. Assim que comecei meu trabalho aqui já peguei turma de Cálculo e venho lecionando desde então. Talvez nesse período só não lecionei em um ou dois semestres. Até porque, se eu não pegar Cálculo I, para mim é prejuízo porque eu já estou trabalhando com a matéria.*

Raquel: A que você atribui os elevados índices de reprovação no Cálculo I aqui nesta universidade?

Prof. Newton: *Eu acho que tem alguns fatores principais. O primeiro deles eu acho que é a falta de base matemática com que os alunos entram aqui na universidade. Quer dizer, vai dar um Limite, mas eles não sabem fatorar. No meio da conta eles falam que a raiz da soma é a soma das raízes. Ele está até fazendo certinho, mas no meio da conta ele faz um erro primário e acaba com a conta. Então essa falta de base é uma coisa que para mim é um dos principais pontos. Se o aluno viesse com uma base boa do Ensino Médio, ele conseguiria acompanhar mais facilmente.*

A segunda é a falta de motivação por parte de alguns cursos específicos onde o aluno não quer mais aprender Matemática. Então, ele passou para Biologia. A última coisa que ele quer ver é Matemática e aí tem Cálculo I no currículo. E esse aluno já não tem muita base, porque provavelmente já não gosta muito. Então, somam-se os problemas, porque além da falta de base tem a falta de motivação. Ele não sabe para que ele está aprendendo aquilo. Ele não sabe praquê aquilo serve, os veteranos já estão dizendo que aquilo é um saco mesmo. Sabe, é uma decepção na vida dele. Ele como calouro, estudou muito, foi uma vitória pra ele passar no vestibular e quando ele chega aqui já se decepciona de cara.

Eu acho que é uma falta de motivação muito grande e de saber porque eu tô aprendendo isso. Esse ponto, por exemplo, é um ponto um pouco negativo que é do curso ser unificado. Eu não consigo dar um curso para Biologia, um curso para Administração. O sistema tem falhas também.

Por exemplo, eu dou aula para a turma de Administração há muito tempo. Os estudantes não gostam, não querem aprender e não querem saber.

Uma terceira causa que eu poderia citar, especialmente nos cursos da noite, são os caras que trabalham e o Cálculo I exige uma dedicação extraclasse. O cara tem que dar uma estudada, *não adianta ele levar no ritmo do Ensino Médio que ele estuda um dia antes da prova e passa. Então, eles vêm muito imaturos, muito crus e eles não se sabem como estudantes porque nunca tiveram que estudar de verdade. Aí quando chega aqui é um baque. É um baque grande e o cara não consegue acompanhar a matéria, não consegue estudar toda hora. Ele nem sabe direito como que ele próprio aprende. Ele aprende melhor lendo? Ele aprende melhor com algum recurso na internet? Ele aprende melhor com alista de exercícios? Ele já teria que entrar aqui com um autoconhecimento de como eu sou como estudante um pouquinho maior.*

Os alunos da Matemática são motivados porque estão no curso de Matemática. Mas muitos não têm base nenhuma. Aí você fica lá quebrando a cabeça e o curso andando: Limite, Continuidade e tal. E vamos vendo se isso vai ajeitando no decorrer do semestre. Mas eu acho que esses três fatores são os principais.

Raquel: Qual é a principal diferença entre o estudante do seu início de docência e o de hoje?

Prof. Newton: *Eu sinto que as dificuldades de hoje são um pouco maiores. Todas as que falei. Primeiro, eles não estão acostumados a estudar nada. Se falar para eles, pessoal vamos ler isto daqui para semana que vem. Não funciona, porque eles estudam na pressão para uma prova. O estudante de hoje ele é um cara que está acostumado a ser preparado para fazer uma prova. Essa é a verdade. Eu não sei se eles vêm do Ensino Médio assim. Tipo assim: eu tenho que estudar para fazer uma prova. Se eu falar: tal coisa não cai na prova, esquece. Mas se eu falar: isso vai cair, aí alguns vão estudar. Então, eu acho que as bases deles deram uma piorada. É claro que depende da turma. Você tem as turmas de Engenharia com nota de corte muita alta no vestibular. Esses aí vão que vão. Mas, eu sinto que eles muito ligados na prova, em saber como que eu vou passar nessa disciplina.*

Eu vejo cada vez mais erros. Às vezes erro de soma de fração. Você dá Frações Parciais para ele tirar o mmc e você nem está integrando ainda, só está reescrevendo as coisas e ele já está com dificuldade. É uma coisa empírica. Não comprovei, não passei um teste, não fiz uma sondagem. Mas eu acho que são essas as principais dificuldades.

Raquel: Você mencionou entre as dificuldades a questão da falta de preparo em conteúdos do Ensino Médio. Você considera a possibilidade de criação de um apoio pedagógico alternativo para cuidar especificamente desta parte? Como você vê a possibilidade de criação de um curso do tipo de um pré-cálculo?

Prof. Newton: *Olha, eu acho que o pré-Cálculo seria ótimo, a priori. Seria ótimo ter uma opção. Às vezes, com a nota que ele tirou no vestibular, se tivesse uma nota das Exatas, uma nota da Matemática, a gente já poderia identificar isso e falar: é recomendável que você faça. Ou ainda, fazer uma sondagem. A universidade já podia mandar uma carta para ele e dizer assim: olha, é recomendável que você faça esse curso antes de fazer o Cálculo I. Beleza! Problemas: teria que abrir um monte de turmas de pré-cálculo e não tem espaço físico, nem professor, nada disso. Então, é impossível abrir um curso semestral antes. Uma coisa que a gente já pensou foi o seguinte: fazer um curso online de pré-cálculo para o cara ir fazendo junto. Quem quiser, deixa o curso aberto para o mundo inteiro ver. Faz o curso online, coloca videoaula, coloca texto, coloca exercício, coloca as coisas todas. O aluno que tiver meio assim, ele pode ir lá e revisar o conteúdo. É uma ideia. Porque ali a gente colocaria efetivamente tudo o que ele precisa para entender as coisas que a gente está dando aqui. E deixa o curso lá. Ou simplesmente, quando os alunos entrassem, quando eles se matriculassem no Cálculo ele já era matriculado lá automaticamente e fala: aqui é uma revisão que você pode precisar.*

Agora, se não for um semestre antes, eu não acho que vai resolver muito. Porque essa história de ser concomitante não ajuda. Para ele saber que tá difícil ele precisa fazer a primeira prova. Porque ele não tem consciência de que aquilo tá difícil porque ele não está estudando. Ele não estuda nas semanas antes da prova. Aí quando ele vai estudar, já é a semana da prova, que é a semana que a monitoria lota. Eu acho que a monitoria devia ser fechada. Na semana da prova ele estuda um tanto, mas não sabe se é suficiente ou não porque ele nunca fez uma prova na universidade. Quando ele faz, aí ele se dá conta. Mas a primeira prova já foi. Então ele começa a estudar mais para a segunda, mas a matéria está mais apertada e ele precisa da matéria da primeira.

Não tenho uma solução e isso é um debate que eu já participei com alguns colegas que falam assim: essa obrigação não é da universidade. Isso é uma coisa que nós não podemos corrigir, pois é um buraco que está no Ensino Médio. E têm outros que falam o contrário: esse é o aluno que nós recebemos. Ou a gente vai dar um jeito de trabalhar esses alunos e recuperar esse aluno para que ele volte e dê uma resposta para a sociedade ou então a gente vai formar só os que já vieram muito bons e que não é a maioria. E tem o meio termo que diz que a gente não vai tapar o buraco completamente. A gene não vai dar um curso inteiro em um semestre de pré-cálculo. Mas o que a gente poderia fazer?

<u>Entrevista com o professor Leibniz</u>

O Prof. Leibniz dedica-se à docência do Cálculo há quatro anos na universidade em que foi feita a pesquisa. Desde o primeiro semestre do ano de 2016 ele é o professor responsável pela coordenação da disciplina Fundamentos da Matemática I. Por sua iniciativa, essa disciplina passou, desde então, a ser oferecida aos calouros do curso de Matemática do turno diurno, ou seja, aos estudantes iniciantes do Bacharelado e da Licenciatura. O curso tem carga horária de dois créditos que equivalem a 30 h semestrais e é uma disciplina optativa, mas que já vem incluída na matrícula dos calouros. Em seu conteúdo programático são contemplados conteúdos básicos do Ensino Fundamental e Médio (Anexo J). A entrevista com o professor ocorreu no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília no dia 12 de junho de 2017.

Raquel: Quais foram as motivações para a oferta dessa disciplina?
Prof. Leibniz: *São várias as motivações. A primeira delas é o grande número de repetências e evasão no curso de Cálculo I. Quando eu estava ministrando as aulas de teoria de Cálculo I eu senti que (os estudantes) tinham dificuldades que não eram inerentes ao Cálculo I apenas e sim lá do Ensino Básico do Ensino Médio. Desde 6º ano, até, às vezes 7º e 8º ano. De coisas básicas, frações e tudo mais. Eu pensei: por que não? Nessa inquietude, digamos assim, eu acabei fazendo uma consulta em algumas universidades e notei que algumas universidades já contemplam isso, um curso de pré-cálculo. Assim, várias universidades em São Paulo e no sul também têm disciplinas de pré-cálculo com o intuito de motivar os alunos. Foi nessa direção que eu então busquei os coordenadores na época na iniciativa de fazer essa disciplina.*

Raquel: Então foi sua iniciativa?
Prof. Leibniz: *Sim. Foi iniciativa minha e eu agreguei mais carga horária no meu semestre.*

Raquel: Qual é o conteúdo programático do curso?
Prof. Leibniz: *Como não tinha programa, nós fizemos o programa e ele contempla conteúdos do Ensino Básico e do Ensino Médio. O que eu busco fazer?*
A gente busca desde o comecinho, desde soma, fração, conjuntos e aí vai tudo. Vai funções, como é que define funções e um pouco de gráficos na primeira parte. Não é a construção de gráficos, mas sim alguns conceitos básicos de gráficos. Aí tudo que a gente faz a gente procura dar uma demonstração. Por exemplo, se a gente vai fazer um teorema a gente demonstra, uma Fórmula de Bhaskara, nós demonstramos, alguma coisa inerente a somas de senos ou cosseno é demonstrado.

Então o que a gente busca fazer não é dar aquela coisa jogada como a gente vê lá no Ensino Médio e no Ensino Básico. O que eu procuro fazer nesse módulo de seis semanas iniciais, a gente faz uma revisão.

Raquel: Mas o curso só tem dois créditos? Dá tempo?

Prof. Leibniz: Para o aluno não ficar meio disperso na semana, nós concentramos isso em dois encontros semanais sempre, de duas horas.

Raquel: E quando termina?

Prof. Leibniz: *Não termina bem quando se espera. Não termina dois meses antes (do fim do semestre)? Não. Eu costumo dar aulas até quase o fim do semestre. Mesmo tendo exaurido os dois créditos. Porque eles (os estudantes) gostam tanto de ver como aquilo é aplicado. Por exemplo, se a gente está vendo frações parciais aí vem as integrais e aquilo motiva eles a continuar.*

Raquel: Fale um pouco sobre a metodologia do curso.

Prof. Leibniz: *O que que eu faço? Eu explico o conteúdo e faço milhares de exercícios e nunca os mesmos. Por exemplo, se nós demonstramos a Fórmula de Bhaskara então, eu faço dois ou três exercícios. Um com discriminante zero, outro positivo e outro negativo. Dou entendimento para aquilo e pronto.*

O que eu procuro fazer é estudar as entrelinhas de cada um dos exercícios ou dos métodos que estão sendo aplicados. Ahh, por que que não vale isso? Se eu tirar tal informação ou tirar tal e tal resultado o que isso acarreta? O que isso atrapalha?

Então, simplesmente é esse o enfoque que a gente aborda.

Raquel: Como os estudantes trabalham os exercícios em sala de aula?

Prof. Leibniz: *O que que eu faço? Eu discuto com eles. Depois deixo um tempinho para eles trabalharem também. O que a gente faz? Bota o exercício no quadro, depois que eu dei a matéria ou revisão. Aí vamos resolver esse exercício. Aí eu espero um pouquinho. Eles executam. Aí eu falo: vamos agora discutir juntos. E pergunto: como você fez? Como você partiria? Assim é bom porque você instiga a resoluções diferentes. Por que você pensou assim? E tudo mais. Então, nesses momentos iniciais a gente faz isso. Além disso, eu faço um uma lista de exercícios para eles reforçarem. Depois de um tempo, uma semana ou duas eu convoco eles para fazerem os exercícios da lista que é mais um pouquinho elaborada. Às* *vezes chamo eles no quadro. Então eles mesmo vão lá no quadro e tentam convencer os outros alunos de que a solução que eles encontram está certa.*

Raquel: Qual o tamanho da turma?
Prof. Leibniz: *A turma costuma ser de uns 25 a 30 alunos.*

Raquel: Só tem uma versão do curso no período diurno?
Prof. Leibniz: *Sim, Só tem uma versão durante o dia porque à noite não comporta. Eles não têm brecha na agenda deles para ter dois encontros semanais.*

Raquel: Mas então o curso é oferecido somente a alunos da Matemática do diurno?
Prof. Leibniz: *O curso é diurno, mas também é possível que os alunos do noturno se matriculem nele. No semestre passado tivemos quatro alunos do noturno que participaram. A maioria, 90% era do diurno e 10% era do noturno.*

Raquel: Sabe se o curso já havia sido oferecido alguma outra vez?
Prof. Leibniz: *Acho que é a primeira vez na universidade.*

Raquel: Quais as principais dificuldades que você, como professor desse curso e de Cálculo, observa nos estudantes ingressantes da Matemática?
Prof. Leibniz: *O que eu vejo é que os alunos de hoje vêm de instituições, colégios ou cursinhos. E esses órgãos ou entidades buscam apenas o reconhecimento dentro da sociedade. Para eles o que importa é sair na mídia que esse colégio teve 90% de aprovação na universidade. Então, o que eu vejo muito quando nós estamos dando aulas de Cálculo I é que o aluno fica ansioso para saber qual é a fórmula que ele vai usar. O aluno não sabe porque dá aquilo. Se lá no ensino básico, no Ensino Médio, se tivessem falado para ele que na fórmula de Bhaskara o denominador era dividido pro 4a. É isso! Aplica! Ele ia aceitar e ia dividir por 4a e ia tocar a vida feliz e achando que aquilo era o máximo e ia seguir para frente, entende.*
Então, o que sinto, assim, é que muito imposição, é muito jogado no ensino básico. A gente vê que nossos alunos, às vezes, não têm vários conteúdos que são inerentes ao Ensino Básico e não são contemplados. Aí há uma defasagem no conhecimento que era necessário ao aluno. Aí, chega na universidade. E a universidade é o momento de se fazer uma revisão daquilo que

já foi visto. Mas é muito breve e o aluno tem muita deficiência. O pré-cálculo que a gente faz na primeira semana é pra você ver o Ensino Médio todo. Por exemplo, as funções modulares eles têm uma dificuldade imensa com aquilo. Ou funções definidas por partes são funções que eles não entendem. Os gráficos são sempre retas. Tudo vira reta.

Nesse sentido, nós como formadores e professores temos essa preocupação. Eu acho que não basta nós falarmos que não é nossa culpa se é lá no ensino básico ou Ensino Médio que não fizeram. Por isso eu levanto essa bandeira de que é necessário ter uma disciplina de pré-cálculo.

Raquel: Você considera que as atividades têm auxiliado os alunos?

Prof. Leibniz: *Tem ajudado muito. No final do semestre eu peço para eles: façam um relatório com uma descrição do que vocês acharam desse modo de teoria e exercícios da forma que estamos abordando. Muitos acharam maravilhoso e disseram que aquilo salvou o semestre deles de Cálculo I e pediram encarecidamente que isso também fosse comtemplado para outras áreas também e não só o Cálculo I, mas também para Álgebra Linear. Eles pediam que a gente abordasse alguns tópicos de Álgebra Linear e de Teoria dos Números. Mas essa disciplina é curta. Eles são tão carentes em todo o leque de Matemática que eles necessitam de tudo, entende. Se você for ver há uma defasagem enorme na formação deles. Não só na parte de frações, mas também em somar vetores. Eles não sabem o que é isso. São coisas simples que eram para estarem como uma base sólida na base e eles vêm totalmente carentes disso.*

6.4 Considerações sobre as entrevistas dos professores

Neste tópico, estamos interessados em apontar as percepções e concepções dos professores relacionadas à aprendizagem do Cálculo. Para tanto, a partir de suas falas, listamos e categorizamos as ideias relacionadas ao nosso objetivo.

P1) Reconhecimento da existência de empenho e disposição dos professores em intervir na realidade dos estudantes de modo a ajudá-los na superação de suas dificuldades em conteúdos matemáticos fundamentais para a aprendizagem do Cálculo.

Os professores evidenciam fortemente disposição, preocupação e interesse em criar e implementar mecanismos que facilitem a aprendizagem dos estudantes buscando saídas para contornarem a problemática recorrente da aprendizagem do Cálculo na universidade. Isso é demonstrado na criação de ambientes de aprendizagem os mais diversos: os modelos magistral e semipresencial, e, por último, a disciplina que trata de revisar os conteúdos de pré-cálculo.

Nesta última iniciativa, há uma preocupação do docente em procurar fazer questionamentos que levem seus estudantes a uma postura mais crítica diante dos temas estudados. Ao mesmo tempo, ele enfatiza a importância de se não deixar de lado os aspectos formais dos conteúdos, como as demonstrações, que têm um papel essencial nos estudos futuros dos licenciandos e bacharelandos de Matemática.

Aos sistemas magistral e semipresencial são incorporados os usos das novas tecnologias: plataforma da disciplina no ambiente *Moodle*, videoaulas, textos online, entre outros, elaborados como de material de suporte às disciplinas. Todas essas atitudes apontam para uma reconfiguração das salas de aulas em um espaço de trabalho (LACHINI, 2001), onde tanto alunos quanto professores atuam cooperativamente em busca de resultados significativos, mas, principalmente, em que a transferência do conhecimento não é mais propriedade predominante dos docentes. Esse é o modelo desejável por todos os professores e educadores matemáticos.

P2) Reconhecimento por parte dos docentes da existência de lacunas conceituais do ensino básico e dificuldades nos métodos de estudos dos estudantes iniciantes.

Os professores reforçam as falas de muitos outros docentes do Ensino Superior, não somente de Matemática, que atribuem o insucesso dos estudantes à falta de conhecimentos em conteúdos considerados básicos (ALMEIDA et al, 2007). Em uma das falas, conteúdos do Ensino Fundamental considerados como pertencentes ao Ensino Médio. Um dos docentes entrevistados destaca que *"o principal problema hoje não é o Cálculo"*. De fato, como verificamos em nossas análises de produções no capítulo anterior, nossos estudantes são hábeis nos usos de fórmulas de derivação e integração, mas falham em conceitos considerados elementares como algumas manipulações algébricas.

Os docentes foram enfáticos em suas observações sobre a falta de maturidade e pensamento crítico. Nesse caso, os alunos não conseguem associar o Cálculo teórico recebido e anotado nas aulas teóricas com o Cálculo das situações-problema (LACHINI, 2001). Um dos professores destacou a ausência e deficiências nos métodos de estudos, além das práticas de resoluções de exercícios orientadas para as avaliações. Ele afirma: *eles não* ***se sabem como estudantes*** *porque nunca tiveram que estudar de verdade* e acrescenta: *Ele nem sabe direito como ele próprio aprende.*

P3) Os docentes compreendem, fomentam e valorizam as atividades nos grupos

Além do uso das novas tecnologias, os professores avaliam positivamente as experiências de resoluções de exercícios em grupos dos sistemas magistral e semipresencial. Eles classificam tais práticas como ativas, colaborativas e estimuladoras de uma maior participação dos estudantes no processo de aprendizagem do Cálculo.

Essas posturas vão ao encontro das necessidades expressas pelos estudantes nas entrevistas. Elas também confirmam nossa pesquisa prática que aponta para a necessidade da implementação de espaços dialógicos de discussão, estudo e de liberdade para que os estudantes possam expor seus questionamentos acerca dos temas matemáticos estudados.

6.5 Interseções, convergências e divergências: um resumo

As falas dos professores e dos estudantes, aqui apresentadas, estão repletas de assuntos imbricados nas relações entre docentes e discentes do Ensino Superior. Entretanto, tendo em vista nossos objetivos, resumimos neste item as questões que mais se aproximavam deles, procurando evidenciar os pontos comuns entre as falas dos sujeitos.

Esses sujeitos compõem a sala de aula de Cálculo ocupam papéis específicos e têm expectativas e percepções distintas nesse universo acadêmico. Por exemplo, com relação ao conteúdo programático, percebemos a importância dada pelos docentes aos temas a serem ensinados e aos métodos usados em suas aulas (LACHINI, 2001). Os estudantes, por sua vez, desejam estar preparados para as avaliações e, assim, terem sucesso naquela etapa para seguirem com os estudos.

Tanto professores quanto estudantes reconhecem a falta de preparo dos discentes ingressantes com relação aos conteúdos matemáticos elementares e que acabam interferindo no processo de aprendizagem e levando a insucessos. Isso foi citado pelos dois entrevistados e foi exemplificada usando situações ocorridas nos procedimentos algébricos de resolução de Limites ou de Integrais. Aqui temos um paradoxo: se a escola básica tem pautado suas práticas nos procedimentos (NASSER, 2009), como é que os estudantes têm tido problemas justamente com esses procedimentos?

Os estudantes elogiam as possibilidades de terem acesso aos vídeos produzidos para os cursos e esses se verificam como suporte relevante às aulas teóricas e que têm atendido às suas necessidades de priorizarem a internet como ferramenta de estudo. Os professores percebem as necessidades e as consequências negativas na vida dos estudantes do fracasso no Cálculo. São mencionados sentimentos como baixa estima, desmotivação para os estudos, tristeza e timidez. Ou seja, há por parte dos docentes o reconhecimento de uma dimensão afeto-emocional atrelada ao fenômeno da aprendizagem matemática. Eles tentam ajudar efetivamente, apresentando novas propostas como, por exemplo, o recém-criado curso de pré-cálculo. Essa iniciativa é importante, porém ainda restrita a um pequeno número de estudantes. Apesar dessa preocupação, os docentes não conseguem vislumbrar, em curto prazo, alguma possibilidade de criação de um curso para atender a um maior número de pessoas, mas têm pensado e discutido ideias e possibilidades para contornar essa demanda.

Em síntese, temos de um lado, estudantes despreparados para um curso com a complexidade do Cálculo e buscando ajuda para suprirem suas lacunas de aprendizagens matemáticas fundamentais. Do outro lado temos um grupo de professores munidos de ferramentas poderosas de transformação. Entre elas estão o interesse pelas necessidades de aprendizagens dos estudantes, a capacitação teórica e a capacidade de criar e colocar em prática modelos metodológicos inovadores e adaptados às exigências tecnológicas dos nossos dias.

Apesar de todo esse empenho, os índices de reprovação mantêm-se elevados. Percebemos que há um espaço vazio entre esses dois lados e que deve ser construída uma ponte para que ambos trilhem um caminho que convirja para uma aprendizagem significativa do Cálculo. De que forma ela poderá ser construída?

A investigação aqui relatada e as experiências dos Grupos de Estudos apontam para caminhos que poderão servir de pilares na construção de propostas institucionais que possam amenizar o quadro de reprovações. O próximo capítulo traz uma síntese desse relatório de pesquisa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao chegarmos a este estágio do trabalho investigativo, olhamos para o percurso percorrido com o intuito de fazermos uma apreciação geral do que foi realizado em termos de métodos, dos resultados, das percepções e das perspectivas futuras para, por fim, tecermos nossos comentários finais. Para isso, organizamos nossas considerações em quatro partes.

Na primeira parte, verificamos se foram obtidas respostas para as nossas perguntas iniciais. Em seguida, sintetizamos as principais constatações reveladas pela investigação. Subsequentemente, avaliamos nosso estudo e propomos encaminhamentos para pesquisas futuras. Para concluir, expressamos nossas considerações sobre o significado desse trabalho na constituição da professora-educadora-pesquisadora como sujeito aprendente.

7.1 Considerações sobre os objetivos da pesquisa

Os principais elementos que levaram à concepção e implementação deste estudo investigativo foram a atividade profissional da professora-pesquisadora, sua docência no Cálculo, bem como seu interesse no entendimento das dificuldades de aprendizagens dos estudantes. Este estudo teve como objeto de pesquisa a análise de produções escritas de estudantes de um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral e suas implicações no processo de aprendizagem dessa disciplina no Ensino Superior. A partir desse objeto, foram estabelecidas as questões de pesquisa e, antes de serem definidos os objetivos específicos, foi feita a opção pelo foco nos processos algébricos dos registros escritos de estudantes, tendo como justificativa o tipo de trabalho prático que se esperava fazer nos Grupos de Estudos de Cálculo.

Empenhados em encontrar respostas para as perguntas de pesquisa e no delineamento da última parte do processo investigativo, foi feita uma pesquisa exploratória durante três semestres. Nessa pesquisa, foram criados dos Grupos de Estudos de Cálculo para estudantes de Matemática, na primeira vez e depois, para outros grupos de estudantes. Todos os estudantes de Cálculo colaboradores da pesquisa experimentavam alguma dificuldade de aprendizagem com esse objeto de conhecimento no momento que fizeram parte da investigação.

O objetivo geral da pesquisa foi analisar produções escritas de estudantes em atividades de Cálculo Diferencial e Integral com o propósito de identificar elementos indicadores de possíveis relações entre dificuldades, de ordem conceitual ou nos procedimentos algébricos, com o processo de aprendizagem dessa disciplina. Para alcançar esse objetivo, foi criada a última versão dos Grupos de Estudos. Esse grupo foi composto por uma maioria de estudantes que tiveram pelo menos uma reprovação no Cálculo. Essa reprovação foi considerada como uma das evidências de que estavam vivenciando alguma dificuldade de aprendizagem.

Nos Grupos de Estudos, foram colhidas as produções escritas originadas de resoluções de exercícios e situações-problema ligadas aos tópicos matemáticos e que embasam e estruturam um curso inicial de Cálculo, a saber: operações com os números reais, funções, equações, Limites, Derivadas e Integrais (ÁVILA, 1981; SIMMONS, 1987; THOMAS et al, 2010).

Esses tópicos foram usados para agrupamento e apresentação das análises desta pesquisa e com elas foram apresentados os respectivos registros procedimentais dos estudantes selecionados. No exame e discussão dos procedimentos dos protocolos escritos, foi usada uma variedade de autores para fundamentar teoricamente nossas observações e conclusões. Entre eles, destacamos: D'ambrosio, 2009; Dreyfus, 2002; Freire, 2011; Igliori, 2015, Muniz, 2015; Rasmussen; Marrongelle; BORBA, 2014; Skovsmose, 2007; Tall (2012) e Vergnaud (2009)

A construção das análises levou em conta a abordagem do nosso objeto de pesquisa expresso pelos objetivos específicos. Todas as análises e discussões de protocolos de estudantes realizadas nas cinco seções do quinto capítulo, indicam o cumprimento dos dois primeiros objetivos específicos. O primeiro deles: analisar produções escritas, na forma de protocolos, de estudantes em atividades de Cálculo Diferencial e Integral foi enunciado mais genericamente e o segundo, especificava o que observaríamos nessas análises, ou seja, pretendíamos identificar e caracterizar erros, procedimentos e estratégias de resolução em atividades de Cálculo Diferencial e Integral com ênfase nos aspectos algébricos das produções escritas dos estudantes.

Os dois últimos objetivos específicos foram enunciados da seguinte forma:

- Analisar os atuais procedimentos didáticos, pedagógicos e metodológicos que visam à aprendizagem do Cálculo no local em que foi realizada a pesquisa.
- Buscar, junto a docentes e discentes, percepções sobre as aprendizagens do Cálculo.

A apreciação desses dois objetivos foi realizada implicitamente nas análises e, mais diretamente, com a descrição do modelo de ensino de Cálculo na universidade em que foi realizada a pesquisa no quarto capítulo, juntamente com as entrevistas apresentadas no sexto capítulo.

Nesse sexto capítulo puderam também ser abordados os processos didáticos, pedagógicos e metodológicos do modelo vigente na universidade por meio das entrevistas feitas com docentes e discentes. Foram ouvidos dois sujeitos que representaram os estudantes de Cálculo para falarem de suas necessidades e expectativas no processo de aprendizagem e três professores representando os docentes dessa disciplina.

Consideramos ter alcançado nossos objetivos satisfatoriamente. Assim, listamos, a seguir, as principais conclusões e observações sinalizadas pela pesquisa.

7.2 Considerações sobre as principais conclusões

O sucesso dos universitários ingressantes na aprendizagem dos novos conceitos do Cálculo depende de suas experiências prévias nos estudos dos conteúdos matemáticos (TALL, 2010; LACHINI, 2001). Essa é uma realidade que foi considerada como ponto de partida de nossa pesquisa ao analisarmos os registros escritos dos estudantes.

Desse modo, nessas análises buscávamos a explicitação dos conteúdos do ensino básico em que os estudantes apresentavam dificuldades nos momentos de resoluções das atividades. Logo, partindo desse pressuposto, enunciamos, a seguir, nossas constatações:

C1) Estudantes ingressantes apresentam expressivas deficiências em fundamentos de Matemática da Educação Básica, mais especificamente, em temas do Ensino Fundamental.

Nossas análises identificaram dificuldades em muitos dos conteúdos do Ensino Médio como, por exemplo, no campo conceitual das Funções que são basilares para as aprendizagens do Cálculo (STEWART, 2011). Entretanto, foram observadas lacunas e dificuldades na conceitualização e representação dos números reais, nos conceitos e aplicações das operações básicas no conjunto dos números reais, nas operações com frações, em cálculos de raízes quadradas, operações de potenciação, no uso e compreensão da linguagem algébrica, entre outros assuntos, todos relacionados a temas do Ensino Fundamental, muitos deles dos anos iniciais, em especial do 6º ao 9º ano.

C2) As dificuldades em conteúdos matemáticos anteriores revelam-se como obstáculos à aprendizagem do Cálculo.

No quinto capítulo, apresentamos protocolos com evidências das dificuldades dos estudantes em resoluções envolvendo Equações e Funções. Nesse mesmo capítulo, pudemos perceber que essas dificuldades se constituíam como obstáculos à compreensão de temas mais complexos e abstratos do Cálculo, como o estudo de Limites, Derivadas e Integrais. Como consequência, e embora os estudantes tenham demonstrado ter habilidades em técnicas de derivação ou de integração revelados pelas construções lógicas ou pelos passos de suas resoluções, os processos são equivocados e redundam em erros e insucessos nas avaliações.

A partir das nossas observações em sala de aula e das entrevistas com os estudantes, podemos assumir que os ingressantes são sujeitos que, em sua maioria, experimentaram e desenvolveram uma relação afetiva positiva com os objetos de conhecimento matemático do Ensino Básico. Isso foi sinalizado pelas boas experiências acadêmicas com as atividades matemáticas desse período. Como consequência, fizeram a opção por um curso das áreas das ciências exatas ou tecnológicas.

Parte desses estudantes, aparentemente, indicou não ter tido grandes dificuldades com as aprendizagens matemáticas no Ensino Básico, mas, ao ingressarem na universidade, eles são confrontados com exigências de conhecimentos e habilidades em conteúdos que não tiveram a oportunidade de estudar, aprender ou de aprofundar seus estudos anteriormente. Porém, a academia parte do pressuposto que esses sujeitos têm familiaridade no uso e aplicação desses saberes, pois são pré-requisitos para a entrada na universidade.

Ao passarem no vestibular, esses sujeitos garantiram seu direito de acesso ao Ensino Superior, alcançando uma etapa importante em seu processo de desenvolvimento e vislumbrando novos desafios. Porém, boa parte deles não sabe que não estão preparados para enfrentarem as exigências complexas e rigorosas do ponto de vista algébrico e conceitual das novas aprendizagens do Cálculo. Somado a tudo isso, deveria ser levado em conta que é impossível que um estudante absorva essas novas e complexas ideias em um curto período de tempo de um semestre (TALL, 1992).

C3) Alguns estudantes demonstram ter compreendido conceitos como Limites, conhecem as regras de derivação ou integração, porém falham nos processos operatórios mais simples relacionados às aprendizagens do Ensino Fundamental, tais como o uso da propriedade distributiva, na fatoração, na determinação do valor de uma função, entre outros.

Os protocolos evidenciaram essa afirmação ao apresentarem exemplos de resoluções em que processos elaborados como o cálculo de um Limite ou o uso de uma regra de derivação ou de integração são feitos corretamente, sinalizando aquisição de conhecimento desses novos conceitos relacionados ao Ensino Superior. Apesar disso, muitos desses estudantes não conseguem concluir a atividade por errarem nos processos algébricos básicos.

C4) Os Grupos de Estudos de Cálculo evidenciaram a necessidade da constituição na universidade de espaços de estudos e interações dialógicas com mediação feita por professores e estudantes.

As lacunas evidenciadas pelos estudantes ingressantes não serão sanadas simplesmente pelo acesso à universidade (LOPES, 1999) ou por estarem cursando o Cálculo. Entretanto, os professores esperam que os ingressantes tenham familiaridade com esses assuntos, imaginam que eles poderão superar suas dificuldades sozinhos e atribuem as dificuldades e lacunas conceituais e procedimentais ao Ensino Médio.

O insucesso nas avaliações escritas leva à reprovação no curso, à frustação e, em muitos casos, à evasão do Ensino Superior. Na universidade em que foi feita a pesquisa, devido aos elevados índices de reprovação e para que os estudantes reprovados não ficassem fora da matrícula, foi criado o curso de Cálculo na modalidade semipresencial. Na entrevista transcrita no sexto capítulo, o professor coordenador desse curso confirmou que os alunos ingressantes dessa modalidade mostram-se desmotivados, desanimados e com baixa estima.

Esses sentimentos afetarão o prosseguimento dos estudos acadêmicos desses alunos e sua continuidade na universidade dependerá decisivamente da implantação de ambientes didático-pedagógicos que se constituam como espaços acadêmicos de aprendizagens matemáticas, de interações sociais e de diálogos, uma vez que os sujeitos aprendentes devem ser os agentes ativos e críticos da aprendizagem. De acordo com Muniz, eles são seres matemáticos, mas, sobretudo, são *reais*, conforme denotação de Skovsmose (2009), ou seja, têm emoções e necessidades básicas, como, por exemplo, o desejo de, no ambiente do Ensino Superior, poderem comunicar suas dúvidas, carências e dificuldades encontradas no processo educacional.

É possível que estejamos sentindo nas universidades as consequências de um ensino básico deficiente, como declaram todos os professores entrevistados. Essa é, portanto, mais uma das razões pelas quais a comunidade acadêmica deveria criar esses espaços de apoio. As atividades dos Grupos de Estudos, realizadas nesta pesquisa, permitiram a formação de um espaço pedagógico e dialógico onde a maioria dos participantes tinha em comum o fato de estarem vivenciando alguma dificuldade com o Cálculo e o desejo de superá-la, já que, uma vez obtida a aprovação, poderiam avançar na vida acadêmica.

Apoiados na ideia fundamental que sempre teremos dificuldades e desafios a superar, mas que o diálogo daqueles que aprendem com aqueles que ensinam é fator essencial no encorajamento de cada ser aprendente a assumir a aprendizagem dos temas do Cálculo, defendemos a necessidade de criação de alternativas permanentes de auxílio e acolhimento aos estudantes ingressantes com lacunas nas aprendizagens matemáticas. Tais alternativas devem ser discutidas e colocadas em prática (RABELO; MAGALHÃES; FURTADO, 2015). Assim, consideramos que os resultados das análises das produções escritas de estudantes devem ser disseminados entre os docentes de Cálculo para que tomem conhecimento das necessidades teóricas básicas de parte de seus estudantes e possam intervir a fim de que se tenham melhores resultados de aprendizagem no Cálculo.

Nossas experiências com os Grupos de Estudos como atividade de extensão se mostraram oportunas para servirem de exemplo a ser considerado, melhorado e ampliado. Isso foi confirmado em sua última versão realizada com estudantes do Cálculo semipresencial, através do número de participantes que se integraram e cooperaram com a atividade. Em sua atmosfera de estudos, os encontros dos Grupos de Estudos possibilitaram a formação de um espaço cooperativo e dialógico em que os estudantes se sentiram seguros para expressarem suas ideias, conforme relatado por eles nas entrevistas.

Entendemos que o ambiente criado nos Grupos de Estudos contribuiu para a superação dessas dificuldades ao possibilitar o compartilhamento entre os pares de suas inquietações e dificuldades com o Cálculo, mas também para a troca de saberes ocorrida nos pequenos grupos. Devido às suas dimensões, esse espaço se diferenciou da sala de aula convencional, foi uma atividade extracurricular e contou com a mediação da professora-pesquisadora e dos monitores. Esses últimos, estudantes que já tinham adquirido experiências com o Cálculo. Essa configuração facilitou a comunicação e viabilizou aos participantes a oportunidade de tirarem dúvidas conceituais, de exercitarem os temas do curso e de receberem orientações acerca de métodos de estudos.

Portanto, o trabalho de pesquisa aqui descrito aliou a investigação científica de um fenômeno acadêmico concreto a uma práxis voltada para a compreensão de desafios de aprendizagem associados a essa realidade. Considerando essa missão, reforçamos a nossa tese de pesquisa pela seguinte proposição:

Se *alguns dos momentos de aprendizagem do Cálculo forem pautados em espaços educacionais que considerem cada aluno como um sujeito aprendente em processo de aquisição de conhecimentos e que favoreçam a formação de ambientes pautados em diálogos* *pedagógicos e na mediação,* ***então*** *as dificuldades inerentes ao processo, não se constituirão necessariamente como obstáculos à aprendizagem.*

7.3 Considerações gerais e perspectivas de pesquisas futuras

A tese estabelecida anteriormente emergiu como corolário de todos os estudos e práticas realizadas neste processo investigativo. Consideramos que um dos pontos relevantes de nosso estudo investigativo reside na possibilidade de seu uso como referência para as pesquisas de dificuldades de aprendizagem em outras disciplinas de Matemática do Ensino Superior, como Álgebra Linear, Análise e os outros Cálculos. Esses cursos também têm problemas semelhantes e já têm sido objetos de pesquisa em Educação Matemática (BIANCHINI; MACHADO, 2009; AMORIM; REIS, 2009).

Outro elemento importante desta pesquisa é o fato de que, pela primeira vez, foi registrado formal e cientificamente um estudo sobre os elementos associados às aprendizagens do Cálculo na universidade escolhida como local da investigação. Além desses aspectos, nosso estudo mostrou uma intervenção prática paralela a uma atividade efetiva de sala de aula de Cálculo. Esse tipo de pesquisa tem sido sugerida por pesquisadores e educadores matemáticos que pesquisam Cálculo em contrapartida aos outros tipos de investigação (RASMUSSEN; MARRONGELLE; BORBA, 2014).

Descrevemos, neste relatório de tese, as observações e considerações ligadas diretamente ou associadas ao nosso objetivo de pesquisa. Todavia, o estudo não se encerra aqui. Como a aprendizagem, a Matemática e o conhecimento envolvem ação (SKOVSMOSE, 2009) e, nesse sentido, sabemos que existem outros tantos aspectos correlacionados que poderiam ser aqui abordados. Mencionaremos alguns deles com o propósito de que sirvam de estímulo para pesquisas futuras.

O primeiro deles diz respeito ao fato de termos observado que os professores atuantes no Cálculo, na instituição onde foi feita a pesquisa, demonstram ter ciência e preocupação com o desenvolvimento de espaços de suporte às aprendizagens iniciais de Matemática de universitários ingressantes. Isso foi verificado com a implantação do curso Fundamentos de Matemática I, que está ocorrendo desde o primeiro semestre de 2016.

Desse modo, vislumbramos a necessidade de que seja incentivada a formação de espaços comunicativos, cooperativos e de trocas entre matemáticos e educadores matemáticos para que abracem projetos maiores de pesquisa em que possam, juntos, tratar teórica e praticamente das questões relativas ao ensino e à aprendizagem do Cálculo (RASMUSSEN; MARRONGELLE; BORBA, 2014). Sabemos que a realidade de reprovações e dificuldades de aprendizagens relacionadas ao Cálculo não é exclusiva da universidade pesquisada. Assim, uma possibilidade de estudo para o futuro seria a ampliação da pesquisa incluindo outras instituições brasileiras. Por fim, verificamos que existem poucos dados e publicações acerca dos números e causas da evasão especificamente no Cálculo, sendo esse um interessante tema para futuras investigações.

7.4 Considerações pessoais

A consciência do mundo e a consciência de si como ser inacabado necessariamente inscrevem o ser consciente de sua inconclusão num permanente movimento de busca [...]
(FREIRE, *Pedagogia da Autonomia*, 1996, p. 57)

A escrita desta tese é uma parte especial e significativa de complementação de um ciclo de estudos teóricos, de pesquisas práticas e de interações entre educadores e pesquisadores ligados à Educação Matemática, iniciado quando da entrada da professora-pesquisadora no programa de doutorado. Foi na Educação Matemática que a professora de Matemática do Ensino Superior de uma universidade pública encontrou um local onde pudesse compartilhar suas inquietações e desafios da docência, de modo que obtivesse aprofundamento científico, pelos estudos, além de suporte, amparo e ajuda junto a um grupo de pessoas com aspirações semelhantes. Esse apoio e ambiente contribuíram para que, hoje, estejamos mais fortalecidos para superar os obstáculos e desafios da docência. Mas, sobretudo, nos sentimos mais equipados e confiantes para assumir nossa posição como Educadora Matemática .

O período de doutoramento foi uma imersão no campo da Educação Matemática. Como ele está inserido em um programa institucional, tem um limite temporal para se efetivar, por isso, falamos no início em complementação de um ciclo representado através da conclusão desse relatório de tese. Entretanto, não é o término de uma jornada. Estamos certos de que esse estudo deixa abertos possíveis caminhos para futuras investigações e esperamos que ele inspire outros professores de Matemática a se tornarem educadores matemáticos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Leandro S. Transição, adaptação académica e êxito escolar no Ensino Superior. **Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía y Educación**, Coruña, v. 15, n. 2, Ano 11, p.203-215, 2007.

ALMEIDA, L. S.; SOARES, A. P.; GUISANDE, M. A.; PAISANA, J. Rendimento académico no Ensino Superior: Estudo com alunos do 1º ano. **Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía y Educación,** Coruña, v. 14, n.1, Ano 11, p.207-220, 2007.

AMORIM**,** Frank Victor. **Experiência de Atividades Para o Cálculo Diferencial e Integral com o Software GEOGEBRA.** 2011. 188f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

ALVARENGA, K.; DÖRR, R. C.; VEIRA, V. D. O ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. **Revista Brasileira do Ensino Superior (REBES)**, v. 2, n.4, p. 46-57, 2016.

ARTIGUE, Michele. Analysis. **Advanced mathematical thinking**, p.167-198, 1991.

AUSUBEL, David Paul. **Educational Psychology***:* A Cognitive View. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1968. 685p.

ÁVILA, Geraldo. O Ensino do Cálculo e da Análise. **Revista Matemática Universitária**, v. 33, p. 83-95, 2002.

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo 1***:* funções de uma variável. LTC, 7ª ed. 2003.

BALDINO, Roberto R. Como Integrar Disciplinas do Ponto de Vista Epistemológico. In: ENCONTRO SETORIAL DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO DA UNESP, I, 1995, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia, 1995, p. 30-47.

BALDINO, Roberto R. Assimilação solidária: escola, mais-valia e consciência cínica. **Educação em Foco**. Juiz de Fora: v. 3, n.1, p. 39-63, 1998. Disponível em: <http://globalization.sites.uol.com.br/assimila.htm>. Acesso 10 set. 2015.

BARDI, Jason S. **A Guerra do Cálculo** (Tradução Aluizio Pestana da Costa). 2ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.

BARROSO, N., SOARES, J. M., MOTA, J.; NETO, H. Uma Sequência Didática baseada em Realimentação para o Ensino da Integral. **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior.** Campinas, p. 89-114. SP: Papirus, 2013.

BISOGNIN, E; BISOGNIN, V. Taxa de variação: como professores em formação continuada compreendem o conceito. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM**. Pirenópolis, 2015.

BITTAR, Marilena. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais para o estudo das dificuldades dos alunos na passagem da Geometria Afim à Geometria Vetorial. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**, p. 53-76, Curitiba: Editora CRV, 2009.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K.; ALVAREZ, M. J., VASCO, A. B.; DOS SANTOS, S. B.; BAPTISTA, T. V. M. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** 5 ed. Autêntica Editora, 2013.

BOULOS, Paulo. **Pré-cálculo**. Pearson Makron Books, 2006.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Ed. Edgar Blücher Ltda, 2002, 4ª Ed. 495p.

BRASIL. **Escassez de Professores para o Ensino Médio:** propostas estruturais e emergenciais – Relatório produzido pela comissão especial instituída para estudar medidas que visem a superar o déficit docente no Ensino Médio. Brasília: CNE/CEB, 2007.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert; STEWART, Ian. **What is Mathematics?** An elementary approach to ideas and methods. Oxford University Press, USA, 1996.

COXFORD, Arthur F. et al. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 9-22, 1995.

CUNHA, Simone Miguez; CARRILHO, Denise Madruga. O processo de adaptação ao Ensino Superior e o rendimento acadêmico. **Psicol. esc. educ.**, Campinas , v. 9, n. 2, p. 215-224, dez. 2005. Disponível em: <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-85572005000200004&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 25 jul. 2017.

CUNHA, Luiz G. A.; LAUDARES, João Bosco. Exploração Visual no Estudo do Comportamento de Funções por Meio de suas Derivadas Utilizando Objeto de Aprendizagem em Ambientes Informatizados. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM.** Pirenópolis, 2015.

CURY, Helena Noronha. **As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. Porto Alegre, v. 275, 1994.

CURY, Helena Noronha. Erros, dificuldades e obstáculos em produções escritas de alunos e professores. FROTA, MCR; BIANCHINI, BL; CARVALHO, AFT. **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior.** Campinas, SP: Papirus, 2013.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Os Fundamentos Filosóficos e Epistemológicos do e no Ensino da Matemática. In: FÁVERO, Maria Helena; CUNHA, Célio (Coord.). **Psicologia do Conhecimento.** O Diálogo entre as Ciências e a Cidadania**.** Brasília: UNESCO, 2009, p.85-100.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 2012.

DAMIANI, M. F. Entendendo o Trabalho Colaborativo em Educação e Revelando seus Benefícios. **Educar**. Curitiba, n.31, p.213-230, 2008. Disponível em:<http://www.scielo.br/pdf/er/n31/n31a13.pdf >. Acesso em 13 set. 2015.

DIAS, Ana Lúcia Braz. Resolução de Problemas. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar II – Gestar II. Matemática: **Caderno de Teoria e Prática 1** – TP1: matemática na alimentação e nos impostos. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008, p.45-54.

DIAS, M. A.A. **Aplicações do estudo de cálculo integral no nível básico de ensino associado à resolução do cálculo de áreas de figuras planas.** 2015. Dissertação (Mestrado)- Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

DISTRITO FEDERAL. SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO. **Currículo em Movimento da Educação Básica**; Ensino Fundamental – Anos Finais. Brasília, 2013. Disponível em: http://www.se.df.gov.br/materiais-pedagogicos/curriculoemmovimento.html. Acesso em: 15/03/2017.

DÖRR, Raquel C. Uso de Grupos Colaborativos: Relato de Experiências e Perspectivas de Uso no Ensino Superior. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, 2013, Recife. **Anais do ENEM**, 2013. Relato de Experiência. Disponível em:<http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/pdf/1589_1027_ID.pdf>. Acesso em 30 set. 2015.

DÖRR, Raquel C.; PINA NEVES, Regina. O perfil de ingressantes na Licenciatura em Matemática de uma Instituição Pública Federal do Distrito Federal. In: VI Encontro Brasiliense de Educação Matemática, **Anais do VI EBREM**, 2014. Brasília, DF.

DÖRR, Raquel C.; MUNIZ, Cristiano A. The Mathematical Knowlege of Calculus Students and Possible Relations with Evasion and Failure. **ICME-13**-13th International Congress on Mathematical Education. Comunicação Científica. Hamburgo, Alemanha, Julho 2016.

DÖRR, Raquel C.; MUNIZ, Cristiano A.; PINA NEVES, Regina, S. Operações algébricas e funções como obstáculos à aprendizagem no cálculo. In: I LADIMA. **Anais do 1ºLadima**, Bonito, MS, 2016. Disponível em: http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/Trabalhos/RAQUEL%20CARNEIRO%20DORR.pdf.Acesso em 15/04/ 2017.

DÖRR, Raquel C.; MUNIZ, Cristiano A. Possíveis relações entre evasão e reprovação e os conhecimentos matemáticos anteriores de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral. In: VIII CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - CIBEM -. [A ser publicado nos Anais do VIII CIBEM], Madri, Espanha, Julho 2017. Resumo disponível em: < http://www.cibem.org/images/site/CIBEM_2017_4_Julio.pdf>. Acesso em: 04 agosto 2017.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: **Advanced mathematical thinking**. Springer Netherlands, 2002, p. 25-41.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA - EMR, n. 37, Nov 2012. Disponível em:<http://www.sbem.com.br/files/sumario28.pdf>. Acesso em: 25 set. 2015.

ESCHER, Marco Antonio. **Dimensões Teórico-Metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral:** perspectivas históricas e de ensino e aprendizagem. 2011. 222 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Est. Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro. 2011.

FRANCHI, Anna et al. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. MACHADO, Alcântara, SD et al**. Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo. EDUC, p. 155-195, 3 ed. 2015.

FROTA, Maria Clara Resende. Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo. **Educação Matemática:** a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, p. 89-121, 2001.

FREIRE, Paulo. Criando métodos de pesquisa alternativa: aprendendo a fazê-la melhor através da ação. **Pesquisa participante**, v. 8, p. 34-41, 1981.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia:** saberes necessários à prática educativa**.** São Paulo: Ed. Paz e Terra, 2011.

GABARRÓN, Luis R.; LANDA, Libertad Hernandez. O que é a pesquisa participante? In: BRANDÃO, CR. **Pesquisa participante:** a partilha do saber**,** p. 93-121, 2006.

GATTI, B. A. et al. A atratividade da carreira docente no Brasil. In: Fundação Victor Civita. **Estudos & Pesquisas Educacionais**. Estudos realizados em 2007, 2008 e 2009, São Paulo, n. 1, 2010, 139-209.

GIL, Antonio Carlos. **Didática do Ensino Superior.** São Paulo: Ed. Atlas, 2009.

GOMES, Danilo O. ; Otero-Garcia, Sílvio C.; SILVA, Luciano D.; BARONI, Rosa L. S. Quatro ou Mais Pontos de Vista sobre o Ensino de Análise Matemática. **BOLEMA - BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,** v.29, n.53, p. 1242-1267, dez. 2015.

HYVÄRINEN, O.; HÄSTÖ, P.; VEDENJUOKSU, T. Development and Awareness of Function Understanding in First Year University Students. In: CERME 8, 2013, **Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8).** (p. 2366-2375). Ankara, Turquia, 2013.

IEZZI, Gelson et al. Matemática; lª, 2ª e 3ª série, 2º grau. rev. **São Paulo: Atual**, 1976.

IGLIORI, Sônia B. C. Considerações sobre o Ensino de Cálculo e um Estudo sobre Números Reais. In: REZENDE FROTA, Maria. C.; NASSER, L.(Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: Pesquisas e Debates**.** Recife: SBEM, 2009, v5, p. 11-26.

IGLIORI, Sônia B. C. A noção de “obstáculo epistemológico” e a Educação Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.) **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2015.

IGLIORI, Sônia B. C.; ALMEIDA, Marcio V. Desenvolvimento de Material para o Ensino de Cálculo Diferencial. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,VI, 2015, Pirinópolis. **Anais do VI SIPEM.** Pirinópolis, 2015.

JOB, Pierre; SCHNEIDER, Maggy. Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. **ZDM**, v. 46, n. 4, p. 635-646, 2014.

JESUS, Odirlei S. Estudos relacionados aos conceitos fundamentais de cálculo e análise. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM.** Pirenópolis, 2015.

KAISER, Gabriele. Editorial. **ZDM Mathematics Education**, v.46, p. 505–506, 2014.

LEHMANN, Monique S. **Proposta de uma Sequência Didática para Conceituação de Derivada como taxa de Variação Instantânea.** 2011. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2011.

LIMA, Elon Lages**. Meu professor de matemática:** e outras histórias. Sociedade Brasileira de Matemática, 1987.

LIMA, Gabriel L. **A Disciplina de Cálculo I do Curso de Matemática da Universidade de São Paulo:** um Estudo de seu Desenvolvimento, de 1934 a 1994**.** 2012. 445f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

LIMA, Gabriel. L. Em Busca de uma Identidade para a Disciplina de Cálculo: Primeiras Reflexões. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM.** Pirenópolis, 2015.

LOBO, Rogerio S.. **O Tratamento dado por livros didáticos ao conceito de derivada.** 2012. 147 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo. 2012.

MESSIAS, Maria Alice V. F.; BRANDEMBERG, João C. Discussões sobre a Relação entre Limite e Continuidade de uma Função: investigando Imagens Conceituais. **BOLEMA -** Boletim de Educação Matemática**,** v.29, n.53, p.1224-1241, dez. 2015.

LOPES, A. (1999). Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS**. Matemática Universitária**, 26/27, 123-146.

MONROY, A. A.; ASTUDILLO, M. T. G. Interactive Construction of a Definition. In: CERME 8, 2013, **Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8).** Ankara, Turquia, 2013, (p. 2276-2285).

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de ciências**, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002.

MUNIZ, Cristiano Alberto. O conceito de “esquema” para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Curitiba: Editora CRV, p. 37-52, 2009.

MUNIZ, Cristiano Alberto. A Produção de Notações Matemáticas e se Significado. In: FÁVERO, Maria Helena; CUNHA, Célio (Coord.). **Psicologia do Conhecimento.** O Diálogo entre as Ciências e a Cidadania. Brasília: UNESCO, 2009, p.115-143.

MUNIZ, Cristiano Alberto. As crianças que calculavam: o ser matemático como sujeito produtor de sentidos subjetivos na aprendizagem. 2015. 174 f. **Relatório de pesquisa de pós-doutoramento. Faculdade de Educação**, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

MUNIZ, C. A. Atividade de Interpretação na busca de Explicitação de Conceitos em Ação e Teoremas em Ação a partir de Registros Aritméticos de Crianças consideradas em situação de Dificuldade na Aprendizagem Matemática Escolar. In: SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 1º, 2016, Bonito, MS. **Anais do 1º LADIMA**, Bonito, 2016. Disponível em: ladima.tuseon.com.br/anais---conferencias-e-oficinas.html. Acesso em 25/05/2017.

NASSER, Lílian. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), **Anais...,** v. 9, p. 1-14, 2007.

NASSER, Lilian. Uma Pesquisa sobe o Desempenho de Alunos de Cálculo no Traçado de Gráficos. In: REZENDE FROTA, Maria C.; NASSER, Lilian. **Educação Matemática no Ensino Superior**: Pesquisas e Debates**.** Recife: SBEM, 2009, v5, p. 43-58.

NÓVOA, António et al. Pesquisa em educação como processo dinâmico, aberto e imaginativo. **Revista Educação & Realidade**, v. 36, n. 2, 2011.

PAIS, Luiz C. **Didática da matemática**. Uma análise da influência francesa. 3. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

PALIS, Gilda de La Roque. Pesquisa sobre a Própria Prática no Ensino Superior de Matemática. In: REZENDE FROTA, Maria. C.; NASSER, Lilian. (Org). **Educação Matemática no Ensino Superior**: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009, v5, p. 203-221.

PASSOS, M. M. 2004. **Ser professor de matemática e a reconstrução da subjetividade:** estudo realizado com alunos do primeiro ano do curso de matemática da Universidade Estadual de Londrina. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

PINO-FAN, Luis R.; GODINO, Juan D.; FONT, Vincenç. Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas. **BOLEMA -** Boletim de Educação Matemática**,** v.29, n.51, p. 60-89, abr. 2015.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: interciência, 2.reimpr, 196p., 1995.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. 2009. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20(Brochura_Algebra)%20Set%202009.pdf Acesso em 04.05.2017.

RAAD, M. R **História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral:** a existência de uma cultura. 2012. Dissertação (Mestrado), UFJF, Juiz de Fora, 2012.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM Mathematics Education**, v. 46, p. 507-515, 2014.

REY, Fernando Luis González. A pesquisa e o tema da subjetividade em educação. **Psicologia da Educação,** n. 13, p. 9-15, 2001.

REZENDE, Wanderley M. **O Ensino de Cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468f. (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, 2003.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a formação do professor:** explorando os conceitos de equação e de função**.** Belo Horizonte. Autêntica Editora, 2015.

ROBERT, Aline; SCHWARZENBERGER, Rolph. Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. In: **Advanced mathematical thinking**. Springer Netherlands, 2002, p. 127-139.

ROSA, Odileia S. **Aspectos Motivacionais do Cálculo Diferencial e Integral.** 2011. 117f. Dissertação.´(Mestrado Profissional em Educação Matemática)- Universidade Severino Sombra, Vassouras, RJ, 2011.

ROLOFF, Micheli C. S. **Representações Sociais de Matemática:** um Estudo com Alunos de Educação de Jovens e Adultos. 2009. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, 2009. Disponível em: <http://www6.univali.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=647 >. Acesso em 04 set. 2015.

SANT’ANA, Marilaine, F; TEDESCO, Priscila. Discussão das noções de limite e infinito. **Educação Matemática em Revista**, número 17, ano 11, Dez. 2004.

SANTOS, Marcio B. **Processos de Comunicação da Disciplina Cálculo I do Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade a Distância do CESAD/UFS/UAB.** 2012.130f. Dissertação (mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática) – Fundação Universidade Federal de Sergipe, Sergipe, 2012.

SILVA, Erondina. O Impacto do Curso Pie na Reconstrução de Representações Sociais da Matemática e do seu Processo de Aprendizagem e Ensino: Um estudo de Caso. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, 2004, Recife. **Anais do ENEM**, 2004. Comunicação Científica. Disponível em: <http:/www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/CC35911069172.pdf>. Acesso em 07 set. 2015.

SILVA, Erondina Barbosa da. O diálogo entre diferentes sujeitos que aprendem e ensinam matemática no contexto escolar dos anos finais do Ensino Fundamental. 2014. Tese (Doutorado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade de Brasília. Brasília, 2014.

SILVA, José Maria da; SILVEIRA, Emerson Sena da. **Apresentação de trabalhos acadêmicos:** normas e técnicas. 7.ed. Vozes, 2012.

SILVA, Maria Regina G. Concepções sobre Assimilação Solidária em um Curso Universitário. **Revista Ciência e Educação.** Bauru: v.5, n.2, 1998. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1516731319980002000005&script=scit> Acesso em: 10 set. 2015.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, São Paulo, 1987, vol. 1.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática,** n.14, p.66-91, 2000.

SKOVSMOSE, Ole. Preocupações de uma Educação Matemática Crítica. In: FÁVERO, Maria Helena; CUNHA, Célio (Coord.). **Psicologia do Conhecimento.** O Diálogo entre as Ciências e a Cidadania. Brasília: UNESCO, 2009, p.101-114.

SKOVSMOSE, Ole. **Um convite à educação matemática crítica**. Tradução de Orlando Andrade Figueiredo. Campinas, SP: Papirus, 2014.

SOUSA, Giselle C. Impacto de programas auxiliares na disciplina de cálculo diferencial e integral I. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM.** Pirenópolis, 2015.

SOUZA, Maria G. **Uma Estratégia Metodológica Para a introdução de um curso de Equações Diferenciais Ordinárias.** 2011. 141 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. PUC Minas, Belo Horizonte. 2011.

SOUZA, M. M. **Uma história do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília – UNB: 1962-1972. 2015**. 229f. Tese (Doutorado) - Universidade Anhanguera de São Paulo, 2015.

STEWART, James. **Cálculo**. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

SUREDA FIGUEROA, Patricia; OTERO, María Rita. Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, v. 6, n. 1, p. 124-138, 2011.

SWOKOSWSKI, Earl W. **Cálculo com Geometria Analítica**, 3.ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

SZECSEI, Denise. **Homework Helpers**: Calculus. Career Press, NYC, USA, 2007. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=O-jnso2r5xwC&pg=PA1&hl=pt-BR&source=gbs_selected_pages&cad=3#v=onepage&q&f=false Acesso em 17/06/2017

TACCA, Maria Carmen Villela Rosa; GONZÁLEZ REY, Fernando Luis. Produção de sentido subjetivo: as singularidades dos alunos no processo de aprender. **Psicologia: ciência e profissão**, v. 28, n. 1, p. 138-161, 2008.

TALL, David. Students’ difficulties in Calculus. In**: Proc. ICME 1992 of the Working Group 3**, Vol. 2, pp. 13-28, 1993.

TALL, David. The psychology of advanced mathematical thinking. In: **Advanced mathematical thinking**. Springer Netherlands, 2002. p. 3-21.

TALL, David; SCHWARZENBERGER, Rolph LE. Conflicts in the learning of real numbers and limits. **Mathematics teaching**, v. 82, p. 44-49, 1978.

THOMAS, George B. et al. **Cálculo, vol. 1**. 10º Editora: Prentice-Hall, 2010.

THOMPSON, P. W.; SILVERMAN, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), **Making the connection**: Research and teaching in undergraduate mathematics (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America. Disponível em at http://pat-thompson.net/PDFversions/2008MAA Accum.pdf. Acesso em 07/07/2017.

TORRES, Patrícia L.; ALCANTARA, Paulo R.; IRARA, Esrom A. F. Grupos de Consenso: Uma Proposta de Aprendizagem Colaborativa para o Processo de Ensino-Aprendizagem. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v.4, n.13, p.129-145, 2004.

TREVISAN, André L.; BORSSOI, A. H.; ELIAS, H. R. Delineamento de uma sequência de tarefas para um ambiente educacional de cálculo. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM.** Pirenópolis, 2015.

TRIVIÑOS, Augusto N. S. **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais.** A Pesquisa Qualitativa em Educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques** v. 10, n.2, 3, p.133-170, 1990.

VERGNAUD, Gérard. ¿ En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 12, n. 2, p. 285-302, 2007.

VERGNAUD, G. **O que é aprender**. A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais. Curitiba: Editora CRV, 13-26, 2009.

VIIRMAN, O., What We Talk about When We Talk about Functions - Characteristics of the Function Concept in the Discursive Practices of Three University Teachers. In CERME 8, 2013, **Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8).** Ankara, Turquia, 2013, p. 2466-2475.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de consentimento

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA (UnB)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO (PPGE)
CURSO: DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do projeto: Análise de uma experiência de aprendizagem em Educação Matemática em atividades de Cálculo Diferencia e Integral
Orientador responsável: Prof. Dr. Cristiano Alberto Muniz
Pesquisador responsável: Raquel Carneiro Dörr **E-mail:** raqueldoerr@gmail.com
Instituição/Departamento: Universidade de Brasília (UnB)/ Programa de Pós-Graduação em Educação **Telefone para contato:** (61) 3107-6243

Você está sendo convidado (a) para participar, como voluntário, em uma pesquisa na área da Educação. Você precisa decidir se quer participar ou não. Por favor, não se apresse em tomar a decisão. Leia cuidadosamente o que se segue e pergunte ao responsável pelo estudo qualquer dúvida que você tiver. Após ser **esclarecido**(a) sobre as informações a seguir, no caso de aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua e a outra é dos pesquisadores responsáveis. Também garantiremos a preservação de sua identidade.
O objetivo geral da pesquisa é analisar processos de aprendizagem de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral a partir da experiência de atividades no Grupo de Estudos de Cálculo. Para isso foi criado o Grupo de Estudos de Cálculo da qual você está participando. Nesse Grupo será realizada uma observação participante com o auxílio do diário de campo para registrar a rotina de trabalho. Durante o processo da pesquisa utilizaremos questionários para composição do perfil do participante, recolhimento de atividades escritas, entrevistas, imagens fotográficas e eventualmente, a realização de uma videoformação (filmagem e posterior análise de flashs de aula – se autorizado) e, por fim, um encontro final de discussão sobre a validade da atividade e sua contribuição para a aprendizagem do participante. Portanto, seu envolvimento direto consistirá em produzir conhecimentos em colaboração com seus pares e participar de encontros do Grupo de Estudos de Cálculo e conversas que poderão ser gravadas em áudio.

No caso de surgirem situações que possam causar algum tipo de constrangimento, estas podem ser renegociadas com os pesquisadores, bem como está garantido o direito de retirar o seu consentimento em qualquer etapa da pesquisa.
A adesão, por um semestre (ou até dois), a este processo de pesquisa permitirá a interação dos participantes e a descrição de obstáculos de aprendizagem específicos relacionados ao Cálculo que servirão para a melhora de resultados de aprendizagem dessa disciplina.
Os encontros e as atividades do Grupo de Estudos permitirão o compartilhamento das informações veiculadas no decorrer do estudo, dando oportunidade para que sejam incluídas ou retiradas informações ao longo de toda pesquisa. A maior parte das informações coletadas será na forma de produções escritas que serão recolhidas nas atividades do Grupo de Estudos. A divulgação das informações produzida será realizada apenas com a sua autorização. O acesso aos dados brutos somente será permitido ao pesquisado interessado e aos pesquisadores. Caso

haja necessidade de maiores esclarecimentos ou surgirem eventuais dúvidas, pode entrar em contato com os pesquisadores responsáveis.

Consentimento da participação do(a) colaborador(a) na pesquisa

Eu ____, RG ou CPF nº _________________, abaixo assinado, concordo em participar do estudo: **Análise de uma experiência de aprendizagem em Educação Matemática em atividades de Cálculo Diferencia e Integral**. E declaro que tive pleno conhecimento das informações aqui descritas pela Profª. pesquisadora Raquel Carneiro Dörr, e firmei meu compromisso em participar deste estudo. Ficaram claros, para mim, quais são os propósitos do estudo, os procedimentos a serem realizados e as possíveis dificuldades e sobre as garantias de confidencialidade.

Concordo, voluntariamente, em participar deste estudo e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, antes ou durante a realização do Grupo de Estudos. A retirada do consentimento da participação no estudo não acarretará em penalidades ou prejuízos pessoais ou profissionais.

E por ser verdade os termos aqui presentes, assinamos nas duas vias.

Local e data ____

____

Colaborador(a) do estudo

____

Pesquisadora responsável direta pelos estudos

Declaramos para os devidos fins que esse Termo de Consentimento tem validade junto aos documentos da pesquisa.

APÊNDICE B – Avaliação inicial

Grupos de Estudos de Cálculo

Nome____

Curso____

Avaliação Inicial

1) As atividades do grupo de estudos o ajudaram na preparação da primeira prova? Justifique sua resposta.

2) Marque as alternativas a seguir, caso tenha experimentado algumas das dificuldades seguintes nos estudos do Cálculo.

   __Conteúdos do Ensino Fundamental e Médio.
   Cite os conteúdos:

   __Linguagem Matemática (simbologia, notações, etc)

   __Outras:

3) Se tiver sugestões para atividades do Grupo de Estudos que possa auxiliá-lo no estudo do Cálculo, por favor, escreva no verso desta folha.

Obrigada!

APÊNDICE C – Avaliação final

Grupos de Estudos de Cálculo

Nome____

Curso____

Avaliação Final

1) As atividades do Grupo de Estudos contribuíram para o seu desempenho no curso? Se sim, de que forma?

2) Quantas horas de estudo semanais você dedicou ao estudo de Cálculo?

3) Que materiais (livro, listas, anotações de aulas, etc) você usou para os estudos?

4) Sugestões de melhoras para as atividades do grupo de estudos:

Obrigada!

APÊNDICE D – Pré-teste de Cálculo I

Identificação

Nome:____Idade:_____

Instituição em que fez Ensino Médio:________________________

Sexo: __________

Resolva as questões e deixe todo o desenvolvimento no rascunho à direita da folha. Não apague o rascunho.

Cálculo I – Pré-Teste

1. Calcule:

a) $\left|-\frac{3}{4}\right| =$

b) $-|10| =$

c) $|-7+4| =$

d) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} =$

e) $|-2| - |-2| =$

f) $|-5-3| =$

g) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} =$

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\,(\sqrt{2}-\sqrt{3}) =$

2. Verdadeiro (V) ou Falso (F):

e) $\frac{2}{0} = 2$

e) $2 > x > 5$

f) $\frac{5}{0} = 0$

f) $-7 > -3$

g) $\frac{0}{5} = 0$

g) $-|x| \leq x \leq |x|$

h) $\frac{0}{0} = 1$

h) $\sqrt{x^2} = |x|$

3. Calcule

d) $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} =$

e) $\frac{5}{x} - \frac{9}{x} =$

f) $(-5)^2 =$

g) $-5^2 =$

h) $4^0 =$

i) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} =$

4. Simplifique

c) $\frac{21x^8y^7}{3xy^6}$ =

d) $\frac{(4x^2y^{-1})^{-1}}{xy}$ =

5. Fatore:

a) $4x^2 - 3x$ =

b) $3y^4 + 3y^2 - 6 =$

6. Resolva as equações:

a) $2 + x = 3\sqrt{x}$

b) $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = 12$

7. Calcule f(2 + h) para a função *f(x)* = $x - x^2$.

8. Encontre *fogoh* se *f(x)* = $\frac{x}{x+1}$, *g(x)* = x^{10} *e h(x) = x + 3.*

9. Dadas as desigualdades

I) sen2 > sen3

II) sen1 > sen30º

III) cos2 > cos3

é correto afirmar que:

a) todas são verdadeiras.

b) todas são falsas.

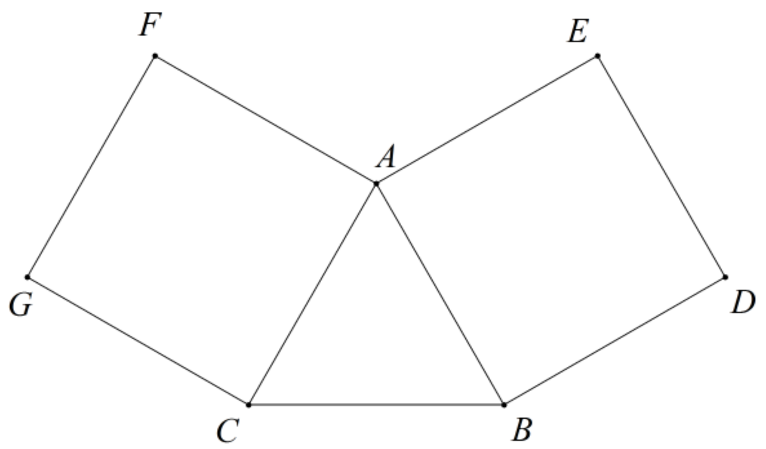
c) somente I e II são verdadeiras.

d) somente II e III são verdadeiras.

e) somente I e III são verdadeiras.

Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/6165682

10. Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero de lado ℓ e ABDE e AFGC são quadrados. Expresse a distância DG em função de ℓ.



Fonte: http://material.descomplica.com.br/matematica/Listadeexercicios-matematica1-trigonometria-linhas-trigonometricas-funcoes-graficos-10-11-2016.pdf

APÊNDICE E – Roteiro de entrevista: estudantes

Roteiro das Entrevistas para os Estudantes

1) Qual o curso de graduação que você está cursando e porque o escolheu?
2) Você estudou o Ensino Médio em que tipo de escola, pública ou particular?
3) Qual era a sua relação com a Matemática antes de entrar no ensino superior?
4) Como foi sua primeira experiência no Cálculo I?
5) A que você atribui as dificuldades apresentadas quando fez o Cálculo I?
6) O que você sugere a outras pessoas que passam ou passaram pelas mesmas dificuldades?
7) E no Cálculo 2, como foi (ou está sendo) sua experiência de aprendizagem?
8) Estando agora em um semestre mais avançado do seu curso, e já tendo cursado pelo menos o Cálculo I, como você associa os conteúdos do curso inicial de Cálculo I com as disciplinas mais avançadas do seu curso? Você vê aplicações e/ ou utilidades?
9) Como você avalia as atividades do Grupo de Estudos de Cálculo?

APÊNDICE F – Roteiro de entrevista: professores

Roteiros das Entrevistas com os Professores

I) Perguntas entrevistas sobre o Cálculo I Semipresencial

1) Como surgiu a ideia de criação do Cálculo I na modalidade SP?

2) Quando ocorreu a primeira versão e quantas turmas?

3) Descreva a metodologia do curso.

4) O que mudou na estrutura inicial para o formato que o curso tem hoje?

5) Quais as principais dificuldades que você, como professor desse curso, observa nos estudantes que procuram o SP?

6) Sobre as atividades em grupo, como você avalia essa experiência?

Sobre o CI

1) Você também participou da criação e implementação da metodologia que hoje é usada no CI?

2) Quais foram as motivações para criação e implementação dessa metodologia?

3) Quais foram as maiores barreiras para a sua implementação?

4) Quais os projetos futuros para atualização/melhora do curso?

5) A que você atribui os elevados índices de reprovação no Cálculo?

6) Há quanto tempo você leciona Cálculo I?

7) Qual é a principal diferença entre o estudante do seu início de docência e o de hoje?

8) Você considera a possibilidade de criação de um apoio pedagógico alternativo para os estudantes com dificuldades de aprendizagem no CI?

Sobre o curso Fundamentos da Matemática

1) Quais foram as motivações para a oferta dessa disciplina?
2) Qual é o conteúdo programático do curso?
3) Quando foi a primeira vez?
4) Sabe se o curso já havia sido oferecido alguma outra vez?
5) O curso é oferecido somente a alunos da Matemática tanto do diurno quanto do noturno.
6) Quais as principais dificuldades que você, como professor desse curso e de Cálculo, observa nos estudantes ingressantes da Matemática?
7) Você considera é as atividades têm auxiliado os alunos?
8) Você considera a possibilidade de extender a oferta dessa disciplina a outros cursos além da Matemática?

ANEXOS

ANEXO A – Lista exercícios – Semana 01

Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 01

Temas abordados: Introdução ao Cálculo e Revisão
Seções do livro: 2.1; 1.1 a 1.3; 1.5; 1.6

1) Se a posição de um carro no instante $t > 0$ é dada por $s(t) = (4 + t^2)$, então a velocidade média entre os instantes $t = 2$ e $t = 2 + h$ é dada por (veja Texto 1 e/ou vídeo)

$$\frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \frac{[4 + (2+h)^2] - [4 + 2^2]}{h} = \cdots = \frac{h(4+h)}{h} = 4 + h.$$

Quanto mais próximo h estiver de zero, mais perto a velocidade média estará da velocidade em $t = 2$, de modo que essa velocidade vale

$$v(2) = \lim_{h \to 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim_{h \to 0}(4 + h) = (4 + 0) = 4.$$

Para cada função abaixo, simplifique o quociente $(s(t_0 + h) - s(t_0))/h$ que dá a velocidade média entre os instantes $t = t_0$ e $t = t_0 + h$. Em seguida, calcule a velocidade $v(t_0)$ fazendo h se aproximar de zero.

(a) $s(t) = t^2$, no ponto $t_0 = 3$

(b) $s(t) = t^3$, no ponto $t_0 = 1$

(c) $s(t) = \sqrt{t}$, no ponto $t_0 = 9$

(d) $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$, com s_0, v, $a \in \mathbb{R}$, em um ponto $t_0 > 0$ genérico

Dica: para o item (b), lembre que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; para o item (c), multiplique o numerador e o denominador por $(\sqrt{9+h} + 3)$

2) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Dado $a \in I$, a *reta tangente ao gráfico de f no ponto* $(a, f(a))$ é a (única) reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação igual a

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

quando o limite existe (veja Texto 2 e/ou vídeo). Neste caso, a equação da reta tangente $y = y(x)$ é dada por $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. A expressão acima significa que, quando x se aproxima de a, o quociente $(f(x) - f(a))/(x - a)$ se aproxima do número $f'(a)$.

Por exemplo, se $f(x) = x^3$ e $a = 1$, então

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = (1^2 + 1 + 1) = 3,$$

de modo que a equação da reta tangente no ponto $(1, f(1)) = (1, 1)$ é $y - 1 = 3(x - 1)$.

Para cada uma das funções abaixo, determine a inclinação $f'(a)$ para o valor de a indicado. Em seguida, calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$

(a) $f(x) = x^2$, para $a = 2$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, para $a = 3$

(c) $f(x) = mx + b$, com m, $b \in \mathbb{R}$, para um valor genérico de a

Dica: para calcular $f'(2)$ no item (a), fatore o numerador $(x^2 - 4)$ de modo a cancelar o denominador $(x - 2)$; no item (b), calcule a diferença $(1/x) - (1/3)$ reduzindo as frações a um mesmo denominador, de modo a eliminar o denominador $(x - 3)$

Revisão

Nos exercícios abaixo são lembrados alguns conteúdos estudados no Ensino Médio. Espera-se que você consiga resolver todos eles. Se não for esse o caso, este é o momento de pegar os livros antigos e recordar as coisas!

1) A função módulo é definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, como sendo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Marcando o ponto x na reta real, o módulo de x é exatamente a distância desse ponto até o ponto 0. Determine para quais valores de x as igualdades abaixo são satisfeitas.

(a) $|x| = 4$ (b) $|2 - x| = -1$ (c) $|x| = -|x|$

(d) $|2x + 5| = 4$ (e) $|x - 3| = |2x + 1|$

2) Determine para quais valores de x as desigualdades abaixo são satisfeitas.

(a) $|x| < 2$ (b) $|5x| \geq 20$ (c) $|x| > 0$

(d) $|x + 3| \geq 2$ (e) $|3x - 8| < 4$

3) Determine o domínio de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{3x + 4}{x^2 - x - 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{\sqrt[3]{x + 1}}$ (c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{|x| - x}}{e^x - 1}$

(d) $r(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x| - 1}}$ (e) $p(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$

4) Definimos a *soma de duas funções* f *e* g como sendo a função

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad \forall\, x \in \operatorname{dom}(f + g) := \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g).$$

Observe que o domínio da função soma é a intersecção dos domínio de f e g, pois para somar precisamos calcular $f(x)$ e $g(x)$.

Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{7\} \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$f(x) = 2x^2 - 8, \qquad g(x) = \frac{2}{x - 7},$$

então $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^2 - 8 + \dfrac{2}{x - 7}$, para todo $x \in \operatorname{dom}(f + g) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

De maneira análoga definimos subtração, produto e quociente de duas funções. Neste último caso é importante excluir do domínio os pontos que anulam o denominador.

Para f e g como acima, determine a expressão e domínio de

(a) $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$ (b) $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) := \dfrac{g(x)}{f(x)}$

5) Definimos a *composição de duas funções* f *e* g como sendo a função

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \qquad \forall\, x \in \operatorname{dom}(f \circ g) := \{x \in \operatorname{dom}(g) : g(x) \in \operatorname{dom}(f)\}.$$

Para o cálculo de $(f \circ g)(x)$, calculamos $f(y)$, com $y = g(x)$. Assim, é preciso que $y = g(x)$ esteja no domínio de f, daí a explicação do domínio da composição.

Por exemplo, considerando as funções f e g do exercício anterior, temos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{2}{f(x) - 7} = \frac{2}{(2x^2 - 8) - 7} = \frac{2}{2x^2 - 15}, \qquad \forall x \neq \pm\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

Veja que, no domínio, tivemos que excluir todos os pontos tais $f(x) \notin \mathrm{dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Assim, eliminamos todos os valores de x reais, tais que $f(x) = 2x^2 - 8 = 7$.

Ainda considerando as funções f e g como no exercício anterior, determine a expressão e domínio de cada uma das composições abaixo.

(a) $(f \circ g) = f(g(x))$ (b) $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ (c) $(g \circ g)(x) = g(g(x))$

6) Considerando $f(x) = (4 - x)/x$, determine a expressão e o domínio de cada uma das funções abaixo.

(a) $f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{f(x)}$ (b) $f(x^2) - f(x)^2$ (c) $f(f(x))$

7) Em cada um dos itens abaixo, encontre a equação da reta que satisfaz as exigências apresentadas (veja vídeo).

(a) passa pelos pontos $(3, 4)$ e $(-2, 5)$

(b) passa pelo ponto $(-1, 3)$ e tem inclinação igual a -1

(c) passa pelo ponto $(5, -1)$ e é paralela à reta $2x + 5y = 15$

(d) passa pelo ponto $(0, 1)$ e é perpendicular à reta $8x - 13y = 13$

8) Denotando por x e y os lados de um retângulo cujo perímetro é igual a 100, determine o domínio e a expressão da função $d(x)$ que fornece o comprimento da diagonal do retângulo em função de x.

9) A partir de uma cartolina medindo 14×22 vamos construir uma caixa sem tampa como segue: recortamos quadrados de lado x em cada um dos vértices da cartolina e dobramos as abas. Determine a expressão e o domínio da função $V(x)$ que fornece o volume da caixa em função de x.

10) Sejam x, y e z os lados de um triângulo retângulo, onde x é a hipotenusa. Suponha que o triângulo tem perímetro igual a 6. Determine a expressão da função $A(x)$ que fornece a área do triângulo em função de x.

Dica: *eleve os dois lados da igualdade $y + z = 6 - x$ ao quadrado.*

11) Um grama de gelo, inicialmente a -40°C, é posto em uma fonte de calor. Neste experimento, observa-se a menor quantidade de calor absorvido $Q(T)$, em calorias, para que a amostra atinja temperatura T, em $^\circ$C. Sabe-se que a cada 1 cal, o gelo aumenta sua temperatura em 2°C. Quando atinge 0°C, são necessárias mais 80 cal para o derretimento total (que ocorre sob temperatura constante). Depois de liquefeita, a água necessita de 1 cal para aumentar sua temperatura em 1°C.

(a) Calcule $Q(-40)$, $Q(-38)$, $Q(0)$, $Q(1)$ e $Q(2)$.

(b) Determine a expressão de $Q(T)$, para $T \in [-40, 80]$.

RESPOSTAS

1) (a) $v(3) = 6$ (b) $v(1) = 3$ (c) $v(9) = \frac{1}{6}$ (d) $v(t) = v_0 + at$

2) (a) $f'(2) = 4$, $y - 4 = 4(x - 2)$

(b) $f'(3) = -\frac{1}{9}$, $y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}(x - 3)$

(c) $f'(a) = m$, $y = mx + b$

Revisão

1) (a) $x \in \{-4, 4\}$ (b) nenhum valor de x, pois $|x| \geq 0$ (c) $x = 0$

(d) $x \in \{-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\}$ (e) $x \in \{-4, \frac{2}{3}\}$

2) (a) $x \in (-2, 2)$ (b) $x \in \mathbb{R} \setminus (-4, 4)$ (c) $x \neq 0$

(d) $x \in (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$ (e) $x \in (\frac{4}{3}, 4)$

3) (a) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ (b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(d) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ (e) $[-1, 1]$ (f) $(1, 3)$

4) (a) $(f - g)(x) = 2x^2 - 8 - \dfrac{2}{(x-7)}$, para $x \neq 7$

(b) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{4x^2 - 16}{x - 7}$, para $x \neq 7$

(c) $(\frac{f}{g})(x) = (x^2 - 4)(x - 7)$, para $x \in \mathbb{R}$

(d) $(\frac{g}{f})(x) = \dfrac{1}{(x-7)(x^2-4)}$, para $x \notin \{-2, 2, 7\}$

5) (a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{8}{(x-7)^2} - 8$, para $x \neq 7$

(b) $(f \circ f)(x) = 8x^4 - 64x^2 + 120$, para $x \in \mathbb{R}$

(c) $(g \circ g)(x) = \dfrac{2(x-7)}{-7x + 51}$, para $x \notin \{7, \frac{51}{7}\}$

6) (a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{-4(x^2 - 4x + 1)}{4 - x}$, para $x \notin \{0, 4\}$

(b) $f(x^2) - f(x)^2 = \dfrac{-2(x^2 - 4x + 6)}{x^2}$, para $x \neq 0$

(c) $f(f(x)) = \dfrac{5x - 4}{4 - x}$, para $x \notin \{0, 4\}$

7) (a) $y = -\frac{1}{5}x + \frac{23}{5}$ (b) $y = -x + 2$ (c) $y = -\frac{2}{5}x + 1$ (d) $y = -\frac{13}{8}x + 1$

8) $d(x) = \sqrt{x^2 + (50 - x)^2}$, $x \in (0, 50)$

9) $V(x) = x(22 - 2x)(14 - 2x)$, $x \in (0, 7)$

10) $A(x) = 9 - 3x$

11) (a) $Q(-40) = 0$, $Q(-38) = 1$, $Q(0) = 20$, $Q(1) = 101$, $Q(2) = 102$

(b) $Q(T) = \begin{cases} (T/2) + 20 & \text{se } T \in [-40, 0] \\ T + 100 & \text{se } T \in (0, 80] \end{cases}$

ANEXO B – Lista de aplicações semana 01

Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 01

Temas abordados: Funções

Seções do livro: 1.1 a 1.3; 1.5; 1.6

1) A figura abaixo ilustra um recipiente formado por dois cilindros circulares retos justapostos de altura 10m e raios respectivamente 12m e 6m. Suponha que, a partir do instante $t = 0$, o recipiente comece a ser abastecido a uma vazão constante de modo que o nível da água $s(t)$ no recipiente é dada por

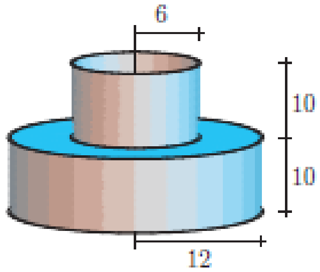
$$s(t) = \begin{cases} 2t, & \text{para } 0 \leq t \leq 5 \\ 8t - 30, & \text{para } 5 < t \leq 6 \end{cases}$$

onde a altura é dada em metros e o tempo é dado em segundos.

(a) Esboce o gráfico da função $s(t)$.

(b) Determine, caso existam, os instantes $\tau \in [0, 6]$ nos quais $s(\tau) = 15$.

(c) Determine a imagem da função s.



2) Considere a função $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Pode-se mostrar que a inclinação da reta L_a, que é tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P_a = (a, f(a))$, é dada por $\dfrac{-1}{2a\sqrt{a}}$. A figura abaixo ilustra o gráfico da função, a reta L_a e os pontos Q_a e R_a em que a reta intercepta os eixos coordenados. Julgue a veracidade dos itens a seguir, justificando suas respostas.

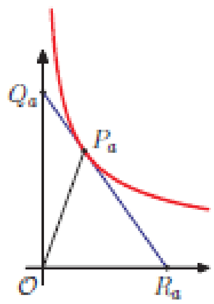
(a) A reta L_a tem equação $y = \dfrac{-x}{2a\sqrt{a}} + \dfrac{3}{2\sqrt{a}}$.

(b) Tem-se que $R_a = (2a, 0)$.

(c) A área do triângulo $\Delta\mathcal{O}P_aR_a$ é igual a $\dfrac{1}{2}2a\,f(a)$.

(d) A área do triângulo $\Delta\mathcal{O}\,P_a\,Q_a$ é igual a $\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2\sqrt{a}}a$.

(e) Para todo $a > 0$, a área do triângulo $\Delta\mathcal{O}P_aQ_a$ é o dobro da área do triângulo $\Delta\mathcal{O}\,P_a\,R_a$.



3) Uma amostra radioativa emite partículas alfa e, consequentemente, sua massa $M = M(t)$ é uma função decrescente do tempo. Suponha que, para um determinado material radioativo, essa função seja dada por $M(t) = M_0e^{-k_1t}$, onde $M_0 > 0$ é a massa inicial, $k_1 > 0$ é uma constante e $t > 0$ é o tempo medido em anos. A *meia-vida* do material é o tempo necessário para que a massa se reduza à metade da massa inicial.

(a) Calcule k_1 sabendo que, depois de um ano e meio, a massa restante é 1/8 da inicial.

(b) Usando o item anterior, determine a meia-vida do material.

(c) Calcule quantos anos devemos esperar para que 99% da amostra tenha se desintegrado (use as aproximações $\ln 2 = 0,7$ e $\ln 5 = 1,6$).

(d) Suponha que outra amostra radioativa tenha massa $N(t) = M_0 e^{-k_2 t}$, com $k_2 > 0$. Estabeleça uma relação entre k_1 e k_2 sabendo que a meia-vida desse segundo material é igual ao triplo da meia-vida do primeiro.

4) Uma espira circular está imersa em uma região de campo magnético uniforme e constante. O fluxo magnético pela espira é dado por $\phi(\alpha) = AB\cos(\alpha)$, onde A é a área da espira, B é a intensidade do campo e $\alpha \in [0, 2\pi]$ é o ângulo entre o vetor normal ao plano da espira e as linhas de campo. Supondo inicialmente que, em unidades físicas apropriadas, $AB = 4$, resolva os itens a seguir.

(a) Calcule o menor e o maior valor que o fluxo ϕ pode assumir.

(b) Determine um ângulo $\alpha_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $\phi(\alpha_0) = 2$.

(c) Se a espira tivesse o dobro do diâmetro e estivesse imersa no mesmo campo, qual seria o valor do produto AB ?

(d) Para uma espira com o dobro do diâmetro, use o valor encontrado no item (c) para determinar um ângulo $\alpha_1 \in [0, \pi]$ tal que o fluxo magnético seja igual a 4.

5) O objetivo desse exercício é usar as propriedades da função exponencial e^x para investigar as propriedades das funções *cosseno e seno hiperbólicos* dadas por

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

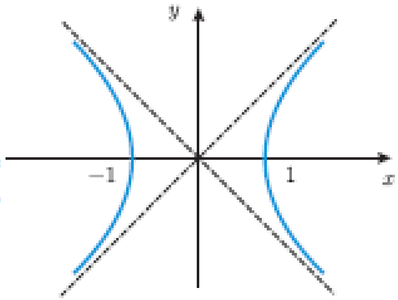
Lembrando que $e^{x+y} = e^x e^y$, onde e é a base Neperiana, resolva os itens abaixo.

(a) Mostre que

$$\cosh^2(t) - \mathrm{senh}^2(t) = 1.$$

Fazendo $x = \cosh(t)$ e $y = \mathrm{senh}(t)$, isso mostra que o ponto (x, y) está sobre a hipérbole unitária dada por

$$x^2 - y^2 = 1.$$



(b) Verifique a fórmula do cosseno hiperbólico da soma

$$\cosh(s+t) = \cosh(s)\cosh(t) + \mathrm{senh}(s)\mathrm{senh}(t).$$

(c) Verifique a fórmula do seno hiperbólico da soma

$$\mathrm{senh}(s+t) = \mathrm{senh}(s)\cosh(t) + \mathrm{senh}(t)\cosh(s).$$

(d) Verifique que $\cosh(t)$ é uma função par enquanto $\mathrm{senh}(t)$ é uma função ímpar.

(e) Prove que não existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{senh}(t) = \cosh(t)$.

Compare as propriedades dos itens acima com as suas análogas para as funções trigonométricas.

Gabarito

1. (a)
   (b) $\tau = 45/8$
   (c) $\mathrm{Im}(s) = [0, 18]$
2. Itens corretos: (a), (d)
3. (a) $k_1 = 2\ln 2$
   (b) meio ano
   (c) $23/7$ anos
   (d) $k_2 = k_1/3$
4. (a) -4 e 4, respectivamente
   (b) $\alpha_0 = \pi/3$ ou $\alpha_0 = 5\pi/3$
   (c) 16
   (d) $\alpha_1 = \arccos(1/4)$

ANEXO C – Plano de Ensino Cálculo 1 – 1º/2016

Cálculo 1
Plano de Ensino – 1.º/2016
Turmas A, B, C, D, E, F, H, J, M, N, O, S, Y, Z

PROGRAMA: o curso contará com 18 semanas dividas em 3 módulos. O conteúdo de cada um deles é descrito a seguir.

1) Funções reais. Limites de funções. Limites laterais e Continuidade de funções. Teorema do Valor Intermediário. Reta tangente, derivada, regras básicas de derivação. Derivadas de funções transcendentes.

2) Derivadas de composições e inversas de funções. Derivação implícita e taxas relacionadas. Otimização. Teorema do Valor Médio. Esboço de gráficos. Regra de L'Hôpital.

3) Integral definida e propriedades. Teorema Fundamental do Cálculo. Integral indefinida. Técnicas de integração: substituição, partes, frações parciais, substituição inversa, produtos de funções trigonométricas. Aplicações da integral ao cálculo de áreas planas, comprimento de curvas, volumes de sólidos.

BIBLIOGRAFIA: material a ser postado na plataforma MOODLE (listas de exercícios, testes on-line, textos complementares e materiais interativos). O estudante **deve** também usar qualquer **livro de Cálculo**, especialmente aquele indicado pelo seu professor. O cronograma de atividades será baseado no livro *Cálculo Volume 1*, de George B. Thomas, 12ª. Edição.

METODOLOGIA DAS AULAS: nas turmas presenciais, em cada semana o aluno terá uma aula teórica e duas aulas práticas. Desse modo, cada turma terá 2 professores distintos. Nas turmas semipresenciais, o aluno terá apenas uma aula prática por semana.

Aula de teoria: nesta aula o professor fará uma exposição dos tópicos da semana. Recomenda-se que o aluno leia com antecedência o livro e/ou os textos da plataforma MOODLE para que possa ter um maior proveito da aula.

Aula de prática: na aula de exercícios o aluno deve resolver uma lista de exercícios que será indicada pelo professor. É obrigatório que o aluno leve para a aula a cópia das listas da semana, que estão na plataforma MOODLE. **A aula não é expositiva, ou seja, o professor não ficará resolvendo os exercícios no quadro**. O papel dele é transitar pela sala tirando dúvidas pontuais dos alunos, que devem trabalhar em pequenos grupos. Recomenda-se que o aluno comece a resolver as listas antes mesmo da primeira aula prática da semana.

SISTEMA DE AVALIAÇÃO: em cada um dos módulos o aluno receberá uma nota M_i, $i = 1, 2, 3$, dada por

$$M_i = 15\% L_i + 15\% T_i + 70\% P_i, \qquad 0 \leq M_i \leq 10,$$

onde L_i é a média aritmética das notas das avaliações em aulas de exercícios, T_i é a nota do teste presencial e P_i é a nota da prova. A partir das notas dos módulos, a nota final (NF) de cada estudante é dada por:

$$NF = \frac{2M_1 + 3M_2 + 4M_3}{9}, \qquad 0 \leq NF \leq 10.$$

Será considerado aprovado o estudante que obtiver NF maior ou igual a 5.

Segue abaixo uma breve descrição das avaliações.

Avaliações em aulas de exercícios: no final de cada aula de exercícios os alunos serão submetidos a um teste curto de 5 a 10 min. Semanalmente, o professor decidirá qual das avaliações será corrigida e atribuirá a nota 0, 1/2 ou 1 ao teste.

Teste presencial: um teste objetivo por módulo com duração de uma hora. Os **testes de todas as turmas serão realizados no horário de 12h30 às 13h30** em local a ser divulgado no ambiente MOODLE. As datas estão listadas abaixo e podem, a critério da coordenação da disciplina, ser mudadas.

Teste 1	Teste 2	Teste 3
01/04/16	06/05/16	17/06/16

Prova: cada prova terá duas partes, uma objetiva e outra discursiva. As **provas de todas as turmas serão realizadas no horário de 12h00 às 13h50** em local a ser divulgado no ambiente MOODLE. As datas estão listadas abaixo e podem, a critério da coordenação da disciplina, ser mudadas.

Prova 1	Prova 2	Prova 3
15/04/16	20/05/16	01/07/16

Prova única de reposição: se destina somente aos alunos que tiverem perdido uma das provas e seu conteúdo será a matéria da prova perdida. A nota da prova de reposição substituirá a nota de apenas uma das provas perdidas (a de maior peso, no caso de o aluno ter perdido mais de uma prova). Esta prova será **realizada no dia 04/07/16 das 12h às 13h50** em local a ser divulgado no ambiente MOODLE.

PÁGINA DE CÁLCULO 1: Os estudantes devem se cadastrar na plataforma de aprendizagem MOODLE do MAT no endereço

moodle.mat.unb.br

Toda a comunicação oficial do curso se dará através do *Fórum de Notícias* do MOODLE. Nos *fóruns semanais* poderão ser postadas dúvidas que serão respondidas on-line pelos monitores, professores ou mesmo por outros estudantes.

MONITORIA: o quadro com os horários da monitoria será divulgado no MOODLE a partir da segunda semana de aula. Dentro das possibilidades do MAT, os monitores atenderão todos os dias da semana de 12 às 14h e de 18 às 19h na sala da monitoria do Cálculo 1, que fica no subsolo do Departamento de Matemática, descendo as escadas em frente à entrada do departamento, sala ASS 439/10 - ICC Norte.

ANEXO D – Plano de Ensino Matemática 1 – 1º/2017

Matemática 1
Plano de Ensino – 1.º/2017

PROGRAMA: o curso contará com 16 semanas dividas em 3 módulos. O conteúdo de cada um deles é descrito a seguir.

1) Funções reais. Limites de funções. Limites laterais e Continuidade de funções. Teorema do Valor Intermediário. Reta tangente, derivada, regras básicas de derivação.

2) Derivadas de composições e inversas de funções. Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas. Otimização. Teorema do Valor Médio. Esboço de gráficos.

3) Integral definida e propriedades. Teorema Fundamental do Cálculo. Integral indefinida. Técnicas de integração: substituição, partes, produtos de funções trigonométricas. Aplicações da integral ao cálculo de áreas planas, comprimento de curvas, volumes de sólidos.

BIBLIOGRAFIA: material a ser postado na plataforma MOODLE (listas de exercícios, testes on-line, textos complementares e materiais interativos). O estudante pode usar ainda qualquer livro de Cálculo, especialmente aquele indicado pelo seu professor. O cronograma de atividades será baseado no livro *Cálculo Volume 1*, de George B. Thomas, 12ª. Edição.

METODOLOGIA DAS AULAS: em cada semana o aluno terá uma aula teórica e uma aula prática. Desse modo, cada turma terá 2 professores distintos.

Aula de teoria: nesta aula o professor fará uma exposição dos tópicos da semana. Recomenda-se que o aluno leia com antecedência o livro e/ou os textos da plataforma MOODLE para que possa ter um maior proveito da aula.

Aula de prática: na aula de exercícios o aluno deve resolver uma lista de exercícios que será indicada pelo professor. É obrigatório que o aluno leve para a aula a cópia das listas da semana, que estão na plataforma MOODLE. **A aula não é expositiva, ou seja, o professor não ficará resolvendo os exercícios no quadro**. O papel dele é transitar pela sala tirando dúvidas pontuais dos alunos, que devem trabalhar em pequenos grupos. Recomenda-se que o aluno comece a resolver as listas antes mesmo da primeira aula prática da semana.

SISTEMA DE AVALIAÇÃO: em cada um dos módulos o aluno receberá uma nota P_i, $i = 1, 2, 3$, onde P_i é a nota da prova do módulo i. A partir das notas das provas, a nota final (NF) de cada estudante é dada por:

$$NF = \frac{2P_1 + 3P_2 + 4P_3}{9}, \qquad 0 \leq NF \leq 10.$$

Será considerado aprovado o estudante que obtiver NF maior ou igual a 5. Além disso, os critérios de atribuição de menção são os critérios oficiais da Universidade de Brasília.

Segue abaixo uma breve descrição das avaliações.

Prova: cada prova será baseada em todo conteúdo abordado no módulo correspondente. As **provas das turmas do diurno serão realizadas no horário de 12h00 às 13h50** em local a ser divulgado no ambiente MOODLE. As provas das turmas do noturno ocorrerão sempre no horário das aulas de exercícios. As datas estão listadas abaixo e podem, a critério da coordenação, serem alteradas.

	Prova 1	Prova 2	Prova 3
Turmas: A, B, C, H, L, M	13/04/17	18/05/17	22/06/17
Turmas: E, K	12/04/17	17/05/17	21/06/17
Turmas: I, G	19/04/17	19/05/17	23/06/17

PÁGINA DE MATEMÁTICA 1: Os estudantes devem se cadastrar na plataforma de aprendizagem MOODLE do MAT no endereço

moodle.mat.unb.br

Toda a comunicação oficial do curso se dará através do *Fórum de Notícias* do MOODLE. Nos *fóruns semanais* poderão ser postadas dúvidas que serão respondidas on-line pelos monitores, professores ou mesmo por outros estudantes.

MONITORIA: o quadro com os horários da monitoria será divulgado no MOODLE a partir da segunda semana de aula. Dentro das possibilidades do MAT, os monitores atenderão todos os dias da semana de 12 às 14h e de 18 às 19h na sala da monitoria do Cálculo/Matemática 1, que fica no subsolo do Departamento de Matemática, descendo as escadas em frente à entrada do departamento, sala ASS 439/10 - ICC Norte.

ANEXO E – Lista de exercícios semana 09

Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 09

Temas abordados: Teorema do Valor Médio; Crescimento de funções; Otimização
Seções do livro: 4.2; 4.3; 4.6

1) O Teorema do Valor Médio afirma que, se uma função f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Os passos seguintes fornecem a prova deste importante teorema. (veja Teorema 1 do Texto 2)

(a) Verifique que, se $r(x)$ é a reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

(b) Para $g(x) = f(x) - r(x)$, verifique que $g(a) = g(b) = 0$.

(c) Lembrando que g tem máximo e mínimo em $[a, b]$, conclua que $g'(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in (a, b)$.

(d) Verifique que o ponto x_0 obtido no item acima satisfaz a equação (1).

2) Suponha que a função f do exercício acima mede a posição de um móvel em um instante $t > 0$. Qual é a interpretação física da conclusão do Teorema do Valor Médio?

3) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que, se $f' > 0$ em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, então a função f é crescente em I. O que podemos afirmar se $f' < 0$ em I ? (veja Corolário 1 do Texto 2)

4) Usando o item acima, descreva um método que nos permita classificar um ponto crítico como máximo local, mínimo local ou nenhum dos dois, a partir do sinal da derivada antes e depois deste ponto crítico. (veja Corolário 2 do Texto 2)

5) Para cada uma das funções abaixo, determine os pontos críticos, classifique-os como máximos ou mínimos locais, quando for o caso, e determine os intervalos onde f é crescente e decrescente. (veja Exemplo 1 do Texto 1)

(a) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{1 + x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2(x - 1)}$

(d) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

(e) $f(x) = x^3 - 12x - 5$

(f) $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

(g) $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

(h) $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$

(i) $f(x) = x - \ln x$

(j) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

(k) $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$

(l) $f(x) = x + \operatorname{sen}(x), \quad x \in (0, 2\pi)$

6) Mostre que a função $f(x) = (\ln x)/x$ tem um máximo absoluto em $x = e$. Usando agora o fato de que $f(e) > f(\pi)$ e que a função $x \mapsto e^x$ é crescente, conclua que $\pi^e < e^\pi$. (veja Vídeo 2)

7) Mostre que $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ tem exatamente uma raiz real. (veja Exemplo 2 do Texto 3)

8) Analise os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, definida em $(0, +\infty)$, para concluir que
$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \qquad \forall\, x > 0.$$

9) Supondo que o lucro, em milhões de reais, obtido na venda de x mil unidades de um produto é dado por
$$L(x) = \frac{3x}{54 + x^3}, \qquad x \geq 0,$$
determine a quantidade de itens que devem ser vendidos de modo a maximizar o lucro. (veja Exemplo 2 do Texto 1)

10) Entre todas as latas cilíndricas de volume 1 litro, raio da base r e altura h, qual a que tem menor área superficial. (veja Vídeo 3)

11) Suponha que ao completar t anos, $0 \leq t \leq 5$, a massa aproximada de um animal seja dada em quilos pela expressão
$$m(t) = -2t^3 + 9t^2 + 400.$$
Sabendo que pretende-se sacrificar o animal no momento em que este possuir a maior massa, determine com qual idade o animal deve ser abatido.

12) Um retângulo deve ser inscrito em uma semicircunferência de raio 5 metros. Qual é a maior área que o retângulo pode ter e quais as suas dimensões?

13) Supondo que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, use o Teorema do Valor Médio para provar as afirmações seguintes (veja os Corolário 3 e 4 do Texto 2)

(a) se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = C$ para todo $x \in I$.

(b) se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + C$ para todo $x \in I$.

14) Dado $b > 0$, considere a função $f(x) = \ln(\frac{x}{b})$, definida para $x > 0$.

(a) Verifique que a derivada de f coincide com a derivada de $g(x) = \ln(x)$, no intervalo $I = (0, +\infty)$.

(b) Usando o item acima e o exercício anterior, conclua que $f(x) = g(x) + C$, para algum $C \in \mathbb{R}$. Em seguida, faça $x = b$ nesta igualdade para calcular o valor da constante C.

(c) Conclua que
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \qquad \forall\, a,\, b > 0.$$

15) Argumentado como no exercício anterior, mostre que (veja o Vídeo 1)
$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \qquad \ln(a^r) = r\ln(a),$$
para quaisquer a, $b > 0$ e $r \in \mathbb{R}$.

RESPOSTAS

1)

2) O número $(f(b)-f(a))/(b-a)$ é a velocidade média entre os instantes a e b. Como a derivada de f fornece a velocidade do móvel, o teorema afirma que em algum instante $x_0 \in (a,b)$ a velocidade instantânea $f'(x_0)$ é igual a velocidade média.

3) Se $f' < 0$ em I então f é decrescente em I

4)

5) (a) pontos críticos: $x = \sqrt[3]{6}$ (mínimo local)
crescente em $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{6}, +\infty)$
decrescente em $(0, \sqrt[3]{6})$

(b) pontos críticos: $x = -1/2$ (mínimo local); $x = 2$ (máximo local)
crescente em $(-1/2, 2)$
decrescente em $(-\infty, -1/2) \cup (2, +\infty)$

(c) pontos críticos: $x = 0$ (máximo local); $x = 2$ (mínimo local)
crescente em $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
decrescente em $(0, 1) \cup (1, 2)$

(d) pontos críticos: $x = \ln 2$ (máximo local)
crescente em $(-\infty, \ln 2)$
decrescente em $(\ln 2, +\infty)$

(e) pontos críticos: $x = -2$ (máximo local); $x = 2$ (mínimo local)
crescente em $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
decrescente em $(-2, 2)$

(f) pontos críticos: $x = -3$ (máximo local); $x = 1$ (mínimo local)
crescente em $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
decrescente em $(-3, 1)$

(g) pontos críticos: $x = -2$ (mínimo local); $x = 2$ (máximo local)
crescente em $(-2, 2)$
decrescente em $(-\sqrt{8}, -2) \cup (2, \sqrt{8})$

(h) pontos críticos: $x = -1$ e $x = 1$ (mínimos locais); $x = 0$ (máximo local)
crescente em $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
decrescente em $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

(i) pontos críticos: $x = 1$ (mínimo local)
crescente em $(1, +\infty)$
decrescente em $(0, 1)$

(j) pontos críticos: $x = e$ (mínimo local)
crescente em $(e, +\infty)$
decrescente em $(0, 1) \cup (1, e)$

(k) pontos críticos: $x = 0$ (não é extremo local); $x = 1$ (mínimo local)
crescente em $(1, +\infty)$
decrescente em $(-\infty, 1)$

(l) pontos críticos: $x = \pi$ (não é extremo local)
crescente em $(0, 2\pi)$
decrescente em (nunca)

6)

7) Calcule a função em cada ponto crítico, estude os intervalos de crescimento e decrescimento e os limites no infinito

8) Basta encontrar o ponto de mínimo de f no intervalo

9) O lucro é máximo quando são vendidas 3 mil unidades

10) Aquela que tem raio igual a $(2\pi)^{-1/3}$

11) O animal deve ser abatido quando completar 3 anos

12) A maior área é de 25 metros e é dada por um retângulo de lados $5\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}/2$ metros

13) Para o item (b), considere a função $g(x) - f(x)$, definida no intervalo I

14) (a) Basta usar a Regra da Cadeia.

(b) Use o item (b) do exercício anterior para obter a igualdade $f(x) = g(x)+C$. Fazendo $x = b$, concluímos que $C = -\ln(b)$

(c) Basta agora fazer $x = a$

15) Para a primeira igualdade compare a derivada de $g(x) = \ln(bx)$ com a de $\ln(x)$. Para a segunda, use $g(x) = \ln(x^r)$

ANEXO F – Plano de ensino Cálculo 2º/2016

Cálculo 1
Plano de Ensino – 2.º/2016
Turmas do Diurno

PROGRAMA: o curso contará com 17 semanas dividas em 3 módulos. O conteúdo de cada um deles é descrito a seguir.

1) Funções reais. Limites de funções. Limites laterais e Continuidade de funções. Teorema do Valor Intermediário. Reta tangente, derivada, regras básicas de derivação. Derivadas de funções transcendentes.

2) Derivadas de composições e inversas de funções. Derivação implícita e taxas relacionadas. Otimização. Teorema do Valor Médio. Esboço de gráficos. Regra de L'Hôpital.

3) Integral definida e propriedades. Teorema Fundamental do Cálculo. Integral indefinida. Técnicas de integração: substituição, partes, frações parciais, substituição inversa, produtos de funções trigonométricas. Aplicações da integral ao cálculo de áreas planas, comprimento de curvas, volumes de sólidos.

BIBLIOGRAFIA: material a ser postado na plataforma MOODLE (listas de exercícios, testes on-line, textos complementares e materiais interativos). O estudante **deve** também usar qualquer **livro de Cálculo**, especialmente aquele indicado pelo seu professor. O cronograma de atividades será baseado no livro *Cálculo Volume 1*, de George B. Thomas, 12ª. Edição.

METODOLOGIA DAS AULAS: nas turmas presenciais, em cada semana o aluno terá uma aula teórica e duas aulas práticas. Desse modo, cada turma terá 2 professores distintos. Nas turmas semipresenciais, o aluno terá apenas uma aula prática por semana.

Aula de teoria: nesta aula o professor fará uma exposição dos tópicos da semana. Recomenda-se que o aluno leia com antecedência o livro e/ou os textos da plataforma MOODLE para que possa ter um maior proveito da aula.

Aula de prática: na aula de exercícios o aluno deve resolver uma lista de exercícios que será indicada pelo professor. É obrigatório que o aluno leve para a aula a cópia das listas da semana, que estão na plataforma MOODLE. **A aula não é expositiva, ou seja, o professor não ficará resolvendo os exercícios no quadro**. O papel dele é transitar pela sala tirando dúvidas pontuais dos alunos, que devem trabalhar em pequenos grupos. Recomenda-se que o aluno comece a resolver as listas antes mesmo da primeira aula prática da semana.

SISTEMA DE AVALIAÇÃO: em cada um dos módulos o aluno receberá uma nota M_i, $i = 1, 2, 3$, dada por

$$M_i = 15\%S_i + 35\%T_i + 50\%P_i, \qquad 0 \leq M_i \leq 10,$$

onde S_i é a média aritmética das notas das atividades em sala, T_i é a nota do teste presencial e P_i é a nota da prova. A partir das notas dos módulos, a nota final (NF) de cada estudante é dada por:

$$NF = \frac{2M_1 + 3M_2 + 4M_3}{9}, \qquad 0 \leq NF \leq 10.$$

Será considerado aprovado o estudante que obtiver NF maior ou igual a 5.

Segue abaixo uma breve descrição das avaliações.

Atividades em sala: no final de cada aula de exercícios os alunos serão submetidos a um teste curto de 5 a 10 min. Semanalmente, o professor decidirá qual das avaliações será corrigida.

Teste presencial: um teste objetivo por módulo com duração de 1h30. **Os testes de todas as turmas serão realizados no horário de 12h00 às 13h30** em local a ser divulgado no ambiente MOODLE. As datas estão listadas abaixo e podem, a critério da coordenação, ser mudadas.

Teste 1	Teste 2	Teste 3
09/09/16	14/10/16	25/11/16

Prova: uma prova subjetiva por módulo com duração de 1h30. **As provas de todas as turmas serão realizadas no horário de 12h00 às 13h30** em local a ser divulgado no ambiente MOODLE. As datas estão listadas abaixo e podem, a critério da coordenação, ser mudadas.

Prova 1	Prova 2	Prova 3
16/09/16	21/10/16	02 /12/16

Prova única de reposição: se destina somente aos alunos que tiverem justificado sua ausência em uma das provas e seu conteúdo será toda a matéria do curso. A nota da prova de reposição substituirá a nota de apenas uma das provas perdidas (a de maior peso, no caso de o aluno ter perdido mais de uma prova). **Esta prova será realizada no dia 05/12/16 às 12h00** em local a ser divulgado no ambiente MOODLE.

PÁGINA DE CÁLCULO 1: Os estudantes devem se cadastrar na plataforma de aprendizagem MOODLE do MAT no endereço

moodle.mat.unb.br

Toda a comunicação oficial do curso se dará através do *Fórum de Notícias* do MOODLE. Nos *fóruns semanais* poderão ser postadas dúvidas que serão respondidas on-line pelos monitores, professores ou mesmo por outros estudantes.

MONITORIA: o quadro com os horários da monitoria será divulgado no MOODLE a partir da segunda semana de aula. Dentro das possibilidades do MAT, os monitores atenderão todos os dias da semana de 12 às 14h e de 18 às 19h na sala da monitoria do Cálculo 1, que fica no subsolo do Departamento de Matemática, descendo as escadas em frente à entrada do departamento, sala ASS 439/10 - ICC Centro.

ANEXO G – Comparativo de notas

Semestre 2/2012 (Comparativo de notas)

As turmas em amarelo são magistrais e as brancas são tradicionais. As turmas em amarelo e branco fazem a MESMA prova e a correção é feita por todos os professores em esquema de mutirão. Por exemplo, uma dupla de professores corrige a questão 1 de TODAS as turmas

Na coluna VEST se encontra a nota de corte do curso em questão. Quando a turma atende 2 cursos diferentes foi feita uma média ponderada entre as notas de corte.

Notas do diurno

Turma	Cursos	VEST	#1	P1	#2	P2	#3	P3		%TR	%SR	%APROV
A	Civil (44), Mec (22)	200	63	8,11	62	6,94	57	7,67		1,54	3,08	83,08
F	Mect (44), Mec (22)	106	62	7,04	56	6,14	53	7,2		0	12,9	74,19
C	Redes (40), Est (22)	-147	61	5,61	53	4,19	46					
E	Mat (40), Eco (15)	-90	55	6,36	47	4,46	37	5,16		1,69	10,17	54,24
J	Elet (44), Eco (22)	83,6	60	7,16	52	5,92	41	6,49		0	0	70,15
H	Fis (40), Est (22)	-176	61	4,82	45	3,46	53	7,11		3,23	25,81	30,65
D	Qui (33), QuiT (24)	-180	60	4,02	50	3,37	30	5,45		9,84	26,23	34,43
S	Adm (60)	-67	54	4,17	49	2,74	32	6,11		1,52	48,48	33,33
M	Amb (44), Geo (20)	-53	57	4,94	51	3,27	40	5,13		3,17	33,33	38,10
O	Bio (36), Geof (30)	-44	60	4,18	51	2,59	42	5,00		3,17	30,16	33,33
SP A			28	4,75								
SP B			26	4,16	23	2,52	16	4,45		15,15	18,18	27,27
SP D			28	4,20	25	3,00						
B										1,52	18,18	33,33
N										3,13	12,50	48,44
Y										7,69	30,77	26,92
Z										0	2,44	97,56

Notas do noturno

Turma	Cursos	VEST	#1	P1	#2	P2	#3	P3		%TR	%SR	%APROV
P	Prod (55), Fis (6)	16	63	5,85	55	6,01	32	3,98		0	12,9	59,68
T	Adm (60)	-64	52	3,39	35	3,57				15,15	0	22,73
G	Comp (40), Fis (7)	-184	48	4,39	39	4,70	21	5,81		3,77	26,42	33,96
I	Mat (19), Fis (6)	-144	36	4,29	22	3,56	15	4,25		10,87	50	17,39
K										12,07	27,59	46,55

ANEXO H – Lista de exercícios semana 14

Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 14

Temas abordados: Integração por partes; Volumes
Seções do livro: 8.1; 6.1; 6.2

1) Use integração por partes para calcular as integrais abaixo.

(a) $\int x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ (b) $\int x^2\ln(2x)\mathrm{d}x$ (c) $\int xe^{3x}\mathrm{d}x$

(d) $\int \ln(5x)\mathrm{d}x$ (e) $\int x^3e^{-x}\mathrm{d}x$ (f) $\int 4x\sec^2(2x)\mathrm{d}x$

(g) $\int e^{2x}\,\mathrm{sen}(x)\mathrm{d}x$ (h) $\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x$ (i) $\int \arccos(x)\mathrm{d}x$

2) Calcule as integrais abaixo usando, antes da integração por partes, uma substituição apropriada.

(a) $\int x^7\cos(x^4)\mathrm{d}x$ (b) $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (c) $\int x^3e^{x^2}\mathrm{d}x$

3) Para uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do seu gráfico em torno do eixo $\mathcal{O}x$ é dado por $V=\int_a^b \pi f(x)^2\mathrm{d}x$. Calcule esse volume no caso das funções indicadas abaixo.

(a) $f(x)=r$, para $x\in[0,h]$, onde h, $r>0$
(b) $f(x)=\frac{r}{h}x$, para $x\in[0,h]$, onde h, $r>0$.
(c) $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, para $x\in[-r,r]$, onde $r>0$.
(d) $f(x)=x\sqrt{\mathrm{sen}\,x}$, para $x\in[0,\pi]$
(e) $f(x)=\sqrt{\arctan x}$, para $x\in[0,1]$

4) Faça o gráfico das funções dos três primeiros itens acima e responda qual o sólido gerado pela rotação indicada. Em seguida, confronte a resposta que você obteve acima com a fórmula para o volume desse sólido, que você provavelmente já conhecia.

5) Seja $a\geq 0$, $f:[a,b]\to[0,+\infty)$ uma função contínua e $\mathcal{R}$ a região compreendida entre o gráfico de f e o eixo $\mathcal{O}x$. Quando giramos a região $\mathcal{R}$ em torno do eixo $\mathcal{O}y$, obtemos um sólido de revolução cujo volume é dado por $V=\int_a^b 2\pi x f(x)\mathrm{d}x$. Calcule esse volume no caso das funções indicadas abaixo.

(a) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, para $x\in[0,1]$
(b) $f(x)=\ln(x)$, para $x\in[1,e]$
(c) $f(x)=\arctan x$, para $x\in[0,1]$

6) Após identificar a técnica apropriada, determine o valor das integrais abaixo.

(a) $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$ (b) $\int \arctan(x)\mathrm{d}x$ (c) $\int \mathrm{sen}(\ln x)\mathrm{d}x$

(d) $\int x\ln(x)\mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$

(g) $\int e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (h) $\int x\,\mathrm{sen}(2x)\mathrm{d}x$

RESPOSTAS

1) Em todos os itens abaixo $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

(a) $2x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) + K$
(b) $\frac{1}{3}x^3\ln(2x) - \frac{1}{9}x^3 + K$
(c) $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + K$
(d) $x\ln(5x) - x + K$
(e) $-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + K$
(f) $2x\tan(2x) + \ln(\cos(2x)) + K$
(g) $-\frac{1}{5}e^{2x}\cos(x) + \frac{2}{5}e^{2x}\operatorname{sen}(x) + K$
(h) $x^2\operatorname{sen}(x) - 2\operatorname{sen}(x) + 2x\cos(x) + K$
(i) $x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + K$

2) Em todos os itens abaixo $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

(a) $\frac{1}{4}\cos(x^4) + \frac{1}{4}x^4\operatorname{sen}(x^4) + K$
(b) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + K$
(c) $\frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + K$

3) (a) $\pi r^2 h$
(b) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
(c) $\frac{4}{3}\pi r^3$
(d) $\pi^3 - 4\pi$
(e) $\frac{\pi^2}{4} - \dfrac{1}{2}\pi\ln(2)$

4) Os sólidos são, respectivamente: cilindro circular reto de altura h e raio da base r; cone circular reto de altura h e raio da base r; esfera de raio r.

5) (a) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi - \dfrac{2}{3}\pi$
(b) $\frac{\pi}{2}(e^2 + 1)$
(c) $\frac{1}{2}\pi^2 - \pi$

6) Em todos os itens abaixo $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

(a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + K$
(b) $x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + K$
(c) $\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\right) + K$
(d) $\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + K$
(e) $-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + K$
(f) $\frac{1}{2}\arctan(x^2) + K$
(g) $-2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + K$
(h) $\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}x\cos(2x) + K$

ANEXO I – Plano de ensino pré-cálculo 1º/2017

Tópicos Especiais – Pré – Cálculo – $1^o/2017$

Plano de Ensino: Programa:

1. Conjuntos Numéricos: A noção de conjunto; conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$); conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$); conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$); números irracionais ($\mathbb{I}$); conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$); linguagem de conjuntos; intervalos reais; soma; divisão; subtração; racionalização; potenciação; radiciação;
2. Funções: Definição de função; domínio; contradomímio; conjunto Imagem; gráfico de funções; funções crescentes e funções decrescentes; função injetiva, sobrejetiva e bijetiva; função composta;
3. Função afim e função modular: Definições; gráficos e propriedades; estudo do sinal da função afim e de inequações;
4. Função quadrática: Definição; zeros da função quadrática; gráfico; estudo do sinal da função quadrática;
5. Função exponencial e logarítmica: Definições; potenciação; gráficos; radiciação; inequações exponenciais; funções inversa; inequações logarítmicas;
6. Funções Trigonométricas: Arcos e ângulos; circunferência trigonométrica; estudo da função seno; estudo da função cosseno; relações fundamentais; identidades trigonométricas; equações trigonométricas;
7. Geometria analítica ponto e reta: Distácia entre dois pontos; equação da reta; inclinação de uma reta; coeficiente angular de uma reta; posição relativa de duas retas;
8. Polinômios: Definição; função polinomial; igualdade de polinômios; raiz de polinômio, operações com polinômios; decomposição em fatores de grau um; teorema Fundamental da Álgebra; frações parciais;
9. Tópicos Adicionais: Estudo de tópicos diversos em Matemática; resoluções de problemas; aplicações no Cálculo 1, etc.

Bibliografia: Livros do Ensino Médio e Livros de Cálculo 1.

ANEXO J – Resultados finais de 2011/1 a 2013/1

	2013/1				2012/2				2012/1				2011/2				2011/1			
Turma	AP	RP	TR	%AP	AP	RP	TR	%AP	AP	RP	TR	%AP	AP	RP	TR	%AP	AP	RP	TR	%AP
A	55	12	4	82,09	54	11	1	83,08	61	9	1	87,14	54	12	2	81,82	35	41	0	46,05
B	41	25	2	62,12	22	48	1	31,43	40	19	7	67,80	22	43	2	33,85	29	50	0	36,71
C	39	27	1	59,09	30	39	1	43,48	50	19	4	72,46	32	37	3	46,38	40	39	2	50,63
D	43	24	5	64,18	24	36	6	40,00	26	16	27	61,90	12	56	8	17,65	58	32	0	64,44
E	36	24	3	60,00	34	29	2	53,97	49	20	5	71,01	32	33	1	49,23	36	36	0	50,00
F	51	14	1	78,46	48	17	0	73,85	64	5	1	92,75	39	30	1	56,52	58	19	0	75,32
H	32	34	3	48,48	21	47	2	30,88	29	31	13	48,33	23	41	3	35,94	49	39	0	55,68
J	53	11	1	82,81	47	16	0	74,60	51	14	5	78,46	49	18	0	73,13	53	24	0	68,83
M	36	26	3	58,06	25	40	2	38,46	36	21	13	63,16	45	17	4	72,58	44	28	1	61,11
N	39	26	0	60,00	33	31	2	51,56	47	11	10	81,03	26	43	1	37,68	45	30	0	60,00
O	33	27	4	55,00	21	42	3	33,33	41	19	8	68,33	27	38	5	41,54	39	46	0	45,88
S	30	27	9	52,63	24	44	1	35,29	33	21	19	61,11	37	28	2	56,92	37	35	2	51,39
Y	33	22	1	60,00	14	34	4	29,17	29	22	9	56,86	23	36	3	38,98	19	46	0	29,23
Z	41	13	4	75,93	40	1	0	97,56	33	11	3	75,00								
G	18	35	7	33,96	21	34	2	38,18	21	22	15	48,84	6	50	18	10,71	34	37	2	47,89
I	26	34	4	43,33	8	37	5	17,78	27	34	8	44,26	31	36	1	46,27	16	52	1	23,53
K	16	41	5	28,07	28	27	7	50,91	48	7	6	87,27	7	55	6	11,29	24	47	0	33,80
P	33	20	4	62,26	37	26	0	58,73	28	27	7	50,91	33	40	0	45,21	48	29	0	62,34
T	18	38	11	32,14	16	41	10	28,07	30	20	25	60,00	31	33	3	48,44	19	65	0	22,62
TOTAL	673	480	72	58,37	547	600	49	47,69	743	348	186	68,10	529	646	63	45,02	683	695	8	49,56

Fonte: Relatório da Comissão de Graduação .

ANEXO K – Resultados finais de 2013/2 a 2015/2

	2015/2				2015/1				2014/2				2014/1				2013/2			
Turma	AP	RP	TR	%AP	AP	RP	TR	%AP	AP	RP	TR	%AP	AP	RP	TR	%AP	AP	RP	TR	%AP
A	43	14	2	75,44	51	9	2	85,00	49	7	3	87,50	49	9	0	84,48	53	13	1	80,30
B	37	22	1	62,71	18	40	1	31,03	23	36	0	38,98	31	36	1	46,27	32	32	2	50,00
C	29	22	9	56,86	40	14	7	74,07	22	30	8	42,31	36	25	4	59,02	35	32	1	52,24
D	18	45	2	28,57	32	26	4	55,17	33	28	3	54,10	21	44	4	32,31	23	38	4	37,70
E	15	15	0	50,00	25	13	1	65,79	18	13	0	58,06	18	28	3	39,13	33	22	0	60,00
F	35	23	0	60,34	32	13	1	71,11	39	12	0	76,47	44	16	0	73,33	44	19	0	69,84
H	16	36	6	30,77	31	28	1	52,54	14	27	2	34,15	43	17	1	71,67	21	37	3	36,21
J	33	23	2	58,93	41	16	4	71,93	40	11	0	78,43	38	20	1	65,52	38	20	2	65,52
M	27	39	1	40,91	38	23	0	62,30	21	21	0	50,00	38	26	2	59,38	32	30	3	51,61
N	24	26	6	48,00	26	19	0	57,78	11	22	5	33,33	36	16	2	69,23	23	31	4	42,59
O	23	37	2	38,33	23	29	3	44,23	32	31	0	50,79	18	26	15	40,91	21	41	2	33,87
S	11	50	0	18,03	20	46	0	30,30	19	44	5	30,16	25	35	5	41,67	16	46	5	25,81
Y	30	27	2	52,63	38	15	3	71,70	30	34	1	46,88	28	30	7	48,28	28	26	0	51,85
Z	26	29	1	47,27	35	15	2	70,00	29	23	9	55,77	40	25	0	61,54	35	19	3	64,81
G	15	38	5	28,30	17	33	8	34,00	12	45	5	21,05	13	42	6	23,64	21	32	3	39,62
I	9	17	2	34,62	10	20	1	33,33	7	18	2	28,00	16	39	4	29,09	29	30	1	49,15
K	23	26	8	46,94	11	37	9	22,92	8	27	16	22,86	11	40	11	21,57	22	30	9	42,31
P	25	34	2	42,37	34	30	0	53,13	30	21	6	58,82	28	30	4	48,28	43	22	0	66,15
T	9	41	5	18,00	15	37	4	28,85	4	46	9	8,00	18	46	5	28,13	7	61	3	10,29
TOTAL	448	564	56	44,27	537	463	51	53,70	441	496	74	47,07	551	550	75	50,05	556	581	46	48,90

Fonte: Relatório da Comissão de Graduação .

ANEXO L – Resultados finais de 2016/1

	2016/1			
Turma	AP	RP	TR	%AP
A	47	14	0	77,05
B	29	33	0	46,77
C	43	18	1	70,49
D	31	38	1	44,93
E	18	19	0	48,65
F	32	25	1	56,14
H	30	22	9	30,77
J	43	17	1	71,67
M	27	27	2	50,00
N	24	38	1	38,71
O	28	42	2	40,00
S	20	38	3	18,03
Y	23	31	6	42,59
Z	19	37	2	33,93
G	11	44	5	20,00
I	5	25	0	16,67
K	11	39	7	22,00
P	11	47	0	18,97
T	2	44	15	4,35
TOTAL	454	598	56	44,27

Fonte: Relatório da Comissão de Graduação.