



**APLICAÇÃO E ANÁLISE DO MEFG COM ENRIQUECIMENTO POLINOMIAL NA  
SIMULAÇÃO DE ESTRUTURAS EM PROCESSO DE DANIFICAÇÃO**

**GUILHERME OLIVEIRA FERRAZ DE PAIVA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**APLICAÇÃO E ANÁLISE DO MEFG COM  
ENRIQUECIMENTO POLINOMIAL NA SIMULAÇÃO DE  
ESTRUTURAS EM PROCESSO DE DANIFICAÇÃO**

**GUILHERME OLIVEIRA FERRAZ DE PAIVA**

**ORIENTADOR: FRANCISCO EVANGELISTA JUNIOR**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-02A/17**

**BRASÍLIA/DF: MARÇO - 2017.**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**APLICAÇÃO E ANÁLISE DO MEFG COM ENRIQUECIMENTO  
POLINOMIAL NA SIMULAÇÃO DE ESTRUTURAS EM PROCESSO  
DE DANIFICAÇÃO**

**GUILHERME OLIVEIRA FERRAZ DE PAIVA**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE  
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADO POR:**

---

**Prof. Francisco Evangelista Junior, PhD. (ENC-UnB)  
(Orientador)**

---

**Prof. Edgar Nobuo Mamiya, DSc (ENM-UnB)  
(Examinador Interno)**

---

**Prof. Leonardo José do Nascimento Guimarães, Dr. Ing (UFPE)  
(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, MARÇO DE 2017**

## FICHA CATALOGRÁFICA

PAIVA, GUILHERME OLIVEIRA FERRAZ DE

Aplicação e análise do MEFG com enriquecimento polinomial na simulação de estruturas em processo de danificação [Distrito Federal] 2017.

xvii, 75p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2017). Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. MEFG                      | 4. Enriquecimento Polinomial |
| 2. Mecânica da Fratura       | 5. Heaviside                 |
| 3. Mecânica do Dano Contínuo | 6. Propagação de trinca      |
| I.ENC/FT/UnB                 | II.Título (Mestre)           |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

PAIVA, G. O. F. de (2017). Aplicação e análise do MEFG com enriquecimento polinomial na simulação de estruturas em processo de danificação. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-02A/17 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 75p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Guilherme Oliveira Ferraz de Paiva.

TÍTULO: Aplicação e análise do MEFG com enriquecimento polinomial na simulação de estruturas em processo de danificação.

GRAU: Mestre

ANO: 2017

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Guilherme Oliveira Ferraz de Paiva

Chácara 145, Lote 02, Casa 02, Colônia Agrícola Samambaia - Taguatinga Norte  
72.001-730 Brasília – DF – Brasil.

## AGRADECIMENTOS

Para honra e glória de Nosso Senhor Jesus Cristo e de Nossa Senhora Maria Santíssima por terem me cumulado de perseverança, coragem e força.

Aos meus queridos pais Francisco e Carminda, que dedicaram suas vidas à educação dos filhos, pela doação e apoio incondicionais. A minha irmã Amanda, por se fazer sempre presente em todos os momentos.

Ao meu orientador Francisco Evangelista Junior, pela orientação objetiva, segura, competente e por incentivar-me sempre. A professora Maria de Lourdes Teixeira Moreira por continuamente auxiliar-me na busca do conhecimento.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil que de alguma forma contribuíram com a minha formação e com esta pesquisa.

Aos amigos Gelson Alves e José Fabiano, pela amizade, pelo incentivo e pela ajuda imprescindível concedida na construção deste trabalho. Ao amigo Álvaro Martins companheiro de estudo de todas as horas.

Aos amigos conquistados neste período de mestrado: Adeilson Sousa, Agno Alves, Carlos Monte, Carlos Valbison, Danilo Nunes, Denise Cardoso, Dyaloisio Fonteles, Eduardo Martins, Eduardo Pains, Fabiano Campos, Fellipe Sobreira, Fernando Hipólito, Gabriel Costa, Iago Almeida, Jéssica Borges, Murilo Limeira, Nathaly Sarasty, Nelson Afanador, Nicolas Roa, Thalles Farias, Tiago Oliveira, Welington Vital, Yina Fernanda.

Ao frei Edmilson por toda a ajuda. Aos freis Alexandre, Aloísio e Silvio e a todos os outros irmãos por terem me acolhido em suas casas quando eu era viajante.

Aos amigos da Paróquia Santa Luzia – em especial D. Silvana e Pe. Decílio – e aos amigos do EJOE do Santuário Nossa Senhora do Perpétuo Socorro pelo acolhimento, pela amizade, por compartilharem da missão comigo, enfim, por terem sido presença de Deus.

A toda a minha família.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

*Aos meus pais Francisco Ferreira de Oliveira Filho e Carminda Ferraz de Paiva Oliveira e a minha irmã Amanda Oliveira Ferraz de Paiva pelo apoio, incentivo e compreensão. A vocês que são a minha maior riqueza eu dedico.*

## RESUMO

### APLICAÇÃO E ANÁLISE DO MEFG COM ENRIQUECIMENTO POLINOMIAL NA SIMULAÇÃO DE ESTRUTURAS EM PROCESSO DE DANIFICAÇÃO

Autor: Guilherme Oliveira Ferraz de Paiva

Orientador: Francisco Evangelista Junior

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Março de 2017

Este trabalho teve como objetivo analisar e implementar funções de enriquecimento polinomiais e descontínua, conforme a estratégia do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), para aplicação em simulações de problemas de falhas em estruturas utilizando um modelo de dano bilinear. A mais importante contribuição desta pesquisa foi o estudo do dano em membros estruturais sob falhas utilizando malhas grosseiras, com aplicação de funções de enriquecimento para melhorar a aproximação da distribuição do dano. Os resultados foram validados por meio da comparação com o caminho da trinca observado e também com curvas experimentais retiradas de diversos tipos de ensaios, com diferentes tipos de materiais e modos de falha. Os ensaios simulados foram: flexão em três pontos em vigas com entalhe central, cisalhamento em quatro pontos em viga com entalhe central e cisalhamento em quatro pontos em viga com duplo entalhe. Foram simulados tanto modelos com trinca geométrica, quanto modelos com a inserção da trinca via função Heaviside. Comprovou-se, então, a eficiência e acurácia do MEFG em melhorar a previsão do comportamento de ruptura em detrimento de uma análise de Elementos Finitos. Esta qualidade tornou-se mais evidente nas simulações com malhas grosseiras, visto que apresentaram resultados com precisão equivalente a outros encontrados na literatura, porém, com uma quantidade inferior de elementos. As principais consequências da aplicação do enriquecimento são a flexibilização do processo de geração de malha e a redução do custo computacional das análises, devido a quantidade de elementos utilizados na modelagem ser menor.

**Palavras chave:** MEFG, Mecânica da Fratura, Mecânica do Dano Contínuo, Enriquecimento Polinomial, Heaviside, Propagação de trinca.

## ABSTRACT

### APPLICATION AND ANALYSIS OF GFEM WITH POLYNOMIAL ENRICHMENT IN THE SIMULATION OF STRUCTURES IN DAMAGE PROCESS

Author: Guilherme Oliveira Ferraz de Paiva  
Supervisor: Francisco Evangelista Junior  
Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil  
Brasília, March 2017

*This work aimed to implement polynomial and discontinuous enrichment functions, according to the strategy of the Generalized Finite Element Method (GFEM), for application in simulations of failure problems in structures using a bilinear damage model. The most important contribution of this research was the study of damage in structural members under failure using coarse meshes, with application of enrichment functions to improve the approximation of the damage distribution. The results were validated by comparison with the observed crack path and also with experimental curves drawn from different types of tests, with different types of materials and failure modes. The simulated tests were: three-point bending beam with central notch, four-point shear beam with central notch, and four-point shear beam with double notch. Both models were simulated with geometric crack and with the insertion of the crack through Heaviside function. It was then verified the efficiency and accuracy of the GFEM in improving the prediction of the rupture behavior in detriment of a Finite Element analysis. This feature became more evident in simulations with coarse meshes, since they presented results with accuracy equivalent to others found in the literature, but with lower number of elements. The main advantage of the proposed strategy is the flexibility of the mesh generation process and the reduction of the computational cost of the overall simulation.*

**Keywords:** *GFEM, Fracture Mechanics, Continuum Damage Mechanics, Polynomial enrichment, Heaviside, Crack propagation.*



# SUMÁRIO

<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>x</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>xiii</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS E NOMENCLATURAS</b>	<b>xiv</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 OBJETIVOS . . . . .	3
1.1.1 Objetivo Geral . . . . .	3
1.1.2 Objetivo Específicos . . . . .	4
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO . . . . .	4
<b>2 REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>5</b>
2.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS (MEFG)	5
2.1.1 Aproximação no MEFG . . . . .	6
2.1.2 Cinemática do salto de deslocamento . . . . .	8
2.1.3 Funções de enriquecimento do MEFG . . . . .	9
2.2 MODELAGEM DE FALHA . . . . .	11
2.2.1 Abordagem Contínua . . . . .	11
2.2.2 Abordagem Descontínua . . . . .	12
2.2.3 MEFG e Modelos de Dano . . . . .	14
<b>3 MODELO DE DANO E ASPECTOS COMPUTACIONAIS</b>	<b>16</b>
3.1 MODELO DE DANO . . . . .	16
3.1.1 Variável de controle do dano . . . . .	16
3.1.2 Critério de início do dano . . . . .	17
3.1.3 Lei de evolução do dano . . . . .	18
3.1.4 Regularização . . . . .	20
3.1.5 Critério de propagação e direção da trinca . . . . .	20
3.2 ASPECTOS COMPUTACIONAIS . . . . .	22
3.2.1 Processo de enriquecimento dos nós . . . . .	22
3.2.2 Enriquecimento dos nós com funções polinomiais . . . . .	22
3.2.3 Enriquecimento dos nós com função Heaviside . . . . .	23
3.2.4 Enriquecimento polinomial + Heaviside . . . . .	24
3.2.5 Estratégia não-linear para solução do sistema de equações . . . . .	25
<b>4 APLICAÇÃO DO ENRIQUECIMENTO POLINOMIAL</b>	<b>27</b>

<b>5</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I</b>	<b>33</b>
5.1	VIGA SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS ( <i>THREE POINT BENDING - TPB</i> ) COM MODELO DE DANO CONTÍNUO . . . . .	33
5.1.1	Simulações com entalhe explícito (geométrico) . . . . .	33
5.1.2	Simulações com entalhe implícito . . . . .	42
5.2	VIGA SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS ( <i>THREE POINT BENDING - TPB</i> ) COM MODELO DE DANO CONTÍNUO-DESCONTÍNUO . . . . .	48
<b>6</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO</b>	<b>52</b>
6.1	VIGA SOB CISALHAMENTO EM QUATRO PONTOS COM ENTALHE CENTRAL - <i>FOUR POINT SHEAR - SINGLE EDGE NOTCH (FPS-SEN)</i>	52
6.2	VIGA SOB CISALHAMENTO EM QUATRO PONTOS COM DUPLO ENTALHE - <i>FOUR POINT SHEAR - DOUBLE EDGE NOTCH (FPS-DEN)</i>	58
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>65</b>
7.1	CONCLUSÕES . . . . .	65
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	66
	<b>REFERÊNCIAS DA LITERATURA</b>	<b>75</b>

## LISTA DE TABELAS

4.1	Dados geométricos e condições de contorno do modelo . . . . .	27
4.2	Resultados de $u_y(10, \frac{h}{2})$ e $U$ obtidos via Abaqus CAE. . . . .	28
4.3	Número de elementos e nós para cada malha . . . . .	29
5.1	Características geométricas do ensaio de flexão em três pontos - (TPB). . .	34
5.2	Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio de flexão em três pontos	34
5.3	Carga máxima , $P_{max}$ (kN), observada nas simulações numéricas e Erro Relativo em relação ao resultado experimental para a viga TPB. . . . .	38
5.4	Número de Graus de Liberdade (NGL) - TPB com entalhe explícito. . . . .	38
5.5	Total de iterações para cada malha em função do enriquecimento - TPB com entalhe explícito. . . . .	39
5.6	Comparação entre o NGL da malha de 269 elementos sem enriquecimento e da malha de 25 elementos com P3. . . . .	41
5.7	Carga máxima , $P_{max}$ (kN), observada nas simulações numéricas e no resultado experimental para a viga TPB. . . . .	46
5.8	Número de Graus de Liberdade (NGL) - TPB com entalhe implícito. . . . .	46
5.9	Total de iterações para cada malha em função do enriquecimento - TPB com entalhe implícito. . . . .	47
6.1	Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio <i>FPS-SEN</i> . . . . .	53
6.2	Carga máxima , $P_{max}$ (kN), observada nas simulações numéricas e no resultado experimental para a viga FPS. . . . .	55
6.3	Número de Graus de Liberdade (NGL) - FPS-SEN. . . . .	57
6.4	Total de iterações para cada malha em função do enriquecimento - FPS-SEN.	57
6.5	Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio <i>FPS-DEN</i> . . . . .	59
6.6	Carga máxima , $P_{max}$ (kN), observada nas simulações numéricas e erro relativo em relação ao resultado experimental para a viga FPS-DEN. . . . .	62
6.7	Número de Graus de Liberdade (NGL) - FPS-DEN. . . . .	63
6.8	Total de iterações para cada malha em função do enriquecimento - FPS-DEN.	63

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Funções de forma do MEEG - adaptado de Evangelista Jr <i>et al.</i> (2013b). . .	7
2.2	Corpo $V$ cortado pela descontinuidade $\Gamma_d$ (adaptado de Simone <i>et al.</i> , 2003).	8
2.3	Níveis de enriquecimento em função da ordem polinomial. . . . .	9
2.4	Modelagem da descontinuidade: (a) placa com trinca e furo; (b) Malha padrão de MEF com topologia adaptada a geometria da descontinuidade; (c) Malha regular de MEF com enriquecimento dos elementos cortados pela trinca (adaptado de Khoei, 2015) . . . . .	11
2.5	Princípio da equivalência energética onde $\sigma, \varepsilon, U_d^e, \tilde{E}$ referem-se ao material danificado e $\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon}, U_0^e, E$ ao não danificado. . . . .	12
2.6	Modelo de Fratura Fictícia e lei constitutiva de amolecimento ( $\sigma - w$ ) - baseado em Hillerborg <i>et al.</i> (1976). . . . .	13
2.7	Curva de amolecimento bilinear (Roesler <i>et al.</i> , 2007a; Park <i>et al.</i> , 2009). .	14
3.1	Determinação de $\varepsilon_{d0}$ pelo ensaio de tração. . . . .	18
3.2	Comportamento de amolecimento e modelo de dano: (a) Relação constitutiva força-deslocamento e equivalência de deformações em função do comprimento característico $l_c$ ; (b) Modelo de dano correspondente (adaptado de Evangelista Jr <i>et al.</i> , 2013). . . . .	19
3.3	Determinação da direção de propagação da trinca no Modelo de Dano Contínuo-Descontínuo (adaptado de Simone <i>et al.</i> , 2003). . . . .	21
3.4	Classificação dos elementos finitos em função do enriquecimento. . . . .	22
3.5	Processo de enriquecimento dos nós com Heaviside: (a) abordagem contínua; (b) abordagem contínua-descontínua. . . . .	24
3.6	Enriquecimento polinomial + Heaviside - abordagem contínua . . . . .	25
3.7	Esquema iterativo para o método secante (adaptado de Proença, 2008). . . .	26
4.1	Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo. . . . .	27
4.2	Discretização do modelo: (a) malhas com elementos triangulares; (b) malhas com elementos quadrilaterais. . . . .	29
4.3	Malhas Triangulares com: Erro Relativo, $e_r$ , para cada ordem polinomial de enriquecimento sobre os elementos para (a) Deslocamento e (b) Energia de Deformação. . . . .	30
4.4	Malhas Quadrilaterais com: Erro Relativo, $e_r$ , para cada ordem polinomial de enriquecimento sobre os elementos para (a) Deslocamento e (b) Energia de Deformação. . . . .	31

5.1	Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo. . . . .	33
5.2	Malhas de elementos finitos para <i>TPB</i> : (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos. . . . .	34
5.3	Curvas <i>P – CMOD</i> experimentais e numéricas – (a) Malha com 25 elementos – entalhe retangular; (b) malha com 101 elementos – entalhe retangular; (c) malha com 106 elementos – entalhe em formato “V”. . . . .	36
5.4	Distribuição do dano em função dos graus de enriquecimento polinomial - (a) Pontos de interesse para análise do dano; (b) Malha com 25 elementos; (c) Malha com 101 elementos; (d) Malha com 106 elementos. . . . .	37
5.5	Erro Relativo ( $e_r$ ) para medida das cargas máxima observadas em laboratório x NGL para simulações do <i>TPB</i> . . . . .	39
5.6	Avaliação da convergência para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação <i>P0</i> e simulação com enriquecimento <i>P3</i> . . . . .	40
5.7	Curvas <i>P – CMOD</i> - comparação entre simulação <i>P0</i> com malha de 269 elementos e simulação com enriquecimento <i>P3</i> e malha de 25 elementos. . . . .	40
5.8	Malha de 269 elementos finitos. . . . .	41
5.9	Avaliação da convergência - comparação entre simulação com malha de 269 elementos <i>P0</i> e simulação com malha de 25 elementos e enriquecimento <i>P3</i> . . . . .	41
5.10	Malhas 279 elementos - entalhe via função Heaviside. . . . .	42
5.11	Curvas <i>P – CMOD</i> experimentais e numéricas - malha de 269 elementos com entalhe geométrico e malha de 279 com entalhe via Heaviside. . . . .	42
5.12	Distribuição do dano - (a) entalhe geométrico; (b) entalhe implícito. . . . .	43
5.13	Malhas de elementos finitos para <i>TPB</i> : (a) 27 elementos; (b) 107 elementos. . . . .	43
5.14	Curvas <i>P – CMOD</i> : (a) Malha de 27 elementos; (b) malha de 107 elementos. . . . .	44
5.15	Malhas de elementos finitos deformadas - (a) 25 elementos, com entalhe; (b) 101 elementos, com entalhe; (c) 27 elementos, sem entalhe; (d) 107 elementos, sem entalhe. . . . .	45
5.16	Distribuição do dano em função dos graus de enriquecimento polinomial - (a) Malha de 27 elementos; (b) Malha de 107 elementos. . . . .	45
5.17	Erro relativo ( $e_r$ ) para medida das cargas máximas observadas em laboratório x NGL para simulações com entalhe implícito - malhas com 27 e 107 elementos, respectivamente. . . . .	46
5.18	Avaliação da convergência para a malha de 27 elementos - comparação entre simulação <i>P0</i> e simulação com enriquecimento <i>P3</i> . . . . .	47
5.19	Malha de elementos finitos e estratégia de enriquecimento adotada. . . . .	48
5.20	Curvas <i>P – CMOD</i> – Malha com 107 elementos e trinca implícita. . . . .	49
5.21	<i>CMOD</i> após propagação da trinca – Malha com 107 elementos. . . . .	49
5.22	Distribuição do dano em função dos graus de enriquecimento polinomial – Malha com 107 elementos e trinca implícita. . . . .	50

5.23	Evolução da trinca em função do grau do enriquecimento aplicado na simulação - final da curva $P - CMOD$ . . . . .	51
6.1	Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo - espessura = 100 mm (todas as dimensões em mm). . . . .	52
6.2	Malha de elementos finitos para FPS-SEN - 106 elementos. . . . .	53
6.3	Curvas $P - CMSD$ experimentais e numéricas – malha com 106 elementos .	54
6.4	Distribuição do dano em função dos graus de enriquecimento polinomial. .	54
6.5	(a) Propagação de trinca experimental (adaptado de Schlangen, 1993); (b) sobreposição da distribuição do dano sobre o resultado de propagação experimental. . . . .	55
6.6	Erro Relativo ( $e_r$ ) para medida das cargas máxima observadas em laboratório x NGL para simulações do $FPS-SEN$ . . . . .	55
6.7	Discretização da viga com: (a) 7308 elementos (Simone <i>et al.</i> , 2003); (b) 761 elementos (Moreira, 2016). . . . .	56
6.8	Curvas $P - CMSD$ - comparação entre simulações P0 com malha de 761 e 7308 elementos e simulação com enriquecimento P6 e malha de 106 elementos.	56
6.9	Avaliação da convergência - comparação entre simulação com malha de 769 elementos P0 e simulação com malha de 106 elementos e enriquecimento P6.	57
6.10	Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo - espessura = 37,5 mm (todas as dimensões em mm). . . . .	58
6.11	Malha de elementos finitos para ensaio $FPS - DEN$ . . . . .	59
6.12	Curvas $P - CMOD$ experimental (Schlangen, 1993) e numérico referente a malha de 1193 elementos. . . . .	59
6.13	Malha de elementos finitos para FPS-DEN - 193 elementos. . . . .	60
6.14	Curvas $P - CMOD$ experimental (Schlangen, 1993) e numéricos referente a malha de 193 elementos. . . . .	60
6.15	Distribuição do dano em função dos graus de enriquecimento polinomial. .	61
6.16	Sobreposição da distribuição do dano sobre o resultado da propagação experimental (adaptado de Schlangen, 1993): (a) Malha de 1193 elementos sem enriquecimento ; (b) Malha com 193 elementos e enriquecimento P3. .	62
6.17	Erro Relativo ( $e_r$ ) para medida das cargas máxima observadas em laboratório x NGL para simulações do $FPS-DEN$ . . . . .	62
6.18	Curvas $P - CMSD$ - comparação entre simulações P0 com malha de 1193 elementos e simulação com enriquecimento P3 e malha de 193 elementos. .	63
6.19	Avaliação da convergência - comparação entre simulação com malha de 1193 elementos P0 e simulação com malha de 193 elementos e enriquecimento P3.	64

# LISTA DE SÍMBOLOS E NOMENCLATURAS

## Símbolos do Alfabeto Grego

$\varepsilon$	Tensor de deformações
$\otimes$	Produto de Kronecker
$\psi$	Ponto de mudança de direção das leis de dano ( <i>kink point</i> )
$w_f$	Deslocamento limite
$\Gamma_d$	Descontinuidade que corta o corpo $V$
$\Gamma_t$	Região de aplicação das condições de contorno de força distribuída
$\Gamma_u$	Região de aplicação das condições de contorno de deslocamento
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\varepsilon_{d0}$	Valor inicial de deformação crítica
$\varepsilon_{eq}$	Deformação equivalente
$\varepsilon_{eq}^{MA}$	Deformação equivalente de Mazars
$\varepsilon_{eq}^{VM}$	Deformação equivalente de Von Mises
$\varepsilon_i$	Deformação principal na direção $i$

## Símbolos do Alfabeto Latino

$\bar{t}$	Vetor de forças aplicadas
$a$	Vetor com graus de liberdade padrão
$B_\gamma$	$L(NN_\gamma)$
$B$	Matriz com as derivadas das funções de forma
$b$	Vetor com graus de liberdade adicionais
$F$	Vetor de forças externas globais
$I_{\varepsilon 1}$	Primeiro invariante do tensor de deformações
$J_{\varepsilon 2}$	Segundo invariante do tensor de deformações

$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez genérica
$\mathbf{n}_d$	Vetor normal à descontinuidade $\Gamma_d$ apontando para $V^+$
$\mathbf{U}$	Vetor de deslocamentos externos globais
$\mathbf{r}_i$	Vetor na direção do ponto de integração $i$
$[[\tilde{\mathbf{u}}]]$	Salto de deslocamento na descontinuidade $\Gamma_d$
$a_\alpha$	Graus de liberdade padrão
$b_{\alpha i}$	Graus de liberdade adicionais
$E$	Módulo de elasticidade
$f_t$	Resistência à tração
$f_c$	Resistência à compressão
$G_F$	Energia de fratura total
$G_f$	Energia de fratura inicial
$l_c$	Comprimento característico
$S$	Contorno do elemento
$V$	Domínio de um determinado corpo
$V^+$	Parte corpo $V$ onde a função Heaviside vale 1
$V^-$	Parte corpo $V$ onde a função Heaviside vale 0
$w$	Deslocamento de abertura de trinca
$w_1$	Cruzamento entre a primeira declividade e o eixo ordenado na curva $\sigma - w$
$w_f$	Deslocamento de abertura de trinca limite na curva $\sigma - w$
$w_k$	Deslocamento de abertura de trinca no ponto de mudança de direção das leis de dano
$D_{crit}$	Dano crítico utilizado como critério de propagação da trinca
$D_i$	Valor do dano no ponto de integração $i$
$e_r$	Erro Relativo
$P_{max}$	Carga máxima resistida



$r$	Direção de propagação da trinca
$w_i$	Peso associado ao ponto de integração $i$
$e\%$	Erro relativo em porcentagem
$P$	Força aplicada
$D$	Variável escalar de dano
$I$	Momento de Inércia da seção transversal
$\hat{u}$	Função contínua no domínio $V$

### **Nomenclatura**

<i>CMOD</i>	<i>Crack Mouth Opening Displacement</i>
<i>CMSD</i>	<i>Crack Mouth Sliding Displacement</i>
CC	Condições de Contorno
CDM	<i>Continuum Damage Mechanics</i>
CTOD	<i>Crack Tip Opening Displacement</i>
CZM	<i>Cohesive Zone Models</i>
FPS-DEN	<i>Four Point Shear - Double Edge Nocth</i>
FPS-SEN	<i>Four Point Shear - Single Edge Nocth</i>
MC	Mecânica do Contínuo
MDC-D	Modelo de Dano Contínuo-Descontínuo
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MF	Mecânica da Fratura
MFLE	Mecânica da fratura Linear Elástica
NGL	Número de Graus de Liberdade
P0	Sem função de enriquecimento
P1	Função de enriquecimento de 1º grau

- P2 Função de enriquecimento de 2º grau
- P3 Função de enriquecimento de 3º grau
- P4 Função de enriquecimento de 4º grau
- P5 Função de enriquecimento de 5º grau
- P6 Função de enriquecimento de 6º grau
- PU Partição da Unidade
- PU-MEF Método de Partição da Unidade de Elementos Finitos
- PVC Problema de Valor de Contorno
- SGFEM *Stable Generalized Finite Element Method*
- TOL Tolerância adotada para convergência entre iterações pelo Método Secante
- TPB *Three Point Bending*
- XFEM *Extended Finite Element Methods*
- ZPF Zona de Processo de Fratura

# 1 - INTRODUÇÃO

A engenharia estrutural tem especial interesse nos fenômenos de fratura e dano. Quando uma estrutura é submetida ao carregamento, podem surgir tensões no corpo que, então, entra em processo de falha devido a presença de trincas e fissuras. Este processo de falha pode ser descrito segundo vários modelos, como por exemplo, as Zonas de Processo de Fratura (ZPF) (Hillerborg *et al.*, 1976; Bazant *et al.*, 1984; Vavrik e Jandejsek, 2014; Ha *et al.*, 2015; Wei *et al.*, 2016; Xie *et al.*, 2016). Diante disso, tem crescido o interesse da mecânica computacional no tocante à implementação de técnicas que consigam descrever com acurácia tais modelos (Cuvilliez *et al.*, 2012).

A Mecânica da Fratura (MF) lida com a abordagem descontínua dos processos de falha. Dentre as várias estratégias utilizadas para idealizar o comportamento da zona fraturada, destacam-se os Modelos de Zona Coesiva, *Cohesive Zone Models* (CZM), que utiliza uma interface definida de elementos para descrever a trinca (Barenblatt, 1959; Dugdale, 1960; Smith, 1974; Li e Liang, 1992; Lin *et al.*, 1999; Elices *et al.*, 2002; Evangelista Jr *et al.*, 2013a; Park e Paulino, 2013; Tejchman e Bobinski, 2013; Cerrone *et al.*, 2014). Proposto inicialmente por Barenblatt (1959) e Dugdale (1960), estes modelos caracterizam-se por considerar que todas as não linearidades da ZPF ocorrem em uma zona coesiva à frente da ponta da trinca.

A Mecânica do Dano Contínuo, *Continuum Damage Mechanics* (CDM), lida com o fenômeno do desenvolvimento, crescimento, coalescência e propagação de trincas distribuídas utilizando conceitos da Mecânica do Contínuo (MC). É utilizada para descrever processos irreversíveis tais como o estado de danificação, endurecimento e amolecimento (Kachanov, 1958; Lemaitre e Chaboche, 1994). Sua principal característica reside no fato de dispensar discretizações especiais para modelagem da trinca, além de não ser necessário o emprego de elementos especiais na interface da descontinuidade. Isto se deve ao fato de a representação da trinca seguir a evolução do dano na região. A MC e a CDM apresentam conceitos oriundos de anos de pesquisa e desenvolvimento, como pode ser observado, respectivamente, em Truesdell (1966), Truesdell (1991) e Ogden (1997), Kachanov (1958), Kachanov (1986) e Lemaitre e Chaboche (1994). Apesar de serem modelos antigos, a popularidade de ambos permanece, visto que continuam figurando em diversas pesquisas atuais, como pode-se notar, respectivamente, em Yagawa (2011), Meyer Jr e Brannon (2012), Golmakani e Rezatalab (2014) e Cho *et al.* (2015), e em Simone *et al.* (2003), Comi *et al.* (2007), Lé *et al.* (2017) e McGregor *et al.* (2017).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é a ferramenta numérica mais utilizada na mecânica computacional para modelar e prever o comportamento de estruturas e materiais. Diante de certos problemas de valores de contorno (PVC), porém, o MEF convencional não modela eficientemente o fenômeno analisado, tais como problemas de propagação de trincas (Belytschko e Black, 1999; Duarte *et al.*, 2001), ainda que seja possível para o MEF atingir aproximações satisfatórias. Casos mais complicados como esses citados exigem alterações na discretização do modelo (ou seja, adaptação da malha) tornando proibitiva a análise devido ao enorme custo computacional envolvido. Nas análises numéricas desses fenômenos utilizando o MEF, a não linearidade dos campos de tensões e deformações que ocorre na ponta da trinca só conseguem ser captados mediante um elevado refinamento local da malha (Khoei, 2015).

A tentativa de superar o baixo desempenho do MEF em certos tipos de análises embasou muitas pesquisas nas últimas três décadas (Duarte e Oden, 1995; Belytschko e Black, 1999; Moës *et al.*, 1999). Como fruto desses trabalhos surgiram métodos numéricos alternativos, tais como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (Strouboulis *et al.*, 2000a; Strouboulis *et al.*, 2000b; Duarte *et al.*, 2001; Pereira *et al.*, 2009b) e o Método dos Elementos Finitos Estendidos (*XFEM*) (Moës e Belytschko, 2002; Huang *et al.*, 2003; Belytschko *et al.*, 2009; Gupta e Duarte, 2016), cuja principal vantagem é permitir a ocorrência de trincas arbitrárias no interior do elemento finito (Tejchman e Bobinski, 2013; Kim e Duarte, 2015; Friderikos *et al.*, 2016; Kim *et al.*, 2016). A diferença básica entre esses dois métodos é que o *XFEM* possui características voltadas especialmente à problemas de fratura (Belytschko e Black, 1999; Dolbow, 1999; Moës e Belytschko, 2002), diferente do MEFG que possui uma aplicabilidade mais ampla. Os métodos baseados na Partição da Unidade de Elementos Finitos (PU-MEF), tais como MEFG e o *XFEM* buscam reduzir, ou mesmo eliminar, a dependência entre as equações que governam o problema e a respectiva malha, seguindo o mesmo princípio dos Métodos sem Malha que, segundo Duarte e Oden (1995), buscam minimizar a influência da malha frente à qualidade do resultado.

O MEFG e o *XFEM* tem sido aplicado com muito sucesso em problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) devido possuir características especiais capazes de produzir soluções altamente precisas. Em problemas envolvendo singularidades e descontinuidades que utilizam como ferramenta a função Heaviside, o MEFG apresenta excelente desempenho e flexibilidade quanto a aplicação. Esta última característica torna o MEFG capaz de promover aproximações locais por meio da seleção prévia de funções de enriquecimento, sem requerer, no entanto, grandes refinamentos da malha na interface ou na superfície de fratura (Barros *et al.*, 2004; Proença e Torres, 2008; Gupta *et al.*, 2015; Lins

*et al.*, 2015; Gupta e Duarte, 2016). Ele possui muitas das características dos Métodos sem Malha, apresentando, porém, maior eficiência computacional.

As pesquisas mais modernas tem buscado combinar as abordagens contínua e descontínua para modelar dano e propagação de trincas em domínios bidimensionais para o concreto, ou seja, aplicando o chamado Modelo de Dano Contínuo-Descontínuo. Alguns trabalhos demonstram que é possível aliar com sucesso as características de ambos os modelos (CDM e MF), como pode ser observado em Simone *et al.* (2003), Borst R.; Remmers *et al.* (2004), Cuvilliez *et al.*, 2012, Tejchman e Bobinski (2013). Outros ainda fazem uso das vantagens dos Métodos de Partição da Unidade, tais como MEFG e *XFEM*, alcançando resultados bastante satisfatórios (Vandoren *et al.*, 2013; Rodrigues, 2015; Roth *et al.*, 2015; Friderikos *et al.*, 2016; Huang e Zhang, 2016). Em Moreira (2016) e Moreira e Evangelista Jr. (2016), por exemplo, a principal contribuição foi a implementação de uma técnica eficiente de simulação numérica que, atuando em conjunto com uma lei de evolução de dano baseada unicamente em parâmetros físicos obtidos em ensaios de resistência, mostrou-se capaz de prever o comportamento de estruturas em processo de danificação de maneira eficiente e com objetividade de malha tanto para modo I como para modo misto de fratura.

Há, na literatura, certa escassez de trabalhos que associem o estudo e aplicação do MEFG polinomial para a avaliação de estruturas em processo de danificação, com conceitos da CDM ou da MF. Pesquisas que aplicam enriquecimento polinomial associado à um Modelo de Dano Contínuo-Descontínuo (MDC-D) são ainda mais raros. Esta pesquisa insere-se neste meio através de uma vertente ainda pouco explorada, a saber, a associação das vantagens do MEFG polinomial com modelos de dano contínuo, e contínuo-descontínuo para a análise do processos de danificação em estruturas.

## **1.1 - OBJETIVOS**

### **1.1.1 - Objetivo Geral**

A presente pesquisa tem como objetivo geral a análise e a implementação das funções de enriquecimento polinomiais, conforme a estratégia do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), para aplicação em simulações de problemas de falhas em estruturas. A principal contribuição desta pesquisa foi a análise e aplicação do MEFG polinomial utilizando um modelo de dano contínuo e um modelo de dano contínuo-descontínuo (com transição para fratura) aplicado aos modos I e misto (I + II) de abertura de trincas para a simulação do processos de danificação em estruturas utilizando malhas grosseiras nas simulações.

### **1.1.2 - Objetivo Específicos**

- Formular e implementar o método dos elementos finitos generalizados com funções de enriquecimento polinomial e descontínua no programa existente do grupo de pesquisa;
- Analisar o desempenho do enriquecimento polinomial na distribuição do dano;
- Verificar o desempenho do MEFG quando comparado ao MEF em análises de dano contínuo e propagação de trincas com MDC-D (com transição para fratura);
- Alcançar objetividade de malha com enriquecimento polinomial;
- Validar os modelos através da comparação com resultados experimentais retirados da literatura;
- Verificar a capacidade do método quanto a convergência do sistema de equações e desempenho computacional;
- Avaliar o comportamento dos resultados em função da substituição de trincas geométricas por trincas via função Heaviside.

## **1.2 - ESTRUTURA DO TRABALHO**

Esta pesquisa está dividida em sete capítulos, sendo o Capítulo 1 dedicado à introdução ao assunto estudado e aos objetivos geral e específicos da pesquisa. O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica da Mecânica do Dano Contínuo e do Método dos Elementos Finitos Generalizados. O capítulo 3 traz aspectos da formulação do modelo de dano utilizado e detalhes da implementação numérica. O capítulo 4 dedica-se à verificação do MEFG polinomial. O capítulo 5 apresenta os resultados para as simulações em modo I de fratura. O capítulo 6 apresenta os resultados das simulações para modo misto (I + II). Por fim, o capítulo 7 traz as principais considerações deste trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros.

## 2 - REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo apresenta a revisão da literatura do estudo dividida em três etapas. Na primeira, apresenta-se uma abordagem sobre o Método dos Elementos Finitos Generalizados. Em seguida, é realizada uma revisão sobre a Mecânica do Dano Contínuo destacando-se a forma como foi abordada neste trabalho. E na terceira, é feito um breve comentário sobre o potencial da aplicação do MEFG em problemas envolvendo estruturas danificadas, em função das experiências de outros pesquisadores.

### 2.1 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS (MEFG)

O MEF baseia-se nas propriedades de aproximação local de polinômios (Melenk e Babuška, 1996). Estes, no entanto, em problemas onde ocorrem saltos, torções ou singularidades, apresentam fraco poder de aproximação. A precisão da solução é, conseqüentemente, prejudicada. Vários métodos têm sido desenvolvidos buscando suprir tais deficiências, como o Método de Partição da Unidade de Elementos Finitos (PU-MEF) proposto por Babuška e Melenk (1997).

Uma outra alternativa para contornar os problemas elencados acima é a utilização de funções ditas "especiais". Estas formulações numéricas não-convencionais empregadas na construção de aproximações enriquecidas variam do emprego de campos de "deformações aumentados" (Simo e Rifai, 1990; Korelc e Wriggers, 1996), aos métodos de partição da unidade (Strouboulis *et al.*, 2000a; Strouboulis *et al.*, 2000b; Duarte *et al.*, 2001). Entre os métodos PU, se destacam o Método dos Elementos Finitos Estendidos - *Extended Finite Element Methods (XFEM)* (Belytschko e Black, 1999; Moës *et al.*, 1999) - e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

O MEFG é, portanto, uma variação do MEF convencional. Foi inicialmente proposto por Babuška *et al.* (1994) sob a denominação de Método dos Elementos Finitos Especiais. Em 1995, aparece como uma proposta de método sem malha sob a denominação de Método das Nuvens *hp* (Duarte e Oden, 1995). Nesse mesmo ano, Melenk (1995) desenvolveu o método matematicamente, destacando-se com um dos primeiros a abordar o tema utilizando a atual denominação. Ainda nesse período, utilizando uma metodologia de enriquecimento baseada na partição da unidade para campos descontínuos, o XFEM surge como uma importante ferramenta para a modelagem de problemas de fratura (Belytschko e Black,

1999; Dolbow, 1999; Moës *et al.*, 1999; Daux *et al.*, 2000; Moës e Belytschko, 2002). Em seu trabalho, Moës e Belytschko (2002) utilizaram funções de enriquecimento singulares e descontínuas para resolver problemas da MFLE. Em Strouboulis *et al.* (2001) os autores descreveram como o MEF pode ser generalizado. O MEFG, em suma, trata-se de uma forma distinta de geração das funções de forma dos elementos finitos (Pereira *et al.*, 2009a) a partir do emprego de funções de forma não convencionais (“especiais”). A escolha destas funções deve pautar-se na garantia da manutenção das condições iniciais de estabilidade do problema bem como na dificuldade de implementação (Babuška *et al.*, 1994).

### 2.1.1 - Aproximação no MEFG

A construção das funções de forma do MEFG ( $\phi_{\alpha i}$ ) pode ser definida, matematicamente, como uma combinação, em cada nó  $x_\alpha$  do domínio, entre as funções de forma padrão do MEF ( $N_\alpha$ ) e funções linearmente independentes  $L_{\alpha i}$  chamadas funções de enriquecimento. Sendo  $L_{\alpha i} = \{1, L_{\alpha 1}, L_{\alpha 2}, \dots, L_{\alpha q}\}$  uma base geradora para um espaço de funções  $\chi_\alpha(\omega_\alpha)$  definido sobre  $\omega_\alpha$ . As funções de forma  $\phi_{\alpha i}$  (também chamadas de funções produto) associadas ao nó  $x_\alpha$  são, portanto, conforme ilustrado na Fig. 2.1, definidas da seguinte maneira:

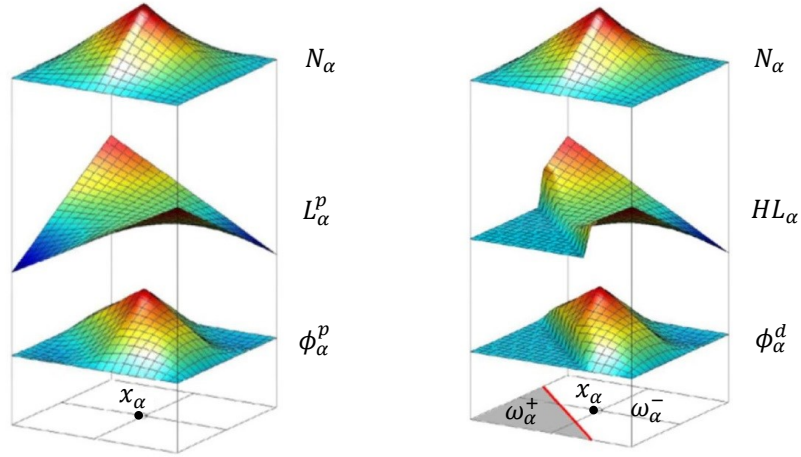
$$\phi_{\alpha i} = N_\alpha L_{\alpha i} \quad (2.1)$$

onde  $i = 1, \dots, q$ , é o número de funções enriquecedoras. A Fig. 2.1(a) apresenta enriquecimento contínuo e a Fig. 2.1(b) descontínuo, em que  $H$  representa a função Heaviside,  $\omega_\alpha^+$  o intervalo onde  $H = 0$  e  $\omega_\alpha^-$  o intervalo onde  $H = 1$ .

Devido terem como base as funções de forma padrão do MEF, as funções de forma  $\phi_\alpha$  herdam das mesmas o suporte compacto da Partição da Unidade (PU), ou seja, valem zero fora dos elementos que contém o seu nó associado. Isso garante a não penalização da continuidade entre os elementos da malha inicialmente adotada. Além disso, o somatório de todas as funções de forma pertencentes à nuvem  $x_\alpha$  é igual à unidade, propriedade também herdada da formulação clássica do MEF (Strouboulis *et al.*, 2000a). Através do produto funcional exemplificado pela Fig. 2.1 determina-se a aproximação do campo de deslocamentos ( $\tilde{u}(x)$ ) conforme a Eq. 2.2:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha(x) \left\{ a_\alpha + \sum_{i=1}^q L_{\alpha i}(x) b_{\alpha i} \right\} \quad (2.2)$$





(a) Enriquecimento de alta ordem contínuo (b) Enriquecimento de alta ordem descontínuo

Figura 2.1 – Funções de forma do MEEG - adaptado de Evangelista Jr *et al.* (2013b).

onde  $\alpha = 1, \dots, n$ , é o número de pontos nodais  $x_\alpha$ ;  $a_\alpha$ , são os graus de liberdade da estrutura associados ao nó  $x_\alpha$  da nuvem  $\omega_\alpha$ ;  $b_{\alpha i}$ , são os graus de liberdade adicionais correspondentes a cada função de enriquecimento. Pode-se reescrever a Eq. 2.2 em notação de elementos finitos da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \underbrace{\mathbf{N}(x)\mathbf{a}}_{\text{interpolação convencional}} + \underbrace{\mathbf{N}(x)(\mathbf{N}_\gamma(x)\mathbf{b})}_{\text{enriquecimento}} \quad (2.3)$$

em que  $\mathbf{N}$  é a matriz que contém as funções de forma convencionas;  $\mathbf{a}$  é o vetor com os graus de liberdade convencionais do MEF;  $\mathbf{N}_\gamma$  é a matriz com os termos da base adicional;  $\mathbf{b}$  é o vetor que contém os graus de liberdade adicionais devido ao enriquecimento. Desta forma, o campo de deformação pode ser obtido a partir do gradiente do campo de deslocamento  $\tilde{\mathbf{u}}$  conforme a Eq. 2.4 abaixo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{B}_\gamma \mathbf{b} \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}_\gamma = \mathbf{T}(\mathbf{N}\mathbf{N}_\gamma)$ , sendo  $\mathbf{T}$  a matriz que contém os operadores diferenciais.

### 2.1.2 - Cinemática do salto de deslocamento

A incorporação de uma descontinuidade num campo de deslocamento exige a prévia caracterização das propriedades cinemáticas do sólido cortado pela mesma. Considerando-se um corpo  $V$  com contorno  $\Gamma$  e cortado por uma descontinuidade  $\Gamma_d$  que divide o corpo nos domínios  $V^+$  e  $V^-$ , tal que  $V = V^+ + V^-$ , conforme Fig. 2.2, em que  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$  são as regiões de aplicação das condições de contorno de deslocamento e de força distribuída, respectivamente, e  $\bar{\mathbf{t}}$  é o vetor de forças aplicadas.

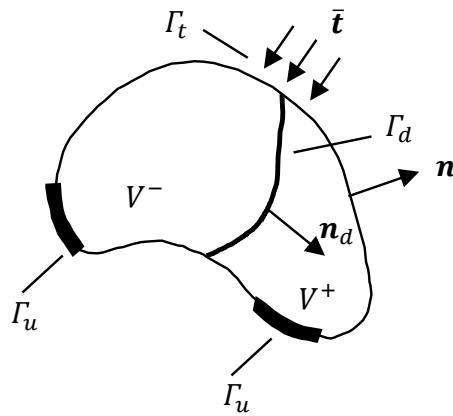


Figura 2.2 – Corpo  $V$  cortado pela descontinuidade  $\Gamma_d$  (adaptado de Simone *et al.*, 2003).

Desta forma, o campo de deslocamento  $\mathbf{u}$  pode ser decomposto em uma parte contínua e outra descontínua, conforme segue:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \hat{\mathbf{u}}(x) + H_{\Gamma_d} \llbracket \tilde{\mathbf{u}}(x) \rrbracket \quad (2.5)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}$  é uma função contínua no domínio  $V$ ;  $\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket$  é uma função descontínua no domínio  $V$  e  $H_{\Gamma_d}$  é a função Heaviside centrada na superfície descontínua  $\Gamma_d$  ( $H_{\Gamma_d} = 1$  se  $x \in V^+$ ,  $H_{\Gamma_d} = 0$  se  $x \in V^-$ ). A função Heaviside introduz a descontinuidade em  $\Gamma_d$  e o valor do salto de deslocamento é dado por  $\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket$ . O campo de deformações pode ser obtido a partir do gradiente do campo de deslocamentos  $\tilde{\mathbf{u}}$ , da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \hat{\mathbf{u}} + H_{\Gamma_d} (\nabla^S \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket) + (\nabla H_{\Gamma_d} \otimes \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket)^S \quad (2.6)$$

em que o operador  $\otimes$  é o produto de Kronecker. A simbologia  $(\cdot)^S$  indica que somente a parte

simétrica dos tensores é considerada, supondo que as deformações sejam infinitesimais.

### 2.1.3 - Funções de enriquecimento do MEF

As funções  $L_{\alpha i}$  da Eq. 2.1 podem ser de base polinomial ou não. A escolha mais comum se faz, naturalmente, pelas funções polinomiais, em vista de sua relativa facilidade de implementação, bem como da enorme capacidade de aproximar funções suaves de forma satisfatória. Podem ser construídas de forma hierárquica tendo como regra o Triângulo de Pascal assumindo, de modo geral, o seguinte formato:

$$L(m,n) = \frac{X^m Y^n}{h^{(m+n)}} \quad (2.7)$$

Uma alternativa para a Eq. 2.7 é a chamada "função deslocada" definida conforme Eq. 2.8:

$$L(m,n) = \frac{(X - X_\alpha)^m (Y - Y_\alpha)^n}{h^{(m+n)}} \quad (2.8)$$

em que  $X_\alpha$  e  $Y_\alpha$  são as coordenadas do nó  $\alpha$  onde o enriquecimento é aplicado;  $X$  e  $Y$  são as coordenadas dos pontos de Gauss em cada elemento; e  $h$  atua como normalizador de forma a excluir do enriquecimento informações associadas à geometria do elemento ou à sua posição na malha, minimizando, desta forma, erros de arredondamento. O esquema de enriquecimento polinomial utilizado neste trabalho, em função da ordem polinomial, é ilustrada na Fig. 2.3, para uma função bidimensional.

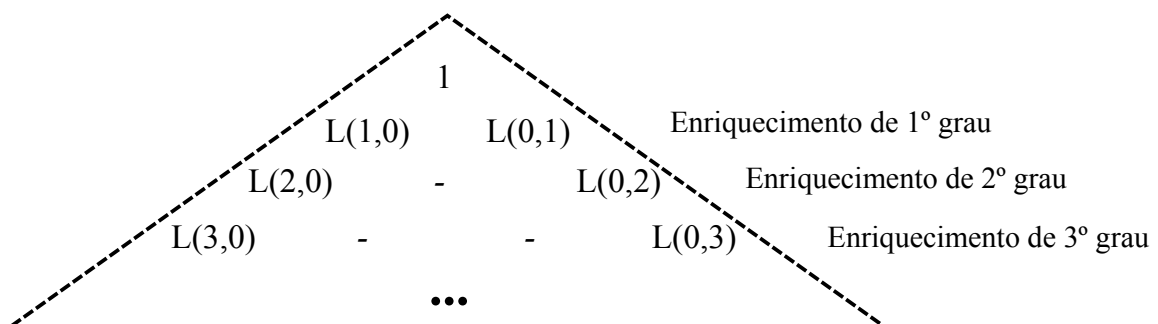


Figura 2.3 – Níveis de enriquecimento em função da ordem polinomial.

Portanto, ressalta-se que, neste trabalho, os conjuntos de funções de enriquecimento foram construídos utilizando-se apenas os termos extremos do triângulo de Pascal. De forma geral,

conforme a Fig. 2.3, tem-se, por exemplo:

$$\text{Linear} \rightarrow L_{P=1} = \left\{ 1, \frac{x - x_\alpha}{h_\alpha}, \frac{y - y_\alpha}{h_\alpha} \right\} \quad (2.9a)$$

$$\text{Quadrática} \rightarrow L_{P=2} = \left\{ 1, \frac{x - x_\alpha}{h_\alpha}, \frac{y - y_\alpha}{h_\alpha}, \frac{(x - x_\alpha)^2}{h_\alpha^2}, \frac{(y - y_\alpha)^2}{h_\alpha^2} \right\} \quad (2.9b)$$

$$\text{Cúbica} \rightarrow L_{P=3} = \left\{ 1, \frac{x - x_\alpha}{h_\alpha}, \frac{y - y_\alpha}{h_\alpha}, \frac{(x - x_\alpha)^2}{h_\alpha^2}, \frac{(y - y_\alpha)^2}{h_\alpha^2}, \frac{(x - x_\alpha)^3}{h_\alpha^3}, \frac{(y - y_\alpha)^3}{h_\alpha^3} \right\} \quad (2.9c)$$

onde o valor de  $P$  indica o grau de enriquecimento. A construção de conjuntos de ordem mais elevada que as demonstradas anteriormente respeitou a mesma lógica.

Em análises com descontinuidades devido a presença de trincas, deve-se levar em consideração a ocorrência de uma descontinuidade local do corpo e, conseqüentemente, do campo de deslocamentos ali desenvolvidos. Neste ponto, surge a aplicação das funções descontínuas, devido sua capacidade de descrever o "salto de deslocamento" que ocorre na região de abertura da trinca. Uma estratégia de aproximação possível (Fig.2.1(b)) pode ser formulada da seguinte maneira:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i \in N} N_i(x) \left[ u_i + \underbrace{H(x)a_i}_{i \in N_\Gamma} \right] \quad (2.10)$$

onde  $u_i$  são os deslocamentos nodais associados ao MEF;  $H(x)$  é a função Heaviside;  $a_i$  são os graus de liberdade enriquecidos associados à função Heaviside.

Os modelos mais modernos incorporam na aproximação a descontinuidade do campo de deslocamentos por meio de uma combinação entre a função Heaviside e as funções de forma padrão do MEF, garantindo, por exemplo que modelos com trincas ou furos (Fig. 2.4(a)) possam ser discretizados com uma quantidade menor de elementos. Evita-se ainda o custo computacional da atualização frequente de malha (Fig. 2.4(b)), além de

permitir a propagação da trinca dentro dos elementos (Fig. 2.4(c)) (Oliver, 1995; Simone *et al.*, 2003).

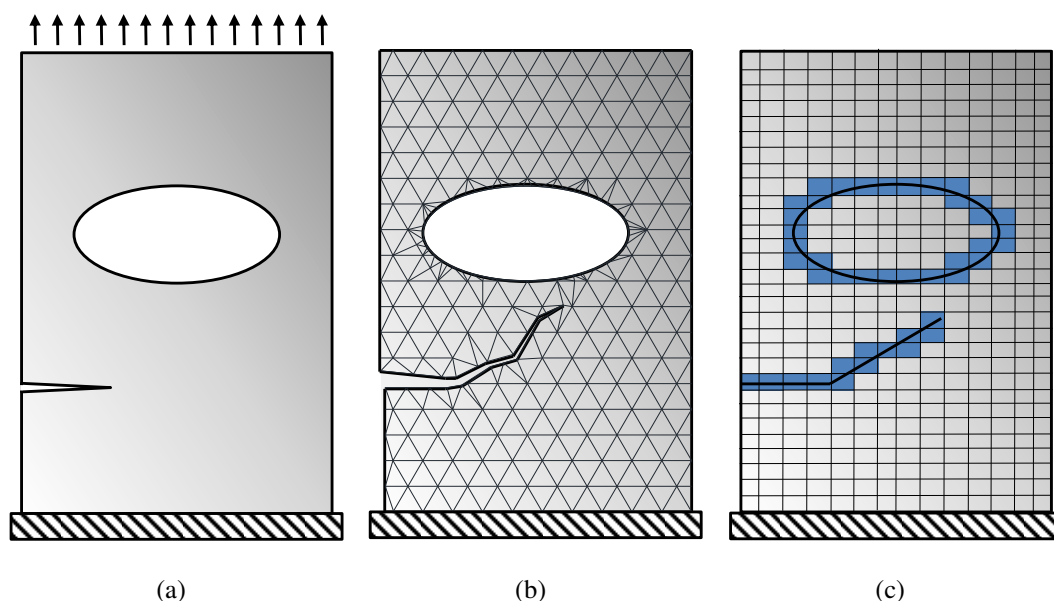


Figura 2.4 – Modelagem da descontinuidade: (a) placa com trinca e furo; (b) Malha padrão de MEF com topologia adaptada a geometria da descontinuidade; (c) Malha regular de MEF com enriquecimento dos elementos cortados pela trinca (adaptado de Khoei, 2015)

## 2.2 - MODELAGEM DE FALHA

### 2.2.1 - Abordagem Contínua

Esta forma de abordar os processos de falha utiliza conceitos da Mecânica do Contínuo (MC) para descrever a perda de rigidez ou qualquer fenômeno dissipativo nos materiais. Segundo a teoria da Mecânica do Dano Contínuo a falha é representada com sendo uma região contínua cuja resistência é gradualmente reduzida de acordo com uma lei de evolução do dano. Isto apresenta uma grande vantagem: a possibilidade de modelar áreas multifissuradas não necessariamente localizadas.

O modelo de dano empregado neste trabalho baseia-se no princípio da equivalência energética (Kachanov, 1958), segundo o qual a energia elástica no material danificado é a mesma do não danificado, desde que a tensão aplicada seja substituída pela tensão efetiva. A Fig. 2.5 ilustra de forma clara este princípio, onde os termos do trio  $(E, U_0^e, \tilde{\varepsilon})$  representam a rigidez elástico, energia elástica e a deformação para um material não danificado e, de forma análoga, os termos do trio  $(\tilde{E}, U_d^e, \varepsilon)$ , sendo estes, porém, relacionados a um material danificado.

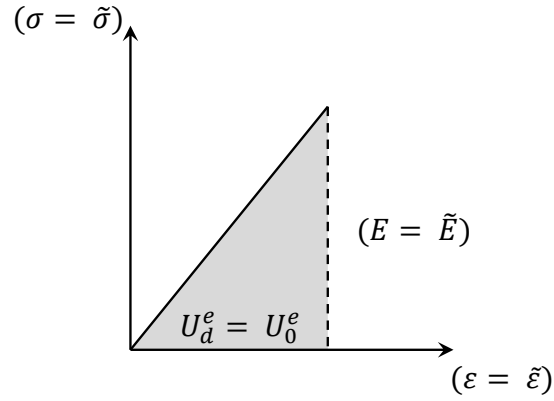


Figura 2.5 – Princípio da equivalência energética onde  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $U_d^e$ ,  $\tilde{E}$  referem-se ao material danificado e  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $U_0^e$ ,  $E$  ao não danificado.

O conceito de tensão efetiva é definido para o tensor de tensões  $\sigma$  como (Rabotnov, 1969):

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (2.11)$$

onde  $D$  é um operador escalar que varia de zero (sem presença de dano) à um (material totalmente danificado);  $\sigma$  é o tensor de tensões para o material danificado e  $\tilde{\sigma}$ , para o não danificado. A partir da Eq. 2.11 e, sabendo que  $\tilde{\sigma} = C_0 \varepsilon$ , tem-se:

$$\sigma = (1 - D)\tilde{\sigma} = (1 - D)C_0 \varepsilon \quad (2.12)$$

onde  $C_0$  é o tensor elástico de quarta ordem do material não danificado. A variável de dano  $D$  pode seguir uma lei de evolução baseada em um critério de deformação (Mazars, 1984; Vree *et al.*, 1995; Roth *et al.*, 2015; Pereira *et al.*, 2016), energia ou tensão. Mais detalhes sobre este assunto serão dados no Capítulo 3.

### 2.2.2 - Abordagem Descontínua

Introduzido por Barenblatt (1959) e Dugdale (1960), o Modelo de Zona Coesiva é, atualmente, uma das estratégias utilizadas para a modelagem de propagação de trincas. Nesse modelo, todas as não-linearidades da Zona de Processo físico de Fratura (ZPF) localizam-se na frente da trinca em uma zona denominada coesiva. O CZM tem sido

utilizado em programas de elementos finitos através dos chamados elementos de interface, cujo comportamento é condicionado a uma lei coesiva de falha ( $\sigma - w$ ) para materiais com amolecimento coesivo. Modelando materiais quase-frágeis, Hillerborg *et al.* (1976) expôs em seu trabalho o Modelo de Fratura Fictícia cujos conceitos assemelham-se bastante àqueles introduzidos por Barenblatt (1959) e Dugdale (1960), como é possível observar na Fig. 2.6, que apresenta uma lei coesiva de falha bilinear, onde as variáveis  $w$  representam o deslocamento de abertura da trinca e  $CTOD$  representa o deslocamento de abertura da ponta, ou *Crack Tip Opening Displacement*.

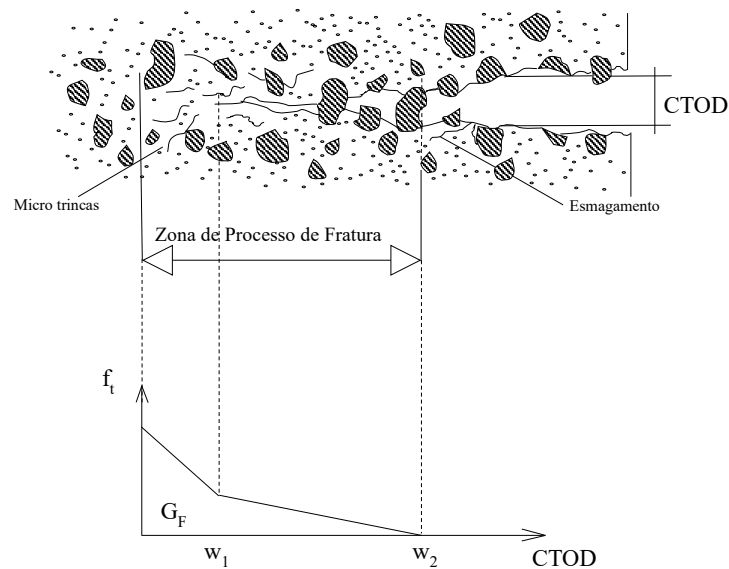


Figura 2.6 – Modelo de Fratura Fictícia e lei constitutiva de amolecimento ( $\sigma - w$ ) - baseado em Hillerborg *et al.* (1976).

A implementação desta idealização pode ser feita segundo os modelos intrínseco ou extrínseco. O primeiro, caracteriza-se pela existência de uma rigidez inicial definida na lei ( $\sigma - w$ ) que se estende até o instante em que a resistência à tração ( $f_t$ ) do material é atingida ativando, então, a resposta de amolecimento do material (Tvergaard e Hutchinson, 1992). No segundo, é eliminada a necessidade do estabelecimento de rigidez inicial e a lei e amolecimento (Fig. 2.7) se inicia uma vez que seja atingido o  $f_t$  (Camacho e Ortiz, 1996; Ortiz e Pandolfi, 1999).

A zona de processo de fratura é descrita por uma relação tensão-deslocamento ( $\sigma - w$ ). As micro trincas crescem e coalescem após ser atingida a resistência à tração do concreto, quando então é aplicada a lei de amolecimento (Fig. 2.7). Percebe-se que a energia de fratura inicial ( $G_f$ ) define o início da declividade do amolecimento através do *kink point* ( $\psi$ ) e do cruzamento com o eixo ordenado ( $w_1$ ) (Park *et al.*, 2008). A variável ( $\psi$ ) no ponto de variação ( $k$ ) é um coeficiente entre 0.15 e 0.33 (Bazant e Jirásek, 2002) e determina o ponto

onde ocorre a mudança de direção das leis de dano. Este ponto é definido, então, pelos valores de deslocamento  $w_k$  e de resistência  $\psi f_t$  (Park *et al.*, 2008).

O  $f_t$  define a resistência máxima local estrutura. Quando o deslocamento da abertura da trinca atinge uma certa magnitude ( $w_f$ ), surge uma superfície livre de forças que corresponde à uma macro trinca (Planas e Elices, 1992; Bazant e Jirásek, 2002; Elices *et al.*, 2002; Park *et al.*, 2008).

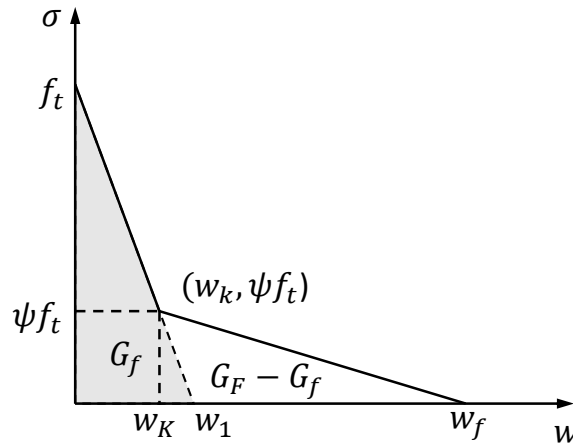


Figura 2.7 – Curva de amolecimento bilinear (Roesler *et al.*, 2007a; Park *et al.*, 2009).

O modelo de zona coesiva mostrado na Fig. 2.7, proposto recentemente por Roesler *et al.* (2007a) e Park *et al.* (2009), é aplicado à materiais quase-frágeis sob condições de carregamento que produzem o modo I de propagação de trinca. O fato de a lei depender da energia de fratura inicial ( $G_f$ ), da energia de fratura total ( $G_F$ ) e da resistência à tração ( $f_t$ ) é uma grande vantagem, ao passo que estas propriedades físicas podem ser determinadas a partir de ensaios experimentais de fratura (Gaedicke e Roesler, 2010), excluindo, assim, a necessidade de ajustes de curva para a obtenção da função de resposta das amostras.

### 2.2.3 - MEFG e Modelos de Dano

Certos fenômenos, como a propagação de trincas, somente podem ser descritos de forma satisfatória mediante continua modificação e atualização da malha. Métodos especiais de análise, como o MEFG, tem se desenvolvido com o objetivo de superar esse e outros problemas. Como em Moteiro *et al.* (2016), onde o MEFG polinomial foi empregado para análises não lineares utilizando um modelo constitutivo de dano elastoplástico.

A CDM apresenta eficiência para descrever o comportamento do material quando analisa-se estruturas em regime de comportamento físico não-linear. É possível combinar essa



característica da CDM com outra grande qualidade do MEFG, a flexibilidade de aplicação, de modo que seja possível refinar a resposta apenas nas regiões em que haja real necessidade. As funções de forma de caráter polinomial são capazes de reproduzir com boa qualidade o campo de deslocamentos para diversos níveis de dano (Barros *et al.*, 2004). Segundo Proença e Torres (2008), a característica do MEFG de permitir o enriquecimento local da aproximação, o qualifica como uma ferramenta poderosa e competitiva para a simulação de problemas de localização. Isto se deve à eficiência do método na captura dos elevados gradientes de deformação que ocorrem de forma localizada sem um aumento substancial do custo computacional. Os autores destacam ainda a possibilidade da utilização simultânea de funções enriquecedoras de diferentes graus polinomiais, conforme regiões do domínio convenientemente escolhidas.

### 3 - MODELO DE DANO E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são apresentados aspectos referentes ao modelo de dano, à Estratégia não-linear para solução do sistema de equações, bem como aspectos acerca do critério de propagação e direção da trinca utilizado nesta pesquisa, baseados no trabalho de Moreira (2016). Quanto a estes últimos aspectos, não foi realizada nenhuma validação, visto isso já ter sido executado no trabalho do referido autor. São apresentados detalhes acerca da implementação numérica do MEEG polinomial e descontínuo na plataforma computacional do grupo de pesquisa escrita em C++.

#### 3.1 - MODELO DE DANO

O modelo de Dano empregado é aplicado a materiais quase-frágeis sob condições de carregamento que produzem o modo I ou misto (I + II) de propagação de trinca. A capacidade e as limitações deste modelo são definidas pelas seguintes hipóteses: o material é considerado um meio elástico quando em processo evolutivo de dano e, desta forma, não são consideradas deformações plásticas; o dano no material é fruto de extensões ao longo das direções principais de tensão, ou seja, rupturas locais começam e se desenvolvem em modo I ou modo misto; o dano é representado por uma variável escalar  $D$  ( $0 \leq D \leq 1$ ), o que significa assumir uma condição de dano isotrópico para o material.

Para que o modelo de dano seja termodinamicamente compatível é necessário que sejam descritas uma variável de controle, uma superfície para iniciação de dano e uma lei de evolução do dano (Lemaitre e Chaboche, 1990).

##### 3.1.1 - Variável de controle do dano

A variável de controle empregada se relaciona com o tensor de deformações por meio de uma deformação equivalente ( $\varepsilon_{eq}$ ), responsável por traduzir o estado de tensão-deformação em uma quantidade escalar. Uma medida simples e eficiente, para casos em que as tensões cisalhantes são desprezíveis, é a deformação equivalente proposta por Mazars (1984) ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ), amplamente utilizada na literatura (Mazars e Pijaudier-Cabot, 1989; Proença e Torres, 2008;

Hofstetter e Meschke, 2011; Jirásek e Bauer, 2012; Pereira *et al.*, 2016) e definida como:

$$\varepsilon_{eq}^{MA} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i \rangle_+)^2} \quad (3.1)$$

sendo  $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = (\varepsilon_i + |\varepsilon_i|)/2$ , onde  $\varepsilon_i$  representa a deformação principal na direção  $i$  e  $|\varepsilon_i|$  o módulo da mesma.

Como o  $\varepsilon_{eq}^{MA}$  não é capaz de capturar os efeitos causados por tensões e deformações de cisalhamento, ele só pode ser considerado quando as condições de carregamento produzirem o modo I puro de fratura ou em situações onde as tensões de tração forem absolutamente predominantes. Para os casos em que as tensões de cisalhamento forem significativas e determinantes para a definição do estado de deformação a substituição de  $\varepsilon_{eq}^{MA}$  pela deformação equivalente de Von Mises modificado ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ) é apresentada na literatura como uma boa alternativa (Vree *et al.*, 1995; Geers, 1997; Simone *et al.*, 2003; Jirásek e Grassl, 2008; Hofstetter e Meschke, 2011; Moreira, 2016; Moreira e Evangelista Jr., 2016). A característica de levar em conta tanto o primeiro invariante (associado com os componentes hidrostáticos) quanto o segundo (relacionado aos componentes desviadores), torna  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  capaz de acoplar deformações cisalhantes na lei de evolução do processo de danificação. A  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  é calculada da seguinte forma:

$$\varepsilon_{eq}^{VM} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_{\varepsilon_1} + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{\varepsilon_1}^2 + \frac{6k}{(1+\nu)^2} J_{\varepsilon_2}} \quad (3.2)$$

sendo  $I_{\varepsilon_1} = tr(\varepsilon)$  o primeiro invariante do tensor de deformações e,  $J_{\varepsilon_2} = tr(\varepsilon \cdot \varepsilon) - 1/3 (tr^2(\varepsilon))$ , o segundo invariante do tensor de deformações, em que  $\varepsilon$  é o tensor de deformações;  $k$  é a razão entre as resistências a compressão ( $f_c$ ) e a tração ( $f_t$ );  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

### 3.1.2 - Critério de início do dano

O critério de início do dano tem relação direta com a deformação equivalente e ocorre quando  $\varepsilon_{eq}$  atinge uma deformação crítica ( $\varepsilon_{d0}$ ) correspondente à tensão máxima de um corpo de prova em tração uniaxial (Fig. 3.1).

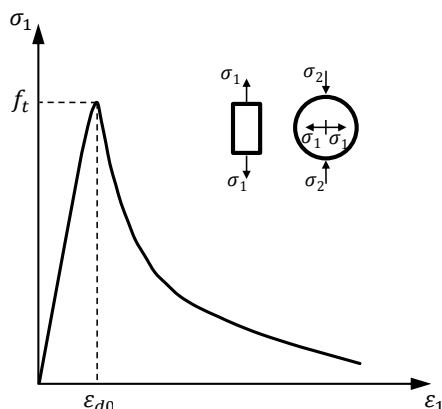


Figura 3.1 – Determinação de  $\varepsilon_{d0}$  pelo ensaio de tração.

Devido à dificuldade para executar ensaios uniaxiais de resistência à tração,  $\varepsilon_{d0}$  pode ser determinada em função da deformação elástica correspondente à resistência à tração ( $f_t$ ) encontrada a partir do ensaio de compressão diametral (Álvares, 1993).

### 3.1.3 - Lei de evolução do dano

A zona de processo de fratura é descrita por meio de uma curva bilinear (Roesler *et al.*, 2007a), representada pela relação tensão-deformação de amolecimento ( $\sigma - \varepsilon$ ). A lei de evolução do dano, conforme a Fig. 3.2(a), relaciona-se com  $G_F$  através de um comprimento característico ( $l_c$ ) (Oliver, 1989). Desta forma, a relação ( $\sigma - \varepsilon$ ) para a curva de amolecimento associa-se à uma região de largura finita expressa por ( $l_c$ ). Assim, o cálculo da variável de dano escalar ( $D$ ) para materiais em tração é baseado em uma lei de fratura para modo I, isto é,  $D(\sigma - w) = D(\sigma - \varepsilon_{eq}l_c)$ . Logo, nota-se que a Fig. 3.2(a) deriva da Fig. 2.7 quando  $w = \varepsilon_{eq}l_c$ .

Devido o fenômeno da coalescência, ocorre o surgimento de macrotrincas localizadas após  $f_t$  ser atingida (Roth *et al.*, 2015). A interação agregado-pasta (inclusão-matriz), porém, ainda permanece oferecendo resistência à abertura adicional da trinca. Esse fenômeno determina a dissipação da energia de fratura inicial ( $G_f$ ). Fica definida então a primeira inclinação descendente do modelo que vai até o ponto cujas coordenadas são definidas pela deformação  $\varepsilon_k$  e pelo  $\psi$ . Quando a deformação atinge uma certa magnitude  $\varepsilon_f$ , surge então uma superfície livre de forças que corresponde ao início de uma macrotrinca. Assim, é possível determinar a carga máxima da estrutura em função de  $G_f$  e  $f_t$  (Evangelista Jr *et al.*, 2013a). Com a evolução do carregamento a energia vai sendo dissipada, então, através da degradação do ligamento entre os agregados e a pasta de cimento. Por fim, a energia de fratura total do material ( $G_F$ ) é totalmente dissipada no instante da separação completa da

superfície da trinca. Todo este processo é representado pelos gráficos que seguem, onde a Fig. 3.2(a) representa o comportamento local (ponto material) e, a Fig. 3.2(b), o comportamento global de um modelo sob carregamento uniaxial simples, onde é possível observar a perda de rigidez do material representada pela associação entre  $D$  e o módulo de elasticidade ( $E$ ).

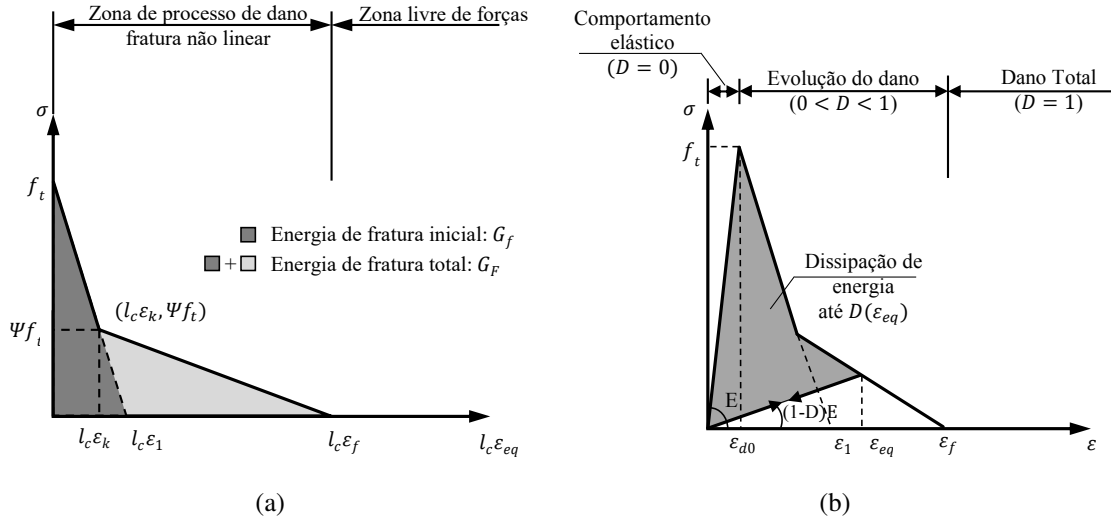


Figura 3.2 – Comportamento de amolecimento e modelo de dano: (a) Relação constitutiva força-deslocamento e equivalência de deformações em função do comprimento característico  $l_c$ ; (b) Modelo de dano correspondente (adaptado de Evangelista Jr *et al.*, 2013).

A lei de dano (3.2(b)) para materiais quase-frágeis cimentícios convencionais é, portanto, definida por meio de uma equação bilinear, conforme a Eq. 3.3 (Moreira e Evangelista Jr., 2016):

$$D = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \left[ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{eq}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_{d0}} \right], & \text{se } \varepsilon_{d0} \leq \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_k \\ 1 - \frac{\psi \varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \left[ \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{eq}}{\varepsilon_f - \varepsilon_k} \right], & \text{se } \varepsilon_k < \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_f \\ 1, & \text{se } \varepsilon_{eq} > \varepsilon_f \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $\varepsilon_k$  refere-se à deformação correspondente à uma determinada largura de abertura de trinca ( $w_k = \varepsilon_k l_c$ ). Os parâmetros geométricos que definem a lei de dano ( $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_f$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $\psi$ ) decorrem das propriedades dos materiais ( $G_f$ ,  $G_F$ ,  $CTOD_c$  e  $f_t$ ) obtidas em ensaios laboratoriais de fratura e resistência, conforme Roesler *et al.* (2007a), Roesler *et al.* (2007b), Park *et al.* (2009) e Evangelista Jr *et al.* (2013b).

O cruzamento com o eixo ordenado ( $\varepsilon_1$ ) é definido por  $G_f$ . Conforme a Fig. 3.2, tem-se:

$$\varepsilon_1 = \frac{w_1}{l_c} \quad (3.4)$$

Segundo Park *et al.* (2009), a determinação do ponto de mudança de direção da curva de amolecimento é dado em função do deslocamento crítico de abertura de ponta de trinca, *Crack Tip Opening Displacement critical (CTOD<sub>c</sub>)*.

### 3.1.4 - Regularização

Uma característica comum aos modelos da CDM é o fato da resposta depender da malha utilizada, chegando por vezes a não convergir diante de malhas com grandes refinamentos. Esta característica, reportada na literatura com "não-objetividade" de malha (Oliver, 1989; Perego, 1989; Álvares, 1993; Bazant e Planas, 1997) é um problema que precisa ser resolvido, de forma que se previna a concentração da dissipação da energia em regiões localizadas (em um único elementos ou alguns somente). Uma alternativa para resolver isso é a utilização de técnicas de regularização, como por exemplo, uma que especifique uma dissipação da energia por unidade de comprimento na zona de dano (Rots *et al.*, 1985; Carpinteri *et al.*, 1997). O modelo utilizado nesta pesquisa faz uso de uma técnica regularizadora baseada no comprimento característico ( $l_c$ ). Considerando-se o  $l_c$  igual ao tamanho típico do elemento da malha ( $h_e$ ), em função da área do elemento finito ( $A$ ), tem-se (Moreira, 2016):

$$l_c = h_e = \sqrt[2]{A^e} \quad (3.5)$$

### 3.1.5 - Critério de propagação e direção da trinca

O critério de propagação baseia-se no valor do dano no ponto de integração de Gauss do elemento à frente da ponta da trinca, de forma que, ao fim de cada incremento de deslocamento, uma descontinuidade é inserida quando o valor do dano em qualquer um dos pontos de Gauss for maior que o  $D_{crit}$ . A descontinuidade é inserida como uma linha reta dentro do elemento, de modo que o vetor normal  $n_d$  permaneça constante ao longo do elemento. Portanto, uma maior precisão ao traçado do caminho da trinca é garantida, à

medida que seja ampliada a densidade de elementos na região onde provavelmente a trinca irá passar. É possível que a trinca se propague por mais de um elemento dentro de um mesmo passo convergido. A direção de propagação da trinca ( $\mathbf{r}$ ) é calculada da seguinte maneira:

$$\mathbf{r} = \sum_{i \in S} D_i w_i \frac{\mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_i\|} \quad (3.6a)$$

$$w_i = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}_i\|^2}{2l^2}\right) \quad (3.6b)$$

onde  $\Gamma$  representa o domínio (contorno dos elementos) ao qual pertencem o conjunto de pontos de integração  $i$  localizados dentro de uma área de varredura semicircular em forma de “V” (“*V shaper*”) e, pertencentes ao elemento cuja face contenham a ponta da trinca ou compartilhe ao menos uma conectividade com o elemento tocado pela mesma (Simone *et al.*, 2003), conforme ilustra a Fig. 3.3;  $D_i$  é valor do dano no ponto de Gauss  $i$ ;  $\mathbf{r}_i$  é o vetor direção que liga a ponta da trinca ao ponto de integração  $i$ ;  $w_i$  é um peso associado ao ponto de integração e calculado conforme a Função Gaussiana da Eq. 3.6b;  $l$  é igual a três vezes o tamanho típico do elemento.

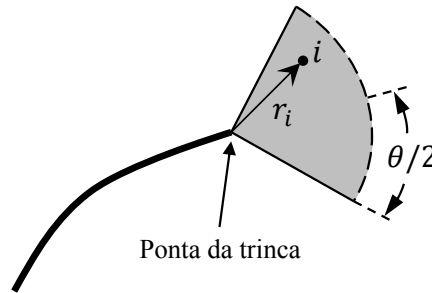


Figura 3.3 – Determinação da direção de propagação da trinca no Modelo de Dano Contínuo-Descontínuo (adaptado de Simone *et al.*, 2003).

Mais detalhes sobre a implementação do modelo de dano, da estratégia não linear de resolução de equações e do critério de propagação e direção da trinca podem ser encontrados em Moreira (2016) e Moreira e Evangelista Jr. (2016).

## 3.2 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS

A forma como o MEEG foi implementado neste trabalho apresenta especificidades em alguns pontos que merecem certo destaque. Os principais aspectos são descritos a seguir. Nesta pesquisa, o processo de enriquecimento dos nós pode ser dividida em três casos que serão detalhados mais adiante. No primeiro caso, tem-se nós enriquecidos apenas com enriquecimento polinomial, podendo um mesmo elemento ter nós enriquecidos com funções de diferentes graus. O segundo caso se refere ao enriquecimento polinomial e descontínuo para simulação utilizando a abordagem contínua. O terceiro caso refere-se às análises onde se tem enriquecimento polinomial e descontínuo em simulações utilizando abordagem contínua-descontínua.

### 3.2.1 - Processo de enriquecimento dos nós

No MEEG, os elementos são divididos em três grupos em função do grau de enriquecimento de seus nós. Há os elementos que não tem nenhum tipo de enriquecimento (grau zero), ou seja, são elementos padrões do MEF e são tratados na formulação como tal. Há aqueles cujos nós são todos enriquecidos com as mesmas funções de enriquecimento (mesmo tipo e grau). Por fim, tem-se os chamados *blending elements* ou elementos de transição (Fig. 3.4), onde as funções de forma aplicadas a cada nó são ou de tipos diferentes ou de ordem polinomial distinta (Peng *et al.*, 2013; Lins *et al.*, 2015; Sukumar *et al.*, 2015). Nenhum tratamento especial foi dado aos elementos de transição.

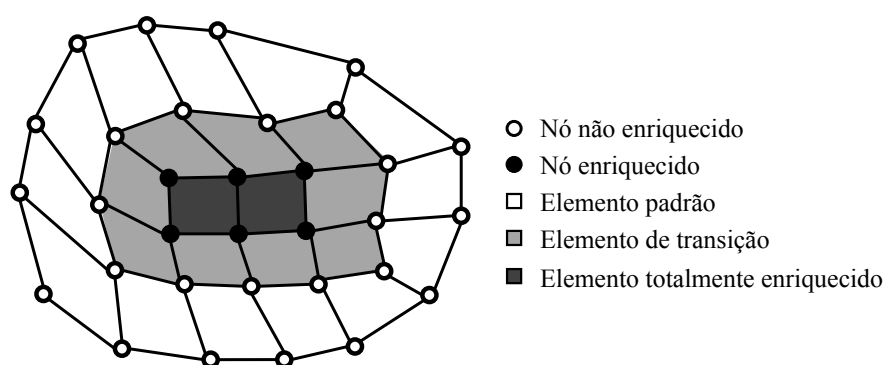


Figura 3.4 – Classificação dos elementos finitos em função do enriquecimento.

### 3.2.2 - Enriquecimento dos nós com funções polinomiais

Uma das principais características do MEEG é permitir certa liberdade quanto à escolha da quantidade de nós a enriquecer, da região, da função aproximadora a utilizar, etc. Do ponto



de vista da implementação computacional, habilitar essa propriedade do MEFG é bastante complicado. Este, porém, é um preço baixo a se pagar visto as potencialidades e vantagens que o método apresenta. Neste trabalho a implementação foi feita de modo a garantir que qualquer nó, em qualquer região da malha possa ser enriquecido com qualquer tipo e grau de enriquecimento que se deseje. Nesta pesquisa, a situação onde não houver enriquecimento polinomial será dita  $P0$ , em caso de enriquecimento de primeiro grau  $P1$ , de segundo grau  $P2$ , e assim por diante. É importante destacar que os nós onde forem aplicadas as condições de contorno de Dirichlet nunca serão enriquecidos.

### 3.2.3 - Enriquecimento dos nós com função Heaviside

Em se tratando do enriquecimento descontínuo existem duas possibilidades. Na primeira utiliza-se a abordagem contínua, quando o foco da simulação for analisar sobretudo os campos de tensões e deformações à frente da trinca e avaliar o comportamento da estrutura em função destes. Como o objetivo é a análise do dano, é necessário garantir uma melhor descrição do salto de deslocamentos na região cortada pela trinca. Desta forma, quando for utilizada a abordagem contínua na simulação, permite-se que os nós da face do elemento tocado pela ponta sejam enriquecidos, conforme é possível observar na Fig. 3.5(a). Esta estratégia foi utilizada neste trabalho com a finalidade de substituir entalhes geométricos por entalhes implícitas no mesmo local, de modo a eliminar a obrigatoriedade de modelagem do mesmo no processo de geração da malha.

A segunda opção trata da propagação da trinca. Nesse processo, quando um elemento da malha é cortado por uma trinca, seus nós são enriquecidos com função Heaviside. Porém, conforme estratégia adotada com grande êxito em Wells e Sluys (2001), os nós pertencentes à face do elemento localizado à frente da ponta da trinca não são enriquecidos, ainda que tais nós pertençam a outros elementos que já tenham sido atravessados pela descontinuidade. Essa medida visa preservar o campo de deslocamentos do elemento que esteja à frente, de modo a respeitar-se a condição de deslocamento nulo na ponta da trinca. Isto pode ser melhor visualizado na Fig. 3.5(b). Percebe-se que conforme a propagação ocorre novos nós são enriquecidos, porém, os nós dos da face tocada pela ponta da trinca nunca serão enriquecidos com a função Heaviside.

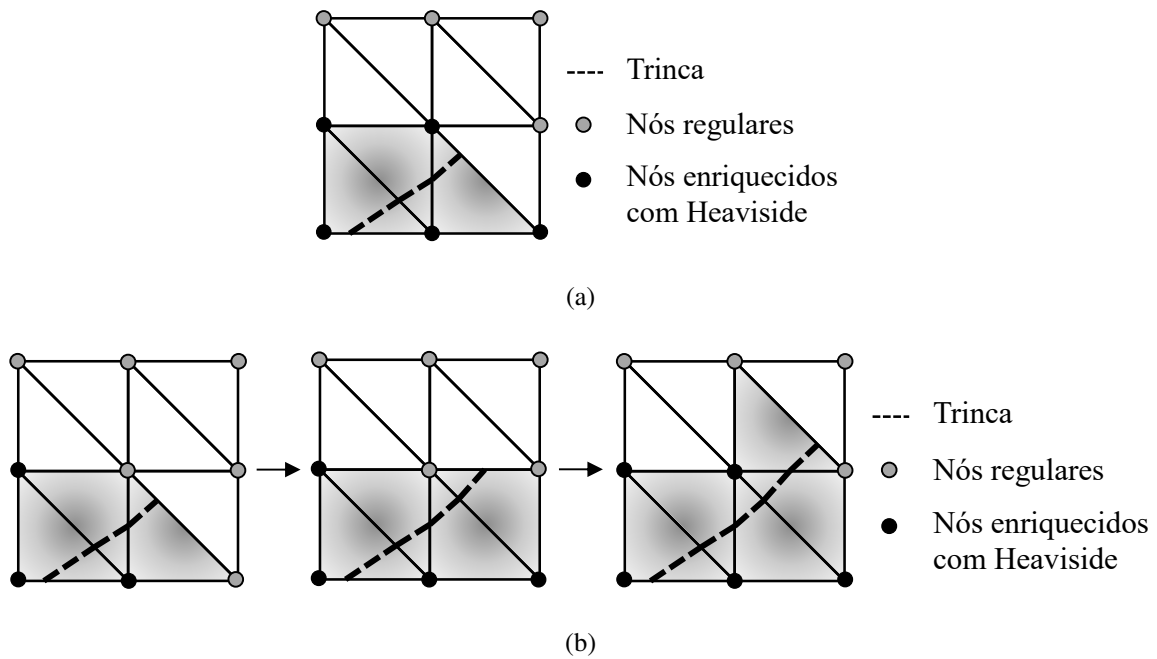


Figura 3.5 – Processo de enriquecimento dos nós com Heaviside: (a) abordagem contínua; (b) abordagem contínua-descontínua.

A vantagem que este trabalho buscou ao implementar a função Heaviside foi permitir que a trinca pudesse passar por dentro dos elementos, cortando-os. Desta forma, elimina-se a necessidade da inserção geométrica da mesma na malha, de modo que possa ser inserida “implicitamente” no modelo em função de suas coordenadas iniciais, por exemplo. Além disso, permite uma descrição mais precisa do caminho da trinca.

### 3.2.4 - Enriquecimento polinomial + Heaviside

A terceira opção de enriquecimento diz respeito à combinação do enriquecimento polinomial com o Heaviside para simulações utilizando abordagem contínua, conforme é possível observar na Fig. 3.6. Para garantir uma melhor descrição do salto de deslocamentos na região cortada pela trinca, neste caso, os nós pertencentes à face do elemento a frente da ponta da trinca são enriquecidos com o Heaviside. O diferencial neste caso é a grande contribuição do enriquecimento polinomial para o refinamento do resultado final devido a capacidade de melhorar os campos de deslocamentos, deformações e, conseqüentemente, de tensões na região ao redor da trinca. Isso permite obter excelentes resultados ainda que seja utilizada uma malha grosseira na simulação. O enriquecimento polinomial adotado inicialmente permanece o mesmo até o fim da simulação.

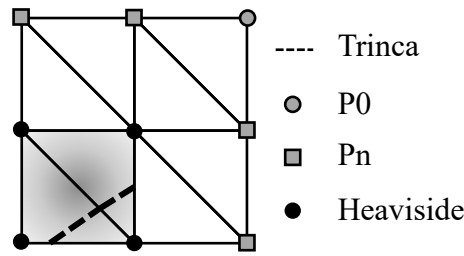


Figura 3.6 – Enriquecimento polinomial + Heaviside - abordagem contínua

Para os casos de simulações com abordagem contínua-descontínua, não foi implementada, neste trabalho, nenhuma estratégia particular, cabendo isso à futuras pesquisas.

### 3.2.5 - Estratégia não-linear para solução do sistema de equações

Em se tratando de um sistema de equações não-lineares, é necessário que seja estabelecido um algoritmo iterativo para resolver o sistema. Nesta dissertação, foi adotado o Método Secante. Este recurso procura a solução ( $U$ ) correspondente a um certo nível de força ( $F$ ) através de correções sucessivas em função de uma estimativa inicial para a matriz de rigidez ( $K$ ), ou seja, o vetor  $U$  é previsto para cada iteração. Destaca-se que a matriz  $K$  aqui utilizada é a convencional, não havendo necessidade da sua derivada, como no Newton Raphson, por exemplo. Portanto, em um dado passo ( $j$ ), assumindo que a solução do passo anterior ( $j - 1$ ) é conhecido, tem-se:

$$K(D^j)U^j = F^j \quad (3.7)$$

onde  $U$  e  $F$  são, respectivamente, os vetores com os deslocamentos e forças externas globais. O fato de a matriz de rigidez  $K$  depender de  $D$ , caracteriza a não-linearidade da Eq. 3.7. Percebe-se que o valor de  $K$  no passo  $j$  depende dos deslocamentos no mesmo passo. Logo, para a resolução do sistema de equações, deve ser utilizado um procedimento iterativo. Para a convergência da solução em uma iteração  $j - 1$ , a matriz de rigidez é atualizada com base no valor dos deslocamentos da iteração convergida  $j - 1$ , quando então novos deslocamentos são calculados para a iteração seguinte (Fig. 3.7). Desta forma, pode-se escrever a Eq. 3.7 da seguinte maneira:

$$K(D^{j-1})U^j = F^j \quad (3.8)$$

sendo  $F^j$  o nível de força aplicada no início do passo. Por se tratar de um processo iterativo, um resíduo  $R^{j-1}$  (Eq. 3.9) é gerado a cada atualização de  $K$ , devido a defasagem da rigidez em relação aos deslocamentos. Logo:

$$R = K(D^{j-1})U^j - F^j \neq 0 \quad (3.9)$$

O processo iterativo é encerrado quando a medida (ou a norma) de  $R$  atingir certo valor de tolerância ( $TOL$ ) previamente estabelecido. Assim, o controle sobre a convergência entre iterações consecutivas é feito em função de uma medida de deslocamentos relativos, conforme a Eq. 3.10:

$$\|R\| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (U_i^j - U_i^{j-1})^2}{\sum_{i=1}^N (U_i^j)^2}} \leq TOL \quad (3.10)$$

onde  $N$  é o número de componentes do valor resíduo. A Fig. 3.7 ilustra como ocorre o processo iterativo do Método Secante.

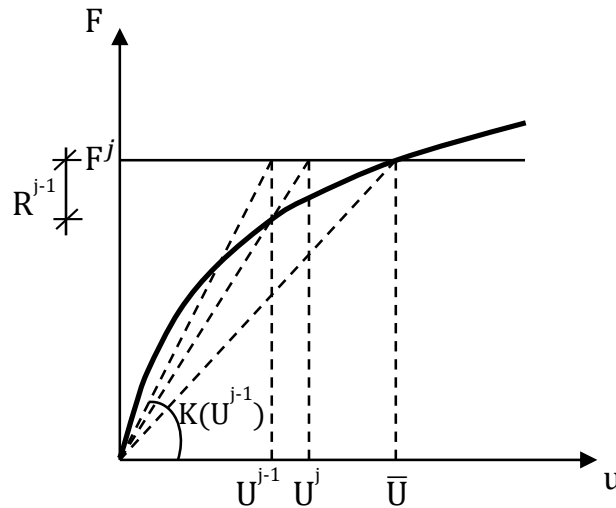


Figura 3.7 – Esquema iterativo para o método secante (adaptado de Proença, 2008).

## 4 - APLICAÇÃO DO ENRIQUECIMENTO POLINOMIAL

Neste capítulo são apresentados resultados de simulações numéricas de estruturas com comportamento elástico linear, realizadas de acordo com a estratégia do MEFG apresentada nas seções precedentes, visando a verificação do código que fora implementado. Para tanto, analisou-se uma viga engastada e livre, com carregamento distribuído na face livre, conforme a Fig. 4.1, submetida à flexão simples, discretizada primeiramente em elementos triangulares e, posteriormente, quadrilaterais, aos quais foram adicionados funções de enriquecimento polinomiais para aproximação local. É um problema considerado de solução suave. As dimensões, o carregamento, as condições de contorno (CC) e as propriedades mecânicas para a resolução do problema são mostrados na Tab. 4.1 (em unidades consistentes).

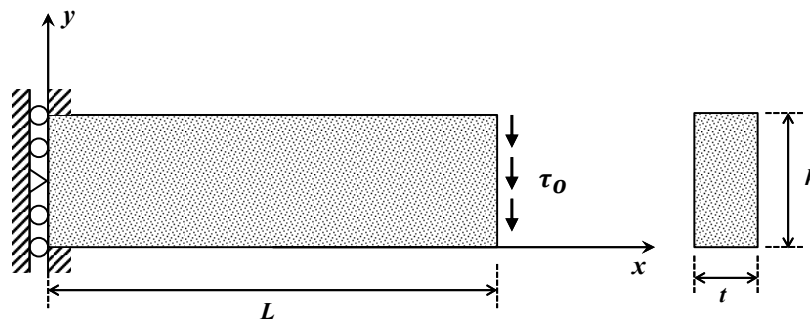


Figura 4.1 – Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo.

Tabela 4.1 – Dados geométricos e condições de contorno do modelo

L	t	h	E	$\nu$	$\tau_0$	CC - deslocamento
10	1	2	30 E+06	0,25	150	$u_x(0,y) = u_y(0,1) = 0$

A verificação foi promovida em função da análise da convergência para os valores de deslocamentos e energia de deformação utilizando enriquecimentos de diferentes ordens polinomiais nas simulações, conforme demonstrado anteriormente pela Eq. 2.8 e ilustrado pela Fig. 2.3. A análise da convergência foi feita, portanto, com relação ao refinamento de malha. As soluções analíticas, segundo a teoria de Euler-Bernoulli, para o deslocamento ( $u_y$ ) e para a energia de deformação ( $U$ ) são as seguintes:

$$u_y(10, \frac{h}{2}) = - \left( \frac{f_y L^3}{3EI} \right) \left[ 1 + \frac{3(1 + \nu)}{L^2} \right] \quad (4.1)$$

$$U = \left( \frac{f_y^2 L^3}{6EI} \right) \left[ 1 + \frac{3(1 + \nu)}{L^2} \right] \quad (4.2)$$

onde  $I$  é a Inércia da seção transversal.

Efetuada-se os cálculos, têm-se que: o valor de referência para o deslocamento no ponto determinado é  $u_y(10,1) = 5,188 \text{ E-03}$ ; o valor da energia de deformação da viga é  $U = 7,781 \text{ E-01}$ . Foram feitas cinco simulações utilizando o programa Abaqus CAE, empregando elementos triangulares, com diferentes níveis de refinamento de malha, com o objetivo de verificar, a priori, a confiabilidade das equações analíticas neste caso. Os resultados das simulações podem ser vistos a seguir na Tab. 4.2. Nota-se que há correspondência entre o que foi obtido via expressão analítica e aquilo que o programa comercial apresentou. Portanto, há coerência em adotar como parâmetros os valores obtidos através da Eq. 4.1 e da Eq. 4.2.

Tabela 4.2 – Resultados de  $u_y(10, \frac{h}{2})$  e  $U$  obtidos via Abaqus CAE.

Malha	nº de elementos	NGL	$u_y(10, \frac{h}{2})$	U
Malha 01	6250	6552	5,133 E-03	7,698 E-01
Malha 02	11022	11424	5,148 E-03	7,7721 E-01
Malha 03	25000	25602	5,162 E-03	7,741 E-01
Malha 04	400000	402402	5,181 E-03	7,774 E-01
Malha 05	1600000	1604802	5,189 E-03	7,785 E-01
Analítico	-	-	5,188 E-03	7,781 E-01

Foram, então, realizadas doze discretizações do modelo: seis utilizando elementos triangulares de três nós (Fig. 4.2(a)) e outras seis com elementos quadrilaterais de quatro nós (Fig. 4.2(b)). Todos os elementos possuem espessura constante e são constituídos de material homogêneo isotrópico. Iniciando da malha mais grosseira (malha I) até a malha mais refinada (malha VI) foram realizadas simulações sem qualquer tipo de enriquecimento (aproximação de ordem  $P0$ ). Da mesma forma, utilizando o mesmo refinamento de malha, foram feitas simulações em que foram adicionadas funções de enriquecimento polinomiais com aproximação local de graus um, dois, três, quatro e cinco (aproximações  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$ ,  $P4$  e  $P5$ , respectivamente), conforme Fig. 2.3. Para respeitar-se as condições de contorno de Dirichlet, os nós das arestas engastadas não foram enriquecidos em nenhum caso. A integração numérica do domínio foi realizada pela regra de Gauss-Legendre mínima.

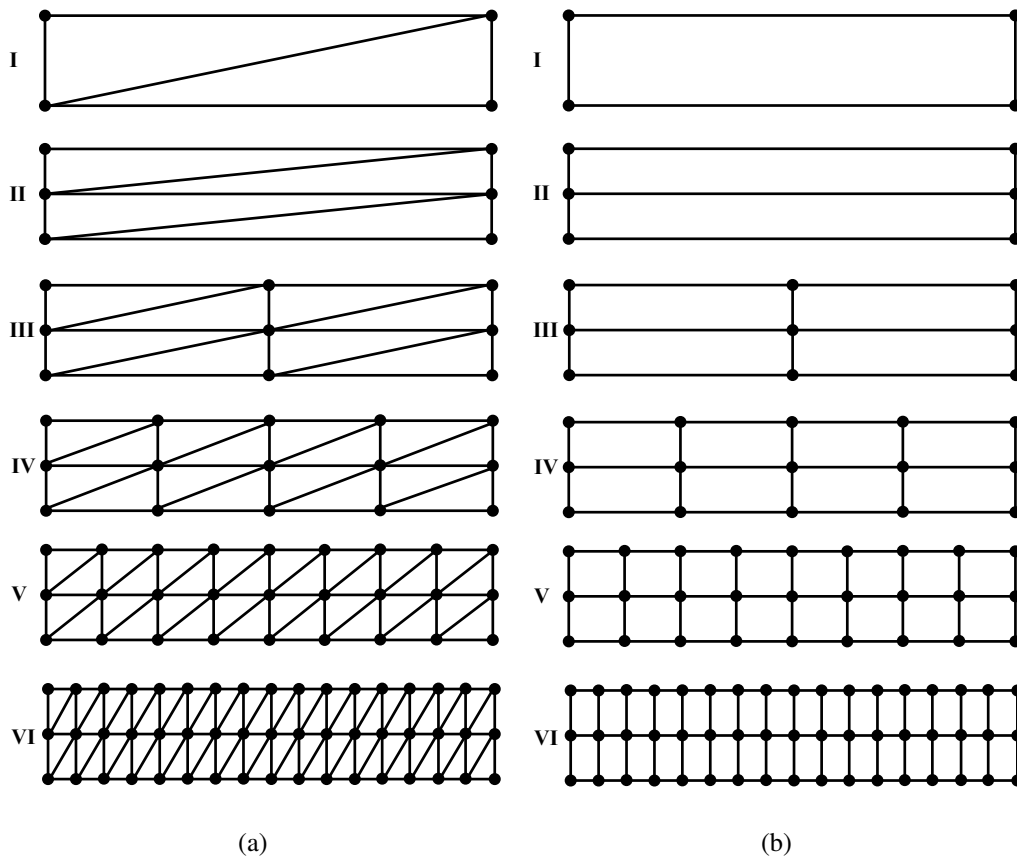


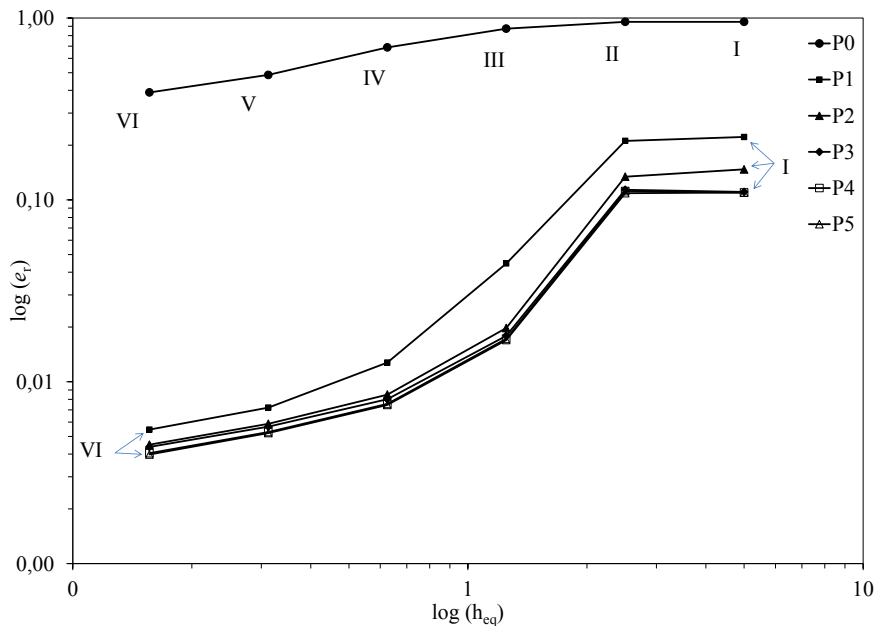
Figura 4.2 – Discretização do modelo: (a) malhas com elementos triangulares; (b) malhas com elementos quadrilaterais.

Tabela 4.3 – Número de elementos e nós para cada malha

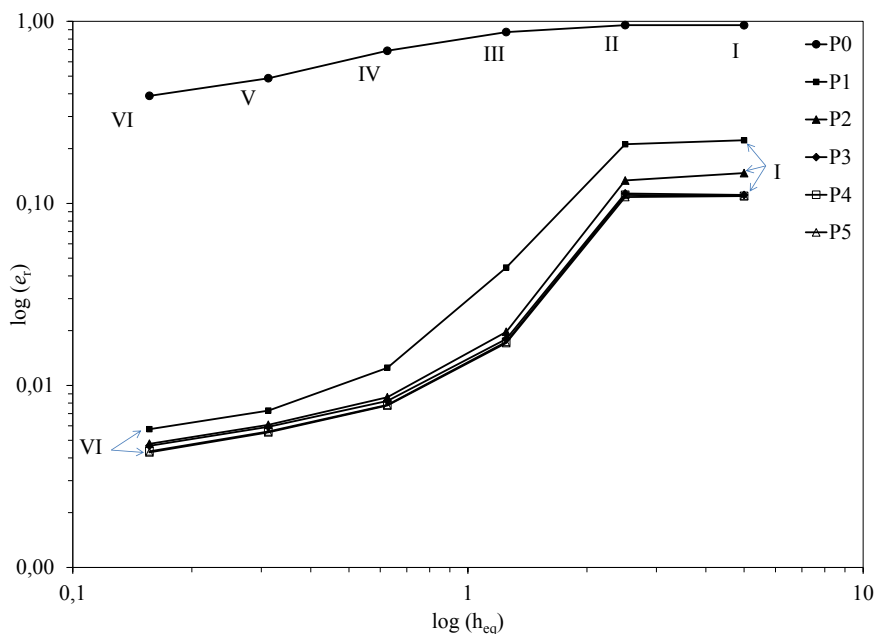
Malhas	Malhas Triangulares			Malhas Quadrilaterais		
	nº elementos	nº nós	NGL	nº elementos	nº nós	NGL
I	2	4	8	1	4	8
II	4	6	12	2	6	12
III	8	9	18	4	9	18
IV	16	15	30	8	15	30
V	32	27	54	16	27	54
VI	64	51	102	32	51	102

Na Tab. 4.3, conforme a Fig. 4.2, é apresentado, detalhadamente, o número de elementos e de nós para cada malha. As Fig. 4.3 e 4.4 apresentam (para malhas triangulares e quadrilaterais, respectivamente) os gráficos correspondentes ao Erro Relativo ( $e_r$ ) em função do tamanho equivalente do elemento ( $h_{eq}$ ), segundo diferentes refinamento de malha para cada ordem de enriquecimento. O  $e_r$  foi calculado tanto com relação ao valor do deslocamento na extremidade livre (Fig. 4.3(a)) quanto com relação à energia de

deformação (Fig. 4.3(b)), sendo  $h_{eq} = [(L \text{ da viga}) / (n^\circ \text{ de elementos})]$ .



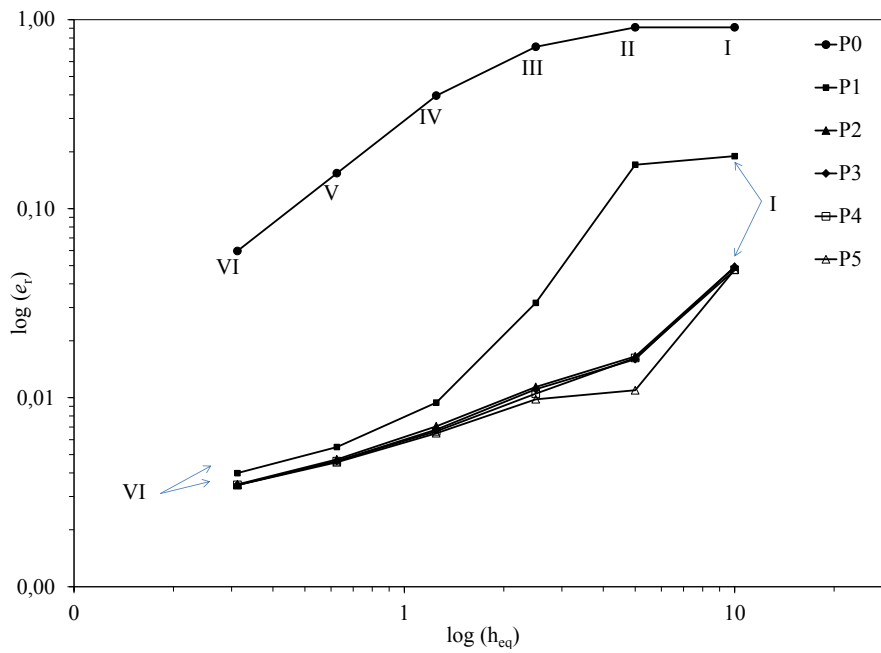
(a)



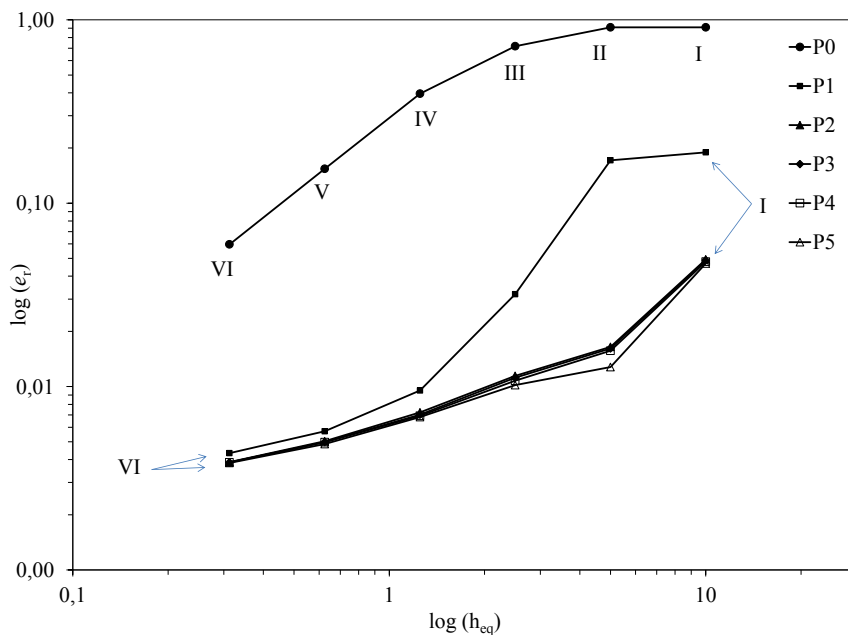
(b)

Figura 4.3 – Malhas Triangulares com: Erro Relativo,  $e_r$ , para cada ordem polinomial de enriquecimento sobre os elementos para (a) Deslocamento e (b) Energia de Deformação.





(a)



(b)

Figura 4.4 – Malhas Quadrilaterais com: Erro Relativo,  $e_r$ , para cada ordem polinomial de enriquecimento sobre os elementos para (a) Deslocamento e (b) Energia de Deformação.

As Fig. 4.3 e 4.4 demonstram que, à medida que se refina a malha, como era de se esperar, ocorre uma redução do  $e_r$ , mesmo para uma aproximação  $P0$ . Essa redução, porém, não

atinge um nível de convergência razoável. Observa-se, no entanto, que há uma potencialização da solução, independente da ordem polinomial de enriquecimento que seja utilizada ( $P1$  a  $P5$ ), quando o MEEFG é utilizado. Nota-se ainda que, à medida que a malha é refinada e o grau de enriquecimento aumentado, a convergência alcançada torna-se satisfatória, chegando-se, em alguns casos, à  $e_r < 1\%$ .

Proença e Torres (2008) ao simularem o exemplo extraído de Bussamra (1999), obtiveram para sua malha mais grosseira com enriquecimento  $P2$ , utilizando elementos tetraédricos, um  $e_r$  igual a 98,57% e, utilizando elementos hexaédricos, erro de 7,64%. Observa-se aí um comportamento semelhante ao observado nos gráficos acima, onde, para a malha mais grosseira com enriquecimento  $P2$ , obteve-se Erros Relativos iguais a 14,71% (utilizando elementos triangulares) e 4,92% (utilizando elementos quadrilaterais). Nota-se a influência do tipo de elemento sobre a convergência, a resposta tende a convergir mais rapidamente, caso seja utilizado um elemento de maior grau. Verifica-se ainda que, devido o produto da PU linear com funções de enriquecimento quadráticas, a partir do grau de enriquecimento  $P2$  já é possível encontrar um  $e_r$  aceitável, independente da malha simulada, demonstrando ser capaz descrever as soluções analíticas do problema de deslocamentos e energia de deformação.

Destaca-se que o objetivo principal desta seção não foi comparar o MEF e o MEEFG e sim, verificar o programa por meio das simulações, comparando as respostas obtidas com a resposta de referência. Concluiu-se, mediante a análise dos resultados, que os comportamentos das soluções ocorreram conforme aquilo que era esperado.

## 5 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I

Este capítulo dedica-se à avaliação numérica da eficiência do MEFG. Inicialmente foram simulados modelos com entalhe geométrico, visto que o objetivo inicial foi avaliar o MEFG polinomial comparando as respostas encontradas com resultados experimentais e simulações da literatura que também utilizaram entalhe geométrico. Em seguida foram realizados testes com inserção de trinca via função Heaviside. Primeiramente foi feita a validação do método, com aplicação apenas do enriquecimento descontínuo, com o intuito de avaliar sua contribuição isoladamente. Posteriormente, foi aplicado também o enriquecimento polinomial, a fim de avaliar o comportamento da solução quando ambos os enriquecimentos atuam em conjunto. Todos os ensaios numéricos foram realizados através do controle de deslocamento.

### 5.1 - VIGA SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS (*THREE POINT BENDING - TPB*) COM MODELO DE DANO CONTÍNUO

#### 5.1.1 - Simulações com entalhe explícito (geométrico)

A primeira análise numérica realizada foi a da viga sob flexão em três pontos, ou *Three Point Bending (TPB)*. Os resultados das simulações numéricas para materiais cimentícios convencionais foram comparadas com resultados experimentais extraídos dos trabalhos de Roesler *et al.* (2007a) e Gaedicke e Roesler (2010). A Fig. 5.1 ilustra de maneira geral a geometria utilizada para o ensaio de flexão em três pontos.

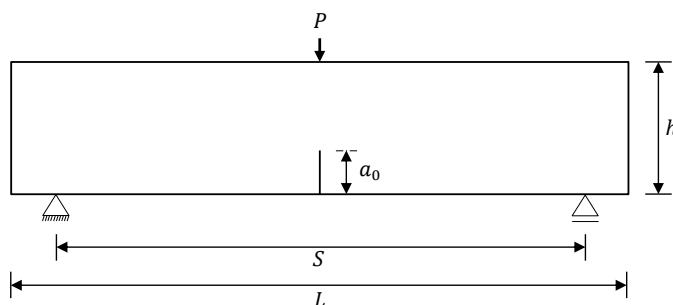


Figura 5.1 – Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo.

Os dados geométricos, os parâmetros de fratura e os relativos ao material são descritos, respectivamente, pelas Tab. 5.1 e 5.2. Foi utilizada a deformação equivalente de Mazars

( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ). O entalhe possui largura igual a 2,0 mm (dois milímetros).

Tabela 5.1 – Características geométricas do ensaio de flexão em três pontos - (TPB).

$a_0$ (mm)	h (mm)	L (mm)	S (mm)	e (mm)
50	150	700	600	80

Tabela 5.2 – Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio de flexão em três pontos

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material			
$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\nu$
164,0	56,7	0,25	32000	58,3	4,15	0,20

Foram utilizadas três malhas de elementos finitos, duas com entalhe retangular de dois milímetros (Fig. 5.2(a) e 5.2(b)) e uma com entalhe em formato “V”, ambos com abertura da boca de dois milímetros (Fig. 5.2(c)).

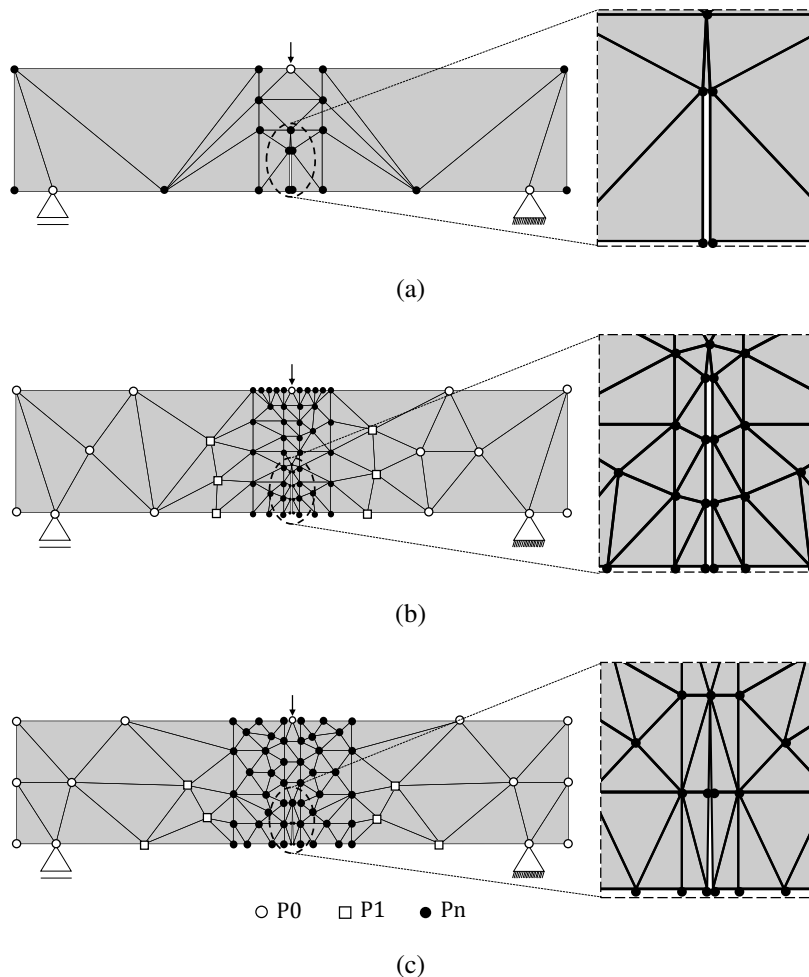


Figura 5.2 – Malhas de elementos finitos para TPB: (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos.

Os nós  $P_n$  indicam onde houve incremento do grau do enriquecimento, mantendo-se os demais nós constantemente com enriquecimento  $P_1$  (onde  $P_1$  designa enriquecimento polinomial de primeiro grau e assim por diante analogamente). Onde for indicado  $P_0$ , significa que o nó não sofreu nenhum tipo de enriquecimento, correspondendo, portanto, ao MEF convencional. Percebe-se que, em todos os casos, foram empregados somente elementos triangulares de três nós. Nas malhas da Fig. 5.2(a) e da Fig. 5.2(b) destaca-se a existência de um elemento (descrevendo a extremidade do entalhe) quase acicular com uma das arestas medindo  $2\text{ mm}$ . Isto não ocorre na malha da Fig. 5.2(c) devido a diferença de geometria do entalhe.

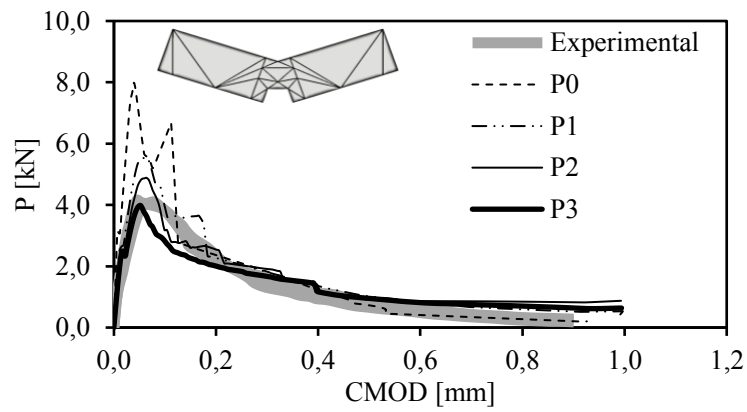
A Fig. 5.3 apresenta os resultados experimentais e numéricos das curvas relativas à força ( $P$ ) em função do deslocamento de abertura de boca de trinca, *Crack Mouth Opening Displacement (CMOD)*. É notória a capacidade do enriquecimento polinomial para conferir maior qualidade aos resultados. Esse potencial do MEF polinomial destaca-se sobremaneira nas simulações com malhas mais grosseiras, tendo em vista a boa estimativa da carga máxima ( $P_{max}$ ) resistida pela viga. Nota-se que não há qualidade nos resultados sem enriquecimento ( $P_0$ ) e como é eficiente a atuação do MEF polinomial na melhora dos mesmos.

Observa-se que tanto a carga máxima resistida ( $P_{max}$ ) quanto a região de *softening* da curva  $P - CMOD$  são melhor previstas (para uma mesma malha) à medida que o grau de enriquecimento aumenta. Nota-se que para alcançar um bom resultado para a malha 5.2(a) (25 elementos) foi necessário um grau de enriquecimento polinomial maior que para malha 5.2(c) (106 elementos) por exemplo. Enquanto naquela utilizou-se enriquecimento  $P_3$ , nesta, com enriquecimento  $P_1$  o resultado já é muito próximo do experimental.

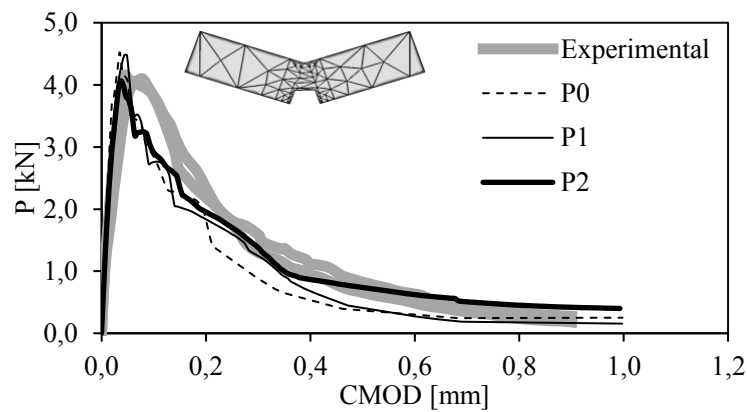
Percebe-se, também que quando é utilizado entalhe em “V”, buscando manter certa correspondência quanto à quantidade de elementos (quantidade total da malha bem como na região do ligamento – região entre a ponta do entalhe e o ponto de aplicação do deslocamento) para efeitos comparativos, as cargas máximas tendem a ser maiores que às apresentadas quando é utilizado entalhe retangular. Isto ocorre em função do modelo de dano que depende da deformação equivalente do elemento. Como o nó encontra-se à frente do provável “caminho do dano”, ocorre momentânea indefinição quanto ao lado para qual irá se deslocar devido a simetria do problema. Isso é determinante para que os valores de  $P_{max}$  sejam mais elevados em comparação à situação de entalhe retangular.

Além disso, nota-se que há objetividade de malha, ou seja, tanto a carga máxima resistida como a região de *softening* tendem a não divergir, nem tampouco continuar diminuindo

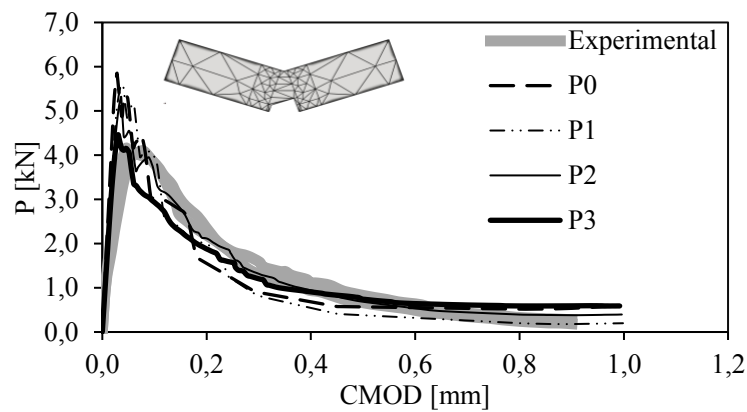
indefinidamente, alcançando, desta forma, convergência.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.3 – Curvas  $P$  –  $CMOD$  experimentais e numéricas – (a) Malha com 25 elementos – entalhe retangular; (b) malha com 101 elementos – entalhe retangular; (c) malha com 106 elementos – entalhe em formato “V”.

Outro aspecto que exige atenção é a análise da distribuição do dano ao longo da linha de

fratura buscando verificar qual é o comportamento da estrutura naquela região. Desta forma, foi plotada a evolução do dano na seção central da viga em diferentes etapas da simulação pré-determinados em função do carregamento limite ( $P_{max}$ ), a saber (ver Fig. 5.4(a)): A (75% de  $P_{max}$  na zona ascendente), B ( $P_{max}$ ) e C (50% de  $P_{max}$  na zona descendente - *softening*).

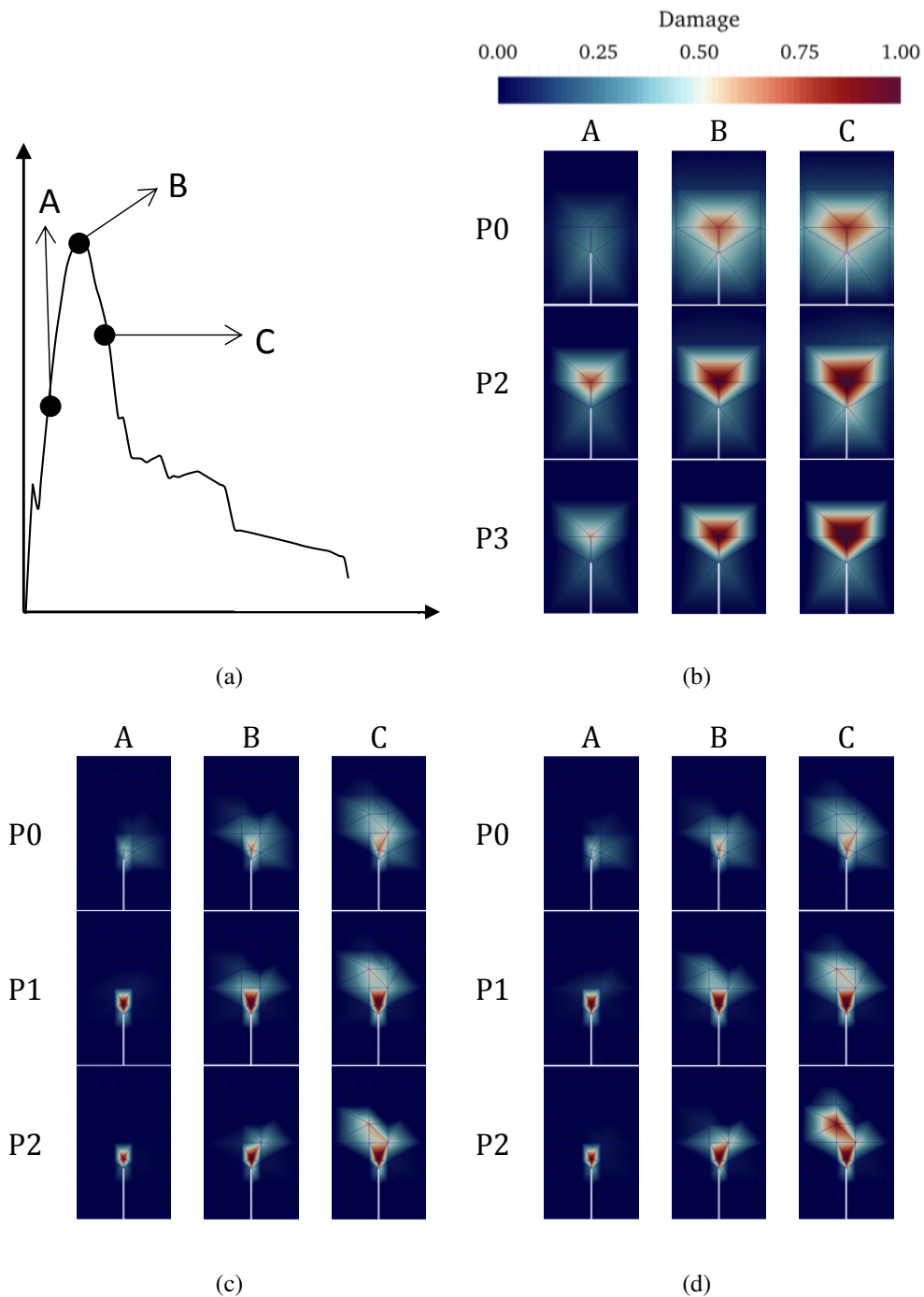


Figura 5.4 – Distribuição do dano em função dos graus de enriquecimento polinomial - (a) Pontos de interesse para análise do dano; (b) Malha com 25 elementos; (c) Malha com 101 elementos; (d) Malha com 106 elementos.

É possível observar que quanto mais grosseira a malha maior é a dificuldade em descrever o dano na região devido este tipo de análise normalmente exigir um grau elevado de refinamento de malha na região do entalhe, o que não ocorre. Nota-se que as simulações sem enriquecimento não conseguem capturar a danificação, enquanto com  $P1$ ,  $P2$  e  $P3$  percebe-se uma grande melhora desse resultado. O enriquecimento polinomial busca corrigir as deficiências do MEF diante de casos como esses. Os valores de  $P_{max}$  encontrados nas simulações numéricas realizadas são detalhados na Tab. 5.3, juntamente com os respectivos Erros Relativos,  $e_r$  (em relação à medida das cargas máximas observadas em laboratório), para cada grau de enriquecimento. Como observado anteriormente, o MEF polinomial foi capaz de estimar com boa acurácia os valores experimentais.

Tabela 5.3 – Carga máxima,  $P_{max}$  (kN), observada nas simulações numéricas e Erro Relativo em relação ao resultado experimental para a viga TPB.

Malha	Experimental	P0	$e\%$	P1	$e\%$	P2	$e\%$	P3	$e\%$
25 elementos	4,161	7,956	91,21	5,540	33,13	4,883	14,34	3,975	4,47
101 elementos	4,161	4,523	8,70	4,485	7,78	4,066	2,29	-	-
106 elementos	4,161	5,854	40,70	5,596	34,50	5,322	27,90	4,458	7,15

A Tab. 5.4 apresenta o Número de Graus de Liberdade (NGL) para cada uma das simulações anteriormente analisadas e a Fig. 5.5 apresenta a curva do  $e_r$  em função do NGL. É possível observar claramente a contribuição do enriquecimento para a redução do erro da aproximação.

Tabela 5.4 – Número de Graus de Liberdade (NGL) - TPB com entalhe explícito.

Malha	NGL			
	P0	P1	P2	P3
25 elementos	44	120	196	272
101 elementos	140	344	548	-
106 elementos	140	344	548	752

Conforme comentário feito anteriormente, percebe-se que a existência de um nó à frente do "caminho do dano" (no caso do modelo com entalhe em "V") contribuiu para a obtenção de cargas máximas resistidas maiores e, conseqüentemente,  $e_r$  também superiores, quando comparados com os resultados do modelo correlato com 101 elementos e entalhe retangular.



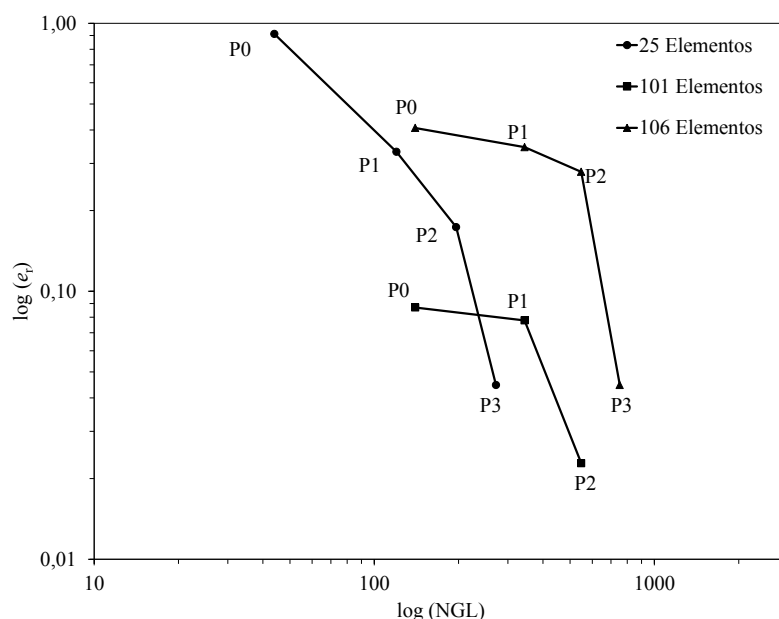


Figura 5.5 – Erro Relativo ( $e_r$ ) para medida das cargas máxima observadas em laboratório x NGL para simulações do *TPB*.

A Tab. 5.5 detalha o estudo da convergência para as simulações anteriores, apresentando o total de iterações realizadas em cada uma delas. Nota-se que para a malha grosseira o MEFG apresentou, em geral, desempenho melhor que o MEF, ainda que as simulações com enriquecimento apresentem NGL bem superior quando comparadas com a simulação *P0*. Percebe-se, porém, que o MEFG tende a perder essa vantagem sobre MEF quando a malha for mais refinada. Um provável motivo para isto é a introdução de termos espúrios na matriz de rigidez devido os *blending elements*, visto que nas malhas mais refinada existe uma quantidade maior deles. Este efeito prejudicial é acentuado a medida que o grau do enriquecimento aumenta. As simulações com *P2* apresentaram passos de carga onde o resíduo diminui lentamente. Nesses pontos, devido aspectos internos de convergência do programa, enquanto a iteração seguinte apresentar resíduo menor que o anterior, dentro de um mesmo passo, a simulação não avança ao passo de deslocamento seguinte, apresentando uma quantidade grande de iterações concentradas nestes locais. Por isso, nos três casos, as simulações com *P2* apresentaram um número de iterações superior aos demais.

Tabela 5.5 – Total de iterações para cada malha em função do enriquecimento - *TPB* com entalhe explícito.

Malha	Total de iterações por simulação			
	P0	P1	P2	P3
25 elementos	1159	986	1613	739
101 elementos	912	941	1297	-
106 elementos	832	922	1383	905

A Fig. 5.6 ilustra o estudo de convergência para a malha com 25 elementos, comparando-se as simulações  $P0$  e  $P3$ . Percebe-se que a simulação com enriquecimento realizou, em geral, uma quantidade menor de iterações até alcançar a convergência em cada passo de deslocamento, apresentando melhor desempenho computacional. Isto ocorre devido o enriquecimento contribuir para a redução dos erros das solução de cada iteração dentro do processo iterativo do método secante, contribuindo para que o resíduo alcance de forma mais rápida a tolerância adotada.

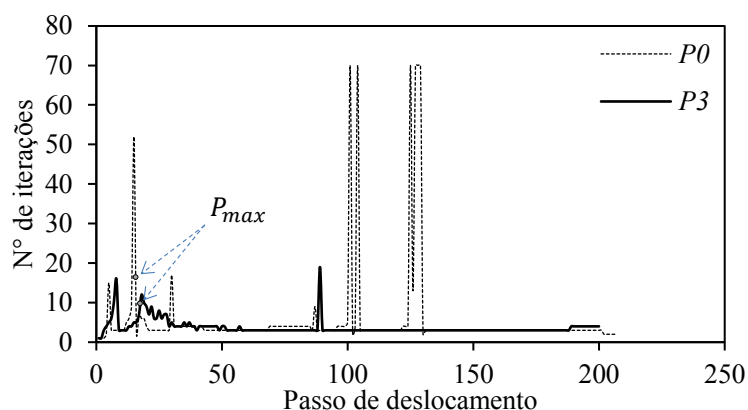


Figura 5.6 – Avaliação da convergência para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação  $P0$  e simulação com enriquecimento  $P3$ .

A Fig. 5.7 mostra uma comparação entre as curvas  $P - CMOD$  entre uma simulação com malha grosseira (Fig. 5.2(a)) enriquecida e uma malha refinada (Fig. 5.8) sem enriquecimento. É notável a capacidade do MEFG em descrever o comportamento da estrutura. Enquanto na primeira, com apenas 25 elementos, enriquecida com enriquecimento  $P3$ , obteve-se um resultado bastante aproximado do experimental, a segunda necessitou de aproximadamente dez vezes mais elementos para alcançar nível de acurácia semelhante.

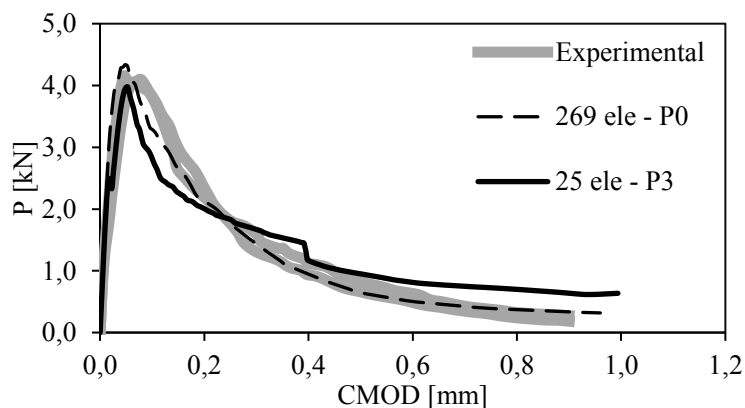


Figura 5.7 – Curvas  $P - CMOD$  - comparação entre simulação  $P0$  com malha de 269 elementos e simulação com enriquecimento  $P3$  e malha de 25 elementos.

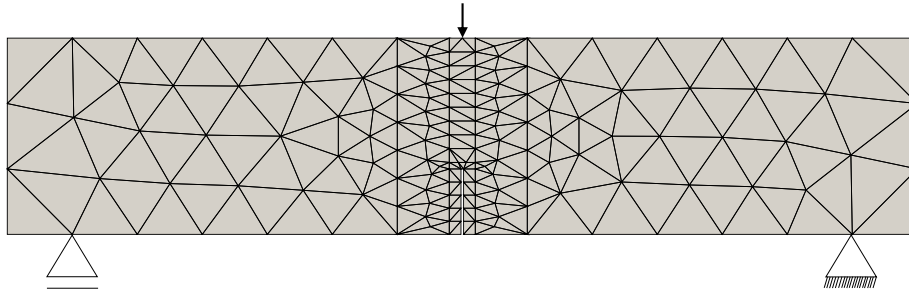


Figura 5.8 – Malha de 269 elementos finitos.

A Tab. 5.6 apresenta uma comparação entre o NGL de cada um das malhas da Fig. 5.7 em suas respectivas simulações. A simulação com enriquecimento possibilitou evitar constante remalhamento do modelo e, ao final, ainda apresentou um NGL inferior ao da malha mais refinada, demonstrando, assim, a praticidade e a eficiência do MEFG polinomial. Apesar dos NGL serem similares, é mais vantajoso trabalhar com uma malha grosseira, que pode até mesmo ser construída manualmente. Além disso, o custo computacional é menor.

Tabela 5.6 – Comparação entre o NGL da malha de 269 elementos sem enriquecimento e da malha de 25 elementos com P3.

Simulação	NGL
269 ele P0	320
25 ele P3	272

Avaliando a convergência comparando os dois casos, conforme a Fig. 5.9, destaca-se que a simulação com  $P3$  apresentou melhor desempenho computacional. Enquanto que na malha refinada com  $P0$  foram realizadas um total de 878 iterações, na malha de 25 elementos com  $P3$ , esse total foi de 739 iterações.

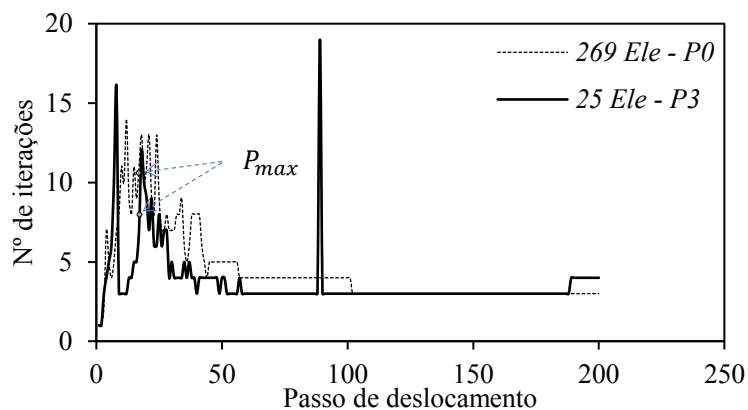


Figura 5.9 – Avaliação da convergência - comparação entre simulação com malha de 269 elementos  $P0$  e simulação com malha de 25 elementos e enriquecimento  $P3$ .

### 5.1.2 - Simulações com entalhe implícito

Neste caso utilizou-se uma entalhe implícito em substituição ao geométrico. Conclui-se, portanto, que a região de descontinuidade do material passa a ser descrita pelo enriquecimento dos elementos do local com função Heaviside. Os ensaios foram realizados utilizando o modelo *TPB*. A trinca, que representa o entalhe, foi inserida no modelo a partir de suas coordenadas (implícita), conforme é possível observar no detalhe da Fig. 5.10. Primeiramente foi avaliada a capacidade do MEEG descontínuo em descrever o entalhe, conforme explicado no capítulo sobre detalhes da implementação. Para tanto, foi feita uma simulação sem enriquecimento polinomial (*P0*) baseada na malha de 269 elementos da Fig. 5.8. A malha foi remodelada, acrescentando-se elementos à região do entalhe, conforme ilustra a 5.10.

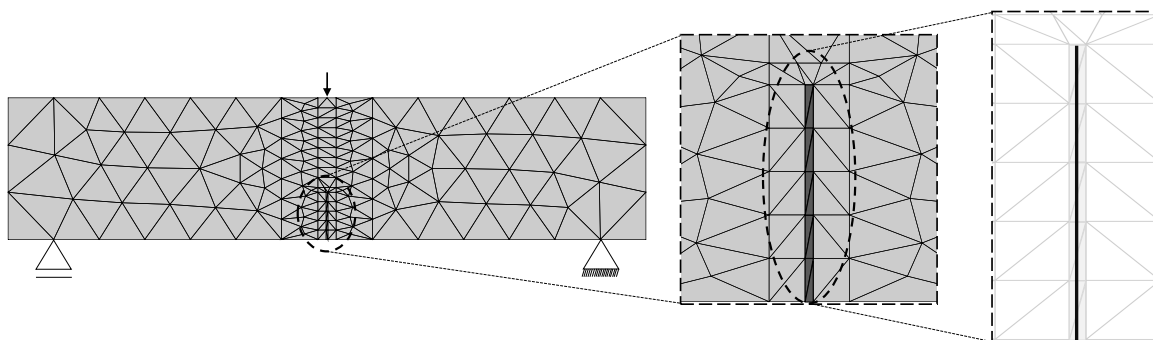


Figura 5.10 – Malhas 279 elementos - entalhe via função Heaviside.

A Fig. 5.11 mostra a comparação entre as curvas *P – CMOD* referente à 269 - 279 elementos, onde se nota praticamente uma sobreposição das mesmas (em geral diferença entre pontos  $\leq 10^{-3}$ ).

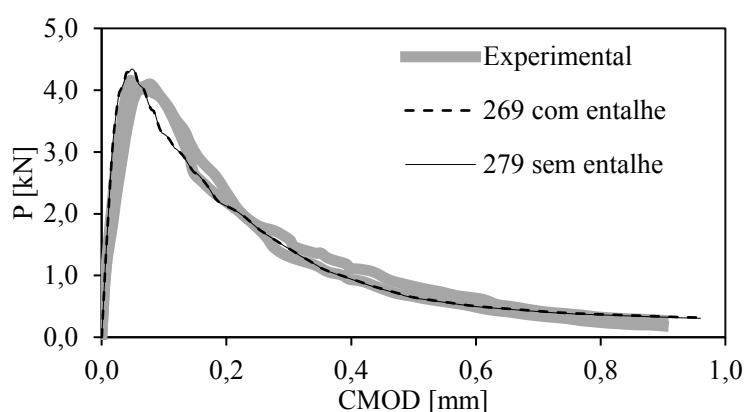


Figura 5.11 – Curvas *P – CMOD* experimentais e numéricas - malha de 269 elementos com entalhe geométrico e malha de 279 com entalhe via Heaviside.

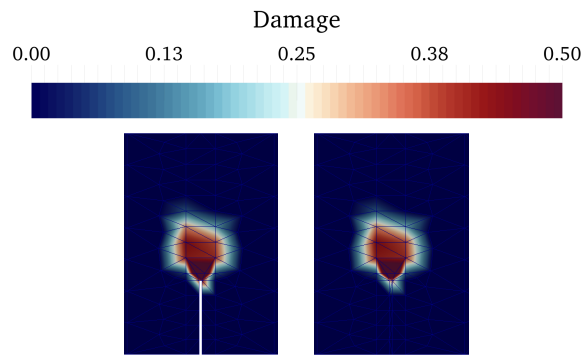


Figura 5.12 – Distribuição do dano - (a) entalhe geométrico; (b) entalhe implícito.

Por fim, foi analisada a distribuição do dano na zona de processo de fratura na situação de  $P_{max}$ . Conforme pode ser observado na Fig. 5.12, a danificação é praticamente igual. Logo, em função dos resultados apresentados na Fig. 5.11 e na Fig. 5.12, fica clara a capacidade do enriquecimento descontínuo em atuar na descrição de trincas, excluindo, assim, a obrigatoriedade da modelagem geométrica das mesmas no processo de geração da malha.

Com o funcionamento da estratégia descontínua verificada, o próximo passo foi avaliar a atuação conjunta dos enriquecimentos descontínuo e polinomial. Neste caso, foram feitas duas simulações adotando diferentes estratégias de discretização conforme a Fig. 5.13.

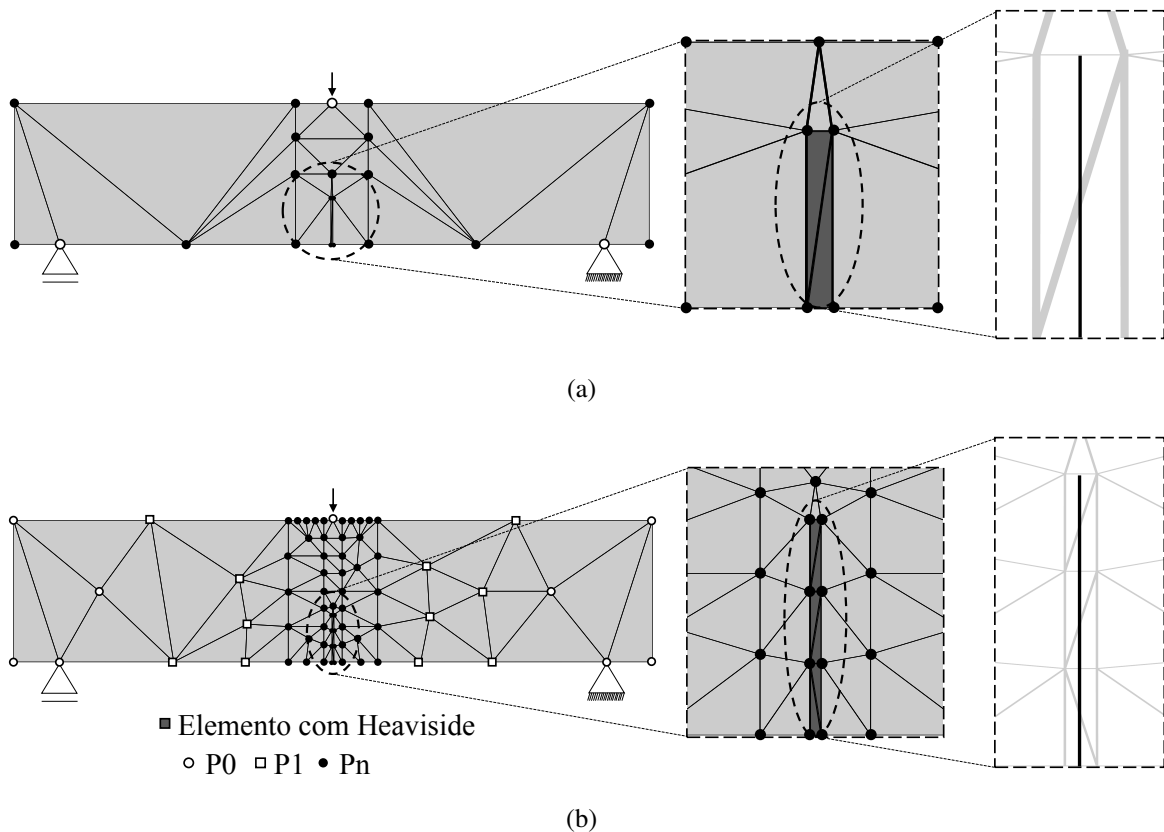
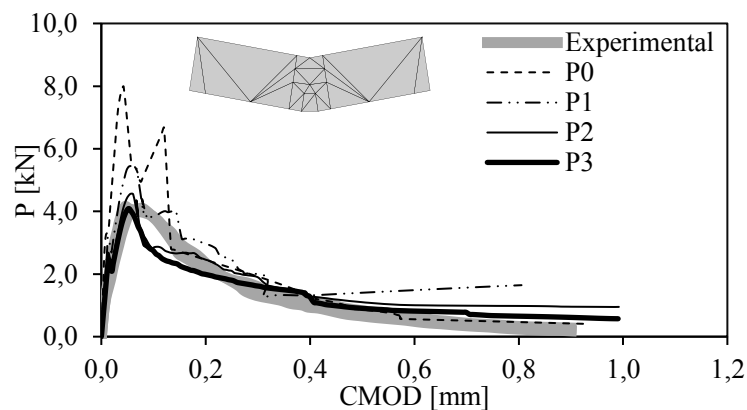
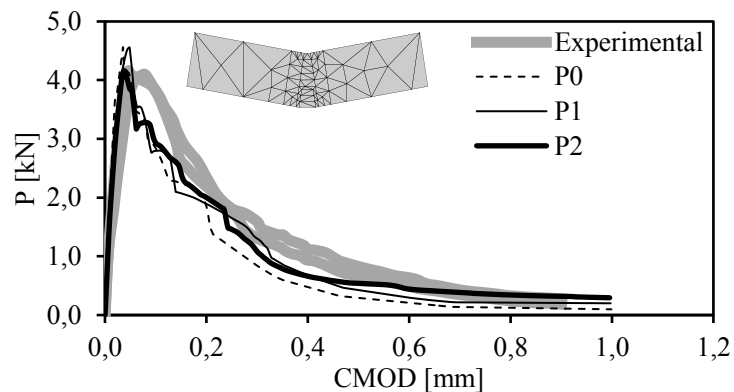


Figura 5.13 – Malhas de elementos finitos para *TPB*: (a) 27 elementos; (b) 107 elementos.

Na primeira foi utilizada uma malha de 27 elementos. Em seguida, foram feitas simulações com um modelo cuja malha sofreu um maior refinamento. A Fig. 5.13 detalha a estratégia de enriquecimento adotada. Os elementos mais escuros são aqueles cortados pela trinca e, portanto, cujos nós são enriquecidos com Heaviside. A Fig. 5.14 apresenta os resultados experimentais e numéricos das curvas relativas à força ( $P$ ) em função do deslocamento de abertura de boca de trinca ( $CMOD$ ). É notória a capacidade do enriquecimento polinomial para conferir maior qualidade aos resultados. Percebe-se também que os gráficos  $P - CMOD$  apresentados na Fig. 5.14(a) e na Fig. 5.14(b) são próximos aos expostos na Fig. 5.3(a) e na Fig. 5.3(b), apresentando, porém, menos perturbações na região do amolecimento, além de um resultado mais conformado ao experimental.



(a)



(b)

Figura 5.14 – Curvas  $P - CMOD$ : (a) Malha de 27 elementos; (b) malha de 107 elementos.

A Fig. 5.15 mostra uma comparação entre as malhas de elementos finitos deformadas, tanto com entalhe explícito, como com implícito. É possível observar boa correspondência.

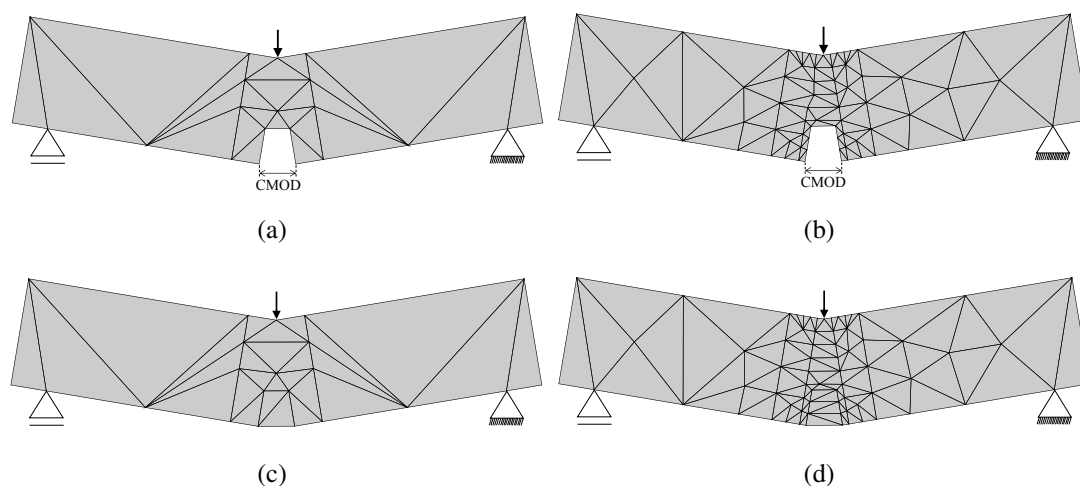


Figura 5.15 – Malhas de elementos finitos deformadas - (a) 25 elementos, com entalhe; (b) 101 elementos, com entalhe; (c) 27 elementos, sem entalhe; (d) 107 elementos, sem entalhe.

Por fim, analisou-se a distribuição do dano na zona de fratura, adotando-se para tal, o mesmo procedimento demonstrado pela Fig. 5.4(a). Na Fig. 5.16 é possível observar os resultados dessas análises. Observa-se que a danificação se distribui na região conforme o esperado, tornando-se menos dispersa e, concentrando-se apropriadamente na zona de processo, a medida que o grau do enriquecimento polinomial aumenta. Além disso, nota-se uma grande correspondência com as distribuições mostradas nas Fig. 5.4(b) e 5.4(c), verificando, deste modo, os resultados aqui apresentados.

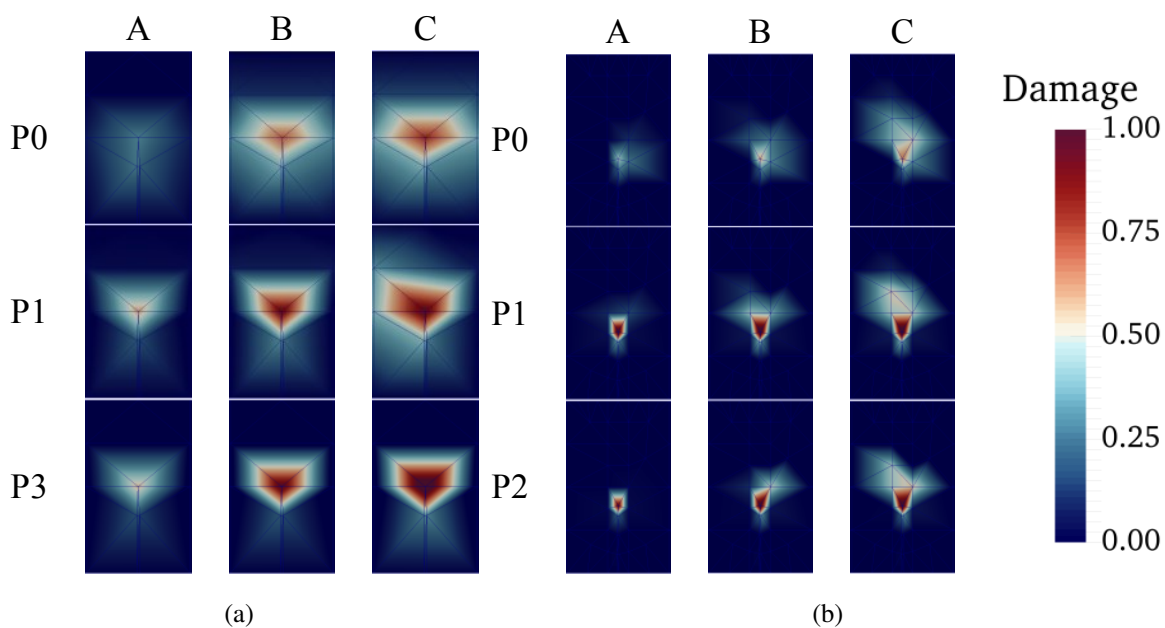


Figura 5.16 – Distribuição do dano em função dos graus de enriquecimento polinomial - (a) Malha de 27 elementos; (b) Malha de 107 elementos.

Os valores de  $P_{max}$  encontrados nas simulações numéricas realizadas são detalhados na Tab. 5.7, juntamente com os respectivos Erros Relativos,  $e_r$ . Observa-se bons resultados, chegando-se a alcançar Erro Relativo inferior 1 % (um por cento) com a malha de 107 elementos enriquecida com P2.

Tabela 5.7 – Carga máxima,  $P_{max}$  (kN), observada nas simulações numéricas e no resultado experimental para a viga TPB.

Malha	Experimental	P0	$e\%$	P1	$e\%$	P2	$e\%$	P3	$e\%$
27 elementos	4,161	7,977	91,71	5,448	30,92	4,563	9,65	4,089	1,72
107 elementos	4,161	4,560	9,59	4,551	9,37	4,160	0,024	-	-

A Tab. 5.8 apresenta o NGL para cada uma das simulações anteriormente analisadas com entalhe implícito e a Fig. 5.17 apresenta o  $\varepsilon_r$  em função do NGL. Destaca-se que o erro aproximou-se de zero ( $\leq 10^{-1}$ ) quando foi utilizado P2 como enriquecimento para a malha mais refinada.

Tabela 5.8 – Número de Graus de Liberdade (NGL) - TPB com entalhe implícito.

Malha	NGL			
	P0	P1	P2	P3
27 elementos	48	124	200	276
107 elementos	140	326	518	-

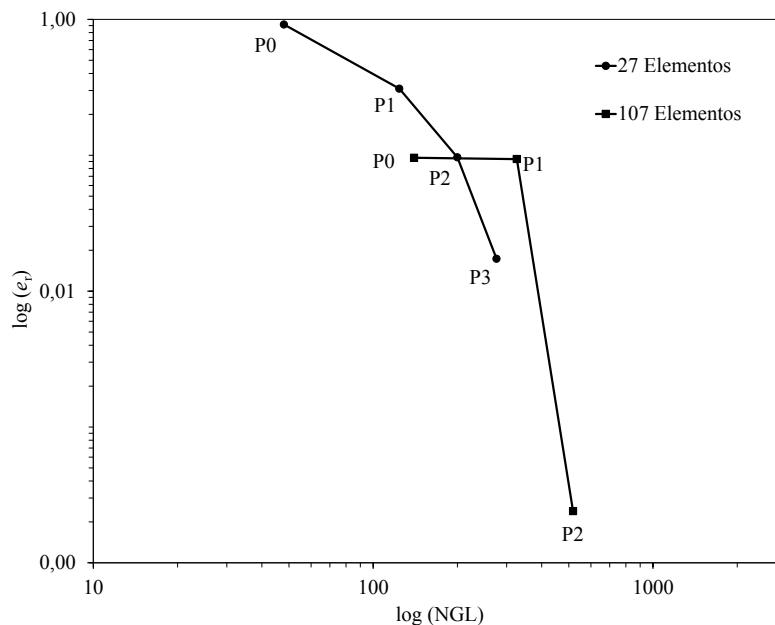


Figura 5.17 – Erro relativo ( $e_r$ ) para medida das cargas máximas observadas em laboratório x NGL para simulações com entalhe implícito - malhas com 27 e 107 elementos, respectivamente.



A Tab. 5.9 detalha o estudo da convergência para as simulações anteriores, apresentando o total de iterações realizadas em cada uma delas. Observa-se comportamento semelhante àquele apresentado pelas simulações correlatas com entalhe explícito (Tab. 5.5) com duas diferenças: o pico de iterações não ocorre mais em  $P2$  e sim em  $P1$ , tornado a diminuir novamente em  $P2$ . Nota-se, porém, que em relação aos casos correlatos com entalhe explícito anteriormente exibidos, foram necessárias mais iterações em todos os casos de enriquecimento. Isso é consequência da introdução da função Heaviside enriquecendo os nós dos elementos cortados pelo entalhe implícito, gerando graus de liberdade adicionais que provocam aumento da matriz de rigidez e contribuem para a redução do desempenho.

Tabela 5.9 – Total de iterações para cada malha em função do enriquecimento - TPB com entalhe implícito.

Malhas	Total de iterações por simulação			
	P0	P1	P2	P3
27 elementos	1847	4579	1640	1117
107 elementos	1191	1327	1169	-

A Fig. 5.18 ilustra o estudo de convergência para a malha com 27 elementos, comparando-se as simulações  $P0$  e  $P3$ . Percebe-se que a simulação com enriquecimento realizou, em geral, uma quantidade menor de iterações até alcançar a convergência em cada passo de deslocamento, apresentando melhor desempenho computacional.

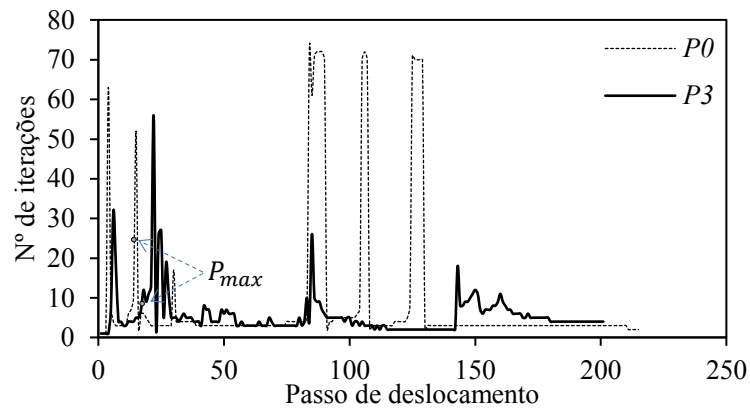


Figura 5.18 – Avaliação da convergência para a malha de 27 elementos - comparação entre simulação  $P0$  e simulação com enriquecimento  $P3$ .

## 5.2 - VIGA SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS (*THREE POINT BENDING - TPB*) COM MODELO DE DANO CONTÍNUO-DESCONTÍNUO

Após verificar a abordagem contínua, analisou-se o caso contínuo-descontínuo. O objetivo foi verificar a capacidade do MEFG em garantir uma descrição coerente do caminho da trinca. Para isso, realizou-se uma simulação de flexão em três pontos, que foi adotado nesse caso devido ao prévio conhecimento experimental do caminho da trinca. A malha de elementos finitos pode ser visualizada na Fig. 5.19, juntamente com a estratégia de enriquecimento adotada na simulação. Evitou-se aplicar de imediato enriquecimento polinomial nos nós dos elementos inicialmente cortados pela trinca, ao passo que estes são automaticamente enriquecidos com função Heaviside. Com isso buscou-se evitar um mal condicionamento do sistema de equações, devido não ter sido implementada nenhuma função especial para tratar dos elementos de transição. Esta condição, porém, somente se mantém até a trinca propagar. Assim como na subseção anterior, a trinca inicial foi inserida no modelo através de suas coordenadas, como pode ser bem observado no detalhe da Fig. 5.19.

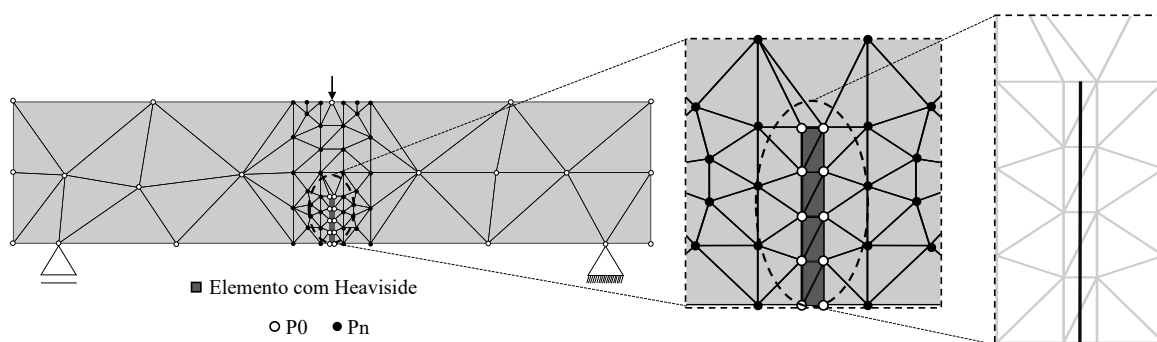


Figura 5.19 – Malha de elementos finitos e estratégia de enriquecimento adotada.

A Fig. 5.20 apresenta os resultados experimentais e numéricos das curvas relativas à força ( $P$ ) em função do deslocamento de abertura de boca de trinca ( $CMOD$ ). A instabilidade dos resultados é consequência do enriquecimento polinomial nos nós do elemento à frente da ponta da trinca após a mesma propagar, visto que os nós enriquecidos polinomialmente (conforme Fig. 5.19) assim permanecem até o fim da simulação. Além disso, o grau polinomial elevado perde efetividade na zona de descontinuidade. Em decorrência desses dois fatos a região de *softening* apresentou não objetividade. Tudo isso provavelmente seja superado mediante a implementação de um algoritmo que retire o enriquecimento polinomial dos nós do elemento à frente da ponta da trinca quando a mesma propagar.

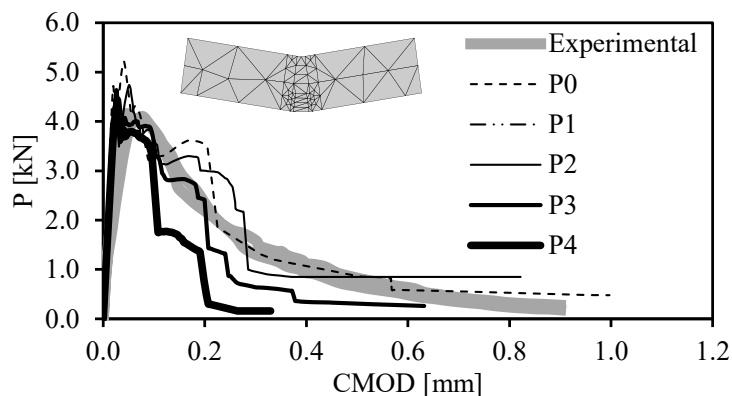


Figura 5.20 – Curvas  $P - CMOD$  – Malha com 107 elementos e trinca implícita.

Ainda assim, na Fig. 5.20 observa-se que há uma aproximação razoável de  $P_{max}$ . Na Fig. 5.21, relativa à situação final da simulação com  $P1$ , é possível notar que houve uma descrição coerente da abertura da boca da trinca pela função Heaviside, além de apresentar deformação em conformidade com a situação de carregamento apresentada. Este resultado está de acordo com o exposto a seguir na Fig. 5.22, onde se observa que a região da abertura e de danificação são correspondentes.

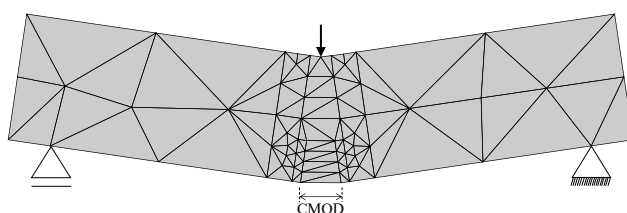


Figura 5.21 – CMOD após propagação da trinca – Malha com 107 elementos.

Ao analisar-se a distribuição do dano na zona de fratura, adotando-se para tal, o mesmo procedimento demonstrado pela Fig. 5.22, nota-se que as simulações sem enriquecimento não conseguem capturar a danificação, enquanto que com  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$  ou  $P4$ , percebe-se uma certa melhora desse resultado. Todos apresentam uma localização coerente do dano, que passou a apresentar menor dispersão a medida que o grau do enriquecimento fora aumentado, concentrando-se na seção central, local do provável caminho de evolução da trinca.

Comparando estes resultados da Fig. 5.22 com a distribuição do dano apresentado na Fig. 5.16(b), em cuja simulação foi empregada a estratégia contínua utilizando uma malha com estrutura e grau de refinamento semelhantes (também 107 elementos), nota-se que as respectivas simulações sem enriquecimento, em ambos, não foram capazes de prever a danificação do material, enquanto que houve melhora dos resultados devido utilização do

MEFG polinomial. Observa-se, ainda que nos dois casos houve coerência quanto à região onde o dano se localiza. O fato de a concentração do dano na ponta da trinca ser mais intensa na simulação que utilizou abordagem contínua deve-se ao enriquecimento com função Heaviside dos nós da aresta tocada pela ponta, pois em consequência disso as deformações ali desenvolvidas tendem a ser mais intensas que às aquelas apresentadas pela região correspondente na abordagem contínua-descontínua.

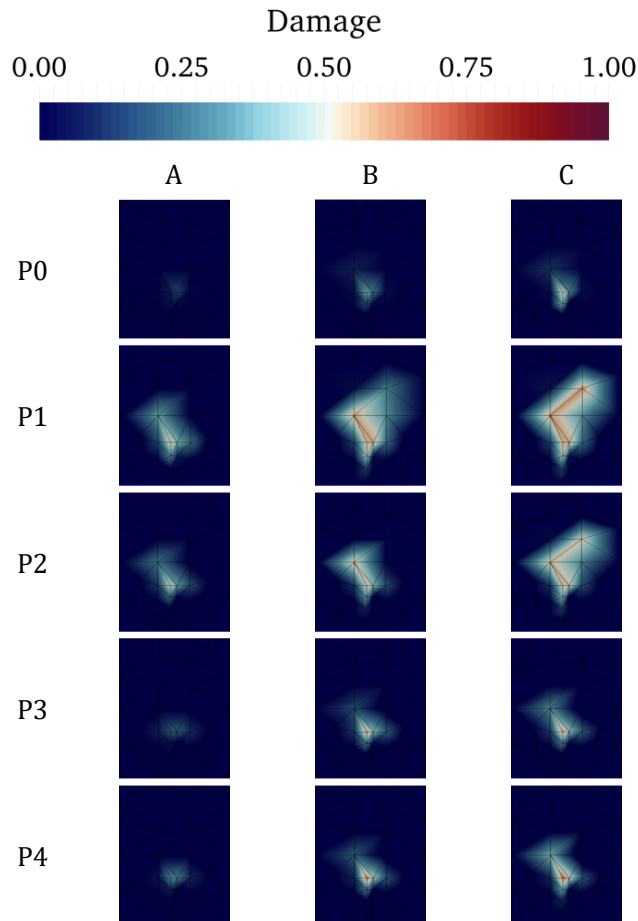


Figura 5.22 – Distribuição do dano em função dos graus de enriquecimento polinomial – Malha com 107 elementos e trinca implícita.

Sendo o comprimento inicial da trinca  $a_0 = 50 \text{ mm}$ , a Fig. 5.23 apresenta o caminho percorrido pela trinca em função do grau de enriquecimento utilizado na etapa final da curva  $P - CMOD$ . É patente a contribuição do MEFG quanto à melhor descrição da evolução da trinca. Observa-se que com o aumento do grau do enriquecimento e, consequentemente, melhor aproximação do campo de deformação, pôde-se obter resultados gradativamente melhores.

Na simulação com  $P0$  nota-se que a trinca somente propagou em um único ponto, ou seja, após a propagação, nenhum dos pontos de integração da região (dentro da "V shaper") à

frente da ponta da trinca atingiu o  $D_{crit}$  estabelecido. O cálculo de  $D$  naqueles pontos de Gauss é prejudicado devido a malha ser grosseira e não conseguir apresentar uma descrição satisfatória do campo de deslocamentos e, conseqüentemente, de tensões e de deformações, prejudicando, assim, a obtenção do dano. O enriquecimento polinomial corrige este problema.

O fato de as simulações com enriquecimento exigirem relativamente uma quantidade de pontos de integração maior para alcançar convergência, é responsável pelas “curvas” demonstradas pela trinca (deveria ser mais próximo da perpendicular à horizontal), visto que esta tende a cortar o elemento atravessando a região onde a concentração de pontos for maior.

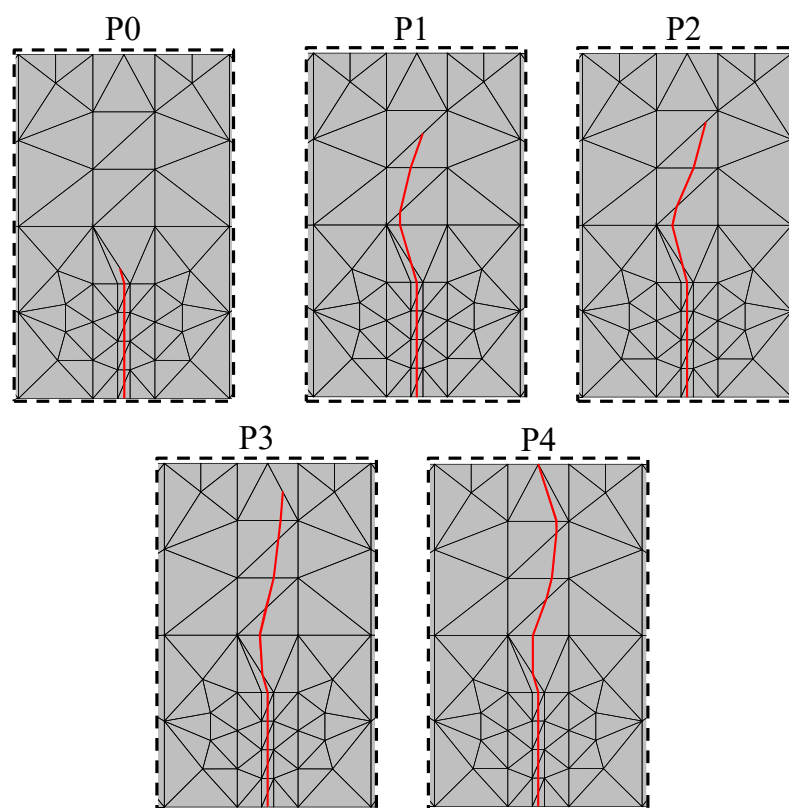


Figura 5.23 – Evolução da trinca em função do grau do enriquecimento aplicado na simulação - final da curva  $P - CMOD$ .

## 6 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO

Este capítulo dedica-se à avaliação numérica da eficiência do MEF3D no tocante à melhora da previsão do comportamento de ruptura em simulações com malhas grosseiras em modo misto de fratura. Foram realizados dois tipos de simulações, ambas com entalhe explícito, visto que os resultados experimentais e numéricos encontrados na literatura, adotados aqui como referência, também utilizaram o entalhe explícito. Os ensaios numéricos foram realizados através do controle de deslocamento.

### 6.1 - VIGA SOB CISALHAMENTO EM QUATRO PONTOS COM ENTALHE CENTRAL - *FOUR POINT SHEAR - SINGLE EDGE NOTCH (FPS-SEN)*

A primeira simulação em modo misto foi a viga sob cisalhamento em quatro pontos com entalhe central, ou *Four Point Shear - Single Edge Notch (FPS-SEN)*. Os resultados das simulações numéricas para materiais cimentícios convencionais foram comparadas com resultados experimentais extraídos do trabalho de Schlangen (1993). A Fig. 6.1 ilustra de maneira geral a geometria utilizada para o ensaio de flexão em três pontos. Os dados geométricos, os parâmetros de fratura e os relativos ao material são descritos pela Tab. 6.1. As condições de contorno são constituídas por uma restrição de segundo gênero na parte inferior direito da viga e, por outra de primeiro gênero na parte inferior central restringindo o movimento vertical. As placas de carga apresentam largura igual a 20 mm e centro localizado a 20 mm da seção central da viga, no caso das placas centrais e, para as demais placas, a distância é também de 20 mm, porém, em relação às bordas.

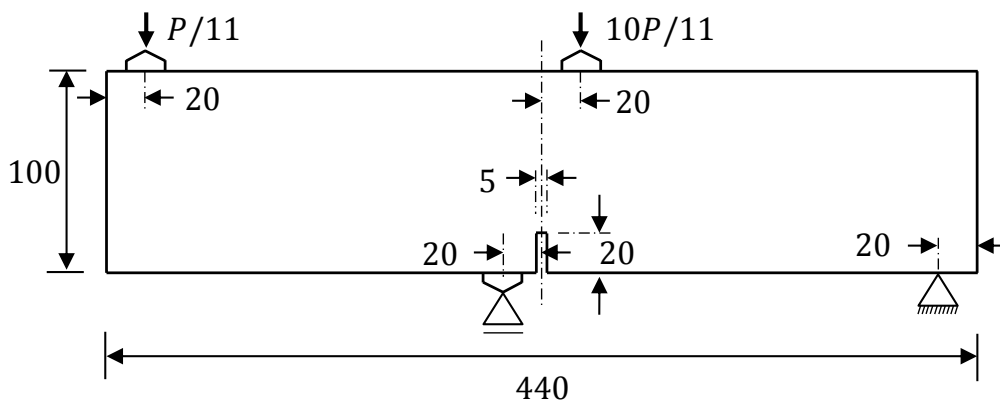


Figura 6.1 – Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo - espessura = 100 mm (todas as dimensões em mm).

Os parâmetros de material foram obtidos de Schlangen (1993) e, os de fratura, de Wells e Sluys (2001). A barra rígida e as placas de carga têm propriedades de material referentes ao aço. A posição do nó onde o deslocamento foi imposto foi calculada de modo que a força resultante transferida às placas de carga superiores possuam proporções conforme demonstrado na Fig. 6.1. Como se trata de uma situação de modo misto de fratura, foi considerada, neste caso, a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ).

Tabela 6.1 – Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio *FPS-SEN*

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material		
$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\nu$
100,0	34,0	0,25	35000	3,0	0,20

Para as simulações foi utilizadas uma malha de elementos finitos que pode ser vista com detalhes na Fig. 6.2. Os nós  $P_n$  indicam onde houve aplicação e variação do grau do enriquecimento.

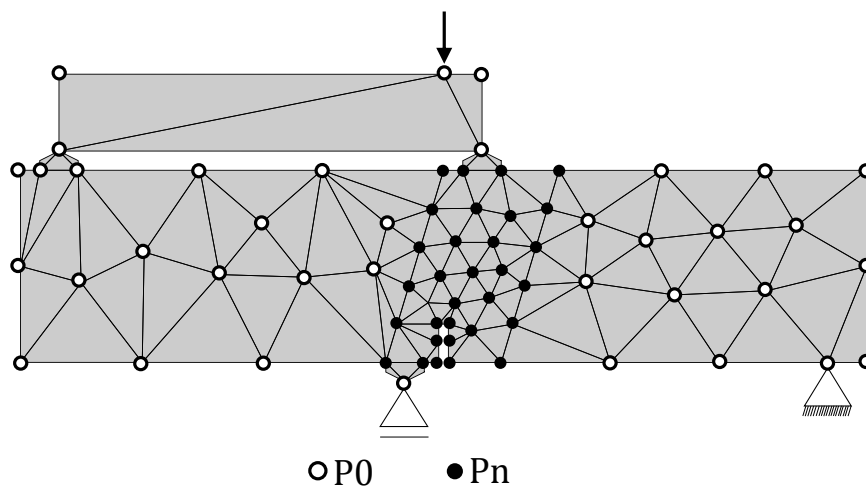


Figura 6.2 – Malha de elementos finitos para FPS-SEN - 106 elementos.

A Fig. 6.3 apresenta os resultados experimentais e numéricos das curvas relativas à força ( $P$ ) em função do deslocamento deslizante da boca da trinca, *Crack Mouth Sliding Displacement (CMSD)*. Fica evidente a capacidade do enriquecimento polinomial para conferir maior qualidade aos resultados.

Observa-se que tanto a carga máxima resistida quanto a região de *softening* da curva  $P$  - *CMSD* são melhor descritos à medida que o grau de enriquecimento aumenta. Nota-se que um bom resultado é alcançado com enriquecimento de sexto grau para uma malha bastante grosseira (Fig.6.2).

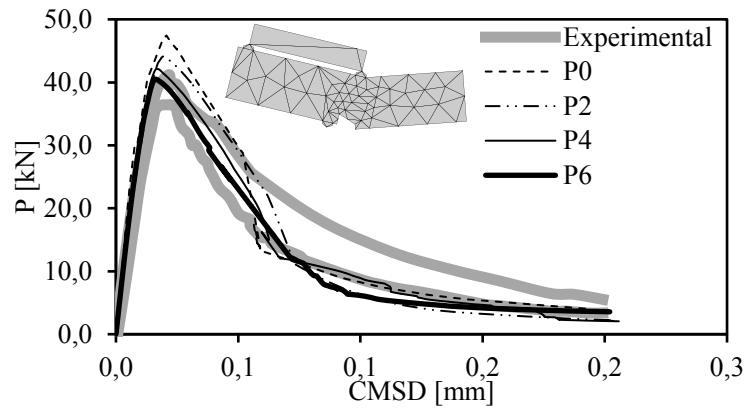


Figura 6.3 – Curvas  $P - CMSD$  experimentais e numéricas – malha com 106 elementos

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura, adotando estratégia semelhante à utilizada anteriormente (A - 75% de  $P_{max}$  na zona ascendente; B  $P_{max}$ ; C - 50% de  $P_{max}$  na zona descendente; final da simulação). A Fig. 6.4 mostra que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Schlangen (1993), demonstrando uma melhor descrição a medida que o grau do enriquecimento fora aumentado, tendendo a ser menos disperso. Quando se sobrepõem o resultado da simulação numérica com enriquecimento de sexto grau ( $P6$ ), com o mapa de propagação de trinca das vigas ensaiadas por Schlangen (1993) nota-se que há uma boa concordância ente ambos os resultados.

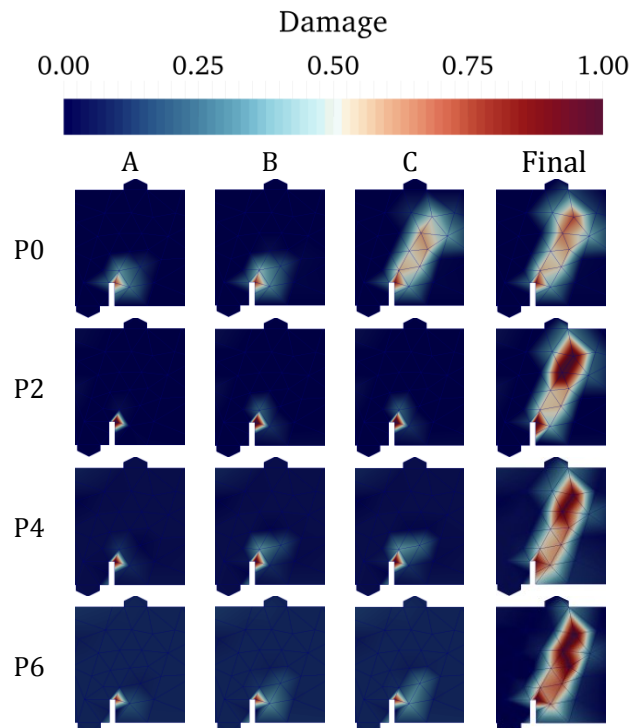


Figura 6.4 – Distribuição do dano em função dos graus de enriquecimento polinomial.



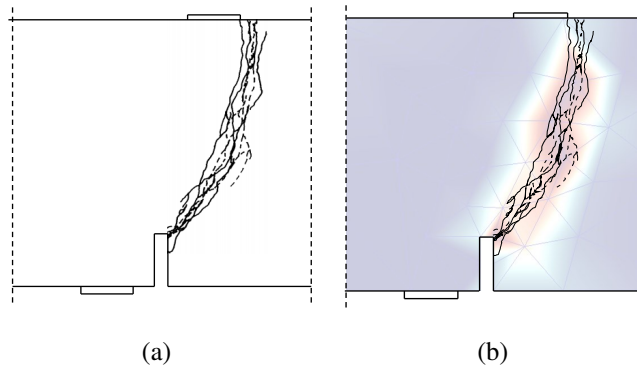


Figura 6.5 – (a) Propagação de trinca experimental (adaptado de Schlangen, 1993); (b) sobreposição da distribuição do dano sobre o resultado de propagação experimental.

Os valores de  $P_{max}$  do ensaio experimental (Simone *et al.*, 2003) e das simulações numéricas são detalhados na Tab. 6.2. Observa-se que os resultados estão próximos dos experimentais, apresentando um erro relativo mínimo de 1,716 % e máximo de 11,206 % no caso de P6. A Fig. 6.6, por sua vez, apresenta o  $e_r$  em função do NGL. Destaca-se que o erro aproximou-se de zero quando foi utilizado enriquecimento P6. O  $e_r$  foi calculado com base no limite superior do valor experimental de  $P_{max}$ .

Tabela 6.2 – Carga máxima,  $P_{max}$  (kN), observada nas simulações numéricas e no resultado experimental para a viga FPS.

Experimental	P0	P2	P4	P6
41,220	47,437	44,121	42,124	40,513
36,430				

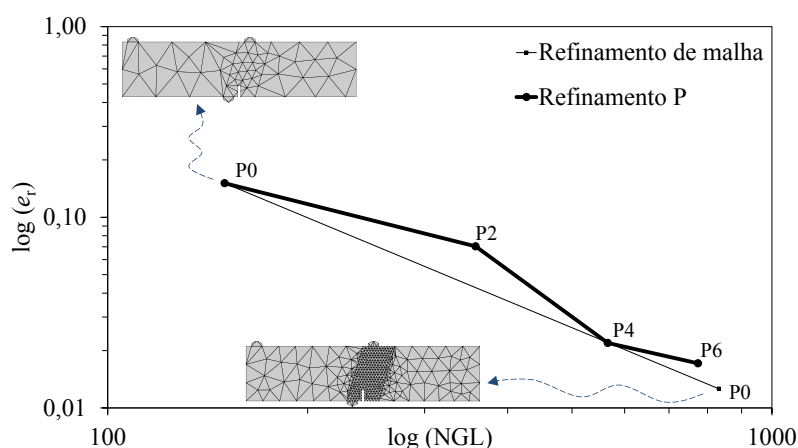


Figura 6.6 – Erro Relativo ( $e_r$ ) para medida das cargas máxima observadas em laboratório x NGL para simulações do FPS-SEN.

A qualidade do MEFG polinomial torna-se ainda mais evidente quando se comparam os

resultados mostrados na Fig. 6.3, com duas simulações sem enriquecimento e malhas mais refinadas. Confrontando-se, então, o resultado apresentado anteriormente para malha enriquecida, com os resultados numéricos apresentados por Moreira (2016) e Simone *et al.* (2003). As malha empregadas por este e por aquele em seus respectivos trabalhos são mostradas, respectivamente, na Fig. 6.7(a) e na Fig. 6.7(b).

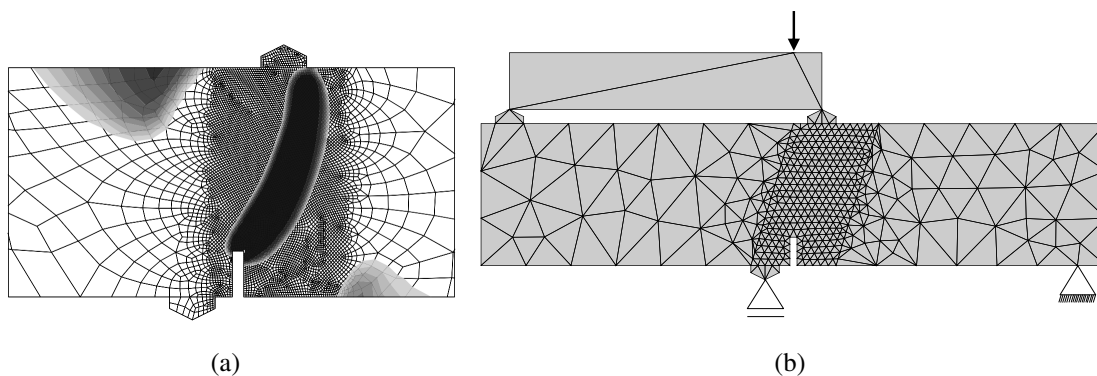


Figura 6.7 – Discretização da viga com: (a) 7308 elementos (Simone *et al.*, 2003); (b) 761 elementos (Moreira, 2016).

Percebe-se que ambos precisaram refinar bastante a malha na zona de processo para garantir um resultado com acurácia aceitável. A Fig. 6.8 mostra, então, os resultados para simulações sem enriquecimento apresentados pelos autores citados, comparados com o obtido a partir da simulação da malha grosseira exposta anteriormente (Fig. 6.2) enriquecida com P6.

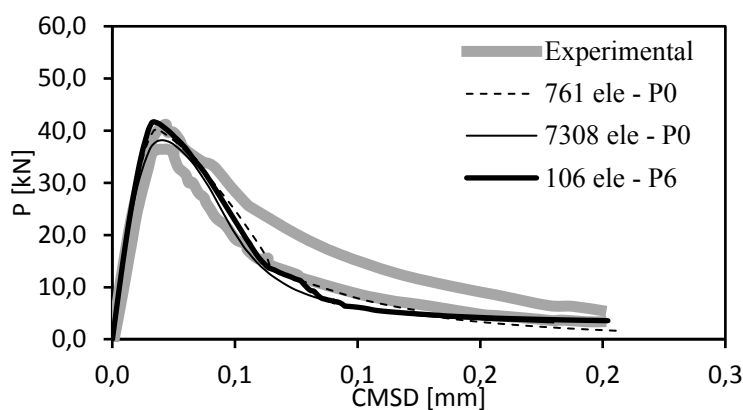


Figura 6.8 – Curvas  $P - CMSD$  - comparação entre simulações P0 com malha de 761 e 7308 elementos e simulação com enriquecimento P6 e malha de 106 elementos.

A Tab. 6.3 apresenta o NGL para as simulações da Fig. 6.3 e da Fig. 6.8. Observa-se que as simulações com malha grosseira possuem NGL bem inferior aos demais. Levando em consideração que para a simulação com P6 foi utilizada uma malha com aproximadamente 70 (setenta) vezes menos elementos que em Simone *et al.* (2003) e, aproximadamente 8

(oito) vezes menos que em Moreira (2016), fica estabelecida a grande capacidade do MEFG polinomial para descrever, também, o comportamento de estruturas em processo de danificação sob modo misto de fratura.

Tabela 6.3 – Número de Graus de Liberdade (NGL) - FPS-SEN.

Malha	NGL			
	P0	P2	P4	P6
7308 elementos	*	-	-	-
761 elementos	832	-	-	-
106 elementos	150	358	566	774

\* Não reportado em Simone *et al.* (2003)

A Tab. 6.4 detalha o estudo da convergência para as simulações anteriores, apresentando o total de iterações realizadas em cada uma delas. Nota-se que o número total de iterações em todos os casos com enriquecimento foi inferior aos casos com  $P0$  nas malhas de 106 e 769 elementos. Avaliando a convergência comparando os dois modelos, conforme a Fig. 6.9, destaca-se que a simulação com  $P6$  apresentou melhor desempenho computacional. Nesse caso, ainda que apresentem NGL e número total de iterações com valores próximos, é melhor trabalhar com uma malha grosseira e variar apenas o grau polinomial do enriquecimento, evitando, desta forma, retrabalhos de reconstrução da malha, por exemplo.

Tabela 6.4 – Total de iterações para cada malha em função do enriquecimento - FPS-SEN.

Malha	Total de iterações por simulação			
	P0	P2	P4	P6
106 elementos	3989	2732	3210	3556
769 elementos	3722	-	-	-

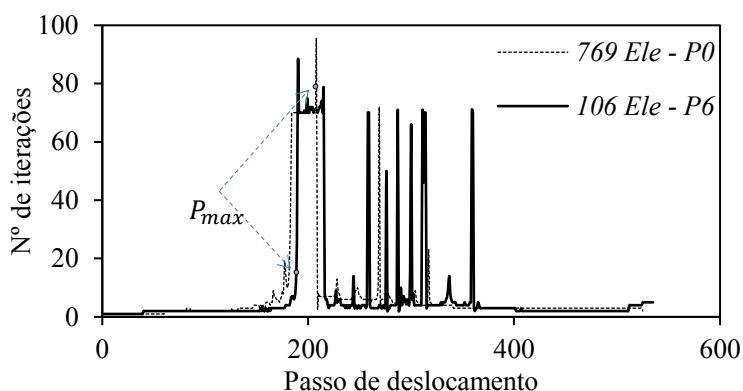


Figura 6.9 – Avaliação da convergência - comparação entre simulação com malha de 769 elementos  $P0$  e simulação com malha de 106 elementos e enriquecimento  $P6$ .

## 6.2 - VIGA SOB CISALHAMENTO EM QUATRO PONTOS COM DUPLO ENTALHE - *FOUR POINT SHEAR - DOUBLE EDGE NOTCH (FPS-DEN)*

A segunda simulação realizada foi a viga sob cisalhamento em quatro pontos com duplo entalhe, ou *Four Point Shear - Double Edge Notch (FPS-DEN)*. Os resultados das simulações numéricas para materiais cimentícios convencionais foram comparados com resultados experimentais extraídos do trabalho de Schlangen (1993). A Fig. 6.10 ilustra de maneira geral a geometria utilizada na simulação. Os dados geométricos, os parâmetros de fratura e os relativos ao material são descritos pela Tab. 6.5.

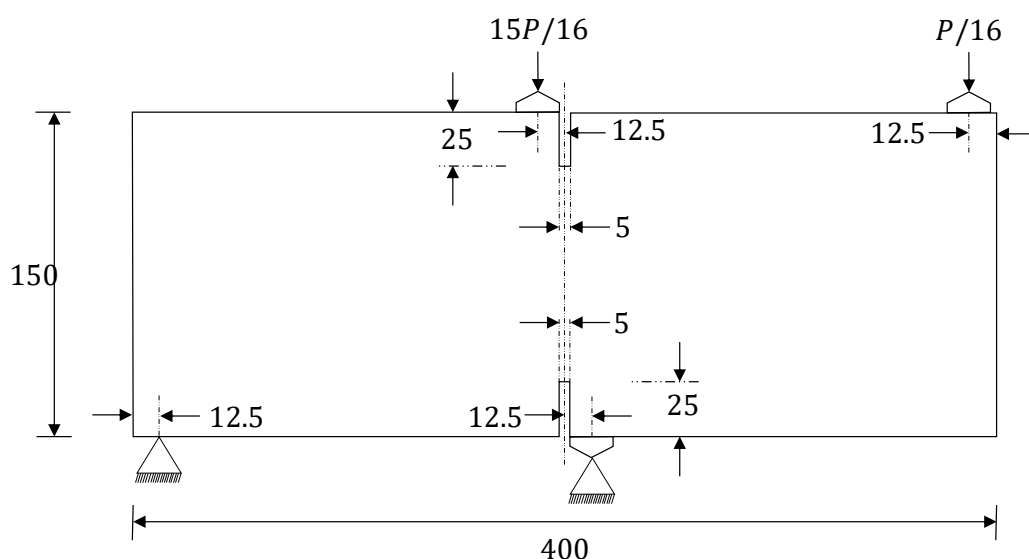


Figura 6.10 – Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo - espessura = 37,5 mm (todas as dimensões em mm).

As condições de contorno de deslocamentos são constituídas por uma restrição de segundo gênero na parte inferior esquerda da viga e, por outra de segundo gênero na parte inferior central. As placas de carga apresentam largura igual a 20 mm e centro localizado a 12,5 mm da seção central da viga, no caso das placas centrais e, para as demais placas, a distância é também de 12,5 mm, porém, em relação às bordas. Os parâmetros de material foram obtidos de Schlangen (1993) e, os de fratura, de Bocca *et al.* (1990). A barra rígida e as placas de carga têm propriedades de material referentes ao aço. A posição do nó onde o deslocamento foi imposto foi calculada de modo que a força resultante transferida às placas de carga superiores possuam proporções conforme demonstrado na Fig. 6.10. Como se trata de uma situação de modo misto de fratura, foi considerada, neste caso, a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ).

Tabela 6.5 – Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio *FPS-DEN*

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material		
$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\nu$
100,0	40,0	0,25	35000	3,0	0,20

Neste ensaio há duas formas de emprego do apoio e da placa de aplicação de carga centrais dos suportes: em uma os mesmos são fixos, ou seja, não rotacionam. Na segunda opção, ambos são rotativos. Cada situação gera um processo de falha particular conforme Schlangen (1993). Nesta pesquisa simulou-se apenas o caso de apoios rotativos. Foi utilizada, inicialmente, uma malha com 1193 elementos finitos, conforme a Fig. 6.11.

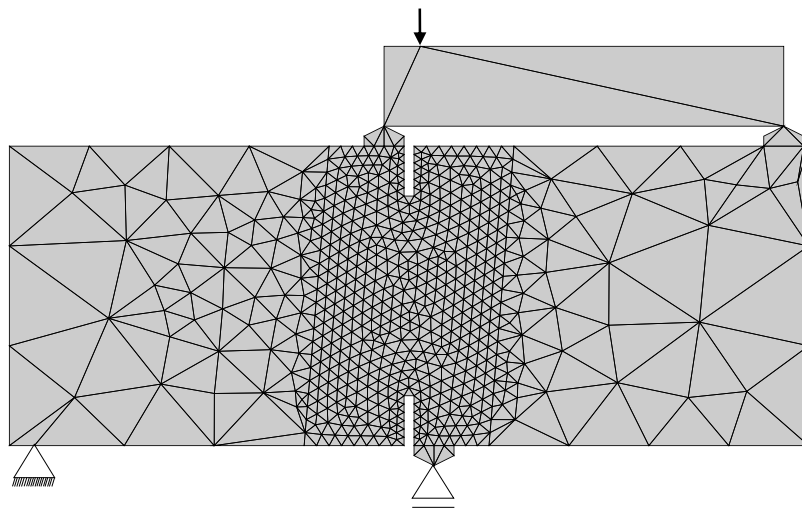


Figura 6.11 – Malha de elementos finitos para ensaio *FPS - DEN*.

A Fig. 6.12 apresenta a relação  $P - CMOD$  para o caso rotativo. Observa-se que houve uma boa predição tanto da carga máxima resistida como da região de *softening*.

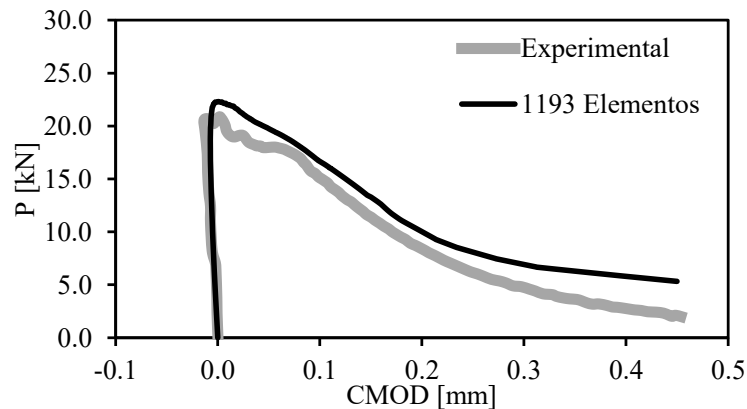


Figura 6.12 – Curvas  $P - CMOD$  experimental (Schlangen, 1993) e numérico referente a malha de 1193 elementos.

Em seguida foram realizadas simulações utilizando uma malha grosseira com 193 elementos onde foi avaliado o enriquecimento polinomial. A malha utilizada, juntamente com a estratégia de enriquecimento adotada, podem ser visualizadas na Fig. 6.13.

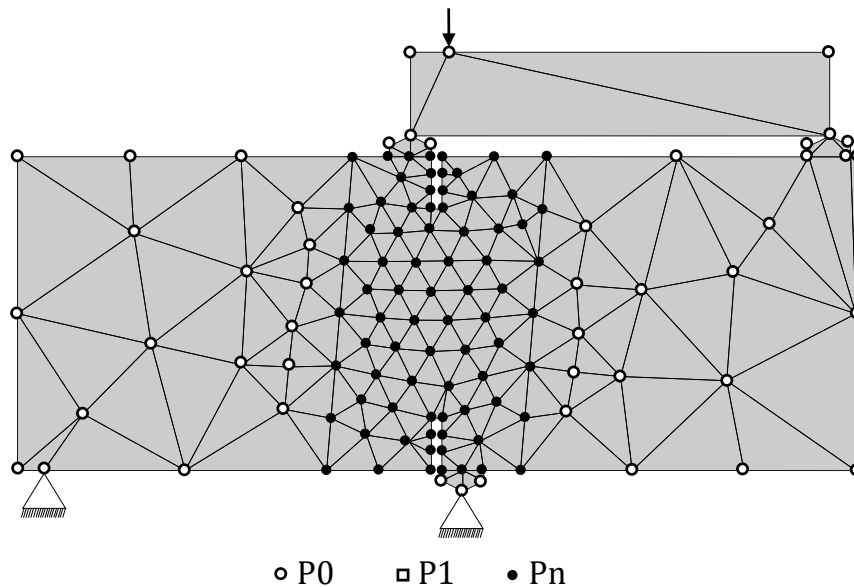


Figura 6.13 – Malha de elementos finitos para FPS-DEN - 193 elementos.

A Fig. 6.14 apresenta o resultado experimental e também os numéricos das curvas ( $P - CMOD$ ) para a simulação  $P0$  e para aqueles onde houve aplicação do enriquecimento polinomial. Fica evidente a capacidade do MEEG para conferir maior qualidade aos resultados em situações envolvendo modo misto de fratura. Observa-se ainda que há objetividade de malha, característica importante evidenciada por essas curvas.

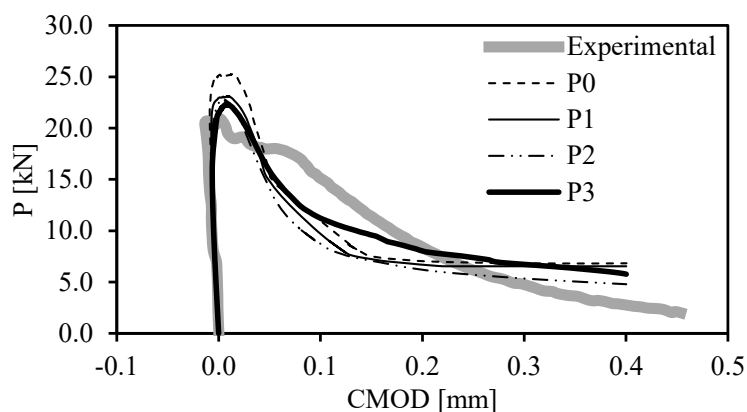


Figura 6.14 – Curvas  $P - CMOD$  experimental (Schlangen, 1993) e numéricos referente a malha de 193 elementos.

Ao analisar a distribuição do dano na zona fratura, adotando estratégia semelhante à utilizada anteriormente (A - 75% de  $P_{max}$  na zona ascendente; B  $P_{max}$ ; C - 50% de  $P_{max}$  na

zona descendente; final da simulação). A Fig. 6.15 mostra que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Schlangen (1993), demonstrando uma melhor descrição a medida que o grau do enriquecimento fora aumentado, tendendo a uma menor dispersão.

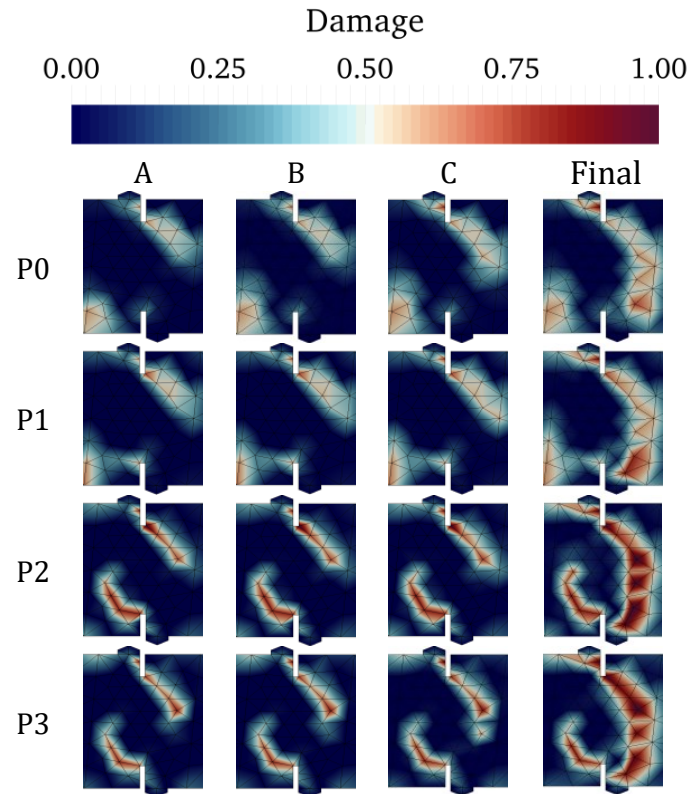


Figura 6.15 – Distribuição do dano em função dos graus de enriquecimento polinomial.

Na Fig. 6.16 é possível observar a correlação entre a distribuição do dano ao fim da simulação e a trinca experimental, tanto para a malha refinada quanto para a grosseira com enriquecimento P3. Nota-se a coerência dos resultados frente ao experimental, bem como a capacidade do MEFG para prever o processo de danificação do material. O dano que surge tanto na região do apoio inferior quanto na placa de aplicação de carga central, deve-se à deformação local do material em função da rotação do apoio e da placa de carga.

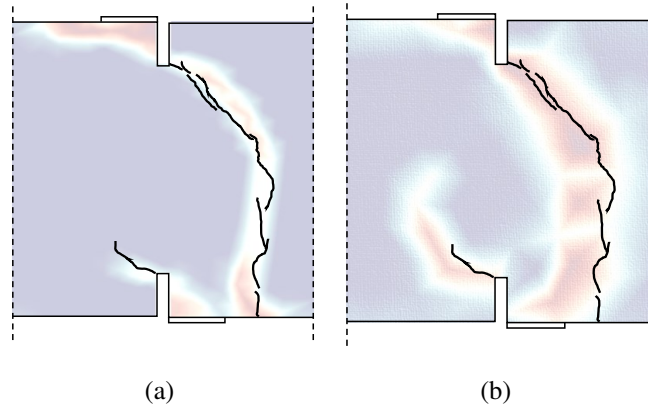


Figura 6.16 – Sobreposição da distribuição do dano sobre o resultado da propagação experimental (adaptado de Schlangen, 1993): (a) Malha de 1193 elementos sem enriquecimento ; (b) Malha com 193 elementos e enriquecimento  $P3$ .

Os valores de  $P_{max}$  encontrados nas simulações numéricas realizadas são detalhados na Tab. 6.6, juntamente com os respectivos Erros Relativos,  $e_r$  (em relação à medida das cargas máximas observadas em laboratório), para cada grau de enriquecimento. Como observado anteriormente, o MEFG polinomial foi capaz de estimar com boa acurácia os valores experimentais. A Fig. 6.17 apresenta o  $e_r$  em função de NGL. É possível notar boa contribuição do enriquecimento para a redução do erro da aproximação.

Tabela 6.6 – Carga máxima,  $P_{max}$  (kN), observada nas simulações numéricas e erro relativo em relação ao resultado experimental para a viga FPS-DEN.

Malha	Experimental	P0	$\epsilon\%$	P1	$\epsilon\%$	P2	$\epsilon\%$	P3	$\epsilon\%$
1193 elementos	20,868	22,302	6,872	-	-	-	-	-	-
193 elementos	20,868	25,224	20,970	23,100	10,696	22,630	8,444	22,269	6,714

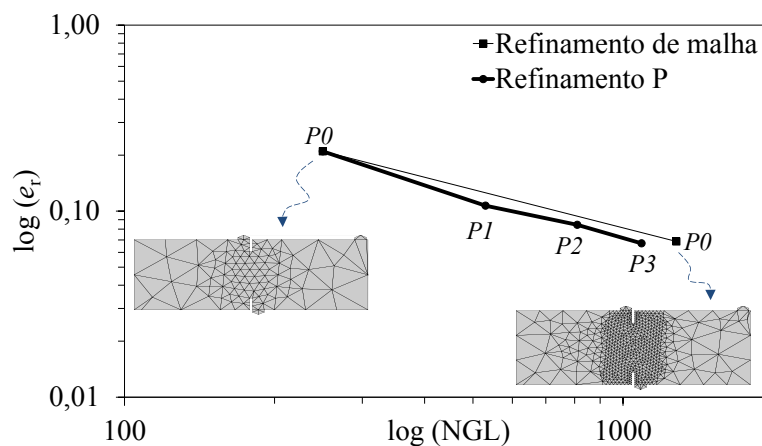


Figura 6.17 – Erro Relativo ( $e_r$ ) para medida das cargas máximas observadas em laboratório x NGL para simulações do FPS-DEN.



A Fig. 6.18, para efeitos comparativos, mostra o resultado apresentado pela malha refinada, simulada com MEF, quanto pela malha grosseira enriquecida com P3. O MEFG polinomial conseguiu aproximar satisfatoriamente a região de *softening*, bem como demonstrou boa acurácia na previsão da carga máxima resistida. A Tab. 6.7 apresenta o NGL para as simulações FPS-DEN. Observa-se que as simulações com a malha grosseira possuem NGL menor que a situação com malha refinada. Neste ponto, destaca-se que há maior vantagem em trabalhar com uma malha mais grosseira, tanto do vista da montagem da mesma, quanto do custo computacional envolvido nas respectivas simulações.

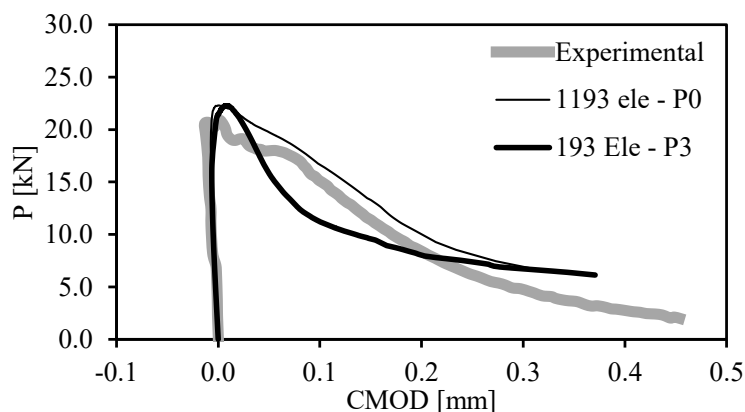


Figura 6.18 – Curvas  $P - CMOD$  - comparação entre simulações P0 com malha de 1193 elementos e simulação com enriquecimento P3 e malha de 193 elementos.

Tabela 6.7 – Número de Graus de Liberdade (NGL) - FPS-DEN.

Malha	NGL			
	P0	P1	P2	P3
1193 elementos	2386	-	-	-
193 elementos	250	530	810	1090

A Tab. 6.8 detalha o estudo da convergência para as simulações anteriores, apresentando o total de iterações realizadas em cada uma delas. Nota-se que o número total de iterações em todos os casos com enriquecimento foi inferior aos casos com P0 nas malhas de 193 e 1193 elementos. Avaliando a convergência comparando os dois modelos, conforme a Fig. 6.9, destaca-se que a simulação com P3 apresentou um desempenho computacional bem superior.

Tabela 6.8 – Total de iterações para cada malha em função do enriquecimento - FPS-DEN.

Malhas	Total de iterações por simulação			
	P0	P1	P2	P3
193 elementos	6832	7342	9054	6859
1193 elementos	26588	-	-	-

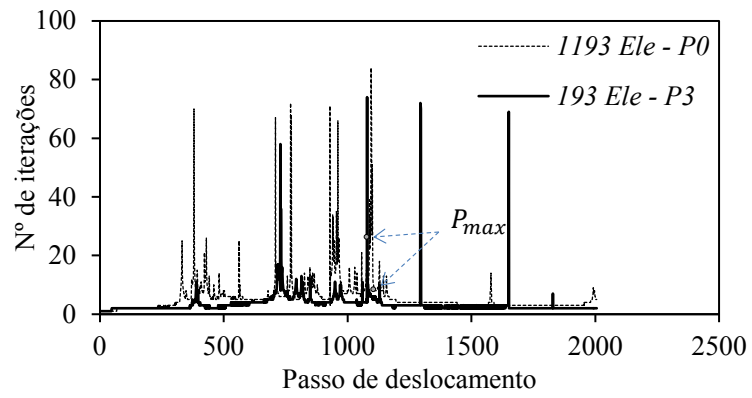


Figura 6.19 – Avaliação da convergência - comparação entre simulação com malha de 1193 elementos  $P0$  e simulação com malha de 193 elementos e enriquecimento  $P3$ .

## 7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

### 7.1 - CONCLUSÕES

Essa dissertação tratou da formulação e implementação do MEF<sub>G</sub>, utilizando funções de enriquecimento polinomiais e descontínuas para predição e avaliação do dano em estruturas em simulações com malhas grosseiras. A validação foi feita através da comparação com resultados experimentais para cada um dos ensaios realizados, a saber: flexão em três pontos com entalhe central (*TPB*), cisalhamento em quatro pontos com entalhe central (*FPS-SEN*) e cisalhamento em quatro pontos com duplo entalhe (*FPS-DEN*). Foram ensaiados casos com trinca geométrica e casos com trinca via função Heaviside, onde analisou-se a eficiência do MEF<sub>G</sub> descontínuo. Os resultados comprovaram a eficiência do MEF<sub>G</sub> polinomial e descontínuo para a predição do comportamento de ruptura, tanto em modo I de falha quanto em modo misto, ainda que se utilize na simulação uma malha grosseira.

As funções de enriquecimento polinomiais apresentaram convergência satisfatória, como pôde ser observado nos ensaios, onde o espaço de aproximação foi ampliado sem a necessidade de grandes refinamentos na malha. O fato de ser possível enriquecer qualquer nó da malha, com funções de qualquer tipo e ordem, permitiu grande flexibilidade quanto às estratégias de enriquecimento adotadas. Este fato se confirma ao analisar-se os gráficos que apontam  $P_{max}$ , onde foi possível alcançar valores bem próximos ao experimental utilizando poucos elementos nas simulações. Ainda que os NGL de uma malha refinada sem enriquecimentos e de outra grosseira enriquecida sejam similares, é mais vantajoso trabalhar com uma malha grosseira, visto que essa pode até mesmo ser construída manualmente.

As situações onde a trinca foi inserida via função Heaviside apresentaram resultados satisfatórios, em especial na abordagem contínua-descontínua. Essa função de enriquecimento garantiu a capacidade de a trinca cortar os elementos e, ainda, a possibilidade de inserir o entalhe em cada modelo apenas utilizando suas coordenadas globais iniciais, conferindo enorme flexibilidade aos ensaios. Nesses casos, o MEF<sub>G</sub> descontínuo foi capaz de capturar bem o processo de danificação da estrutura em função da existência da trinca, bem como pôde-se observar coerência quanto ao caminho da trinca observado.

A estratégia secante utilizada para a resolução do sistema não-linear de equações mostrou-se bastante confiável do ponto de vista da convergência, sendo capaz de superar

mesmo o mal condicionamento das matrizes de rigidez fruto dos elementos de transição, ou seja, aqueles onde foram empregados diferentes tipos e/ou graus de enriquecimento nodal.

As simulações utilizando MEFG, em geral, apresentaram melhor desempenho computacional que suas correlatas utilizando o MEF, mesmo apresentando uma quantidade superior de número de graus de liberdade. Em algumas situações, porém, essa superioridade do MEFG não foi observada, provavelmente, em função dos termos espúrios introduzidos na matriz de rigidez pelos *blend elements*, efeito prejudicial potencializado pelo aumento do grau polinomial das funções enriquecedoras.

Conclui-se, portanto, que o MEFG apresenta enorme capacidade em melhorar a qualidade da aproximação final, com a utilização racional de funções de enriquecimento, em malhas grosseiras, aliando características como modelagem flexível, convergência e eficiência computacional. A aplicação da estratégia descontínua garantiu enorme versatilidade aos ensaios, ao permitir a inserção implícita da trinca, apenas inserindo suas coordenadas iniciais. A combinação das estratégias do MEFG polinomial e/ou descontínuo, combinadas ao modelo de dano, mostrou-se bastante eficiente para prever a distribuição do dano e a evolução da trinca, em estruturas em processo de falha.

## 7.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros são sugeridos os seguintes tópicos:

- Implementação de um algoritmo estimador de erro para adequação ao MEFG adaptativo;
- Implementar funções de enriquecimento singulares suaves (*branch functions*) e avaliar os efeitos na predição do dano com malhas grosseiras;
- Adaptar automaticamente o enriquecimento polinomial de acordo com a evolução do dano ou dano/fratura;
- Implementar estratégia de tratamento para os elementos de transição (*blending elements*);
- Implementação do *Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM)*;
- Implementar a possibilidade de multi-trincamentos, permitindo modelar a propagação de múltiplas trincas e de suas possíveis coalescências.
- Estudar o multifissuramento em problemas de fratura hidráulica.

## REFERÊNCIAS DA LITERATURA

- Babuška, I. e J. M. Melenk (1997). “The partition of unity method.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 727—758.
- Babuška, I., G. Caloz e J. E. Osborn (1994). “Special Finite Element Methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients.” Em: *Journal on Numerical Analysis*,
- Barenblatt, G. I. (1959). “The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: general ideas and hypotheses, axially symmetric cracks.” Em: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 23, pp. 622–636.
- Barros, F. B., S. P. B. Proença e C. S. Barcellos (2004). “Generalized finite element method in structural nonlinear analysis - a  $p$ -adaptative strategy.” Em: *Computational Mechanics*, 33, pp. 95–107.
- Bazant, Z. P. e M. Jirásek (2002). “Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress.” Em: *Journal of Engineering Mechanics*, 128, 1119—1149.
- Bazant, Z. P. e J. Planas (1997). *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasi-brittle Materials*. CRC Press, p. 640. ISBN: 084938284X, 9780849382840.
- Bazant, Z. P., T. Belytschko e T. P. Chang (1984). “Continuum theory for strain-softening.” Em: *Journal of Engineering Mechanics*, 110, 1666—1692.
- Belytschko, T. e T. Black (1999). “Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, 601—620.
- Belytschko, T., R. Gracie e G. Ventura (2009). “A review of extended/generalized finite element methods for material modeling.” Em: *Modeling and Simulation in materials Science and Engineering*, 17, 1—24.
- Bocca, P., A. Carpinteri e S. Valente (1990). “Size effects in the mixed mode crack propagation: softening and snap-back analysis.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 35, 159—170.
- Borst R.; Remmers, J. J. C. de, A. Needleman e M-A. Abellan (2004). “Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap.” Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28, 583–607.

- Bussamra, F. L. S. (1999). “Elementos finitos híbridos-Trefftz: um modelo elastoplástico tridimensional.” Tese de doutorado. Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- Camacho, G. T. e M. Ortiz (1996). “Computational modeling of impact damage in brittle materials.” Em: *International Journal of Solids and Structures*, 33, pp. 2899–2938.
- Carpinteri, A., B. Chiaia e K. M. Nemati (1997). “Complex fracture energy dissipation in concrete under different loading conditions.” Em: *Mechanics of Materials*, 26, pp. 93–108.
- Cerrone, A., P. Wawrzynek, G. H. Paulino e A. Ingraffea (2014). “Implementation and verification of the Park–Paulino–Roesler cohesive zone model in 3D.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 120, pp. 26–42.
- Cho, S.H., M.S. Choi, D.K. Kanf, J. H. Lee e C.W. Kim (2015). “Analysis on mass sensing characteristics of SWCNT-based nano-mechanical resonators using continuum mechanics based finite element analysis.” Em: *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29(11), pp. 4801–4806.
- Comi, C., S. Mariani e U. Perego (2007). “An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation.” Em: *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, 31(2), 213—238.
- Cuvilliez, S. T., F. Feyel, E. Lorentz e S. Michel-Ponnelle (2012). “A finite element approach coupling a continuous gradient damage model and a cohesive zone model within the framework of quasi-brittle failure.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 237 (240), pp. 244–259.
- Daux, C., N. Möes, J. Dolbow, N. Sukumar e T. Belytschko (2000). “Arbitrary cracks and holes with the extended finite element method.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 (12), 1741—1760.
- Dolbow, J. (1999). “An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics.” Tese de doutorado. Theoretical e Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, USA.
- Duarte, C. A. e J. T. Oden (1995). “An h-p Meshless Method”. Em: *Texas Intitute for Computation and Applied Mathematics*,
- Duarte, C. A., O. N. Hamzeh, T. J. Liszka e W. W. Tworzydlo (2001). “A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional crack propagation.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp. 2227–2262.
- Dugdale, D. S. (1960). “Yield of steel sheets containing slits.” Em: *Journal of the Mechanics and Physics and Solids*, 8, pp. 100–104.

- Elices, M., G. V. Guinea, J. Gómez e J. Planas (2002). “The cohesive zone model: advantage, limitations and challenges.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 137—163.
- Evangelista Jr, F., J. R. Roesler e S. P. B. Proença (2013a). “Three-dimensional cohesive zone model for fracture of cementitious materials based on the thermodynamics of irreversible processes.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 97, pp. 261–280.
- Evangelista Jr, F., J. R. Roesler e C. A. Duarte (2013b). “Two scale Approach Predict Multi-Site Cracking Potential in 3-D Structures using the Generalized Finite Element Method.” Em: *Internationsl Journal of Solids and Structures*, 50, pp. 1991–2002.
- Friderikos, O., E. Baranger e P. Ladevéze (2016). “Multiscale GFEM with Superposition of Crack Enrichment Functions Driven by Finite Fracture Mechanics: theory, first computation and open problems.” Em: *Composite Structures*,
- Gaedicke, C. e J. Roesler (2010). “Fracture-Based Method to Determine Flexural Capacity of Concrete Beams on Soil.” Em: *Road Materials and Pavement Design*, 11, pp. 361–385.
- Geers, M. G. D. (1997). *Experimental analysis and computational modelling of damage and fracture*. Technische Universiteit Eindhoven - University of Technology.: Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, p. 170. ISBN: 90-386-0379-7.
- Golmakani, M. E. e J. Rezatalab (2014). “Nonlinear bending analysis of orthotropic nanoscale plates in an elastic matrix based on nonlocal continuum mechanics.” Em: *Composite Structures*, 111, pp. 85–97.
- Gupta, V. e C. A. Duarte (2016). “On the enrichment zone size for optimal convergence rate of the Generalized/Extended Finite Element Method.” Em: *Computers and Mathematics with Applications*, 72, pp. 481–493.
- Gupta, V., C. A. Duarte, I. Babuška e U. Banerjee (2015). “Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 289, 355—386.
- Ha, K., H. Baek e K. Park (2015). “Convergence of fracture process zone size in cohesive zone.” Em: *Applied Mathematical Modelling*, 39(19), 5828—5836.
- Hillerborg, A., M. Modeer e P.E. Peterson (1976). “Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements.” Em: *Cement Concrete Research*, 6, pp. 773–782.
- Hofstetter, G. e G. Meschke (2011). *Numerical modeling of concrete cracking*. International Centre for Mechanical Sciences., p. 532. ISBN: 9873709108963.

- Huang, T e Y. X. Zhang (2016). “Numerical modelling of mechanical behaviour of engineered cementitious composites under axial tension.” Em: *Computers and Structures*, 173, pp. 95–108.
- Huang, T, N. Sukumar e J. H. Prévost (2003). “Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part II: Numerical applications.” Em: *Intenational Journal of Solids and Structures*, 40, pp. 7539–7552.
- Jirásek, M. e M. Bauer (2012). “Numerical aspects of the crack band approach.” Em: *Computers and Structures*, 110–111, pp. 60–78.
- Jirásek, M. e P. Grassl (2008). “Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 75, pp. 1921–1943.
- Kachanov, L. M. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics*. Kluwer Academic Publishers, AD Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 135. ISBN: 90-247-3319-7,90-247-2743-X.
- Kachanov, L.M. (1958). “Time of the rupture process under creep conditions.” Em: *Izv. Akad. Nauk. S.S.R. Otd. Tech. Nauk*, 8, pp. 26–31.
- Khoei, A. R. (2015). *Extended finite element method: theory and aplications*. Sharif University of Technology, Iran., p. 602. ISBN: 9781118457689.
- Kim, J. e C. A. Duarte (2015). “A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-D.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104, pp. 1139–1172.
- Kim, J., A. Simone e C. A. Duarte (2016). “Mesh refinement strategies without mapping of nonlinear solutions for the generalized and standard FEM analysis of 3-D cohesive fractures.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,
- Korelc, J. e P. Wriggers (1996). “An efficient 3-D enhanced strain element with Taylor expansion of the shape functions.” Em: *Computational Mechanics*, 19, pp. 30–40.
- Lé, B., G. Legrain e N. Moës (2017). “Mixed dimensional modeling of reinforced structures.” Em: *Finite Elements in Analysis and Design*, 128, pp. 1–18.
- Lemaitre, J. e J. L. Chaboche (1994). *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press., p. 582. ISBN: 0521328535.
- Li, Y. N. e R. Y. Liang (1992). “Stability Theory of Cohesive Crack Model.” Em: *Journal of Engineering Mechanics*, 118, pp. 587–603.



- Lin, G., X. G. Meng, A. Cornec e K. H. Schwalbe (1999). “The effect of strength mismatch on mechanical performance of weld joints.” Em: *International Journal of Fracture*, 96, 37—54.
- Lins, R. M., M. D. C. Ferreira, S. P. B. Proença e C.A. Duarte (2015). “An a-posteriori error estimator for linear elastic fracture mechanics using the stable generalized/extended finite element method.” Em: *Computational Mechanics*, 56, 947—965.
- Álvares, M. S. (1993). “Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos.” Diss. de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, p. 150.
- Mazars, J. (1984). “Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non lineaire e à la rupture du béton de structure.” Tese de doutorado. Université de Paris VI.
- Mazars, J. e G. Pijaudier-Cabot (1989). “Continuum damage theory - application to concrete.” Em: *Journal of Engineering Mechanics*, 115, pp. 345–365.
- McGregor, C., N. Zobeiry, A. Vaziri R. Poursartip e Xinran Xiao (2017). “Calibration and Validation of a Continuum Damage Mechanics Model in Aid of Axial Crush Simulation of Braided Composite Tubes.” Em: *Composites: Part A*,
- Melenk, J. M. (1995). “On Generalized Finite Element Methods”. Em:
- Melenk, J. M. e I. Babuška (1996). “The partition of unity finite element method: basic theory and applications.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 289—314.
- Meyer Jr, H. W. e R. M. Brannon (2012). “A model for statistical variation of fracture properties in a continuum mechanics code.” Em: *International Journal of Impact Engineering*, 42, pp. 48–58.
- Moreira, J. F. A. (2016). “Modelo bidimensional contínuo-descontínuo de falha para materiais quasi-frágeis em modo I e modo misto.” Diss. de mestrado. Universidade de Brasília, UnB, p. 112.
- Moreira, J. F. A. e F. Evangelista Jr. (2016). “Modelo bidimensional contínuo-descontínuo de falha para materiais quase-frágeis.” Em: *XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*,
- Moës, N. e T. Belytschko (2002). “Extended finite element method for cohesive crack growth.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 813—833.

- Moës, N., J. Dolbow e T. Belytschko (1999). “A finite element method for crack growth without remeshing.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, 131—150.
- Moteiro, A. B., A. R. V. Wolenski, F. B. Barros, R. L. da S. Pitangueira e S. S. Penna (2016). “GFEM nonlinear analysis using an elastoplastic damage constitutive model.” Em: *XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*,
- Ogden, R. W. (1997). *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, p. 546. ISBN: 0486696480,9780486696485.
- Oliver, J. (1989). “A consistent characteristic length for smeared cracking models.” Em: *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 28, pp. 461–474.
- (1995). “Continuum Modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models.” Em: *Computational Mechanics*, 17, 49—61.
- Ortiz, M. e A. Pandolfi (1999). “Finite-deformation irreversible cohesive elements for threedimensional crack-propagation analysis.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineerin*, 44, pp. 1267–1282.
- Park, K. e G. H. Paulino (2013). “Cohesive zone models: A critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces.” Em: *Applied Mechanics Reviews*, 64, pp. 1–20.
- Park, K., G. H. Paulino e J. R. Roesler (2008). “Determination of the Kink Point in the Bilinear Softening Model for Concrete.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 75, pp. 3806–3818.
- (2009). “A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture.” Em: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57, pp. 891–908.
- Peng, X., S. Kulasegaram, S. P. A. Bordas e S. C. Wu (2013). “An extended finite element method with smooth nodal stress.” Em: *Cornell University Library*,
- Perego, M. (1989). “Danneggiamento dei materiali lapidei: leggi costitutive, analisis per elementi finiti ed applicazioni.” Tese de doutorado. Tesi di Laurea, Facoltà di Ingegneria - Politecnico di Milano, Italia,
- Pereira, J., C. Duarte, X. Jiao e D. Guoy (2009a). “Generalized finite element method enrichment functions for curved singularities in 3D fracture mechanics problems.” Em: *Computational Mechanics*, 44, pp. 73–92.

- Pereira, J. P., C. A. Duarte, D. Guoy e X. Jiao (2009b). “*hp*-Generalized FEM and crack surface representation for non-planar 3-D cracks.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77, pp. 601–633.
- Pereira, L. F., J. Weerheijm e L. J. Sluys (2016). “A new rate-dependent stress-based nonlocal damage model to simulate dynamic tensile failure of quasi-brittle materials.” Em: *International Journal of Impact Engineering*, 94, pp. 83–95.
- Planas, J. e M. Elices (1992). “Asymptotic analysis of a cohesive crack: 1. Theoretical background.” Em: *International Journal of Fracture*, 55, 153—177.
- Proença, S. P. B. (2008). *Mecânica do Dano. Lecture Notes*. Universidade de São Paulo, Brasil.
- Proença, S. P. B. e I. Torres (2008). “Generalized Finite Element method for Nonlinear Three dimensional Analysis of Solids.” Em: *International Journal of Computational Methods*, 5, pp. 37–62.
- Rabotnov, Y. N. (1969). “Creep problems in structural members.” Em: *North Holland series in applied mathematics and mechanics*, 7.
- Rodrigues, E. A. (2015). “Um modelo multiescala concorrente para representar o processo de fissuração do concreto.” Diss. de mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, p. 196.
- Roesler, J. R., G. H. Paulino, K. Park e C. Gaedicke (2007a). “Concrete Fracture Prediction Using Bilinear Softening.” Em: *Cement and Concrete Composites*, 29, pp. 300–312.
- (2007b). “Fracture behavior of functionally graded concrete materials for rigid pavements.” Em: *Transportation Research Record*, 2037, pp. 40–49.
- Roth, S-N., P. Leger e A. Soulaïmani (2015). “A combined XFEM–damage mechanics approach for concrete crack propagation.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283, pp. 923–955.
- Rots, J. G., P. Nauta, G. M. A. Kusters e J. Blaauwendraadm (1985). *Smearred crack approach an fracture localization in concrete*. HERON, p. 48.
- Schlangen, E. (1993). “Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete.” Tese de doutorado. Delft University of Technology, p. 117.
- Simo, J. C. e M. S. Rifai (1990). “A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineerin*, 29, pp. 1595–1638.

- Simone, A., G. N. Wells e L. J. Sluys (2003). “From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, pp. 4581–4607.
- Smith, E. (1974). “The structure in the vicinity of a crack tip: a general theory based on the cohesive zone model.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 6, pp. 213–222.
- Strouboulis, T., I. Babuška e K. Copps (2000a). “The design and analysis of the generalized finite element method.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181, 43–69.
- Strouboulis, T., K. Copps e I. Babuška (2000b). “The Generalized Finite Element Method: an example of its implementation and illustration of its performance.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineerin*, 47, pp. 1401–1417.
- (2001). “The generalized finite element method.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 4081—4193.
- Sukumar, N., J. E. Dolbow e N. Moës (2015). “Extended finite element method in computational fracture mechanics: a retrospective examination.” Em: *International Journal of Fracture*, 196, 189—206.
- Tejchman, J. e J. Bobinski (2013). *Continuous and discontinuous modelling of fracture in concrete using FEM*. Sharif University of Technology, Iran., p. 416. ISBN: 9783642284632.
- Truesdell, C. A. (1966). *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg., p. 283. ISBN: 978-3-540-03683-8,978-3-642-64976-9.
- (1991). *A First Course in Rational Continuum Mechanics: General Concepts*. 2 Rev. Sub. Vol. v. 1, Pure and Applied Mathematics. Academic Press Inc, p. 417. ISBN: 0127013008,9780127013008.
- Tvergaard, V. e J. W. Hutchinson (1992). “The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic–plastic solids.” Em: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40, 1377—1397.
- Vandoren, B., K. de Proft e L. J. Sluys (2013). “Mesoscopic modelling of masonry using weak and strong discontinuities.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255, pp. 167–182.
- Vavrik, D. e I. Jandejsek (2014). “Experimental evaluation of contour J integral and energy dissipated in the fracture process zone.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 129, pp. 14–25.

Vree, J. H. P. de, W. A. M. Brekelmans e M. A. J. Van Gils (1995). “Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics.” Em: *Computers and Structures*, 55, pp. 581–588.

Wei, M. D., F. Dai, N. W. Xu, T. Zhao e K.W. Xia (2016). “Experimental and numerical study on the fracture process zone and fracture toughness determination for ISRM-suggested semi-circular bend rock specimen.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 154, pp. 43–56.

Wells, G. N. e L. J. Sluys (2001). “A new method for modeling cohesive cracks using finite elements.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, pp. 2667–2682.

Xie, J., A. M. Waas e M. Rassaian (2016). “Estimating the process zone length of fracture tests used in characterizing composites.” Em: *International Journal of Solids and Structures*, 100(101), pp. 111–126.

Yagawa, G. (2011). “Computational performance of Free Mesh Method applied to continuum mechanics problems.” Em: *Proc. Jpn. Acad.*, 87, pp. 135–151.