

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**OTIMIZAÇÃO EVOLUCIONÁRIA PARA PROBLEMAS DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PCI USANDO MEC**

TATIANE SANTOS LEAL DE OLIVEIRA

ORIENTADORA: Dra. Carla Tatiana Mota Anflor

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**PUBLICAÇÃO: FGA.029A / 2015
BRASÍLIA/DF: NOVEMBRO – 2015**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA.**

TATIANE SANTOS LEAL DE OLIVEIRA

**OTIMIZAÇÃO EVOLUCIONÁRIA PARA PROBLEMAS DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PCI USANDO MEC**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

Orientadora: Carla Tatiana Mota Anflor

BRASÍLIA
2015

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA.**

**OTIMIZAÇÃO EVOLUCIONÁRIA PARA PROBLEMAS DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PCI USANDO MEC**

TATIANE SANTOS LEAL DE OLIVEIRA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

APROVADA POR:

**Prof^a. Dra. Carla Tatiana Mota Anflor
(Orientadora)**

**Prof^a. Dra. Suzana Moreira Ávila
(Examinadora Interna)**

**Prof^a. Dra. Maura Angélica Milfont Shzu
(Examinadora Externa)**

BRASÍLIA, 30 NOVEMBRO DE 2015.

FICHA CATALOGRÁFICA

TATIANE SANTOS LEAL DE OLIVEIRA
OTIMIZAÇÃO EVOLUCIONÁRIA PARA PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PCI USANDO MEC, [Distrito Federal] 2015.

Nº.p.83 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2015).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade UnB Gama. Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------|
| 1. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO | 2. CIRCUITO IMPRESSO |
| 3. TRANSFERÊNCIA DE CALOR | 4. ALGORITMO GENÉTICO |
| 5. OTIMIZAÇÃO | |

I. FGA/FT/UnB

II. Título (série): Métodos Numéricos

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA, L. S. T. (2015). OTIMIZAÇÃO EVOLUCIONÁRIA PARA PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PCI USANDO MEC. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Integridade da Engenharia, Publicação Nº.029A/2015, Faculdade UnB Gama/FT/Universidade de Brasília, DF, nº.p 83.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTORA: TATIANE SANTOS LEAL DE OLIVEIRA.

TÍTULO: OTIMIZAÇÃO EVOLUCIONÁRIA PARA PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PCI USANDO MEC

GRAU: Mestre

ANO: 2015

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. A autora reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito da autora.

Tatiane Santos Leal de Oliveira
Email:tatiane.faesb@gmail.com
Brasília, DF – Brasil.

AGRADECIMENTOS

À chegada da finalização de um trabalho, não podemos de refletir de como diversas pessoas contribuíram para sua concretização direta e indiretamente.

À Professora Carla Anflor, pelas valiosas orientações, contribuições no trabalho, pelos "apertos" fundamentais, pela paciência em trabalhar as minhas limitações. Meu sincero reconhecimento e grande estima. Mais do que uma orientadora, uma referência de profissional. E o aprendizado que levarei para toda minha vida. "*No pain, no gain*".

Ao Professor Jhon Goulart pelas palavras de incentivo, que me mostrou que os ideais podem ser tornarem reais com dedicação e estudo.

Em especial aos professores Eder Albuquerque e Marcus Girão.

À banca avaliadora desta dissertação composta por: Prof^a. Dra. Maura Angélica Milfont Shzu e Prof^a. Dra. Suzana Moreira Ávila pela orientação e contribuição no enriquecimento deste trabalho.

Ao Grupo de Mecânica Experimental e Computacional (GMEC), mais do que isso: uma família. Como me senti acolhida e pude aprender tanto, muito obrigada, Gmequianos! Ao Adrian, que com certeza, ainda encontrará os "Cavalheiros do Zodíaco".

Ao Dalmo, por sua ajuda de tamanha importância no início da pesquisa.

Em especial meu amigo Niécio Júnior. Palavras não seriam suficientes para representar o tamanho da minha gratidão, por toda ajuda, amizade e disposição, mesmo almoçando às 18 horas da tarde,rs. As palavras de incentivo nos momentos mais difíceis. Meu fiel reconhecimento, respeito, amizade, tornando-se parte de minha família. " O importante na vida é ter com quem contar".

Ao Matheus Oberg, meu sincero reconhecimento pela valiosa contribuição neste trabalho.

Ao Tiago Melo (todo respeito o "cara" agora é Msc. Sr^o. Professor...rs), meu amigo-irmão, pelo incentivo, ajuda e momentos de descontração, fazendo-me acreditar que tudo poderia dar certo.

Ao Neto, pelo amor dedicado, apoio e ajuda.

À Ge Resende, Mariza Miranda, pela amizade e ajuda para o ingresso ao mestrado.

À Gabriela Cristiana, minha amada: pela amizade, palavras de incentivo, orações e ter me apresentado o Programa de Pós-Graduação.

À Mariane, Anna Paula, Adenilza, Ingrid Marise, Ana Paula, Divânia, Thagiane, Delma, Alessandra, Miéle, Angélica, Sandra Cristina, Renata, Fernanda, Ludimylla, Cora Coralina e Efigênia pessoas amadas, lindas do meu coração. Obrigada por me incentivar, torcida para que tudo pudesse desse certo. " O que vale na vida não é o que você tem na vida, e sim quem você tem em sua vida".

À Subsecretaria Regional Novo Gama, pelas pessoas queridas em nome de: Maria da Guia e Débora Carvalho, minha admiração e amizade.

À Coordenação de Diversidade (CODIV/GDF), pessoas amadas, que cumprimento em nome do meu amigo Flavio Brebis, muitíssimo obrigada.

À Faculdade de Ensino Superior do Brasil (FAESB), pela compreensão na etapa final deste trabalho. E com muita saudade de Ainoã Vieira (*in memoriam*), boas lembranças de uma grande amizade.

À Equipe do Colégio Estadual Marajó (CEMA), obrigada por terem "segurado às pontas", nas minhas ausências.

À família Amorim, por todo apoio.

Às minhas filhas, Bruna e Thaís, perdão pelas minhas ausências, muitas vezes até mesmo estando presente. Como mamãe sente isso e sofreu com isso. Mas não foi só por mim, também por vocês, um dia vocês irão entender tudo isto. “[...]. Vocês são a escada da minha subida, vocês são o amor da minha vida, são meu abrir de olhos no amanhecer, verdade que me leva a viver [...]”. “[...]. Meu riso é tão feliz contigo, meu melhor amigo é o meu amor [...] seus olhos meu clarão meu guiam dentro da escuridão, seus pés me abrem o caminho, eu sigo e nunca me sinto só [...]”

À minha mãe Dinalva Santos, obrigada por cuidar de minha casa e minhas filhas pelo tempo que pode, pelo incentivo que sempre tive para estudar e procurar fazer o melhor pela família dentro de suas poucas condições, pela educação que me deu, por toda dedicação. Amor incondicional! Meus irmãos Hélio Santos e Rose Santos ...amo vocês!

À Tia Alaíde Aguiar, pois quando olho para trás, não poderia deixar de ter gratidão. Saudades...

Tudo posso, Naquele que me fortalece. (Filipenses 4:13)

Dedico este trabalho, à mãe Dinalva e minhas filhas Bruna e Thaís.

Podemos escolher recuar em direção à segurança ou avançar em direção ao crescimento. A opção pelo crescimento tem que ser feita repetidas vezes. E o medo tem que ser superado a cada momento.

(Abraham Maslow)

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre o desenvolvimento de um procedimento de otimização para controlar o fluxo térmico de uma placa de circuito impresso (PCI) em meio de materiais isotrópico e anisotrópico. Neste sentido, os esforços se baseiam em maximizar o fluxo de calor para determinar a configuração mais eficaz, quanto possível, para a distribuição gradiente dentro da PCI. O Método dos elementos de contorno (MEC) foi empregado para resolver a equação diferencial governante para problemas potenciais. O algoritmo genético (AG) foi utilizado como método de busca da solução ótima para determinar o caminho otimizado de transferência de calor, quando se considera inclusões retangulares rotacionáveis com baixa condução dentro da matriz. Alguns exemplos numéricos são estudados a fim de validar a metodologia apresentada.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Circuito Impresso, Transferência de Calor, Algoritmo Genético, Otimização.

ABSTRACT

This work presents a study regarding to the development of an optimization procedure in order to control the thermal heat flux of a printed circuit board for isotropic and anisotropic medium. In this sense, the efforts are based on maximizing the heat flux for determining the best configuration, as possible as, for the inside gradient distribution of the (PCB). The boundary element method (BEM) was employed for solving the governing differential equation for potential problems. The genetic algorithm (GA) was chosen as a search method of the optimal solution for determining the heat transfer optimized path, when rotational rectangular inclusions with low conductive are considered inside the matrix. Some numerical examples are studied in order to validate the proposed methodology.

Keywords: Boundary Element Method, Printed Circuited Board, Heat transfer, Genetic Algorithm, Optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Detalhamento de malha: a) MEC; b) MEF	20
Figura 1.2 Exemplo de PCI.....	21
Figura 2.1 - Distância entre o ponto fonte e o ponto campo.	29
Figura 2.2 - Posições dos pontos fonte e campo.	31
Figura 2.3 - Discretização da geometria de elementos quadráticos	33
Figura 2.4 - Funções de forma quadráticas contínuas.....	34
Figura 3.1 Método Gradiente Conjugado- Mateus et al. (1986).....	42
Figura 3.2 - Ramificações da Computação Natural-Olivieri (2004).....	43
Figura 3.3 Pseudocódigo de ACO- Corloni.....	44
Figura 3.4 - Representação do algoritmo de abelhas- Borchers (1994)	45
Figura 3.5- Pseudo código para o CAA	45
Figura 3.6 -Estrutura AG- Computação Evolutiva- Michalewicz (1997)	47
Figura 4.1 - Pseudo-código para um AG simples.	49
Figura 4.2 Estrutura Básica AG	51
Figura 4.3 - Cruzamento uniponto - Geradores	53
Figura 5.1 - Modelo implementado no ModeFRONTIER	57
Figura 5.2 - Fluxograma do NSGA-II. Fonte: Sommer (2010).....	59
Figura 6.1 Detalhe das condições de contorno e <i>layout inicial</i> da PCI	60
Figura 6.2 - Rotina do Algoritmo Genético associado ao MEC.....	61
Figura 6.3 – Condição de contorno para o caso 1.	62
Figura 6.4 - Iteração 1 - Evolução do fluxo de calor. Aresta $A= 131.29 \text{ W/m}^2$,	63
Figura 6.5 -Iteração 50- Evolução do fluxo de calor. Aresta $A= 127.48 \text{ W/m}^2$, B= 282.76 W/m^2 e C= 139.25 W/m^2	63

Figura 6.6 - iteração 100 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 128.61 W/m ² , B= 281.85 W/m ² e C= 129.95 W/m ²	64
Figura 6.7 - Iteração 150 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 128.28 W/m ² , B= 281.81 W/m ² e C= 125.65 W/m ²	64
Figura 6.8 - Iteração 200 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 133.34 W/m ² ,	65
Figura 6.9 - Iteração 250 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 137.30 W/m ² ,	65
Figura 6.10 - Iteração 300 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 137.73 W/m ² ,	66
Figura 6.11 - Iteração 350 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 130.69 W/m ² ,	66
Figura 6.12 - Iteração 400 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 144.08 W/m ² ,	67
Figura 6.13- Iteração 495- Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 140.92 W/m ² ,	67
Figura 6.14 – Evolução dos fluxos de calor para as arestas A, B e C.	68
Figura 6.15- Condição de contorno para o caso 2.	69
Figura 6.16 - Iteração 1 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 201.67 W/m ² ,	70
Figura 6.17 - Iteração 50 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A=193.28W/m ² , B= 413.56 W/m ² e C= 140.07 W/m ²	70
Figura 6.18 - Iteração 100- Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 199.90 W/m ² , B=405.28 W/m ² e C= 127.09 W/m ²	71
Figura 6.19 - Iteração150- Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 203.38 W/m ² ,	71
Figura 6.20 - Iteração 200-Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 223.85 W/m ² ,	72

Figura 6.21 - Iteração 250 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 204.90 W/m ² ,.....	72
Figura 6.22 - Iteração 300 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 204.72 W/m ² ,.....	73
Figura 6.23 - Iteração 350 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 207.51 W/m ² ,.....	73
Figura 6.24 - Iteração 400 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 202.98 W/m ² ,.....	74
Figura 6.25 -Iteração 471- Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 206.16 W/m ² ,.....	74
Figura 6.26 - Evolução dos fluxos para as arestas A, B e C.....	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Termos básicos da genética ligados aos AGs	50
Tabela 2 - Comparação dos AG com os métodos clássicos.....	50
Tabela 3 - Comparativo entre NSGA e NSGA II	58
Tabela 4 - Parâmetros para otimização	62

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Ω	Domínio do problema
Γ	Contorno do domínio
ξ	Ponto Fonte
δ	Delta de Dirac
k	Condutividade térmica
k_{xx}	Condutividade térmica na direção x
k_{yy}	Condutividade térmica na direção y
k_{xy}	Condutividade térmica na direção xy
k_1	Condutividade do material
k_2	Condutividade do furo
Δq	Variação do fluxo
∇^2	Operador Laplaciano
∂	Derivada Parcial
x_d, y_d	Coordenadas do ponto fonte
$\vec{\nabla}$	Operador Gradiente
∇	Vetor Gradiente
*	Solução fundamental
\rightarrow	Vetor
MEC	Método dos Elementos de contorno
MEF	Método dos Elementos finitos
MDF	Método das Diferenças finitas

PCI	Placas de Circuito Impresso
AG	Algoritmo Genético
ACO	Ant Colony Optimization- Otimização por Colônia de Formigas
TSP	Traveling Salesman Problem- Problema Caixeiro Viajante
CAA	Colônia Artificial de Abelhas
RNA	Redes Neurais Artificiais
CAE	Computer Aided Engineering
CAD	Computer Aided Designer
FNS	Nondominated Sorting
CDA	Crowding Distance Assignment
VEGA	Vector Evaluated Genetic Algorithm
MOGA	Multiple Objective Genetic Algorithm
NSGA	Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm
NSGA II	Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	19
	1.1 Revisão bibliográfica	22
	1.2 Objetivos do trabalho	25
	1.3 Organização do texto	26
2	O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	27
	2.1 Problemas de condução de calor	28
	2.2 Solução fundamental para a Equação de Laplace	28
	2.3 Elementos Quadráticos Contínuos	33
	2.4 Métodos dos Elementos de Contorno para problemas potenciais	35
3	OTIMIZAÇÃO.....	38
	3.1 Programação linear	38
	3.1.1 Simplex	39
	3.2 Programação não linear	39
	3.2.1 Métodos determinísticos	39
	3.2.2 Gradiente	40
	3.2.3 Gradiente Conjugado.....	41
	3.3 Não Determinísticos	42
	3.3.1 Formigas.....	43
	3.3.2 Abelhas.....	44
	3.4 Redes Neurais Artificiais	45
	3.5 Computação Evolutiva	46
4	ALGORITMO GÉNÉTICO EVOLUCIONÁRIOS.....	48
	4.1 Representação	51
	4.2 População Inicial	52
	4.3 Função de Aptidão	52
	4.4 Seleção	53
	4.5 Cruzamento.....	53
	4.6 Mutação	54

4.7	Próxima geração	54
5	OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO	55
5.1	ModeFRONTIER na otimização por Algoritmos Genéticos	56
5.1.1	AG NSGA-II (Elitist Non- Dominated Sorting Algorithm)	57
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	60
6.1	Caso 1: Matriz isotrópica	62
6.2	Caso 2: Matriz anisotrópica	68
7	CONCLUSÃO	76
7.1	Proposta de continuidade	77
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78

1 INTRODUÇÃO

Problemas de otimização são tratados diversas áreas. Na engenharia, a otimização aplica-se também ao comportamento térmico de materiais em meios isotrópicos e anisotrópicos. O principal esforço concentra-se no desenvolvimento de materiais com propriedades físicas e químicas que sejam precisas e confiáveis através da aplicação de técnicas de otimização por meio de métodos numéricos.

Dentre os materiais compósitos podemos citar as Placas de Circuito Impresso (PCI), as quais são amplamente empregadas em todos os tipos de equipamentos eletrônicos, e necessitam atenção ao controle do fluxo da temperatura para garantir sua funcionalidade e desempenho.

A análise numérica pode ser definida como a criação de um processo numérico a partir da busca de resultados por meio de problemas modelados matematicamente. Este processo pode ser definido a partir de um modelo numérico discretizado, reduzindo um problema físico, com um número infinito de incógnitas, a um problema discreto com um número finito de incógnitas. Na literatura as técnicas numéricas mais difundidas são: o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O MDF é um dos primeiros métodos numéricos desenvolvidos, o qual consiste na técnica para cálculo de derivadas parciais presentes nas equações diferenciais por meio de aproximações das derivadas por diferenças finitas.

O MEF tem como principal característica a divisão do domínio em uma série de elementos de geometria, ou seja, discretiza-se todo o domínio (volume).

O MEC transforma as equações diferenciais em equações integrais de contorno o que faz com que apenas a variáveis sobre o contorno sejam consideradas. Neste sentido a quantidade de incógnitas do problema é reduzida.

Devido à característica do MEC considerar apenas o contorno faz com que esta metodologia seja vantajosa quando comparadas com outros métodos (MEF e MDF) para problemas de otimização.

Em casos de otimização um controle rigoroso de malha é necessário para verificar a convergência da solução, o que eleva o custo computacional de maneira considerável segundo Guoquan et al. (2014). Outro fator importante refere-se ao sistema matricial, que devido ser muito menor do que aquele gerado pelo MEF, resulta em uma considerável redução do custo computacional em problemas de otimização. Apesar das vantagens do MEC para problemas de otimização, o MEF ainda é mais amplamente empregado, pois a formulação de MEC é mais complexa.

Os processos de otimização são aplicados a diversos tipos de problemas das mais variadas formas possíveis. Um dos processos de otimização amplamente aplicados na engenharia referem-se à otimização de forma ou de topologia. O objetivo principal de um processo de otimização de forma ou topológica, está diretamente associado à correta obtenção da geometria otimizada. De acordo com Anflor (2007) o MEC se insere neste contexto como um método particularmente atrativo para esses problemas, uma vez que não há necessidade de geração e gerenciamento de malhas internas.

A discretização ocorre apenas na superfície do contorno do problema. Além disso, o MEC gera menos operações numéricas, com a maior economia de esforço computacional, como podemos observar na Figura 1.1.

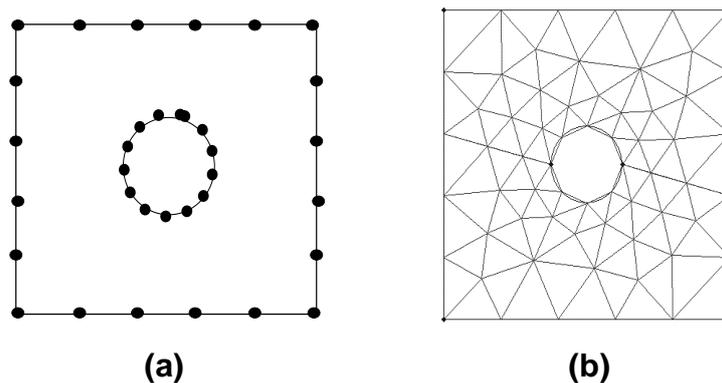


Figura 1.1 - Detalhamento de malha: a) MEC; b) MEF

Diversos pesquisadores têm devotado seus esforços no estudo do aumento da eficiência térmica de componentes eletrônicos, os quais podem ser realizados através de técnicas numéricas ou experimentais, segundo Andonova (2009). Problemas de condução de calor tornam-se evidentes nos dispositivos eletrônicos, devido ao design dos produtos, componentes são reduzidos causando dificuldade na transferência do fluxo de calor. As PCI's podem apresentar pontos de elevada temperatura, danificando ou alterando a funcionalidade dos microcomponentes eletrônicos.

Conforme já mencionado, a tendência de miniaturização de eletrônicos algumas configurações de circuitos apresentam dispositivos com elevada dissipação de potência, o que resulta sérios problemas no desempenho do produto. O conhecimento dos limites dos campos de temperatura e de fluxo térmico, dentro de uma placa de circuito impresso (PCI) são cruciais para as tomadas de decisão na melhora de um projeto. A Figura 1.2 ilustra um exemplo de uma típica PCI.

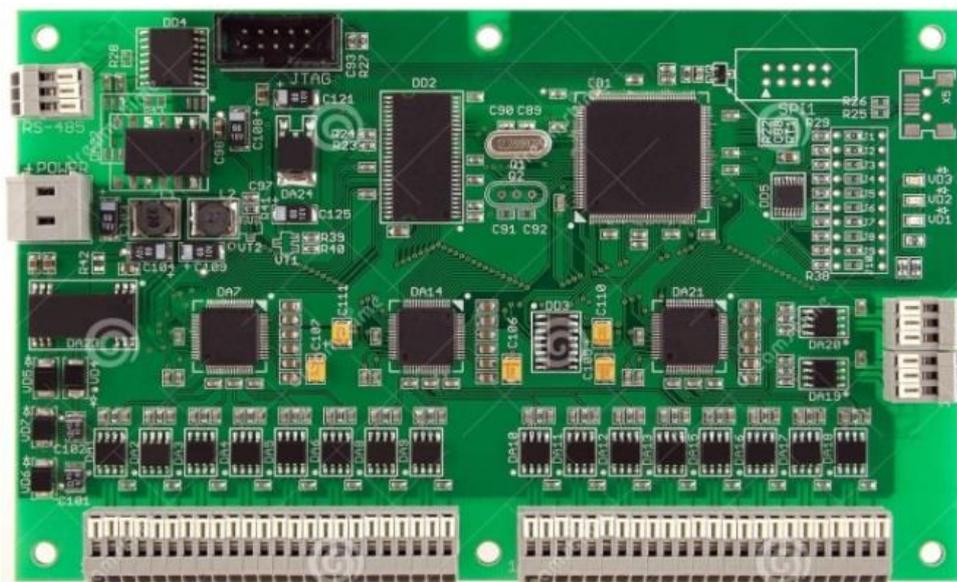


Figura 1.2 Exemplo de PCI

Ante ao exposto, este trabalho consiste em analisar o comportamento do campo de fluxo de temperatura em PCI, a partir de materiais em meios isotrópicos e anisotrópicos, onde o MEC foi utilizado como método numérico para a solução das equações diferenciais que regem o problema.

Para o processo de otimização, o método de convergência que será adotado para solução do problema no presente trabalho é o “*Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm*” mais conhecido como NSGA II. O algoritmo escolhido calcula uma função multiobjetivo em que implementa o conceito de Dominância classificando a população total e dividindo os indivíduos em diferentes níveis através deste critério. Utilizando tal formulação os melhores indivíduos são armazenados nas iterações enquanto que os piores são excluídos. Este trabalho tem como pesquisa, estudar a melhor configuração espacial das fibras internas de uma PCI manufaturada em matriz de comportamento isotrópico e anisotrópico para o controle do fluxo térmico, visando amenizar os problemas relacionados à transferência de calor, empregando o MEC acoplado ao Algoritmo Genético (AG) pelo processo do NSGA II.

1.1 Revisão bibliográfica

O Método de Elementos de Contorno (MEC) é uma técnica numérica utilizada para a solução de diversos tipos de problemas, entre eles os potenciais. A aproximação da solução é realizada apenas no contorno do domínio associado a equação governante sempre que a solução fundamental da equação diferencial é conhecida. O uso de malhas no interior domínio de solução é desnecessário e as informações dentro do domínio podem ser calculadas em um pós-processamento a partir do conhecimento de todas as incógnitas do contorno. Devido a esta particularidade, o MEC apresenta maior facilidade em geração da malha e remalhamento quando considerando problemas em que a geometria é alterada iterativamente.

O MEC é aplicado para a solução de diversos problemas da engenharia, como por exemplo, problemas potenciais, elastoestática, viscoplasticidade, análise de fraturas, interação fluido-estrutura, elastodinâmica, entre outros. Pode-se citar algumas literaturas clássicas e publicações pertinentes, a título de ilustração, que

abordam a aplicação do MEC a todas estas classes de problemas com em Brebbia (1984), Brebbia et al. (1984), Brebbia e Venturini (1987), Venturini (1988), Hesebe e Wang (2002). De acordo Perez & Wrobel (1996), os primeiros estudos sobre anisotropia tiveram início com o trabalho de Green (1943), que apresentou a solução fundamental anisotrópicas para problemas bidimensionais, e foi utilizada por: Rizzo & Shiipy (1970) e Benjumea & Sikaskie (1972), Barnett (1972), apresentaram formulações do método utilizando a solução fundamental anisotrópicas com variáveis complexas. Nos problemas tridimensionais os primeiros trabalhos são de Vogel & Rizzo (1973) (apud Perez & Wrobel, 1996), com apresentações de formulações fundamentais anisotrópicas.

Inúmeros pesquisadores aplicaram o MEC na solução de problemas de otimização devido as suas particularidades, como independência de malha e variáveis apenas no contorno. Alguns trabalhos pertinentes à aplicação do MEC e otimização empregando AG merecem destaque e suas contribuições serão apresentadas na sequência. Os AGs são baseados no princípio Darwiniano de evolução das espécies, que podem ser aplicados na resolução de diversas classes de problemas. Este princípio imitado na construção de algoritmos computacionais, que buscam desenvolver soluções codificadas via cromossomos artificiais.

Suveges (2014) apresenta um problema inverso de detecção de danos em estruturas. Os parâmetros geométricos do dano foram identificados com precisão considerável em diferentes posições da placa mostrando a eficiência e robustez por meio da resolução via MEC, associado a heurística de otimização global Evolução Diferencial (ED).

Mundstock (2008) demonstra a estratégia de otimização de forma, com cálculo de sensibilidade para estruturas elásticas bidimensionais utilizando MEC. Neste trabalho, foram utilizadas variáveis complexas para a obtenção das derivadas da função custo do problema da otimização. Os resultados obtidos demonstraram boa precisão e independência do tamanho da perturbação utilizada.

Amaral (2004) apresenta análise numérica para otimização de forma de estruturas contínuas bidimensionais com técnicas de programação não linear. O MEC+AG foi aplicado para o cálculo das tensões e deslocamentos nas estruturas.

Os exemplos numéricos são apresentados validando a metodologia proposta, com a uniformização da distribuição de tensões no contorno.

Ferreira (2012) apresenta formulações que acoplam o MEC+AG, na resolução de problemas inversos de elasticidade plana, com a minimização e regularização de deslocamentos. Experimentalmente foi adotada a técnica de correlação de imagens (CID). Os problemas foram analisados em laboratório, para obtenção dos campos de deslocamentos via CID, e tais resultados utilizados para a implementação numérica.

A análise numérica foi capaz de resolver problemas de interesse da engenharia de estruturas (estimativa de propriedades de materiais, problema inverso de valor de contorno, estimativa dos parâmetros do modelo coesivo de fraturamento), os resultados mostram a eficiência da metodologia empregada para a solução para problemas inversos de elasticidade, via MEC.

Bueno (2012) apresenta a análise inversa com a associação de AG e MEC para a localização de tumores de pele em 3D. Neste trabalho é realizada uma análise de distribuição de temperatura medida na superfície da pele. O objetivo consiste na localização e na definição do tamanho do tumor através da elevação do campo de temperatura. Os resultados demonstraram que a utilização do MEC foi uma ferramenta viável para a solução do problema estudado.

Koito et al. (2013) aplicaram folhas de metais como vias térmicas para melhorar a condutividade térmica em placas de circuito impresso. O trabalho descreve uma análise numérica da PCI tendo vias metálicas e foca nas características da transferência de calor sob condições de calor não-isotérmicas. A discussão também se concentra na condutividade térmica efetiva. Segundo os autores a condutividade térmica efetiva é importante porque possibilita modelar uma placa compósita como um meio homogêneo. Por meio dos resultados numéricos os autores puderam confirmar que as localizações das vias de metal afetam fortemente as características da transferência de calor. Foi verificado que a condutividade térmica efetiva da PCB é a mesma tanto para condições de contorno isotérmicas ou não isotérmicas.

Dede (2010) apresentou um estudo voltado para o controle do fluxo de calor dentro de um material compósito com condutividade térmica anisotrópica em placas

de Circuito Impresso (PCB), demonstrando a vantagem do processo de otimização. As simulações de transferência de calor indicaram a redução substancial da resistência térmica.

Anflor et al. (2014) realizaram uma análise de sensibilidade usando derivadas topológicas. O processo de otimização topológica foi aplicado em placas de circuito impresso (PCIs) com comportamento anisotrópico considerando múltiplos domínios. O MEC foi o método numérico empregado para a solução dos campos de fluxo e temperatura na análise de sensibilidade do domínio. A partir de inserção de um segundo material, de maior valor de condutividade térmica do que o da matriz, o procedimento de otimização mostrou-se ser eficaz resultando em um problema de calor com alto desempenho.

A partir desta revisão bibliográfica foi possível elencar a importância do MEC adotada neste trabalho e da otimização aplicada a diversas áreas da engenharia, principalmente a problemas de transferência de calor.

1.2 Objetivos do trabalho

Este trabalho tem como objetivo, utilizar o MEC+AG para projetar um aumento da eficiência da transferência do fluxo de calor em materiais de comportamento isotrópicos e anisotrópicos, considerando uma Placa de Circuito Impresso (PCI) com furos retangulares. A formulação do código permite a inserção de furos com ângulos distintos, que são os parâmetros a serem otimizados por meio do controle de fluxo térmico. É objeto de interesse neste estudo, buscar a melhor configuração espacial das fibras internas de uma PCI manufaturada, visando amenizar os problemas relacionados à transferência de calor.

As análises são aplicadas a problemas potenciais em regime de condução térmica estacionária, onde as equações diferenciais são resolvidas numericamente pelo Método de Elementos de Contorno acoplado ao Algoritmo Genético, para o processo de otimização.

1.3 Organização do texto

A dissertação está dividida em nove capítulos da seguinte forma:

- ✓ **Capítulo 1:** neste capítulo é apresentada a introdução com suas considerações iniciais, a revisão bibliográfica dos trabalhos relevantes sobre o método dos Elementos de Contorno e suas aplicações, nas diversas áreas da engenharia, como também para problemas potenciais e de otimização. Bem como esta organização do texto e os objetivos do trabalho.
- ✓ **Capítulo 2:** são apresentados os conceitos para a formulação do método dos Elementos de Contorno aplicados a problemas de condução de calor; a solução fundamental da Equação de Laplace, e o equacionamento da formulação do MEC para elementos quadráticos contínuos e sub-regiões estão presentes neste capítulo;
- ✓ **Capítulo 3:** são tratados os tópicos referentes à otimização para o entendimento de conceitos e comportamento de problemas desta natureza.
- ✓ **Capítulo 4:** são apresentados os algoritmos evolucionários.
- ✓ **Capítulo 5:** neste capítulo a descrição das ferramentas utilizadas na implementação numérica são apresentadas.
- ✓ **Capítulo 6:** são apresentados os resultados numéricos dos casos das matrizes isotrópicas e anisotrópicas.
- ✓ **Capítulo 7:** as conclusões e a proposta de continuidade são apresentadas.

2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é baseado matematicamente, na transformação da equação diferencial que rege um determinado problema em uma equação integral. É uma técnica numérica utilizada para a solução de problemas potenciais, onde a aproximação da solução é realizada apenas no contorno do domínio associado à equação governante, dispensando o uso de malhas no interior do domínio de solução. Através do método dos resíduos ponderados é possível a obtenção de equações integrais necessárias à formulação do MEC. O conhecimento da solução fundamental da equação diferencial empregada no MEC é de fundamental importância. A solução fundamental é empregada como função peso no método dos resíduos ponderados, o que faz com que a integral de domínio seja satisfeita restando apenas os termos integrais de contorno. Isto permite que a discretização do MEC ocorra apenas na superfície do contorno do problema. Apesar da formulação do MEC ser consideravelmente complexa, quando comparada com outros métodos numéricos, a redução em uma dimensão (se 2D para 1D, e se 3D para 2D) do problema é extremamente atrativa.

O MEC por suas características atrativas vem despertando o interesse da comunidade científica para que as dificuldades matemáticas pertinentes ao método sejam solucionadas. O MEC, por exemplo, não apresenta malha em seu domínio. Para solucionar problemas com forças de corpo, técnicas matemáticas que permitem transformar uma integral de domínio em uma de contorno equivalente tiveram que ser desenvolvidas. Algumas destas técnicas são o Método da Reciprocidade Dual (DRM) e o Método da Integração Radial (MIR). Ante ao exposto é possível avaliar a importância do método e as inúmeras possibilidades de desenvolvimento por parte dos pesquisadores.

A metodologia para o MEC será apresentada aqui para problemas potenciais, mais especificamente para problemas de transferência de calor. No entanto, o mesmo procedimento pode ser estendido a outras classes de problemas como, por exemplo elasticidade.

2.1 Problemas de condução de calor

A equação governante para problemas de condução de calor é a de Laplace, a qual é deduzida e discretizada para a formulação do MEC. Três tipos de elementos são considerados: elementos constantes, elementos lineares e elementos quadráticos. Na discretização utilizando elementos constantes, a geometria é aproximada por segmentos de retas com um nó no meio de cada elemento. Os elementos de contorno lineares, a discretização da geometria é aproximada por uma função de forma que é um polinômio do 1º grau, necessitando de dois nós em cada elemento. Outro tipo de elemento é o quadrático, cuja a discretização da geometria é aproximada por uma função de forma quadrática ao longo de cada elemento, sendo necessários três pontos nodais por elemento.

O uso de elementos quadráticos é mais vantajoso, pois aumenta a precisão dos resultados e diminui o número de elementos na discretização. Como resultado, o custo computacional é melhorado significativamente. Na sequência, é deduzida uma formulação de elementos de contorno, onde todas as integrais são calculadas analiticamente. Neste trabalho, foram considerados elementos quadráticos contínuos.

2.2 Solução fundamental para a Equação de Laplace

A solução fundamental, que é base da formulação do MEC, para a equação de Laplace, corresponde à resposta da temperatura em um meio infinito quando a fonte de geração de calor é concentrada em um ponto. Matematicamente, corresponde a solução particular de Fourier quando o termo não homogêneo é igual ao delta Dirac, ou seja, conforme a Eq. (2.2.1).

$$\nabla^2 T^* = -\frac{\delta(x-x_d, y-y_d)}{k} \quad (2.2.1)$$

Uma função que satisfaz a Eq. (2.2.1) é demonstrada pela Eq. (2.2.2).

$$T^* = A \ln r \quad (2.2.2)$$

Em que r é a distância entre o ponto onde a fonte de calor é aplicada e o ponto onde a temperatura é medida, e A é uma constante a se determinar.

Sem perder a generalidade, consideremos o sistema de coordenadas com origem no ponto fonte, conforme a Figura 2.1, através das Eq. (2.2.3), (2.2.4) e (2.2.5) pode-se observar as formulações de raio, temperatura e fluxo.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.2.3)$$

Como:

$$T^* = A \ln r \quad (2.2.4)$$

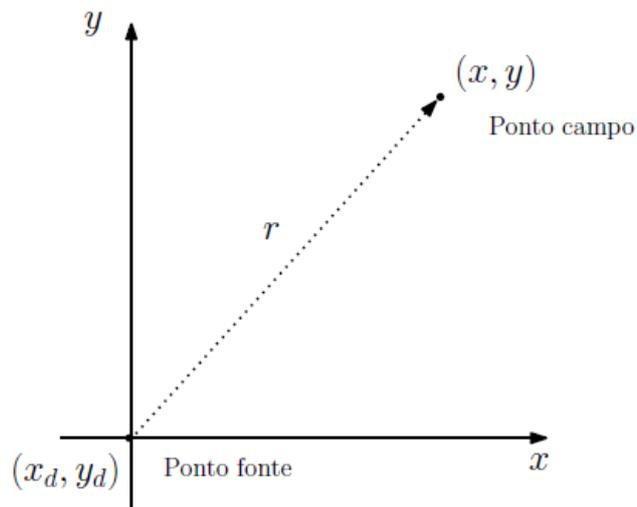


Figura 2.1 - Distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = A \frac{\partial(\ln)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (2.2.5)$$

Calculando o termo, temos nas Eq. (2.2.6) e (2.2.7).

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \frac{\partial r}{\partial x} \quad (2.2.6)$$

Assim,

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = A \frac{1}{r} \frac{x}{r} = \frac{Ax}{r^2} \quad (2.2.7)$$

Podemos mostrar da mesma forma, nas Eq. (2.2.8), (2.2.9) e (2.2.10).

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = \frac{A}{r^2} - 2 \frac{Ax^2}{r^4} \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{Ay}{r^2} \quad (2.2.9)$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} = \frac{A}{r^2} - 2 \frac{Ay^2}{r^4} \quad (2.2.10)$$

Continuamos na Eq. (2.2.11) que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} &= A \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} \right), \\ \nabla^2 T^* &= 2A \underbrace{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{x^2 + y^2}{r^4} \right)}_{\delta(x-0)} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Como $\nabla^2 T^* = 0$ para qualquer ponto exceto o ponto de aplicação da fonte, segue conforme Eq. (2.2.12).

$$\nabla^2 T^* = 2A\delta(x-0) \quad (2.2.12)$$

Igualando as Equações (2.2.1) e (2.2.11), com $(x_d, y_d) = (0, 0)$, temos a Eq.(2.2.13).

$$-\frac{\delta(x-0)}{k} = 2A\delta(x-0) \Rightarrow 2A = -\frac{1}{k} \quad (2.2.13)$$

Obtemos o valor de A, dado de acordo com a Eq. (2.2.14).

$$A = -\frac{1}{2k} \quad (2.2.14)$$

Substituindo o valor de A na equação (2.2.2), segue que:

$$T^* = \frac{-1}{2k} \ln r \quad (2.2.15)$$

Para obtermos uma formulação numérica genericamente melhor, consideremos a Eq.(2.2.16), a qual é a solução fundamental para a temperatura.

$$T^* = \frac{-1}{2\pi k} \ln r \quad (2.2.16)$$

Considerando que o sistema de referência Figura 2.2 tem origem em uma posição qualquer, r é dado pela Eq. (2.2.17). Onde (x_d, y_d) são coordenadas do ponto fonte.

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \quad (2.2.17)$$

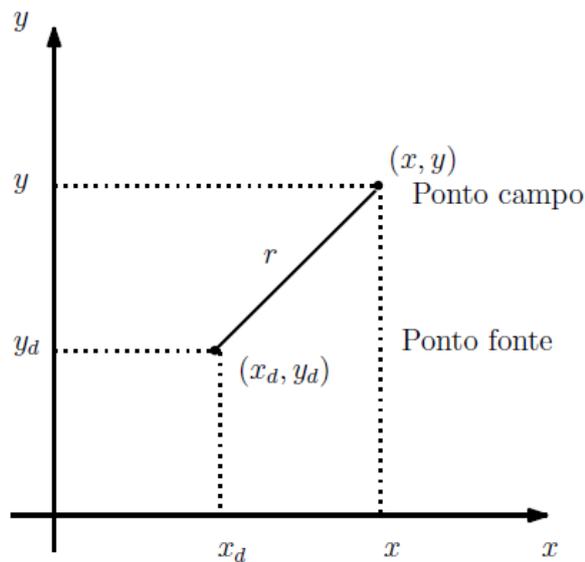


Figura 2.2 - Posições dos pontos fonte e campo.

Uma vez conhecida a solução fundamental para a temperatura define-se fluxo de calor através do contorno pela expressão na Eq.(2.2.18).

$$q = \overline{q \cdot \vec{n}} \quad (2.2.18)$$

Onde q é a quantidade de calor que passa através do contorno por unidade de tempo e por unidade de área. Substituindo na Eq. (2.2.18) o valor de \vec{q} é dado pela equação (2.2.19).

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (2.2.19)$$

Obtém-se a Eq. (2.2.20) e (2.2.21).

$$q = \vec{q} \cdot \vec{n} = -k \vec{\nabla} \dots T \vec{n} \quad (2.2.20)$$

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.2.21)$$

Onde $\frac{\partial T}{\partial n}$ é a derivada da temperatura na direção do vetor normal ao contorno \vec{n} . Dessa forma, é possível definir a solução fundamental para o fluxo de calor dado pela Eq. (2.2.22).

$$q^* = k \frac{\partial T^*}{\partial n} \quad (2.2.22)$$

Substituindo na Eq. (2.2.22) o valor dado de T^* dado pela Eq. (2.2.16), seguem as Equações (2.2.23) e (2.2.24).

$$q^* = -k \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{2\pi k} \ln r \right) \quad (2.2.23)$$

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\ln r) n_x + \frac{\partial}{\partial y} (\ln r) n_y \right] \quad (2.2.24)$$

Calculando o termo $\frac{\partial}{\partial x} (\ln r)$, obtém-se a Eq. (2.2.25).

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ln r) = \frac{\partial}{\partial x} (\ln r) = \frac{\partial \ln r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (2.2.25)$$

Substituindo na equação (2.2.25) o valor de r dado pela Eq. (2.2.17), tem-se a Eq. (2.2.26).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\ln r) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[(x-x_d)^2 + (y-y_d)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\
&= \frac{1}{r} \frac{(x-x_d)}{\left[(x-x_d)^2 + (y-y_d)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \\
&= \frac{1}{r} \frac{(x-x_d)}{r}, \\
\frac{\partial}{\partial x}(\ln r) &= \frac{x-x_d}{r^2}
\end{aligned}
\tag{2.2.26}$$

De modo análogo, temos, a Eq. (2.2.27):

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ln r) = \frac{y-y_d}{r^2}
\tag{2.2.27}$$

Substituindo a Eq. (2.2.26) e a Eq. (2.2.27) na Eq. (24), obtemos a Eq. (2.2.28), que é a solução fundamental do fluxo.

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} \left[(x-x_d)n_x + (y-y_d)n_y \right]
\tag{2.2.28}$$

2.3 Elementos Quadráticos Contínuos

Na discretização utilizando elementos quadráticos a geometria é aproximada por uma função quadrática ao longo de cada elemento, sendo necessários três pontos nodais por elemento conforme mostrada na Figura 2.3.

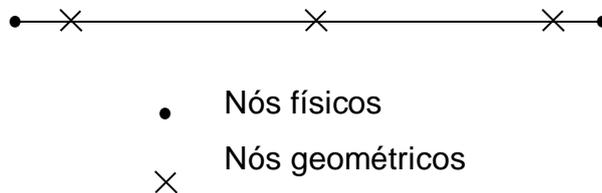


Figura 2.3 - Discretização da geometria de elementos quadráticos

Os elementos de contorno Γ_i são considerados parabólicos, ou seja, são descritos por polinômios de 2ª ordem (equação de uma parábola). Desta forma são

necessários 3 pontos de Γ_i para que uma parábola seja definida. Estes pontos são dados por $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3) , que correspondem respectivamente às coordenadas intrínsecas $\xi = -1, \xi = 0$ e $\xi = 1$, conforme ilustrado na Figura 2.4.

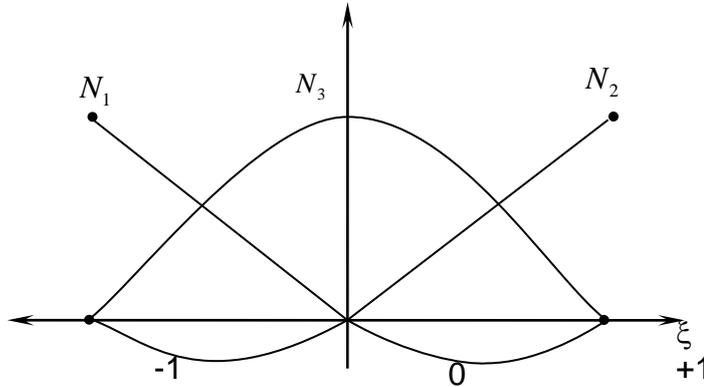


Figura 2.4 - Funções de forma quadráticas contínuas

As temperaturas e fluxos são aproximados conforme as Eq. (2.3.1) e (2.3.2).

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 \quad (2.3.1)$$

$$q = N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 \quad (2.3.2)$$

Onde T_1 é a temperatura no nó local 1, T_2 a temperatura no nó local 2, T_3 a temperatura no nó local 3, q_1 é o fluxo no nó local 1, q_2 é o fluxo no nó local 2, q_3 é o fluxo no nó local 3, N_1 é a função de forma 1, N_2 é a função de forma 2, e N_3 é a função de forma 3. As funções de forma quadráticas contínuas N_1, N_2 e N_3 são dadas pela Figura (2.4) e a formulação de função de forma pela Eq. (2.3.3).

$$N_1 = \frac{\xi}{2}(\xi - 1), \quad N_2 = (1 - \xi)(1 + \xi) = 1 - \xi^2 \quad \text{e} \quad N_3 = \frac{\xi}{2}(\xi + 1) \quad (2.3.3)$$

Escrevendo na forma matricial, resultam as Eq. (2.3.4) e (2.3.5).

$$T = [N_1 N_2 N_3] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

$$q = [N_1 N_2 N_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

A equação integral discretizada é então escrita conforme a Eq. (2.3.6), onde o fator de forma é representado por $c = \frac{1}{2}$ quando $d \in \Gamma$, juntamente com as matrizes de influência h e g que podem ser escritas na seguinte forma:

$$cT(d) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ [h_1 \ h_2 \ h_3]_j \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}_j - [g_1 \ g_2 \ g_3]_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_j \right\} \quad (2.3.6)$$

Onde:

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 q^* d\Gamma, \quad h_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 q^* d\Gamma \quad e \quad h_3 = \int_{\Gamma_j} N_3 q^* d\Gamma$$

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 T^* d\Gamma, \quad g_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 T^* d\Gamma, \quad e \quad g_3 = \int_{\Gamma_j} N_3 T^* d\Gamma$$

2.4 Métodos dos Elementos de Contorno para problemas potenciais

Na engenharia, vários problemas podem ser demonstrados pela teoria de Potencial, como por exemplo, os problemas de condução térmica, distribuição do potencial elétrico ou magnético, fluxo em meios porosos, fluxo irrotacional de fluidos ideais e torção de barras. Na solução de problemas de geometria complexas é pequeno o número de problemas cuja representação analítica é possível, fazendo-se assim necessária a utilização de métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas. Para a aplicação de um problema potencial ao MEC, um ponto inicial possível, para se obter a equação integral sobre o contorno é a ponderação dos resíduos da equação diferencial das condições de contorno, com

auxílios de manipulações algébricas do teorema de Betti e da terceira identidade de Green, obtendo-se assim a identidade de Somigliana. Neste trabalho somente a dedução parcial do MEC foi apresentada. A dedução completa do MEC poderá ser obtida nas literaturas clássicas (Brebbia et al. (1984) e Wrobel (2002)). A formulação será apresentada a partir da identidade Somigliana Eq. (2.4.1) que demonstra o problema potencial e fluxo sobre o contorno na ausência de fonte de calor.

$$\frac{1}{2}T^i(x) + \int_{\Gamma} T(x) q^*(x, x') d\Gamma = \int_{\Gamma} q(x) T^*(x, x') d\Gamma \quad (2.4.1)$$

Para meios totalmente anisotrópicos, a equação governante é escrita em termos de coordenadas cartesianas conforme apresentado na Eq. (2.4.2).

$$k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} + k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = 0 \quad (2.4.2)$$

Assumindo que as propriedades tensoras dos materiais são simétricas, as equações podem ser escritas como soluções fundamentais de temperatura conforme Eq. (2.4.3) e para fluxo na Eq.(2.4.4). A distância entre o ponto fonte e ponto campo é apresentada conforme a Eq. (2.4.5).

$$T^* = -\frac{1}{2\pi |k_{ij}|^{1/2}} \ln(r) \quad (2.4.3)$$

$$q^* = \left(k_{11} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + k_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_{x1} + \left(k_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + k_{22} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_{x2} \quad (2.4.4)$$

$$r = \left\{ k_{11} (x_1^i - x_1)^2 + 2k_{12} (x_1^i - x_1)(x_2^i - x_2) + k_{22} (x_2^i - x_2)^2 \right\}^{1/2} \quad (2.4.5)$$

Onde $|k_{ij}|$ é o determinante de condutividade e s é o inverso da matriz k na Eq.(2.4.6).

$$|k_{ij}| = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \quad ; \quad s = k^{-1} = \frac{1}{|k_{ij}|} \begin{bmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

Para transformar a solução anisotrópica em isotrópica o valor de k_{11} deve ser igual ao valor de k_{22} na solução da equação governante das coordenadas cartesianas (2.4.2), não fazendo a utilização do segundo termo da equação que representa k_{12} .

Discretizando a Eq. (2.4.1) podemos reescrever conforme a Eq. (2.4.7).

$$c^i T^i + \sum_{j=1}^N H^{ij} T^j = \sum_{j=1}^{2N} G^{ij} q^j \quad (2.4.7)$$

A Eq. (2.2.7) pode ser representada em sua forma matricial conforme a eq. (2.4.8).

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (2.4.8)$$

Onde:

$[A]$ matrizes de potenciais e fluxos das condições de contorno;

$\{X\}$ vetor que contém as variáveis de incógnitas sobre os nós do contorno;

$\{F\}$ vetor das variáveis prescritas no contorno.

3 OTIMIZAÇÃO

O conceito de otimização é constantemente empregado, como o ato de se encontrar um resultado ou conjunto de soluções ótimas.

Vitório Júnior (2014) apud Vianna (2003) explica a otimização ou programação matemática como a técnica de determinação da melhor solução para problemas matematicamente definidos, que são frequentemente a modelagem de um problema físico.

Os métodos de otimização são divididos em dois grupos importantes: programação linear e não-linear.

3.1 Programação linear

A programação linear é uma técnica da pesquisa operacional, muito utilizada em problemas de otimização, nos quais a função objetivo e as restrições são todas lineares.

Em problemas de otimização é buscado, por meio de valores de variáveis a maximização ou minimização de determinadas funções dentro de um determinado domínio.

De acordo com Luenberger (1984), qualquer problema de programação linear pode ser representado por uma “formulação padrão”: Conforme a Eq. (3.1.1).

Minimizar/Maximizar sujeita a:

$$\begin{aligned} Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Onde Z é a função-objetivo, x_i são as variáveis ou incógnitas e b_i, c_i e a_{ij} , são as constantes do problema. Exemplo de programação linear, podemos destacar o simplex.

3.1.1 Simplex

O Método Simplex é uma técnica matricial para se determinar numericamente, a solução ótima de um modelo de Programação Linear.

Segundo Silva et al. (2010), o Simplex é formado por um grupo de critérios para escolha de soluções básicas que melhorem o desempenho do modelo, para um teste de otimalidade.

Puccini (1990) apresenta o método Simplex para problemas de maximização, pode ser resumido nos seguintes passos:

- i) encontrar uma solução factível básica inicial;
- ii) verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare. Caso contrário, siga para o passo iii);
- iii) determinar a variável não básica que deve entrar na base;
- iv) tirar a variável básica que deve sair da base;
- v) encontrar uma forma canônica para o sistema de equações, levando em consideração as etapas (iii) e (iv) à fim de determinar a nova solução factível básica, e voltar ao passo ii.

3.2 Programação não linear

Na programação não linear, as funções não lineares possuem algumas características: a função objetivo não é linear e pelo menos uma das restrições, é uma função não linear das variáveis envolvidas. Sendo classificadas em dois subgrupos: determinísticos e não determinísticos.

3.2.1 Métodos determinísticos

Os métodos determinísticos buscam o ponto ótimo utilizando-se das coordenadas da posição corrente (x_k) como ponto de partida para a iteração seguinte ($k+1$). Para a solução de problemas sem restrições consiste em se aplicar, de forma iterativa, a Eq. (3.2.1).

$$x_{k+1} \approx x_k + \lambda_k d_k \quad (3.2.1)$$

Onde λ_k refere-se ao passo de cálculo e d_k é a direção de busca do ponto otimizado.

Em suma, a obtenção da direção de busca envolve o cálculo analítico de derivadas (alguns métodos clássicos, conhecidos como métodos de ordem zero, não utilizam o cálculo de derivadas na obtenção da direção de busca (d_k), cuja ordem caracteriza o método utilizado (i.e., métodos de ordem um ou métodos de ordem superior).

O passo de cálculo controla a evolução da solução e seu valor pode ser obtido por métodos do tipo Seção Áurea e Fibonacci, dentre outros. Podemos encontrar a descrição dos métodos citados em Adby (1982) e Box et al. (1969). A diferenciação entre os métodos de programação não linear consiste na estratégia adotada para determinação do vetor d_k , sendo caracterizado de forma de ordem zero: nos quais nenhuma informação de derivada é utilizada na determinação dessas direções: a de ordem um nos quais apenas as informações de primeira ordem (vetores gradientes) são utilizadas; e de ordem dois: nos quais são utilizadas tanto as informações de primeira ordem (vetores gradientes) quanto as de segunda ordem (matrizes Hessianas).

3.2.2 Gradiente

O método gradiente é um dos métodos mais antigos de minimização de funções. Conhecido também por “Método Cauchy”, é um método simples computacional, porém apresenta convergência lenta computacional, e até mesmo não chega a convergir em tempo que seja consideravelmente razoável.

Tal método utiliza apenas as derivadas de primeira ordem para o cálculo do gradiente. O gradiente aponta na direção de maior crescimento da função no ponto. Conseqüentemente tal método procura ir em direção busca que é oposta ao gradiente.

Formulação do Método Gradiente, conforme a Eq. (3.2.2).

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k \quad (3.2.2)$$

Onde $d_k = -\nabla f(x_k)$ e λ_k é um escalar não-negativo que minimiza $f(x_k + \lambda_k d_k)$.

Em outras palavras, a partir de x_k , procura-se ao longo da direção d_k um mínimo sobre esta reta, dado por x_{k+1} .

3.2.3 Gradiente Conjugado

O Gradiente Conjugado, é um método iterativo de busca do mínimo local da função, gerando aproximação para a solução. E por meio das direções conjugadas, o método trabalha com a seleção de sucessivos vetores: a direção como uma versão conjugada dos sucessivos gradientes encontrados durante ao processo de solução.

De acordo Luenberger (1984), o método Gradiente pode ser definido por:

“Dada uma matriz simétrica Q , dois vetores d_0 e d_1 são ditos Q - ortogonais ou conjugados em relação”.

A partir do conceito demonstrado, observamos que um conjunto finito de vetores é dito se $d_i^T Q d_j = 0$ para todo $i \neq j$, sendo a matriz Q definida positiva, tais valores são linearmente independentes.

Tal método consequentemente gera a cada passo uma direção conjugada, d_k , que é uma combinação linear de $-\nabla f(x_k)$ e da direção usada no passo anterior (d_{k-1}).

Mateus et al. (1986) apresenta o algoritmo do Método de Gradiente Conjugado descrevendo os principais procedimentos listados de acordo com a Figura 3.1.

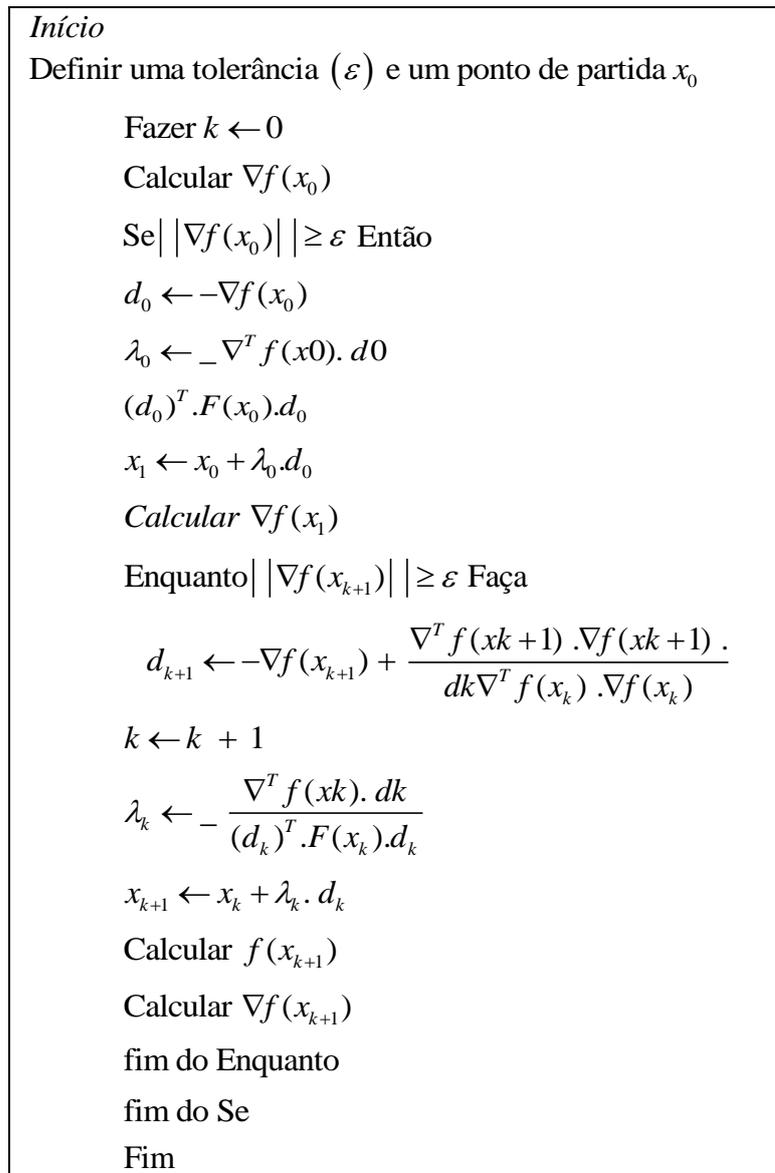


Figura 3.1 - Método Gradiente Conjugado- Mateus et al. (1986)

3.3 Não Determinísticos

Os métodos não determinísticos são aqueles que imitam fenômenos ou processos encontrados na natureza, denominando-se a computação natural.

De acordo com Michalewicz (1997), dentro da classe Computação Evolutiva temos: os Algoritmos Genéticos, as Estratégias Evolutivas, a Programação Evolutiva

e a Programação Genética, e ainda formas híbridas desses algoritmos. De acordo com a Figura 3.2 apresenta as ramificações da Computação Natural.

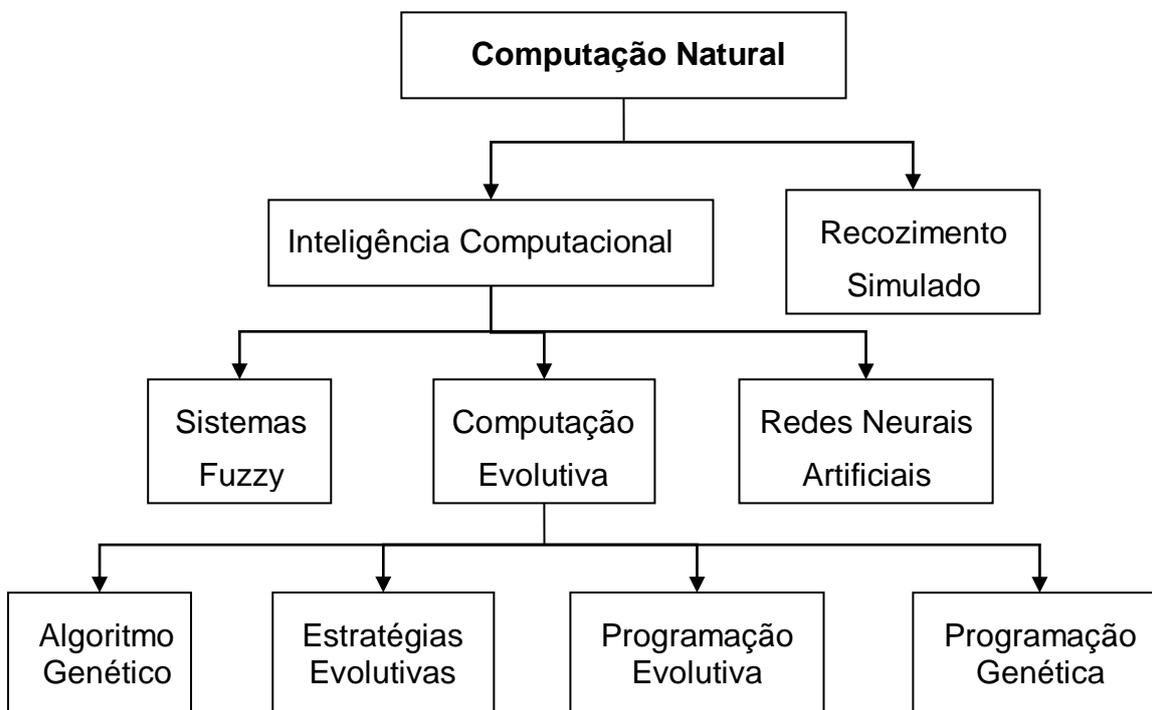


Figura 3.2 - Ramificações da Computação Natural-Olivieri (2004)

Aborda-se, neste trabalho, as técnicas de computação evolutiva, com a utilização do método de AG, que se baseia na teoria da Evolução de Espécie Darwiniana (1859), que será melhor apresentada esta abordagem no capítulo 4 e 5.

Na literatura, podemos destacar alguns exemplos que serão demonstrados, a seguir de métodos bastante usuais não determinísticos tais como: o algoritmo de otimização por colônia de formigas, o algoritmo de otimização por abelhas e as redes neurais artificiais.

3.3.1 Formigas

O Algoritmo de otimização por colônia de formigas é usado para diferentes problemas de otimização combinatória. É inspirado no comportamento de formigas do mundo real, sendo melhor aplicado na otimização de problemas discretos.

O algoritmo proposto por Colorni et al. (1991), denominado *Ant Colony Optimization* (ACO - Otimização por Colônia de Formigas), para resolver o problema do caixeiro viajante (*Travelling Salesman Problem* - TSP).

Conforme Figura 3.3 o pseudocódigo contendo a descrição do ACO de Corloni et al. (1991).

Algoritmo Pseudocódigo para o algoritmo ACO

Inicialize

Repita - Neste nível, cada execução é chamada

iteração

Repita - Neste nível cada execução é chamada

Passo - Cada formiga aplica uma regra de transição para construir a
Próxima etapa da solução aplica-se a atualização total
de feromônios

Até que - Todas as formigas tenham criado uma solução completa;
Aplica-se o procedimento de busca local;
Aplica-se o procedimento de atualização global dos feromônios

Até o critério de parada seja satisfeito

Figura 3.3 - Pseudocódigo de ACO- Corloni

3.3.2 Abelhas

O algoritmo de otimização por abelhas, a Colônia Artificial de Abelhas (CAA) foi proposta por Karaboga em (2005). Ele é inspirado pelo comportamento natural de forrageamento de abelhas, que tem o intuito de resolver problemas baseando-se no comportamento inteligente das abelhas na natureza, num modelo matemático com três componentes: abelhas operárias, abelhas não operárias (seguidoras ou exploradoras) e fontes de alimento, representando as possíveis soluções do problema.

Destacamos que um algoritmo de abelhas consiste na execução dos passos *Forward* e *Backward*. Tais passos são repetidos durante as iterações do algoritmo até que o critério de parada seja atingido. Para melhor demonstrar segue o algoritmo com a Figura 3.4.

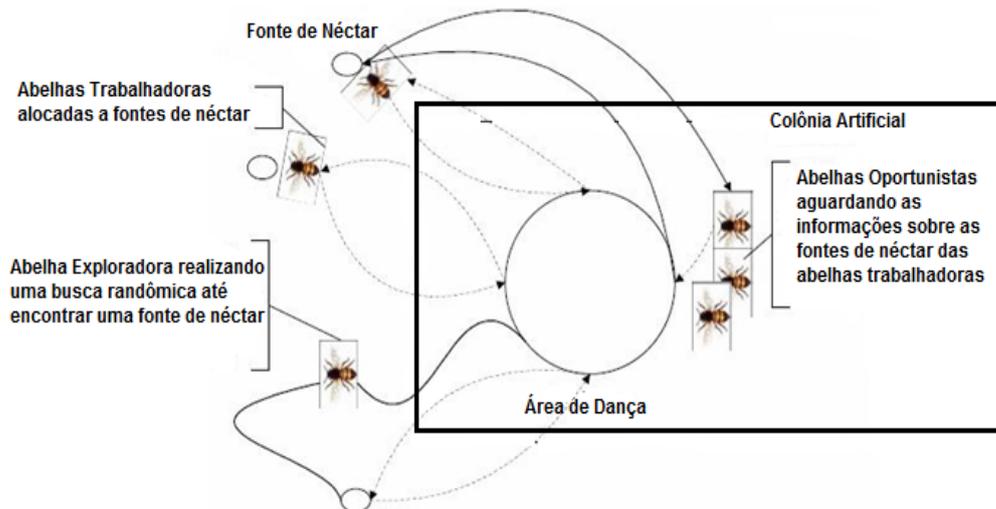


Figura 3.4 - Representação do algoritmo de abelhas- Borchers (1994)

A figura 3.5 ilustra o pseudocódigo contendo a descrição do CAA- Aghazadeh (2011).

Algoritmo Pseudocódigo para o algoritmo CAA
<p>Inicialize– <i>A população com soluções aleatórias</i> <i>Avaliar a aptidão (fitness) da população</i></p> <p>Enquanto (<i>número máximo de ciclos não for atingido</i>) <i>// Formação de nova população.</i></p> <p style="padding-left: 40px;"><i>Selecionar fontes de alimentos na busca da vizinhança.</i></p> <p style="padding-left: 40px;"><i>Recrutar as abelhas seguidoras para irem às fontes de alimentos selecionados e avaliar suas novas aptidões.</i></p> <p style="padding-left: 40px;"><i>Selecionar as abelhas com melhores fitness.</i></p> <p style="padding-left: 40px;"><i>Com as demais abelhas (exploradoras), ainda não selecionadas, fazer busca aleatório e avaliar suas aptidões.</i></p> <p>Fim</p>

Figura 3.5 - Pseudo código para o CAA

3.4 Redes Neurais Artificiais

As Redes Neurais Artificiais (RNA) são técnicas computacionais baseadas em modelos matemáticos inspiradas na estrutura neural de organismos inteligentes

mais precisamente no funcionamento dos neurônios, que adquirem conhecimento por meio de experiências.

De acordo Teotônio (2014), as Redes Neurais são compostas por unidades básicas com entradas, saídas e processamentos de dados, que podem ser chamados de neurônios, por analogia. A interligação entre essas unidades básicas faz com que seja possível dividir o processamento entre elas, e a rede pode ser capaz de processar e responder de maneira cada vez mais complexa.

Lastiri et al. (2004) apresentam aplicação de redes neurais artificiais (RNA) à engenharia de estruturas. Duas aplicações práticas são apresentadas, onde redes neurais artificiais são implementadas utilizando-se planilhas eletrônicas: o dimensionamento de uma viga em concreto armado, e a análise de uma chapa de aço com um furo no centro. Os resultados obtidos no treinamento das redes, para as duas aplicações práticas apresentadas, com erros inferiores aos previamente estabelecidos, indicam que as redes foram bem treinadas. E os resultados dos testes, com erros também menores que os previamente estabelecidos, indicam que as redes treinadas podem ser aplicadas para solucionar problemas semelhantes aos utilizados nos treinamentos. Os resultados apresentados permitem concluir que redes neurais artificiais podem ser aplicadas à engenharia de estruturas com coerência e segurança.

3.5 Computação Evolutiva

Nos meados da década de 50 surgiram os primeiros estudos da computação evolutiva, porém ficou estagnada por décadas devido à falta de desempenho computacional nesta época. Holland (1975) e outros pesquisadores na década de 70, desenvolveram pesquisas sobre a computação evolutiva. Goldberg na década de 80, desenvolveu um trabalho com sucesso em aplicação industrial com AGs, a partir de então, os AGs são uma ferramenta para a solução de problemas de otimização.

A Computação Evolutiva trabalha com diversos algoritmos inspirados na genética e no princípio Darwiniano (1859). Tais algoritmos não determinísticos

(probabilísticos) fornecem informações a um mecanismo de busca paralela e adaptativa, considerando o princípio de sobrevivência mais aptos, na reprodução.

Tal mecanismo é obtido, a partir de uma população de indivíduos, e representado por cromossomos de forma binária, através de vetores e matrizes. Cada cromossomo é associado a uma aptidão (no caso a avaliação da solução do problema), e assim são submetidos a um processo de evolução (seleção, reprodução, cruzamento, mutação), por várias fases. Compreende-se a ideia de uma população com estruturas computacionais, com a busca de otimizar a adequação de indivíduos para a formação desta população. Diversos tipos de problemas podem ser resolvidos pela computação evolucionária. Procurando desenvolver modelos para a reprodução de determinado fenômeno, a computação evolucionária oferece algorítmicos gerais que podem ser aplicados a problemas complexos.

Michalewicz (1997) demonstrou a estrutura básica dos algoritmos pertencentes ao grupo da Computação Evolutiva, na Figura 3.6.

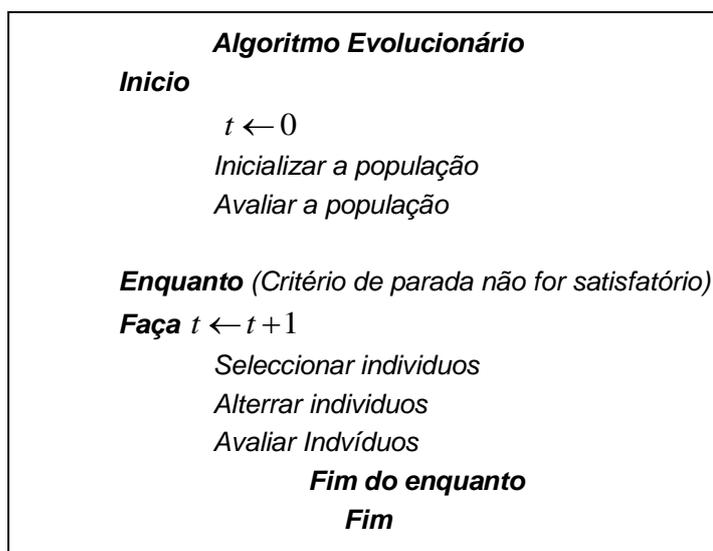


Figura 3.6 - Estrutura AG- Computação Evolutiva- Michalewicz (1997)

4 ALGORITMO GÉNÉTICO EVOLUCIONÁRIOS

Os Algoritmos Genéticos (AGs), são um método da Computação Evolutiva, com técnicas não determinísticas de busca da otimização que manipulam um espaço de soluções potenciais, utilizando mecanismos inspirados na teoria Darwiniana (1859). O desenvolvimento de simulações computacionais surgiu na década de 60. John Holland foi um dos pioneiros pesquisadores para o desenvolvimento dos Algoritmos Genéticos (AGs), e como consequência de suas pesquisas originou a publicação em 1975 de *“Adaptation in Natural and Artificial Systems”*. Segundo Goldberg (1989), os AGs são eficientes e robustos em espaços de procura irregulares, multidimensionais e complexos. Barbosa (1977) fundamenta que os AG constituem uma classe de ferramentas versátil e robusta e que pode ser utilizada na solução de problemas de otimização.

Segundo Davis (1996) e Michalewicz (1996), os AGs utilizam três operadores básicos para o procedimento de otimização: seleção, recombinação e mutação.

Para a implementação de um AG são necessários alguns requisitos:

- *Representações feitas das possíveis soluções do problema com formato no código genético;*
- *A população inicial deve conter diversidade suficiente para que, o algoritmo combine com características para produzir novas soluções;*
- *Deve existir um método para medir a qualidade de uma solução potencial;*
- *A combinação de soluções para gerar novos indivíduos de populações;*
- *Critério de escolha das soluções que permaneceram na população ou que serão retirados desta;*
- *Procedimento para introdução periódica de alterações em algumas soluções da população, para manter-se a diversidade da população e a possibilidade de produção de soluções novas, para serem avaliadas pelos critérios dos mais aptos.*

Davis (1996) descreve as etapas básicas de um AG da seguinte forma:

1. *Inicializar uma população de cromossomos;*
2. *Avaliar cada cromossomo da população;*
3. *Criar novos cromossomos através da troca de material genético entre cromossomos (crossover e mutação);*
4. *Remover membros da população para dar lugar a novos cromossomos;*
5. *Avaliar os novos cromossomos e inseri-los na população;*
6. *Se o procedimento convergir, terminar, se não, voltar ao passo 3.*

A Figura 4.1 demonstra um pseudocódigo que representa um algoritmo genético simples conforme Olivieri (2004).

Algoritmo Simples

Inicialize - A população
Avalie indivíduos da população

Repita

Selecione indivíduos para reprodução
Aplique operadores de recombinação e mutação

Avalie indivíduos da população
Selecione indivíduos mais adaptados

Até - Critério de parada satisfeito

Fim

Figura 4.1 - Pseudo-código para um AG simples.

Os algoritmos genéticos inspirados no princípio Darwiniano são simples. Baseado nisso, o princípio de seleção garante que os indivíduos mais aptos têm mais chances de reprodução. Indivíduos com mais descendentes têm maior probabilidade de perpetuarem seus códigos genéticos nas gerações próximas. Esses códigos constituem a identificação de cada indivíduo e estão representados nos cromossomos.

Tais princípios são utilizados na construção de algoritmos computacionais, que buscam a melhor otimização para um determinado problema através da evolução de populações de soluções, codificadas por cromossomos.

Nos AGs, um cromossomo é uma estrutura de dados que representa uma das possíveis soluções, e são submetidos a um processo evolucionário, que após vários ciclos de evolução aparecerá os indivíduos mais aptos.

A tabela 1, demonstra os termos básicos da genética ligado aos AGs.

Tabela 1 - Termos básicos da genética ligados aos AGs

Nomenclatura	Termos oriundos da genética aplicados aos AGs
Cromossomo	Cadeia de caracteres que representa alguma informação das variáveis do problema, sendo que cada um desses cromossomos pode representar uma possível solução.
Gene	Descreve cada uma das variáveis do problema
População	Conjunto de possíveis soluções
Geração	Número da iteração que o algoritmo genético executa
Genótipo	Representa a informação contida nos cromossomos
Função Objetivo	Função a ser minimizada, com informações numéricas com desempenho de cada cromossomo da população.

Os algoritmos genéticos, não utilizam o cálculo de derivadas, pois são considerados diretos e de ordem zero, e precisam apenas da avaliação da função objetivo para a introdução no processo de otimização dados e parâmetros randômicos, conseqüentemente com uma solução de problema de forma probabilística para encontrar um resultado, ao contrário de outros métodos de otimização com regras determinísticas. Albrecht (2005) apresenta a comparação entre os AG e os métodos clássicos de programação matemática, conforme a tabela 2.

Tabela 2 - Comparação dos AG com os métodos clássicos

Métodos Clássicos	Algoritmos Genéticos
Têm dificuldade em identificar soluções ótimas globais, uma vez que dependem do ponto de partida.	Não apresentam nenhuma restrição quanto ao ponto de partida.
Têm dificuldade em tratar problemas com variáveis discretas (problemas comuns em Engenharia).	Trabalham tanto com codificação contínua como discreta das variáveis, ou ainda com uma combinação de ambas.
Requerem funções diferenciáveis, o que pode ser oneroso, complexo e nem sempre possível.	Não necessitam que a função objetivo seja contínua nem diferenciável.
Cada um dos métodos clássicos, de uma forma geral, tem domínio de aplicação restrito.	São razoavelmente eficientes para a maioria dos problemas existentes.
Em geral, não são eficazes quando o problema tem múltiplos objetivos.	São flexíveis para trabalhar com restrições e otimizar múltiplas funções com objetivos conflitantes.
Trabalham com uma única solução em cada etapa do processo iterativo.	Realizam buscas simultâneas em várias regiões do espaço de busca por meio de uma população de indivíduos.
Não são tão fáceis de serem implementados, quando comparados com os AG.	São relativamente fáceis de serem implementados e proporcionam grande flexibilidade na modificação da função objetivo.

No fluxograma a seguir é apresentada a estrutura básica de um AG, conforme a Figura 4.2.

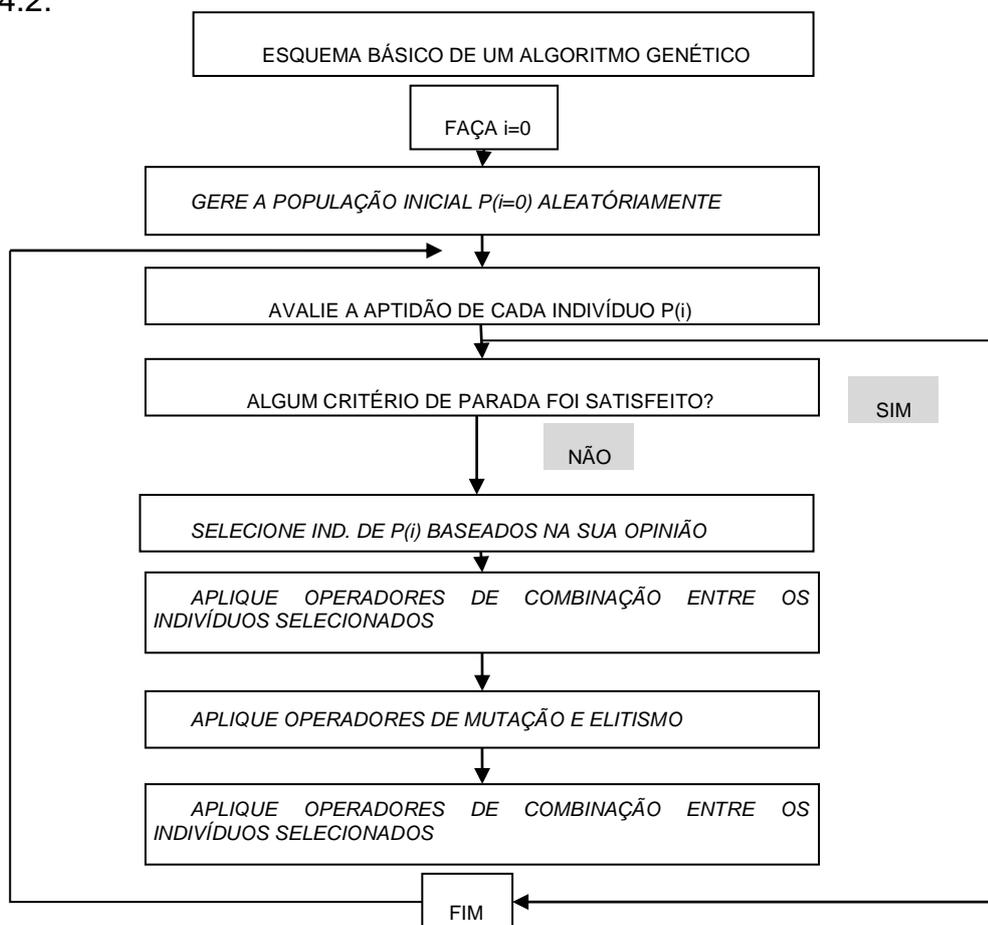


Figura 4.2 - Estrutura Básica AG

Os principais operadores de um AG são: representação; população inicial; função de aptidão; seleção; cruzamento; mutação e próxima geração.

4.1 Representação

A representação de um algoritmo genético serve para dar parâmetro ao problema. Nela é descrita o espaço de busca, codificando geneticamente o problema, e deve ser compatível com os operadores de crossover e mutação.

As formas mais usuais de se representar tais parâmetros é a utilização da representação binária e a representação real.

Na representação binária, é agregado algum valor com notação binária que represente a característica de alguma variável, porém a função objetivo requer

parâmetros contínuos, por isto, sempre que for avaliada a função objetivo, o cromossomo necessita de ser primeiro decodificado.

Outra forma de representar parâmetros do problema é a utilização da representação real, porém ela é pouco utilizada pelos implementadores de AG, devido a representação binária ser mais simples na manipulação. Porém existem casos que a representação real tem vantagem sobre a representação binária, principalmente, quando existe a necessidade de se cobrir um domínio inteiro, pois com a tal representação poderia ocasionar à um custo elevado computacional.

Brun (2005) cita uma vantagem sobre a representação real *versus* binária: a capacidade de se poder explorar de forma gradual as funções com variáveis contínuas.

4.2 População Inicial

Fazendo analogia com a genética, como já apresentado neste trabalho, o gene (conjunto de variáveis), constitui um cromossomo, que representa um indivíduo. Um indivíduo pode ser caracterizado também por mais de um cromossomo.

O algoritmo genético inicializa seu processo iterativo com um grande número de cromossomos, formando a população inicial. Ela é iniciada geralmente de forma aleatória, com a utilização de funções randômicas nas rotinas dos códigos computacionais.

Por meio da iteração, apenas parte dos melhores indivíduos (50%), são selecionados para o grupo de reprodução: o restante é descartado. Tal processo se repete a cada iteração.

4.3 Função de Aptidão

Sabemos que o algoritmo genético se fundamenta na analogia ao processo de evolução das espécies. Os AGs selecionam os melhores indivíduos pela função de aptidão: é calculado por meio de uma determinada função, o valor de aptidão de cada indivíduo, avaliando a capacidade de sobrevivência durante o processo evolutivo. Tal cálculo é o elemento de ligação entre o AG e o problema proposto,

sendo parte não genérica do algoritmo genético, sendo capaz de identificar todas as restrições e objetivos.

4.4 Seleção

Após a avaliação pela função de aptidão, a próxima etapa do operador genético é a seleção de indivíduos, que serão transmitidos os seus genes para a próxima geração. Os piores indivíduos são descartados, devido as suas baixas aptidões. A seleção de indivíduos pode ser escolhida entre várias técnicas, entre elas destacamos: seleção por amostragem direta; seleção por amostragem aleatória e seleção por amostragem estocástica.

4.5 Cruzamento

O cruzamento (*crossover*) é um operador genético que cria iterativamente um ou mais descendentes a partir dos cromossomos melhores aptos no processo de seleção. O cruzamento é a primeira maneira do AG explorar a possibilidade de soluções. Existe na literatura temos algumas formas de se fazer um cruzamento: uniponto, multiponto e uniforme.

O cruzamento acontece quando a utilização de dois genitores, servem para produzir descendentes. Geralmente, a porcentagem de cruzamento na população é entre 50% a 95% em cada iteração. O método mais simples que é o uniponto, o cruzamento acontece a partir de um ponto pré-estabelecido, conforme a Figura 4.3.

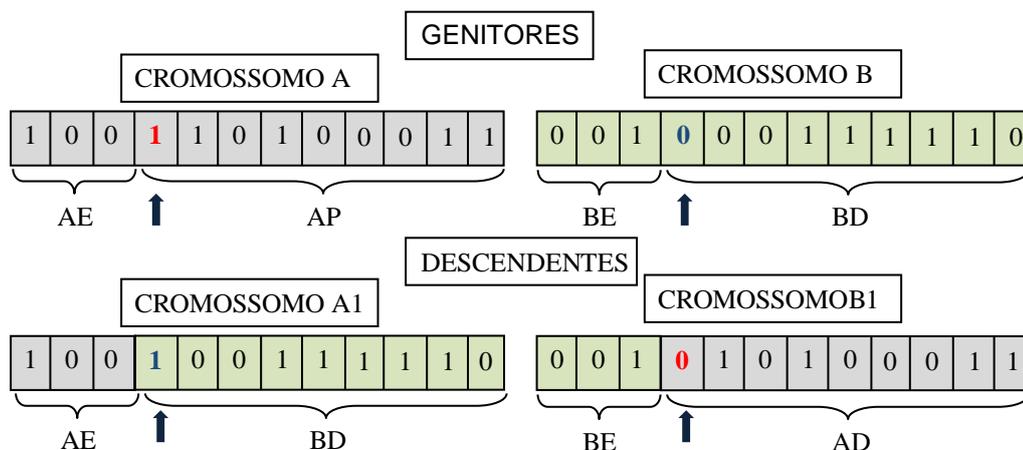


Figura 4.3 - Cruzamento uniponto - Geradores

No cruzamento multiponto, acontece a troca de material genético por meio de pontos, onde muitos pontos de cruzamento podem ser utilizados.

No cruzamento uniforme não utiliza pontos de cruzamento, mas é determinado, por meio de um parâmetro global, qual a probabilidade de cada variável ser trocada entre os pais.

4.6 Mutação

A mutação garante a maior variabilidade na população, sendo a segunda maneira do AG a explorar a possibilidade de soluções. Através do operador de mutação pode ser introduzida novas características nos indivíduos. Se tal característica melhorar a aptidão do indivíduo, ele passará a se multiplicar entre os demais nas próximas gerações. A cada *bit* de cromossomos de descendentes é verificada a mutação, gerando de forma aleatória entre 0 e 1, de acordo com a probabilidade de mutação (P_m), em torno de 0,1% a 5%. Para que os melhores indivíduos não sofram mutações, na geração subsequente pode se aplicar o operador chamado elitismo. Neste operador o "indivíduo melhor" é introduzido para uma geração seguinte, evitando a perda de informações importantes, presentes em indivíduos, com alta performance, que podem ser perdidas durante os processos de seleção e cruzamento.

4.7 Próxima geração

Após cada processo passado pelos operadores genéticos já citados neste trabalho, forma-se a próxima geração. Tal geração é composta por melhores pais e seus descendentes. O AG faz repetições dos passos até encontrar um conjunto de cromossomos próximos de um indivíduo melhor, por meio de iterações até a convergência.

5 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

Os problemas em que se aplicam a otimização multiobjetivos são aqueles em que dois ou mais objetivos necessitam ser otimizados simultaneamente. A única diferença da otimização mono-objetivo está na quantidade de soluções ótimas alcançadas. Segundo Azuma (2011), na otimização multiobjetivo, trabalha-se com dois espaços: o espaço de variáveis e o espaço de objetivos. O espaço de variáveis é onde se faz a busca pelas soluções do problema, ou seja, é o domínio das variáveis do problema. Já o espaço de objetivos é o espaço formado pelas funções-objetivo do problema.

Goldberg (1989) demonstra várias abordagens para estender as aplicações de AGs para problemas multiobjetivos. Entre elas propõe um procedimento para ordenação de soluções baseado no conceito de dominância de Pareto, que é baseado no conceito de que o valor da aptidão de uma solução é proporcional ao número de soluções que ela domina. Segundo Ticona (2003), com esta abordagem, as soluções dominantes (ou não dominadas) são mais aptas à sobrevivência, obtendo assim, uma maior quantidade de clones na lista de descendentes.

A seguir será apresentada a formulação geral de um problema de otimização multiobjetivo, que envolve a minimização ou maximização de algumas funções objetivos que estão sujeitas a uma determinada quantidade de restrições. Deste modo, a formulação geral do problema de otimização multiobjetivo pode ser expressa por Deb (2004), conforme a Eq. (5.1.1).

$$\begin{aligned} & \text{Otimizar } Z = f_k(\vec{x}), \text{ para } k = 1, 2, \dots, l \text{ com } l \geq 2 \\ & \text{Sujeito a} \\ & g_j(\vec{x}) \leq 0, \text{ para } j = 1, \dots, q \\ & h_j(\vec{x}) = 0, \text{ para } j = q + 1, \dots, m \\ & l(i) \leq x_i \leq u(i), \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Tal formulação é semelhante a formulação para um problema mono-objetivo. A diferença, para a resolução de um problema multiobjectivo, refere-se à quantidade de funções objetivos associadas ao problema que devem ser otimizadas ao mesmo

tempo. Consequentemente, a busca é encontrar um ponto em $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que satisfaça conjunto de restrições e otimize as funções envolvidas no problema. Sendo assim, a presença de mais funções objetivos, é criado um novo espaço importante que é chamado espaço objetivo. Que possibilita o mapeamento do espaço de variáveis de decisão com o seu equivalente espaço objetivo.

5.1 ModeFRONTIER na otimização por Algoritmos Genéticos

Existem diversos recursos iterativos disponíveis que são utilizados como ferramentas de otimização. O MATLAB e ModeFRONTIER são exemplos disto, pois possuem os AGs como principais métodos de otimização.

De acordo Oliveira et.al (2010), o processo de otimização utilizando o modeFRONTIER® consiste basicamente em reunir em um único ambiente a descrição do problema e um conjunto de objetivos. E a partir daí buscar o ponto ótimo de operação para o sistema por meio de algoritmos pré-definidos.

Silva (2014) apresenta as vantagens da utilização do software ModeFRONTIER: por meio de análises gráficas e de tabelas é possível encontrar as melhores soluções factíveis permitindo chegar a um resultado final partindo dos objetivos, critérios de otimização e as restrições definidas pelo usuário, possibilitando ao usuário delinear a melhor estratégia de otimização respeitando os limites do espaço de solução dos problemas envolvido.

Para o presente trabalho foi utilizado o software ModeFRONTIER pela simplicidade de integração com o MATLAB e pelas diversas possibilidades de tratamento, análise e verificação de resultados.

O software possibilita realizar o trabalho com diagramas de blocos organizados em fluxos, como mostrado no esquema na Figura 5.1, modelo utilizado neste trabalho no processo de otimização.

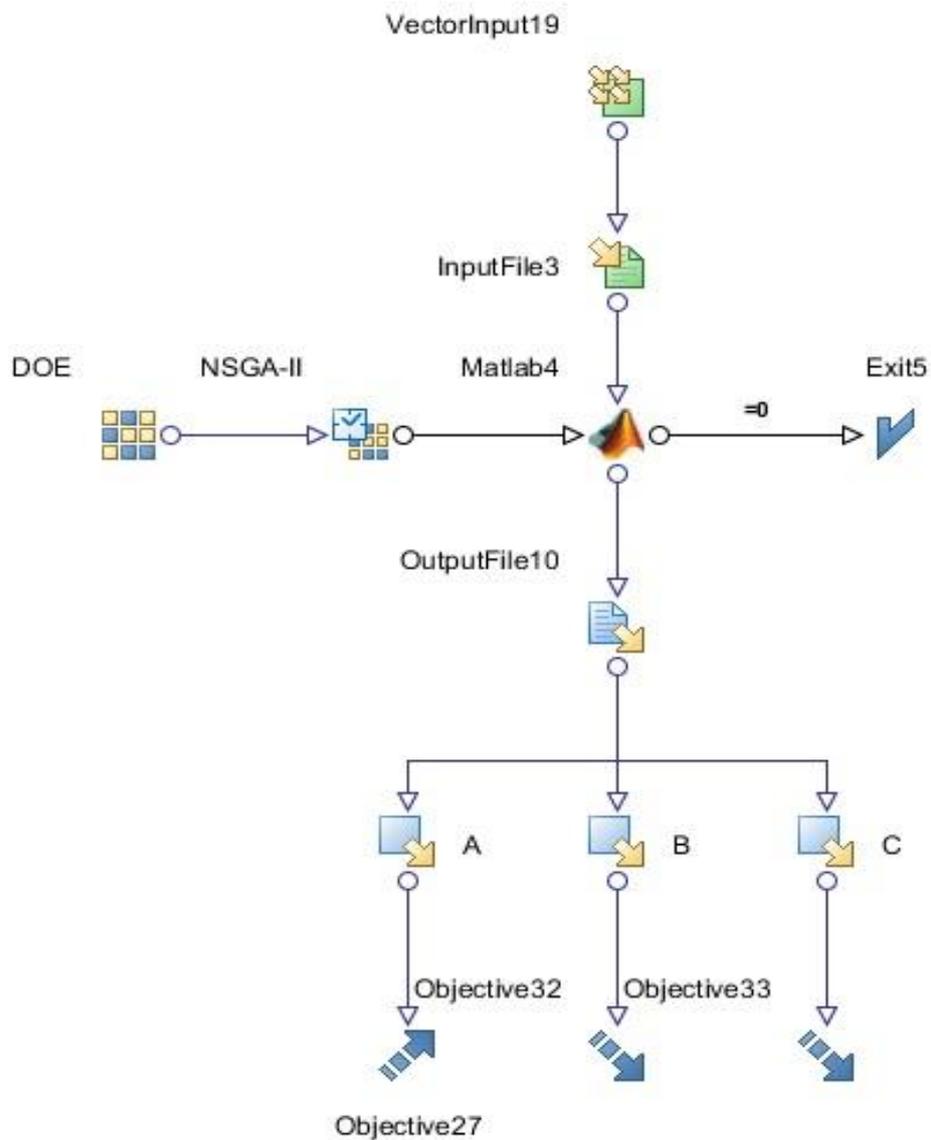


Figura 5.1 - Modelo implementado no ModeFRONTIER

5.1.1 AG NSGA-II (Elitist Non- Dominated Sorting Algorithm)

Na literatura podemos encontrar diversos algoritmos evolucionários multiobjetivos. Entre os principais que são muito utilizados podemos destacar: VEGA (Vector Evaluated Genetic Algorithm), MOGA (Multiple Objective Genetic Genetic Algorithm), NSGA (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm), NSGA II (Elistist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm). Neste trabalho, é adotada a técnica de

otimização NSGA II. Para melhor detalhamento das demais técnicas citadas aqui, podem ser encontradas em DEB (2004).

O algoritmo básico NSGA foi proposto por SRINIVAS e DEB (1994). Posteriormente o NSGA-II foi apresentado reformulado por DEB et al. (2000).

A ideia do algoritmo básico NSGA é a utilização de um procedimento de seleção por ordenamento, para enfatizar as soluções não dominantes e de um método, como distância de agrupamento, voltado para a criação de nichos com o objetivo de manter a diversidade da população, segundo Sommer (2010). Porém as comunidades científicas apresentaram algumas críticas na utilização do NSGA, que ficam evidentes na tabela 3 no comparativo entre NGSA e NSGA II.

A seguir uma tabela comparativa entre NGSA e NGSA-II, conforme descritos em nos trabalhos Sommer (2010) e Maciel (2012), conforme apresentados sinteticamente na tabela 3:

Tabela 3 - Comparativo entre NSGA e NSGA II

NGSA	NGSA-II
<p>Alta complexidade computacional para procura das soluções não dominantes em grandes populações, principalmente pela procura ser realizada a cada geração.</p>	<p>A literatura sugere que a população inicial em um estudo, deve ser na ordem de 2 vezes o número de variáveis utilizadas no modelo, multiplicado pelo número de objetivos da otimização. O critério de parada normalmente utilizado é o número de gerações máximas.</p>
<p>A falta de elitismo no algoritmo para garantir que as boas opções fossem mantidas, acelerando o processo de busca e evitando que, uma vez encontradas, fossem perdidas;</p> <p>Necessidade de especificar um parâmetro de troca pelo usuário para obter boa diversidade na população, ocasionando dificuldades para se encontrar o parâmetro correto.</p>	<p>O de elitismo é empregado de uma forma consideravelmente rápida, buscando pelo ordenamento e pela determinação da métrica da distância de tais agrupamentos, consequentemente elimina a indispensabilidade de um parâmetro externo estabelecido pelo usuário.</p> <p>Utilização do procedimento Faz <i>Nondominated Sorting (FNS)</i> em que a população é classificada em diferentes níveis segundo a dominância de Pareto; o procedimento <i>Crowding Distance Assignment (CDA)</i> que visa a garantir a diversidade da população.</p>

A Figura 5.2 demonstra o fluxograma NSGA-II.

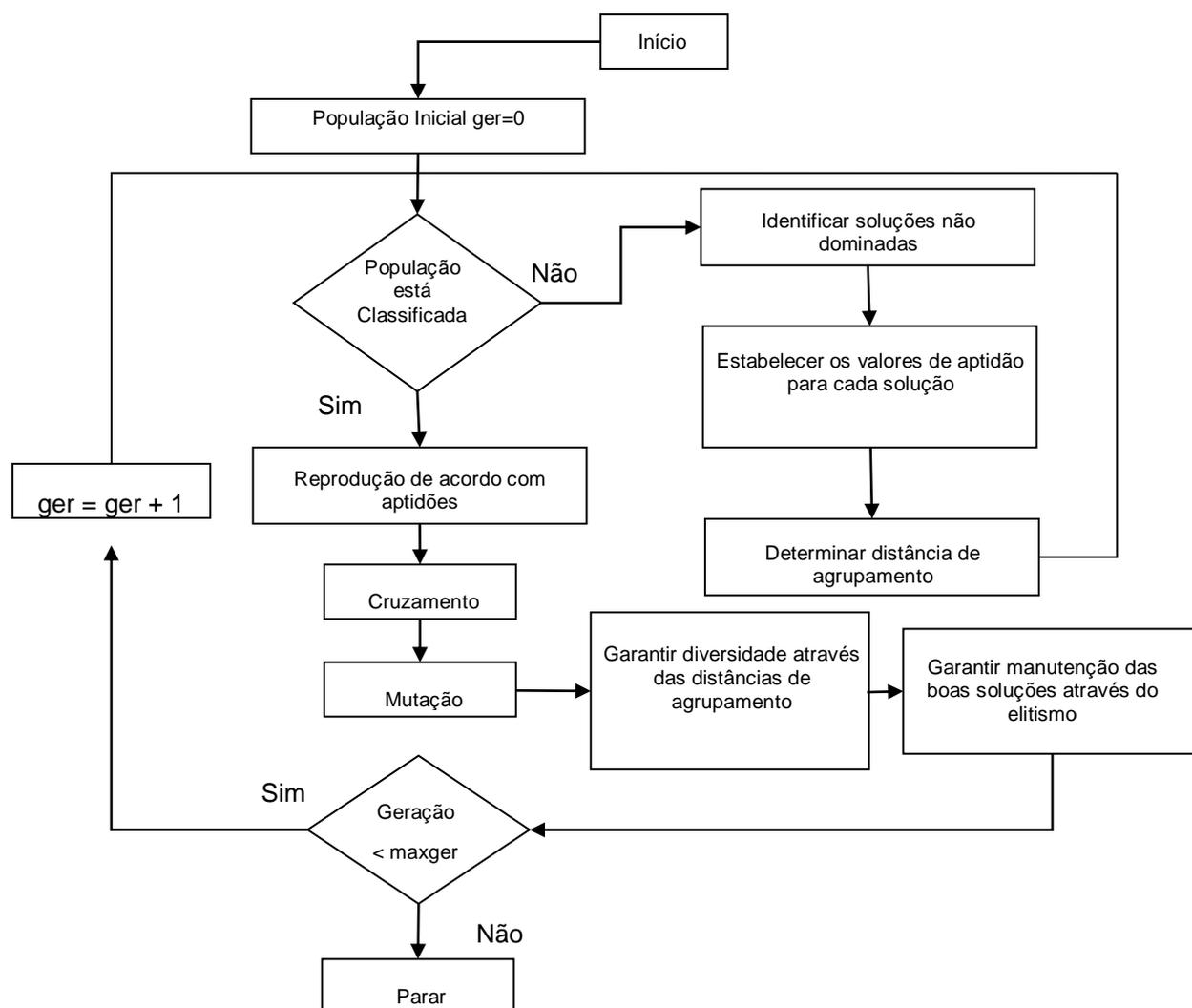


Figura 5.2 - Fluxograma do NSGA-II. Fonte: Sommer (2010).

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados, os resultados encontrados no estudo da condução de calor em PCI, tanto para materiais isotrópicos como anisotrópicos (com inserção de furos).

Este estudo indicará por meio da análise numérica a influência das fibras com ângulos distintos em uma placa de PCI. Tais análises foram aplicadas a problemas potenciais em regime de condução térmica e resolvidas numericamente pelo MEC+ AG para o aumento da transferência térmica, mostrando a configuração eficaz para a distribuição do gradiente dentro da PCI.

Para a análise numérica do comportamento térmico, serão analisados os casos das matrizes isotrópica, anisotrópica. Conforme a Figura 6.1 demonstra os detalhes das condições de contorno e *layout* inicial da PCI.

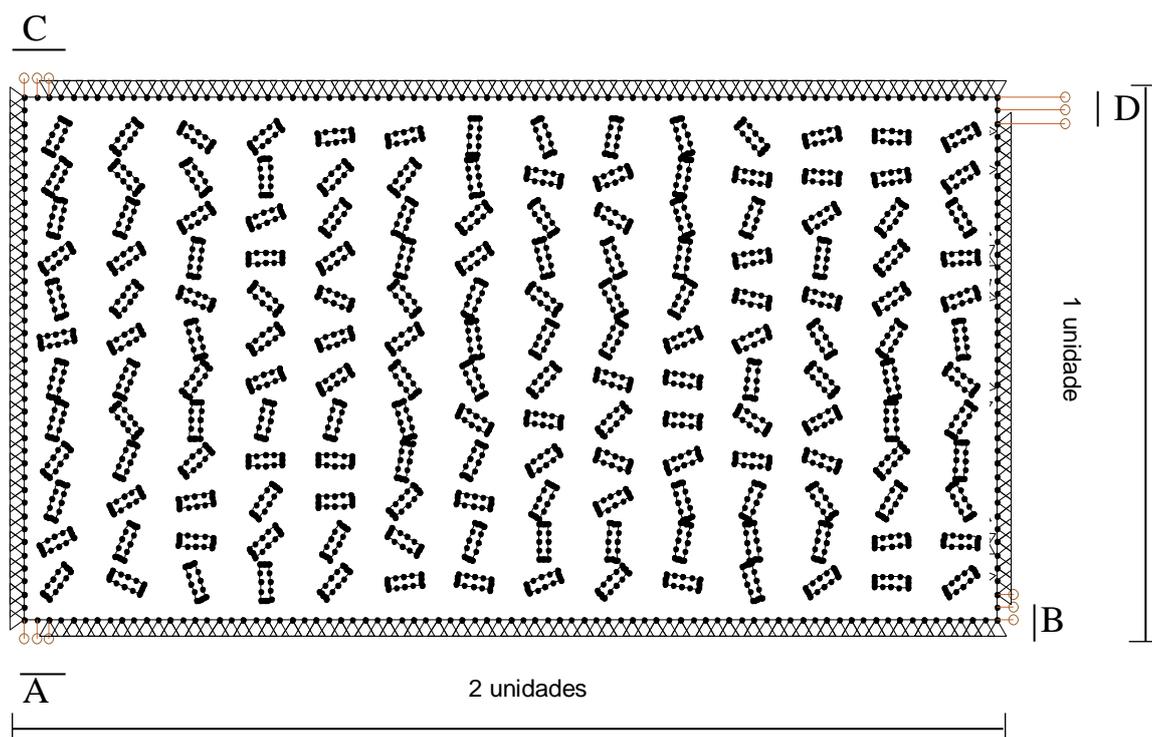


Figura 6.1 - Detalhe das condições de contorno e *layout inicial* da PCI

Para efeito de avaliar a metodologia proposta para a solução de uma PCI é considerado um domínio retangular de 2x1 unidades, sujeito as condições de contorno de Dirichlet em quatro de suas arestas (em A, B, C e D) e Neumann nas demais. Todo o domínio foi discretizado com 1464 elementos de contorno

quadráticos contínuos. O contorno externo foi discretizado com 792 elementos sendo que cada furo foi discretizado com 8 elementos. As condições de contorno impostas com a prescrição de temperatura para todos os casos, foram: aresta A=25°C; aresta B=25°C; aresta C=25°C e na aresta D=100°C. No interior do domínio foram inseridos 168 furos, as quais representam as fibras com características de material de baixa condutividade (isolante). Neste sentido foi prescrito condição de Neumann igual a zero e a integração numérica foi realizada com seis pontos Gauss.

A disposição inicial das fibras foi definida como aleatória, sendo que, para o processo de otimização as variáveis de projeto são os próprios ângulos de rotação das fibras em que cada uma delas tem capacidade de giro de 360° independentes. Para o processo de otimização, a função objetivo consiste em maximizar o fluxo na aresta A e minimizar nas arestas B e C. O objetivo consiste em medir os campos de fluxos nas arestas indicadas como A, B e C, de acordo a função multiobjetivo imposta no AG. A otimização foi conduzida, como já exposto, por meio da utilização do AG NSGA-II.

A Figura 6.2 apresenta o esquema do algoritmo implementado neste trabalho, onde são incluídas as sub-rotinas do MEC/AG. No processo de otimização a função objetivo é definida com a necessidade específica do projeto. Para cada indivíduo há um valor de função objetivo, onde os melhores classificados são selecionados e os piores são descartados. Neste sentido a população convergirá para uma melhor configuração que atenda a especificação de projeto. Para o processo de otimização de melhor disposição das fibras dentro da matriz foi utilizado o AG. Segundo Goldberg (1989) a taxa de mutação indicada é de no máximo 5%, sendo tal recomendação considerada neste trabalho. A Tabela 4 apresenta os parâmetros geométricos utilizados neste trabalho.

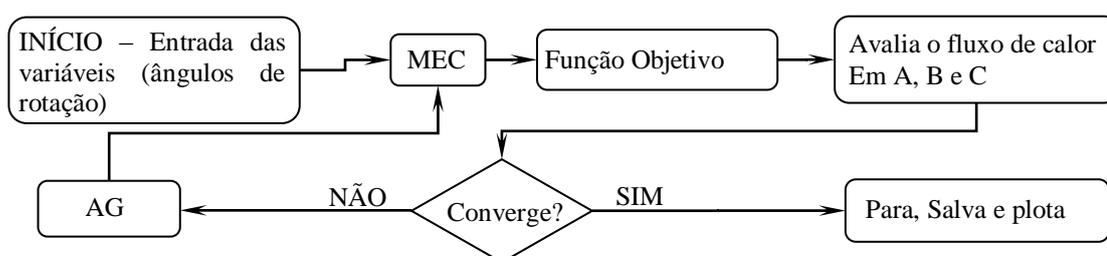


Figura 6.2 - Rotina do Algoritmo Genético associado ao MEC

Parâmetros do AG	
População Inicial	50
População Final	500
Crossover	50%
Mutação	1%

Tabela 4 - Parâmetros para otimização

6.1 Caso 1: Matriz isotrópica

Materiais isotrópicos são quando suas propriedades termo físicas não são dependentes das direções das coordenadas, podendo ser homogêneas e não homogêneas. Nesta seção são apresentados os resultados encontrados para materiais isotrópicos em placas de PCI, com análise da condução do fluxo de calor. As condições de contorno para este caso estão apresentadas conforme Figura 6.3 e

o tensor de condutividade térmica para o modelo isotrópico é dado $k_{xx}=k_{yy}$ $k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Condições de contorno

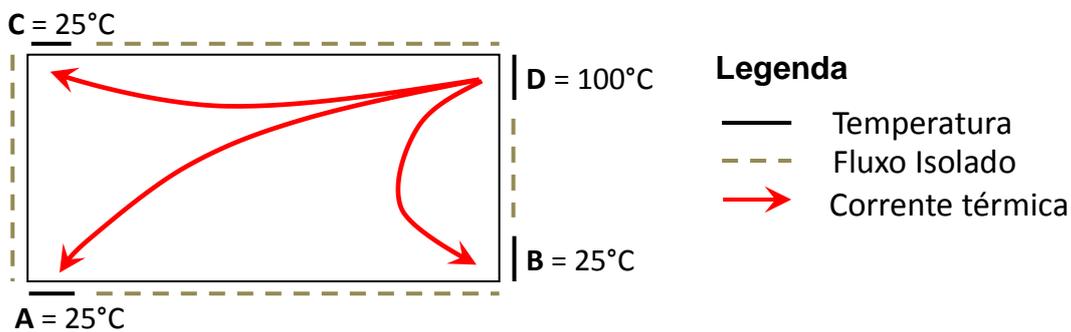


Figura 6.3 - Condição de contorno para o caso 1.

Os próximos tópicos demonstram os progressos dos fluxos nas arestas A B e C devido fluxo de calor sob influência das variáveis de projeto após o processo de otimização, que é possível observar pelas Figura 6.4 até Figura 6.13, para o acompanhamento da evolução do fluxo de calor em cada uma das arestas, onde é visível a maximização na aresta A e a minimização nas arestas B e C configurando a melhor disposição das fibras. Foram analisadas 500 iterações durante o processo de otimização. Cada iteração que durou em média 22 minutos.

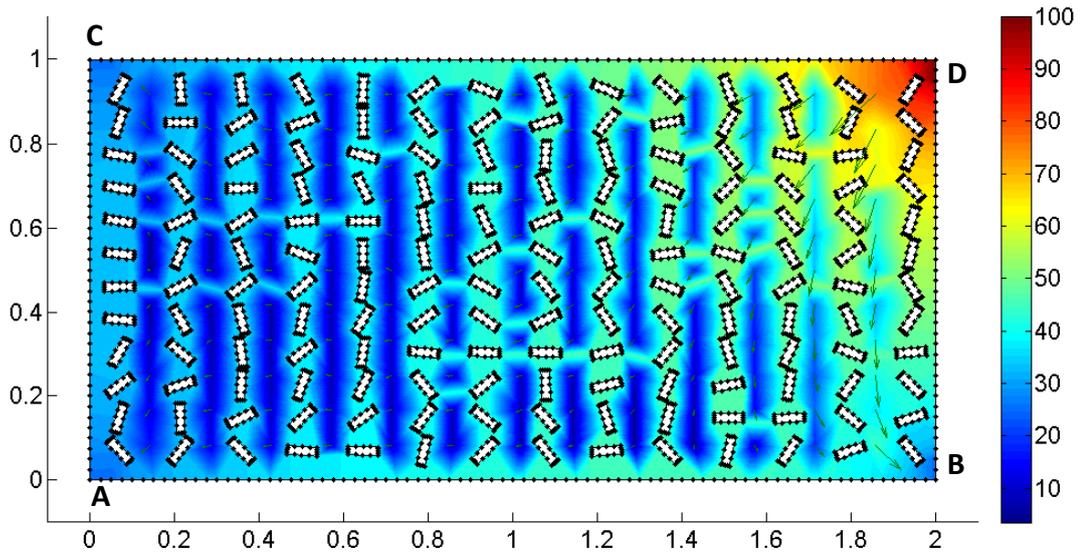


Figura 6.4 - Iteração 1 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 131.29 W/m²,
B= 306.54 W/m² e C= 132.23 W/m²

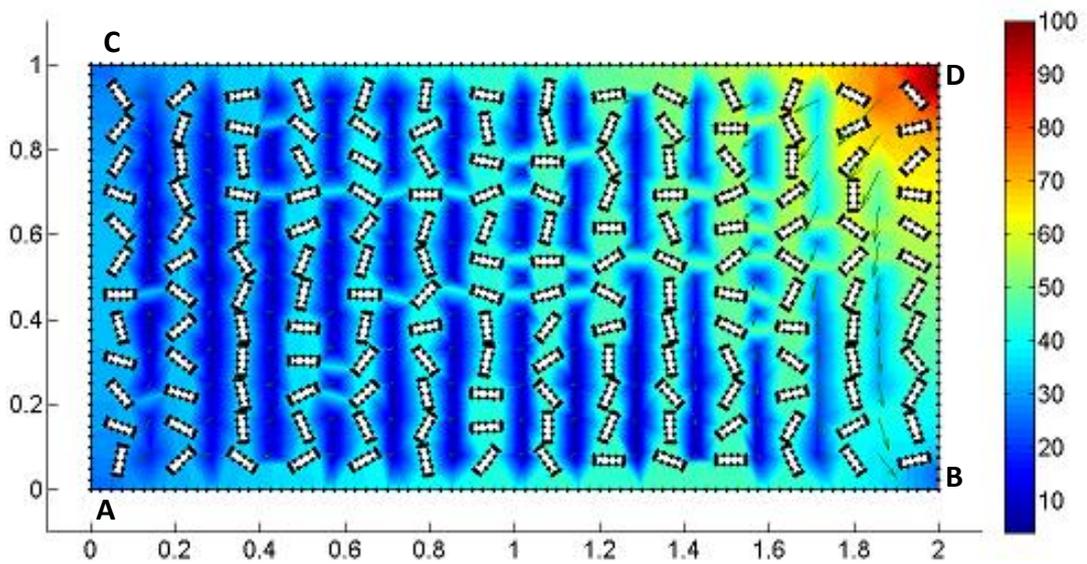


Figura 6.5 - Iteração 50- Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 127.48 W/m²,
B= 282.76 W/m² e C= 139.25 W/m²

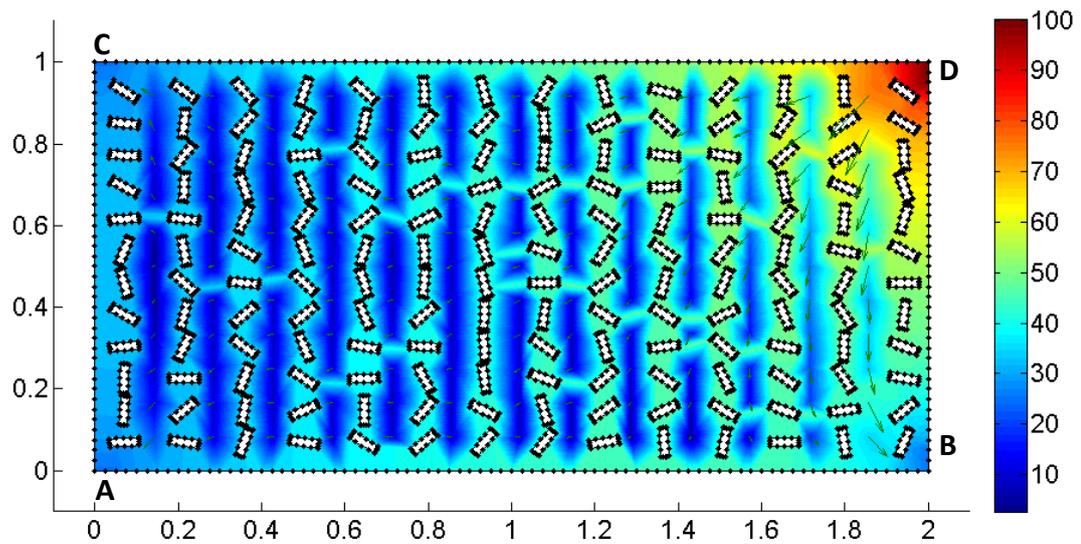


Figura 6.6 - iteração 100 - Evolução do fluxo de calor. Aresta $A= 128.61$ W/m^2 , $B= 281.85 W/m^2$ e $C= 129.95 W/m^2$

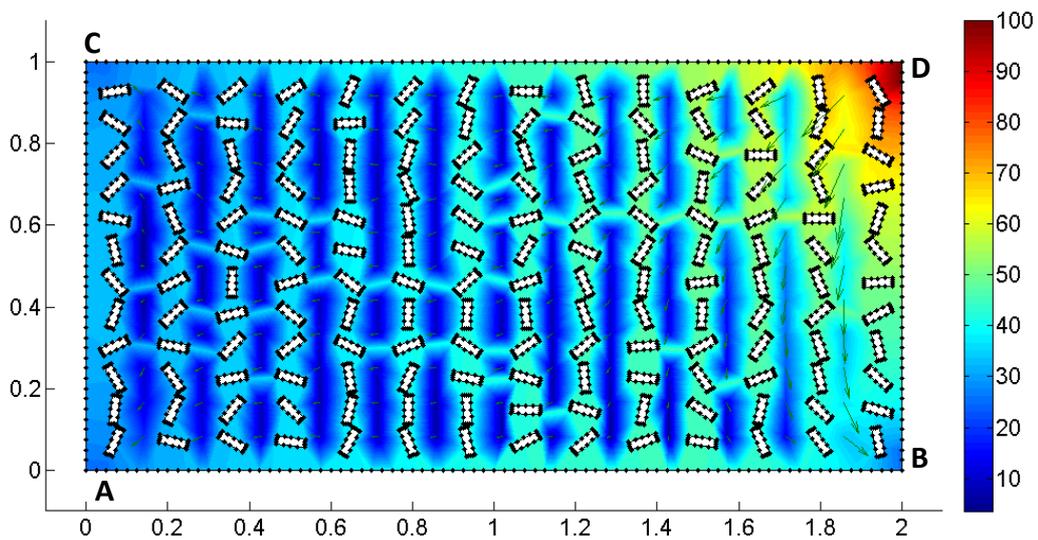


Figura 6.7 - Iteração 150 - Evolução do fluxo de calor. Aresta $A= 128.28 W/m^2$, $B= 281.81 W/m^2$ e $C= 125.65 W/m^2$

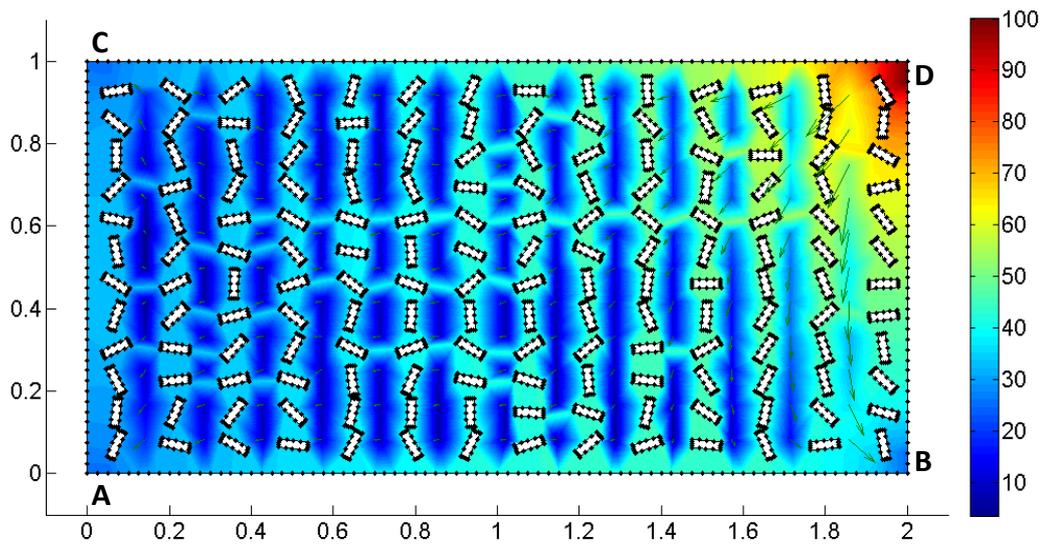


Figura 6.8 - Iteração 200 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 133.34 W/m²,
B= 283.63 W/m² e C= 137.00 W/m²

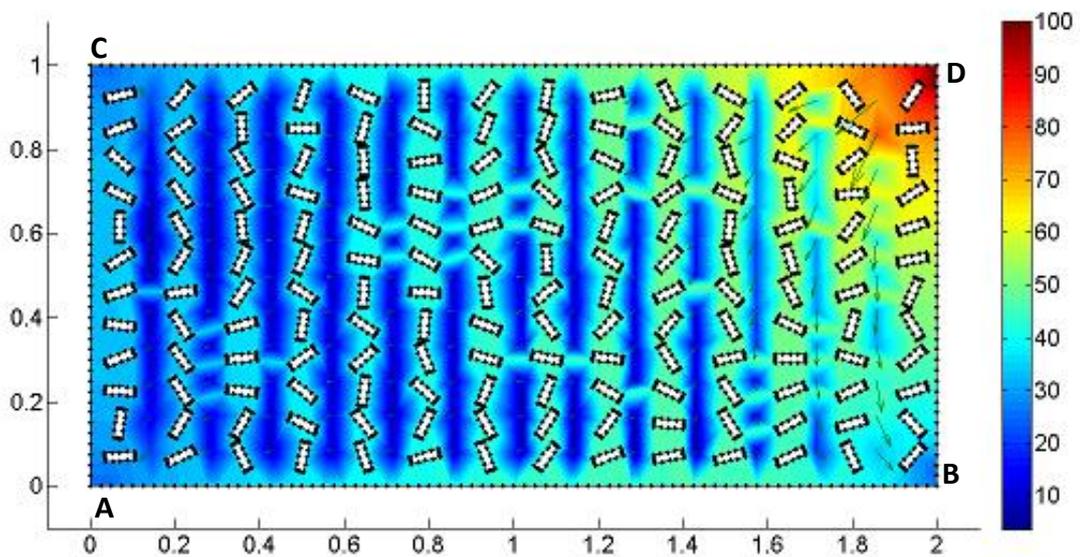


Figura 6.9 - Iteração 250 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 137.30 W/m²,
B= 284.60 W/m² e C= 135.22 W/m²

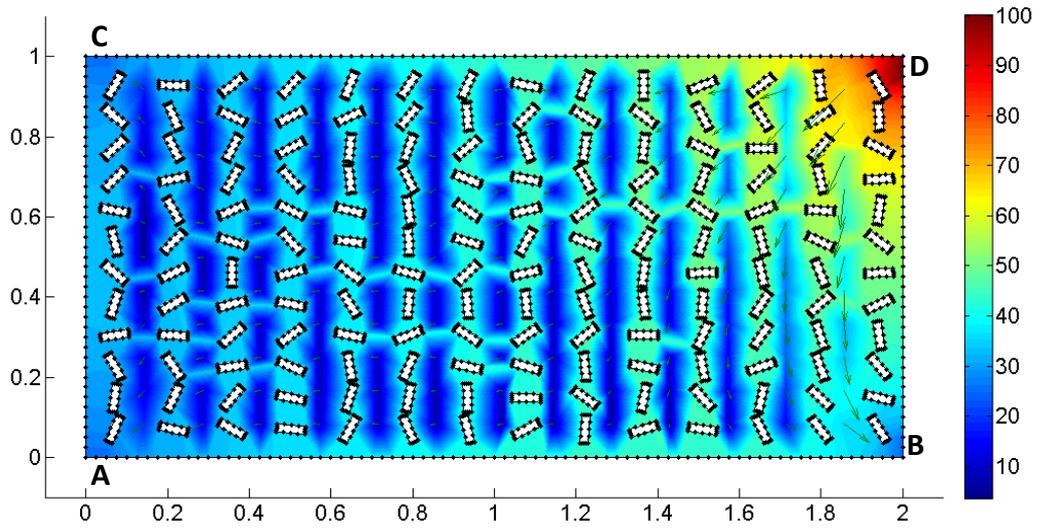


Figura 6.10 - Iteração 300 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 137.73 W/m²,
B= 285.69 W/m² e C= 136.67 W/m²

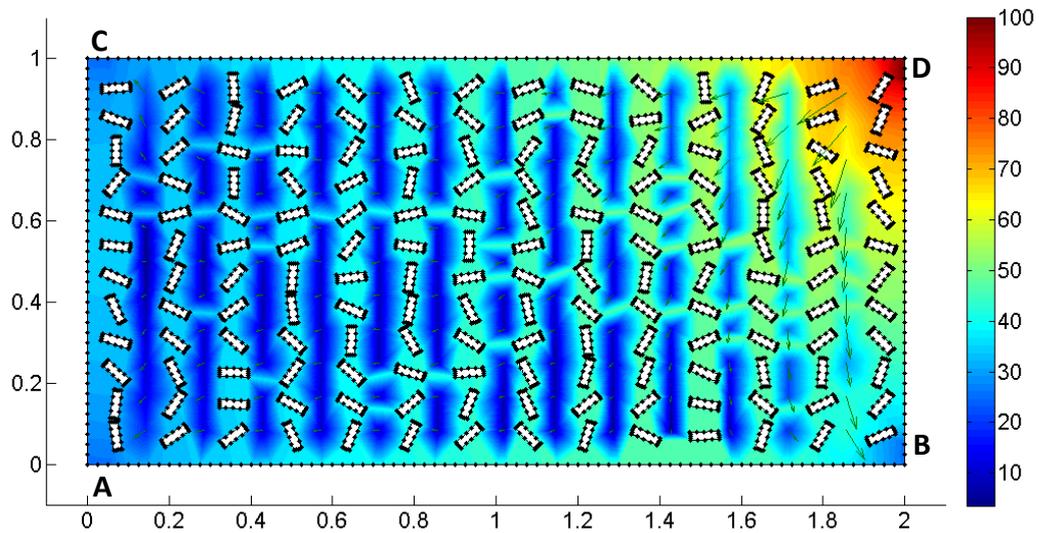


Figura 6.11 - Iteração 350 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 130.69 W/m²,
B= 272.65 W/m² e C= 128.99 W/m²

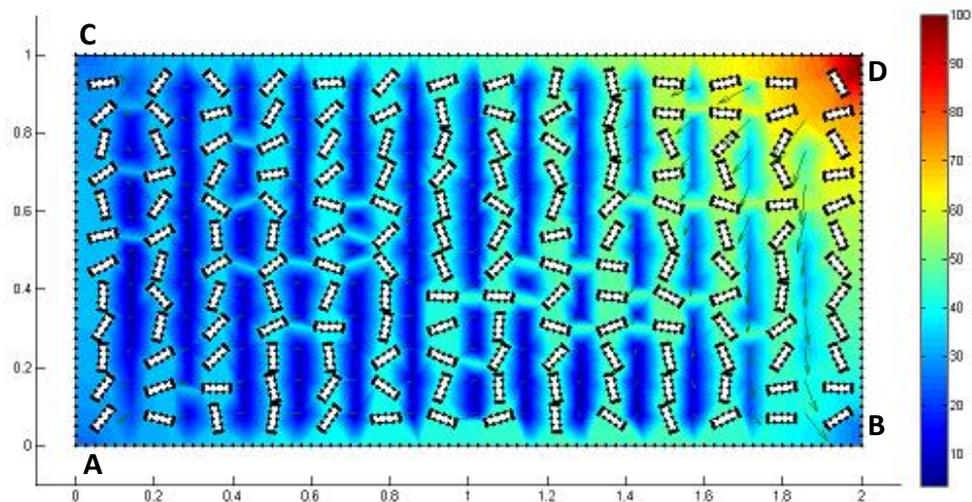


Figura 6.12 - Iteração 400 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 144.08 W/m²,
B= 304.94 W/m² e C= 133.54 W/m²

A Figura (6.12), apresenta a melhor configuração das variáveis de projeto após processo de otimização. No total, foram geradas 500 famílias devido ao processo de *crossover*, estas famílias foram avaliadas para obter o melhor valor de fluxo consecutivamente melhor posição de suas fibras. A iteração que melhor respondeu a equação de Neumann foi a iteração 495 conforme ilustrado abaixo.

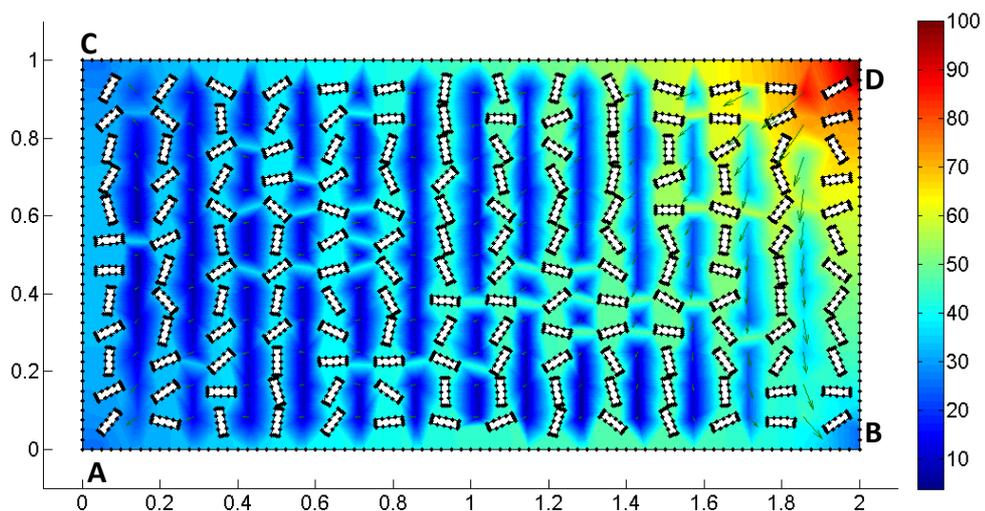


Figura 6.13- Iteração 495- Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 140.92 W/m²,
B= 289.79 W/m² e C= 129.11 W/m² (Ótima).

A Figura 6.14, demonstra de forma comparativa as evoluções dos fluxos de calor nas arestas A, B e C.

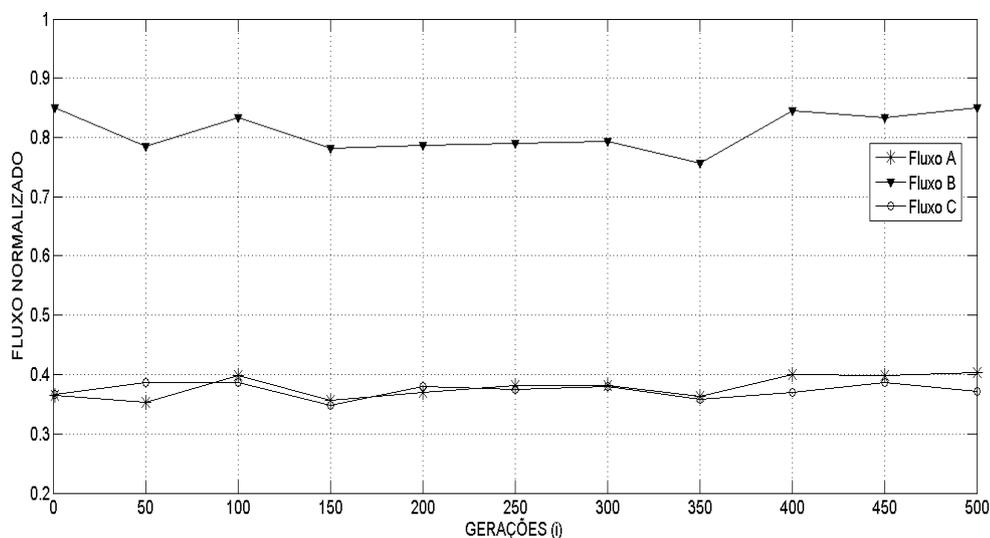


Figura 6.14 – Evolução dos fluxos de calor para as arestas A, B e C.

Conforme a Figura 6.14 função objetivo no ponto A em maximizar o fluxo foi atingida. Observando o ponto A, a iteração 1 iniciou em $131,29 \text{ W/m}^2$ e na solução otimizada chegando ao valor de $140,92 \text{ W/m}^2$ estabelecendo uma ordem de liberação de corrente térmica com melhor disposição das fibras. Para a aresta B o fluxo na iteração 1 iniciou em $306,54 \text{ W/m}^2$, passou pelo processo de otimização para minimização, chegando ao valor de $289,79 \text{ W/m}^2$. Já para a aresta C o fluxo na iteração 1 iniciou em $132,23 \text{ W/m}^2$, passou pelo mesmo processo que no ponto B e com a otimização em $129,11 \text{ W/m}^2$, ou seja para os pontos B e C o processo foi o inverso em A, forçando as fibras fecharem os campos de fluxo e direcionando a condução para a aresta A.

6.2 Caso 2: Matriz anisotrópica

A anisotropia causa uma dissipação de calor com diferentes taxas em diferentes direções e conseqüentemente, o caminho do fluxo de calor não obrigatoriamente coincide com a do gradiente de temperatura num ponto. Nesta seção são apresentados os resultados encontrados para meio anisotrópico em placas de PCI, com análise da condução do fluxo de calor, por meio da análise numérica.

Onde k_{ij} é o coeficiente que representa os termos das propriedades dos tensores nas direções i e j . Seguindo os critérios de anisotropia foi utilizado valores de condutividade térmica para dissipação de calor conforme o modelo abaixo:

As condições de contorno para o caso 2 estão apresentadas conforme a Figura 6.15 e o tensor de condutividade dado por: $k_{xx} < k_{yy} < k_{xy}$, $k = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}$

Condições de contorno

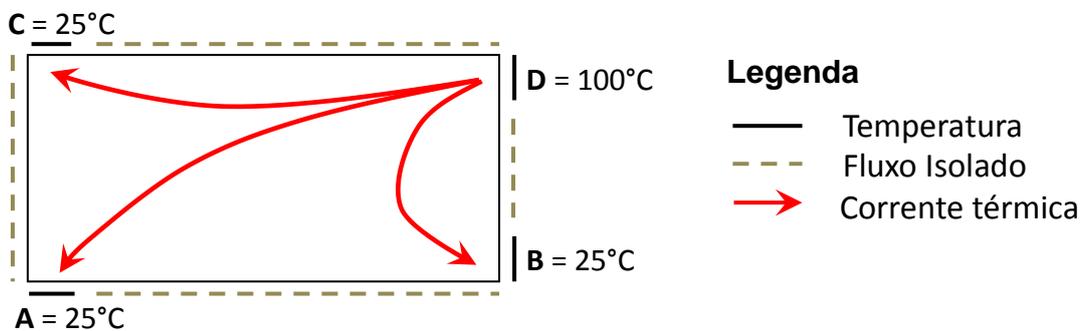


Figura 6.15- Condição de contorno para o caso 2.

A seguir as Figura 6.16 até a Figura 6.25, demonstram os progressos dos fluxos nas arestas A B e C devido fluxo de calor sob influência das variáveis de projeto após o processo de otimização. Será possível acompanhar a evolução do fluxo de calor em cada uma das arestas, onde é visível a maximização na aresta A e a minimização nas arestas B e C configurando a melhor disposição das fibras. Foram analisadas 500 iterações durante o processo de otimização. Cada iteração que durou em média 24 minutos.

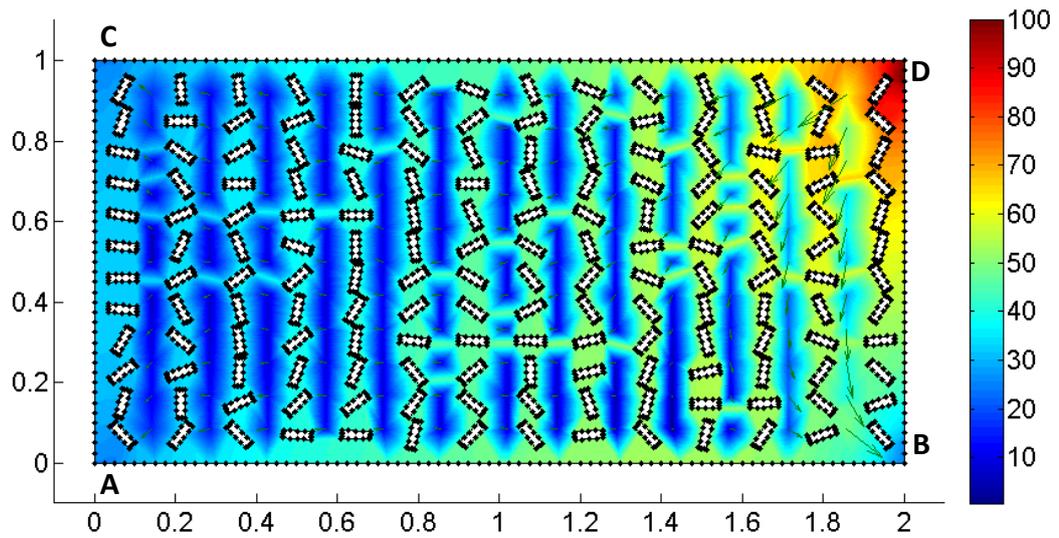


Figura 6.16 - Iteração 1 - Evolução do fluxo de calor. Aresta $A=201.67 \text{ W/m}^2$,
 $B=445.35 \text{ W/m}^2$, $C=135.73 \text{ W/m}^2$

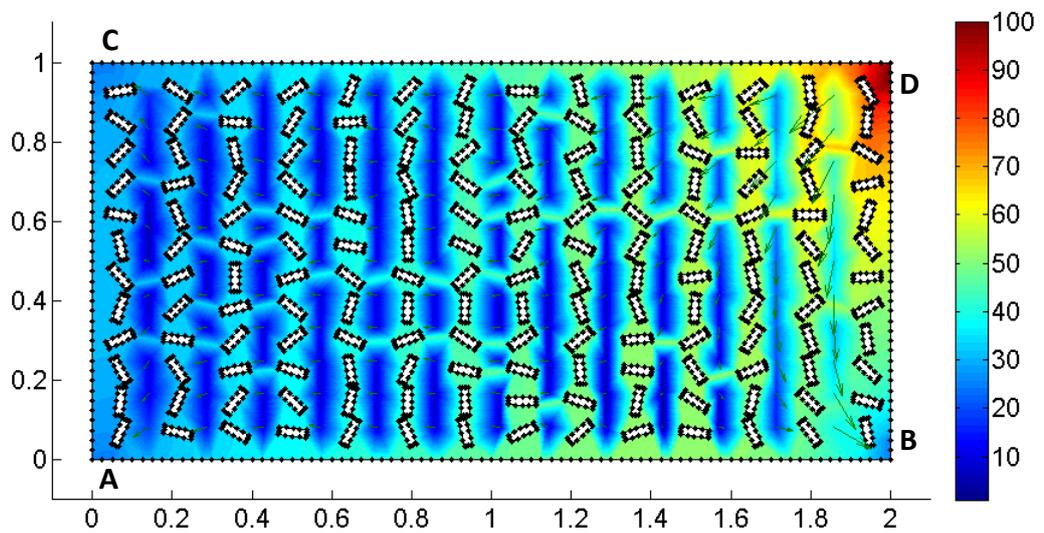


Figura 6.17 - Iteração 50 - Evolução do fluxo de calor. Aresta $A=193.28 \text{ W/m}^2$,
 $B=413.56 \text{ W/m}^2$ e $C=140.07 \text{ W/m}^2$

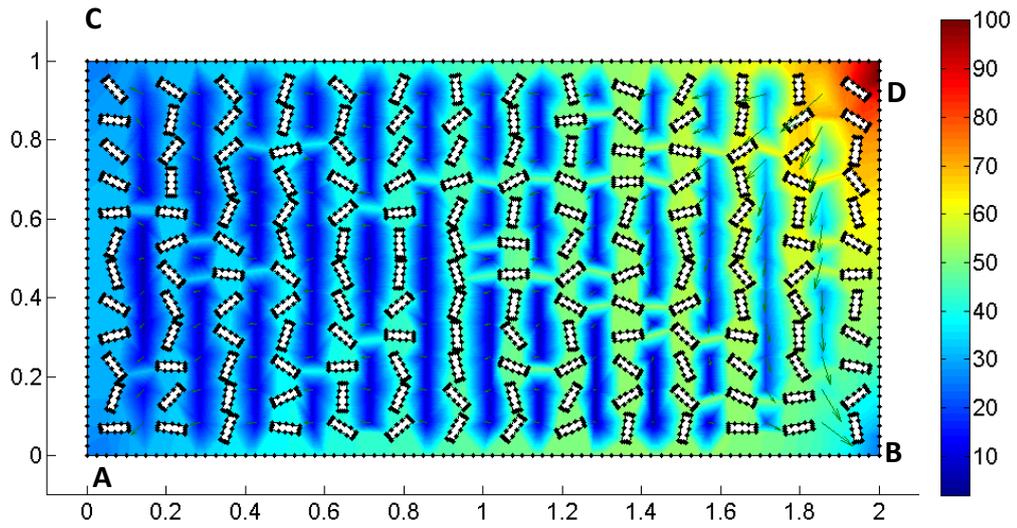


Figura 6.18 - Iteração 100- Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 199.90 W/m², B=405.28 W/m² e C= 127.09 W/m²

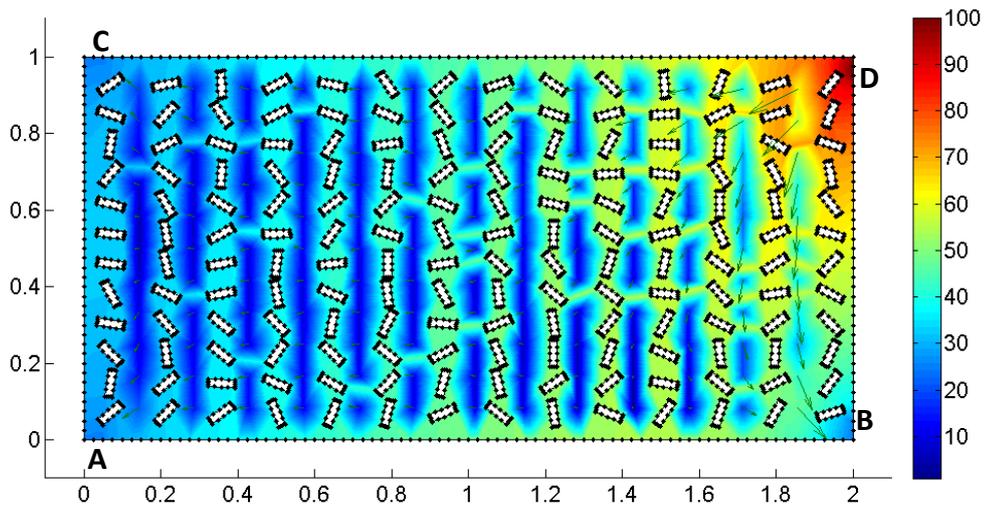


Figura 6.19 - Iteração 150- Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 203.38 W/m², B= 428.51 W/m² e C= 124.93 W/m²

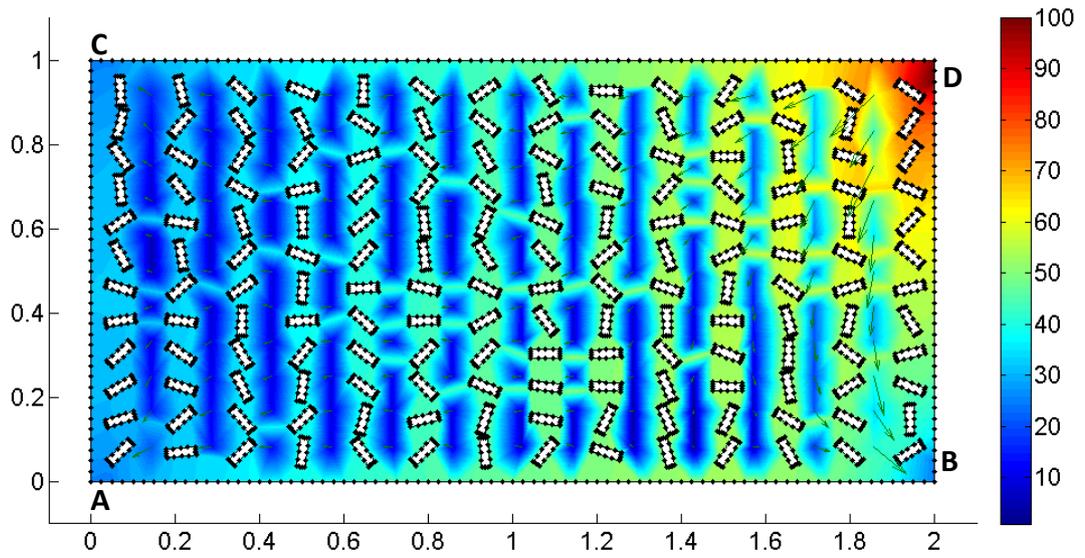


Figura 6.20 - Iteração 200-Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 223.85 W/m², B= 434.04 W/m² e C= 137.12 W/m²

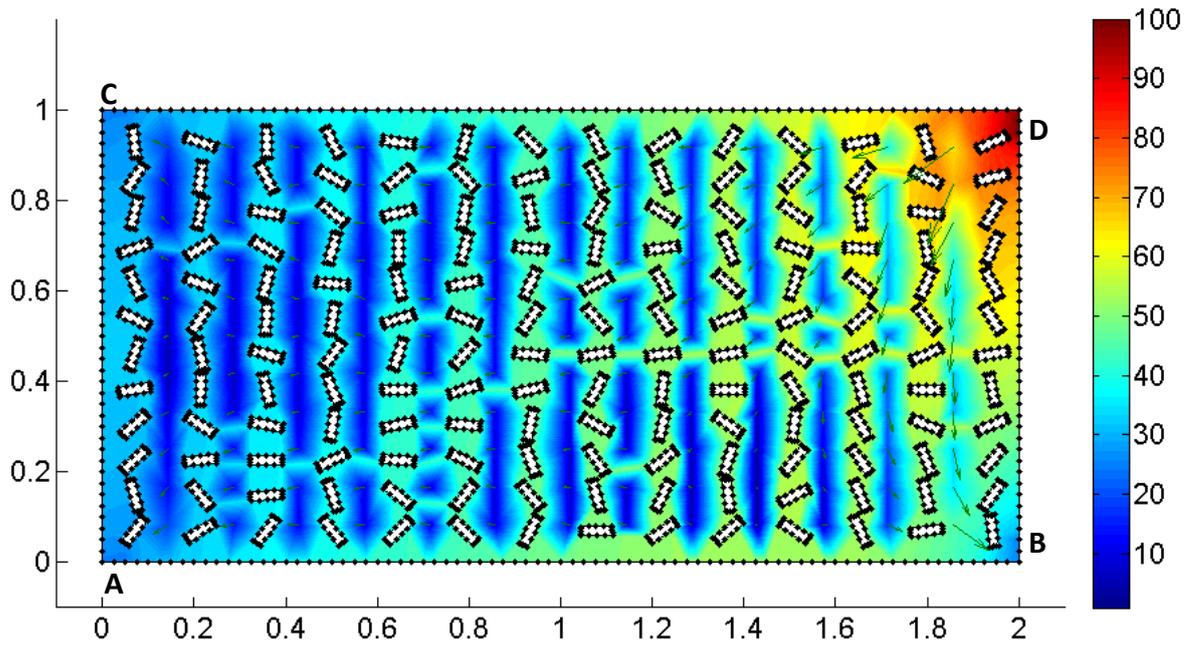


Figura 6.21 - Iteração 250 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 204.90 W/m², B= 419.27 W/m² e C= 121.02 W/m²

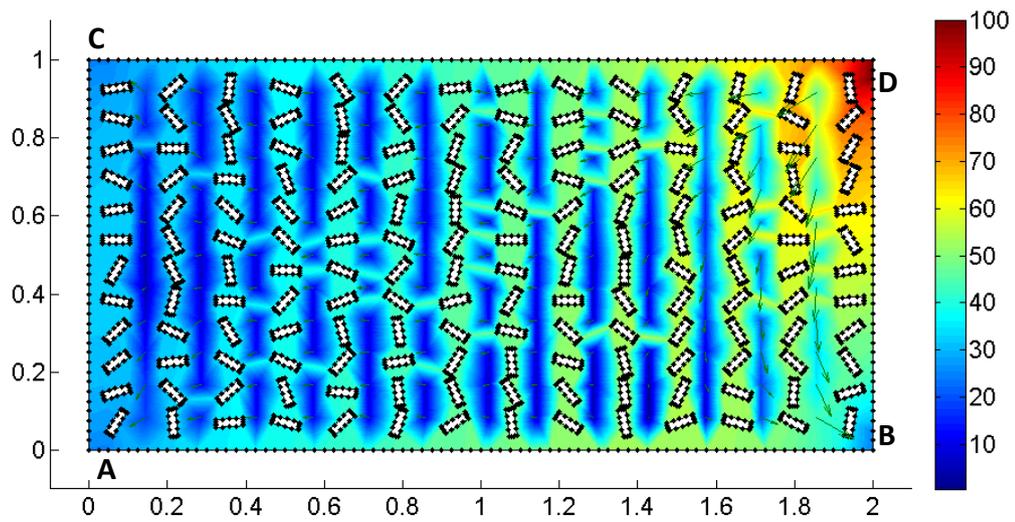


Figura 6.22 - Iteração 300 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 204.72 W/m², B= 421.72 W/m² e C= 119.62 W/m²

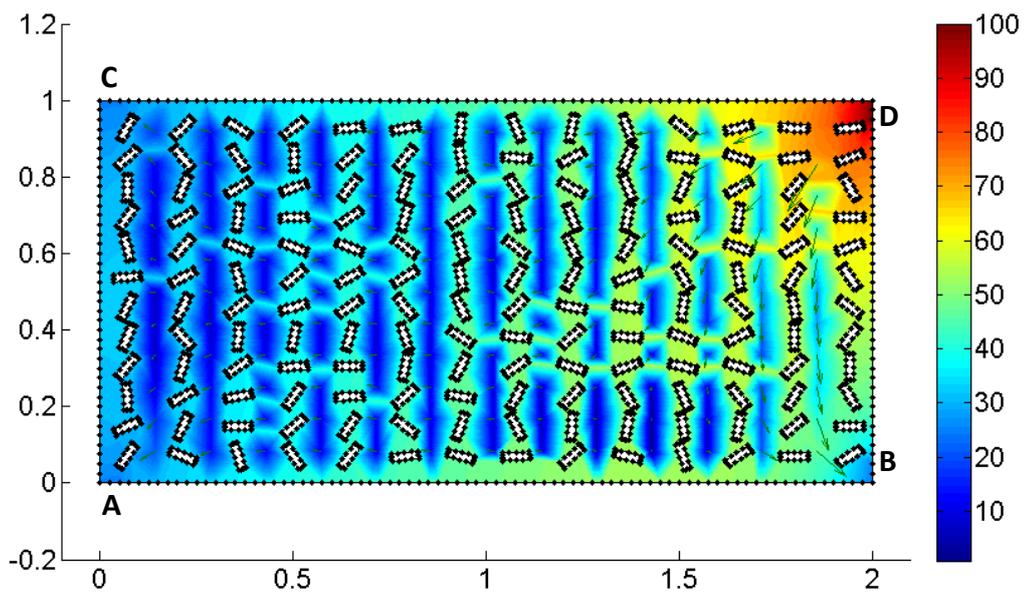


Figura 6.23 - Iteração 350 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 207.51 W/m², B= 400.65 W/m² e C= 138.6 W/m²

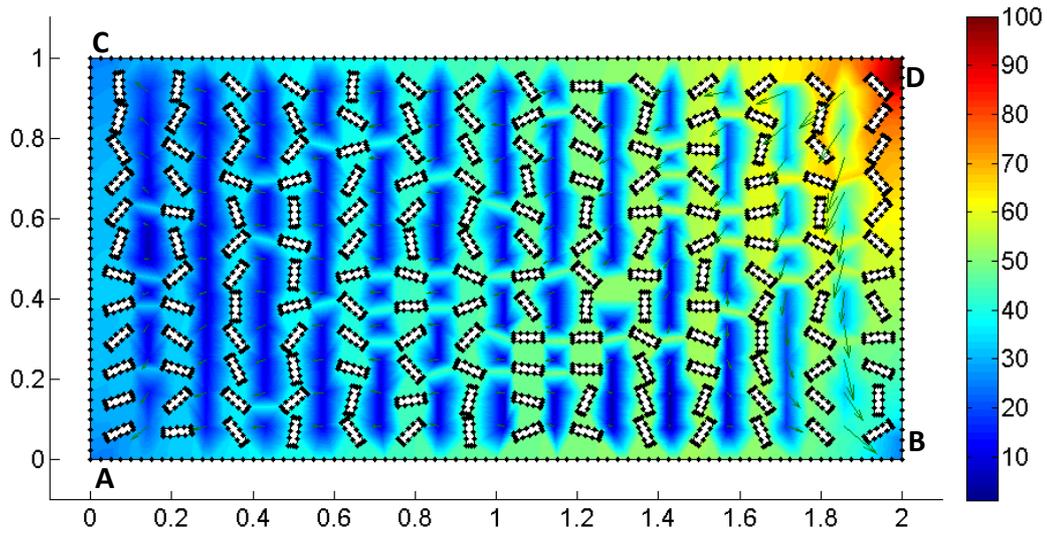


Figura 6.24 - Iteração 400 - Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 202.98 W/m², B= 394.73 W/m² e C= 123.70 W/m²

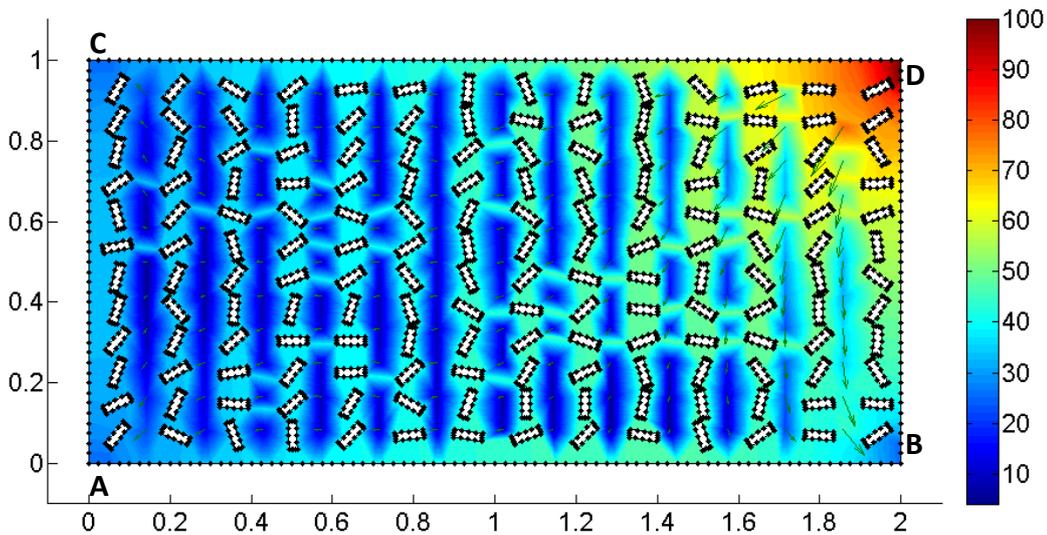


Figura 6.25 -Iteração 471- Evolução do fluxo de calor. Aresta A= 206.16 W/m², B= 395.92 W/m² e C= 122.63 W/m² (Ótima).

A Figura 6.25 apresenta a melhor configuração de projeto, a qual foi atingida na iteração 471, no processo de otimização. Apesar do comportamento anisotrópico da matriz, é possível verificar a tendência das fibras em direcionarem o fluxo de calor

para a aresta A. A Figura 6.26, demonstra de forma comparativa as evoluções do fluxos de calor nas arestas A, B e C. Nesta figura é possível acompanhar o comportamento do fluxo de calor durante a evolução da otimização realizada pelo AG. Na primeira iteração o fluxo de calor na aresta A foi calculado em 201,67 W/m² sendo maximizado para 206,16 W/m². Para a aresta B e C o fluxo de calor na primeira iteração foi calculado em 445,35 W/m²e 135,73 W/m², sendo minimizado na solução ótima para 395,92 W/m² e 122,63 W/m², respectivamente. Apesar de não ser tão evidente quanto no caso isotrópico, também é possível verificar um alinhamento das fibras no sentido diagonal da aresta D para A, com o objetivo de priorizar o fluxo de calor entre estes dois extremos.

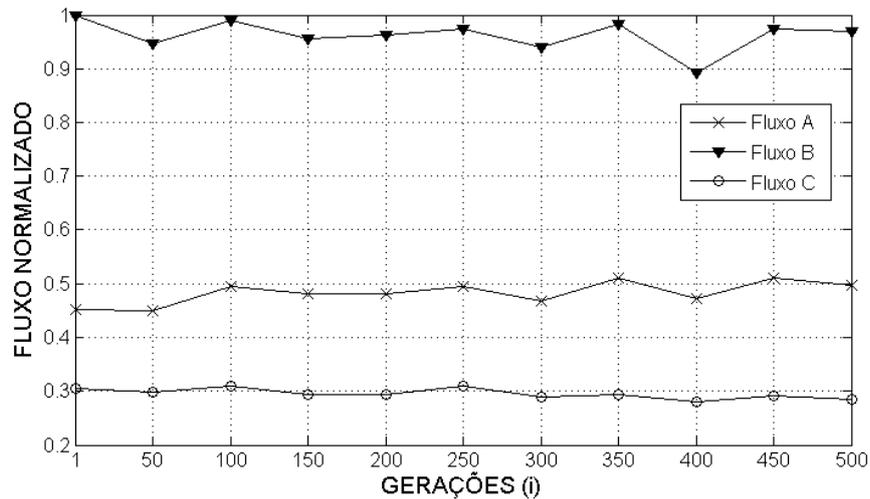


Figura 6.26 - Evolução dos fluxos para as arestas A, B e C.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivo desenvolver um procedimento numérico para a otimização da disposição geométrica das fibras no interior de PCI. O MEC foi empregado como método de solução numérica das equações por apresentar características atrativas aos processos de otimização aqui discutidos. Na implementação da rotina foi utilizada a plataforma em MATLAB para desenvolver a formulação do MEC e ModeFRONTIER por possuir o AG como *toolbox*. Ambas as plataformas foram conectadas para atender ao fluxograma de otimização e apresentaram uma boa eficiência.

O AG apresenta uma grande vantagem frente aos métodos determinísticos por não necessitar de nenhuma informação do gradiente da função. Os problemas analisados neste trabalho eram de grande quantidade de variáveis de projeto e de comportamento não-convexo, o que tornou o AG atrativo.

Dois casos foram analisados, sendo o primeiro uma PCI onde a matriz era de natureza isotrópica e o segundo anisotrópica. A PCI isotrópica apresentou um aumento de fluxo maior de calor na aresta A, muito mais evidente do que para aquela calculada na aresta A para o caso anisotrópico. Uma explicação adequada baseia-se no fato de que o resultado obtido em meio anisotrópico não é fortemente influenciado pela rotação das fibras internas e não auxilia a anisotropia no direcionamento do fluxo de calor. E isto se faz muito mais evidente quando a matriz anisotrópica é comparada com a isotrópica onde o campo de fluxo de calor é mais comportado.

É recomendável que o processo de otimização deva ser estendido para um maior número de iterações, a fim de transformar a solução final mais evidente. Apesar do critério de parada ter sido imposto em 500 iterações, os resultados finais apresentaram coerência com o objetivo da proposta de otimização, tornando a metodologia empregada viável.

7.1 Proposta de continuidade

Com proposta de continuidade deste trabalho apresenta-se algumas sugestões, as quais podem contribuir para esta linha de investigação:

- Estender o problema de sub-regiões, considerando a anisotropia;
- Avaliar outras formas geométricas de inclusões;
- Considerar micro-componentes no interior do domínio como geradores de fonte de calor;
- Avaliar o comportamento termo-elástico da placa de circuito impresso;
- Realizar ensaios experimentais para confrontar os campos de temperatura com a metodologia numérica apresentada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., *Boundary Element Techniques – Theory and Applications in Engineering*, v. 1, Springer-Verlag, 1984.
- WROBEL, L.C., *The Boundary Element Method: Vol.1 Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*, John Wiley & sons, 2002.
- BREBBIA, C.A.; VENTURINI, W.S., *Boundary Techniques: Applications in fluid flow and computational aspects* Southampton: Computational Mechanics Publications, 251 p. 1987.
- VENTURINI, W.S. *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em engenharia*. São Carlos-USP. 184p. Tese (Livre-Docência em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1988.
- HASEBE, N.; WANG, X., *Green's functions for the bending of thin plates under various boundary conditions and applications: a review*. Thin-Walled Structures, v.40, p.611-624, 2002.
- PEREZ, M.M.; WROBEL, L.C., *An integral-equation formulation for anisotropic elastostatics*, J. Appl. Mech., pp.892-902, 1996.
- MANSUR, W. J., PRODANOFF, J. H. A., AZEVEDO, J. P. S., *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos 2- Método dos Elementos de Contorno em Recursos Hídricos*, ABRH - Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Rio de Janeiro.1995.
- OBERG, M.B.A., *Análise numérica via MEC e experimental via imagens térmicas para predição da condutividade térmica efetiva*. 2013. x, 66 f., il. Monografia (Bacharelado em Engenharia Mecânica) — Universidade de Brasília, Brasília, 2013.
- SUVEGES, J. M. C., *Estudo Acerca de Detecção de Danos em Estruturas via Método de Otimização*, Itajubá, 96 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá,2014.

MUNDSTOCK, D. C. , *Otimização de Forma utilizando o Método dos Elementos de Contorno e Cálculo de Sensibilidade por Variáveis Complexas*, (Dissertação de Mestrado), PROMEC, Porto Alegre, 2006.

AMARAL, E.C., *Otimização de Forma para Problemas de Estado Plano utilizando o Método dos Elementos de Contorno*- (Dissertação de Mestrado) -UENF,2004.

FERREIRA, M.D.C., *Análise Inversa Utilizando o método dos elementos de contorno e correlação de imagens digitais*, (Tese de Doutorado), Escola de engenharia de S. Carlos,2012.

BUENO, F.R., *Análise Inversa com o uso de Algoritmo Genético para a localização de tumores de pele em três dimensões utilizando Método dos Elementos de Contorno com a reciprocidade Dual*, (Dissertação de Mestrado), UNB, 2012.

MORAES, A. L., *Otimização do processo produtivo de montagem de placas SMT, especificamente aparelhos celulares, rádios de comunicação e placas de estação de rádio base*. (Monografia) –FAJ, 2005.

KOITO, Y., KUBO, Y., TOMIMURA, T., *Numerical Analysis of Printed Circuit Board with Thermal Vias: Heat Transfer Characteristics under Nonisothermal Boundary Conditions* - 2013.

DEDE E.M., *Simulation and optimization of heat flow via anisotropic material thermal conductivity*, Computational Materials Science, 50 (2), 510-515, 2010.

GUOQUAN, R; DONGWEI, LI.; YINGQI, J.; *Modal Analysis of the printed circuit board based on Finite Element Method*. International Conference on Computer Science and Electronic Technology (ICCSET), 150-154, (2014).

ANFLOR,C.T.M, ALBUQUERQUE,E.L.,WROBEL,L.C., *A topological optimization procedure applied to multiple region problems with embedded sources*, International Journal of Heat and Mass Transfer ,121–129,2014.

ANDONOVA, A. and KAFADAROVA, N., *PCB thermal design improvement through thermal vias*. WSEAS, Bulgaria, 2009.

ZARICHTA, C., *Um Estudo sobre Condutividade Térmica Efetiva em Materiais Microporosos- Utilizando o MEC*, (Dissertação de Mestrado), UFRGS, Porto Alegre. Brasil, 2008.

VITORIO J. P. C., *Análise da otimização topológica de estruturas planas utilizando o Método dos Elementos de Contorno*. 2014. 146 p., (Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

VIANNA, L.C.C., *Otimização de Seções Transversais de Concreto Armado: Aplicação a Pórticos*. 2003. (Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

LUENBERGER, D. G., *Linear and Nonlinear Programming*, 2ª ed, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1984.

SOUZA, T. C. A., *Métodos subgradientes em otimização convexa não diferenciável*. 104f. (Dissertação Mestrado em Modelagem Computacional) – Faculdade de Engenharia, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2008

MICHALEWICZ, Z., HINTERDING, R. and MICHALEWICZ, M., *Evolutionary Algorithms, Chapter 2 in Fuzzy Evolutionary Computation*, W. Pedrycz, Kluwer Academic, 1997. In: <http://www.coe.uncc.edu/~zbyszek/papers.html>. Acesso em 15/02/2015.

OLIVIERI, B. P. *Otimização do Projeto de Pontes-Pré, Moldadas pelo Método dos Algoritmos Genéticos*, (Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil) Rio de Janeiro, XIV,129 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., 2004.

DARWIN, C., *Origem das espécies e a seleção natural*. Curitiba: Hemus. (Obra originalmente publicada em 1859), 2000.

AZUMA, R. M., *Otimização multiobjetivo em problema de estoque e roteamento gerenciados pelo fornecedor*. -Campinas, SP: [s.n.], 2011.

TICONA, W.G.C., *Algoritmos evolutivos multi-objetivo para a reconstrução de árvores filogenéticas*. Tese de doutorado, ICMC, USP, São Carlos, S.P.,2003.

MACIEL, R. S., *Otimização multiobjetivo na análise da integração de geração distribuída às redes de distribuição*. Ilha Solteira: [s.n.], 2012. 144 f.: il. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2012.

ADBY, P. R. and DEMPSTER, M. A. H., *Introduction to Optimization Methods*, Chapman and Hall Mathematics Series, Cambridge, Great Britain, 1974.

BOX, M. J., DAVIES, D. and SWANN, W. H., *Non-Linear Optimization Techniques*, Monograph nº 5, Imperial Chemical Industries Limited, Great Britain, 1969.

SILVA, E. M., SILVA, E. M. GONÇALVES, V, Murolo, A. C, *Pesquisa Operacional para cursos de Administração e Engenharia*. 4ª ed., Atlas, São Paulo, 2010.

PUCCINI, A. L., *Introdução à Programação Linear*, 2ª ed. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1990.

MATEUS, G. R. e LUNA, H. P. L., *Programação Não-Linear*, V Escola de Computação, Belo Horizonte, 1986.

COLORNI, A.; DORIGO, M., MANIEZZO, V., *Distributed optimization by ant colonies*. In: European conference of artificial life, Paris. Proceedings... Paris: Elsevier Publishing, 1992. p. 134-142. 1991.

KARABOGA, D., *An idea based on honey bee swarm for numerical optimization*. Technical Report TR06, Erciyes University, Engineering Faculty, Kayseri, Turkiye. 2005.

BORCHERS B, MITCHELL J.E. *An improved branch and bound algorithm for mixed integer nonlinear programs*. Computers & Operations Research, 21:359-67, 1994.

AGHAZADEH F, MEYBODI M.R., *Learning Bees Algorithm for Optimization*. International Conference on Information and Intelligent Computing IPCSIT vol.18, Singapore. 2011.

TEOTÔNIO, K. L., *Otimização topológica em problemas de elasticidade linear usando o Mec*. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Integridade da Engenharia, Publicação Nº013A/2014, Faculdade UnB Gama/FT/Universidade de Brasília, DF, 106 p. 2014.

LASTIRI, C. P. e R. M. O. PAULETTI., *Aplicação de Redes Neurais Artificiais à Engenharia de Estruturas*. In: XXXI Jornadas Sud-Americanas de Ingenieria Estructural, FIUNC, Mendoza, Argentina, 2004.

- DEB, K.; AGRAWAL, S.; PRATAP, A.; MEYARIVAN, T.A, *Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II* Kanpur Genetic Algorithms Laboratory, Kanpur, India, 2000.
- HOLLAND, J. H. (1975/1992). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Cambridge, MA: MIT Press. Second edition, First edition, 1975.
- GOLDBERG, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- DAVIS, L., *Handbook of Genetic Algorithms*, International Thomson Computer Press, 1996.
- MICHALEWICZ, Z., *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1996.
- ALBRECHT, C. H., *Algoritmos Evolutivos Aplicados à Síntese e Otimização de Sistemas de Ancoragem*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro/ COPPE, Rio de Janeiro, 2005.
- SILVA, J. R. C., *Otimização da Posição de Aerogeradores em Parque Eólico*, UNB-Brasília, 2014.93.p. 210 x 297.Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade UnB Gama e Faculdade de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia, 2014.
- SRINIVAS, N., DEB, K., *Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms*. In: *Evolutionary Computation*, 2(3): pp 221-248, 1994.
- DEB, K., S. AGRAWAL, A. PRATAP, and T. MEYARIVAN, *A fast elitist nondominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II*". In M. S. et al. (Ed.), *Parallel Problem Solving from Nature – PPSN VI*, Berlin, pp. 849–858. Springer,2000.
- SOMMER, R. C., *Otimização de estruturas por algoritmos genéticos submetidas a restrições de flexibilidade e flambagem*,2010 <http://hdl.handle.net/10183/27258> acesso em 15/02/2015.
- DEB, K. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. Chichester: John Wiley & Sons,515p. 2004.

OLIVEIRA, R.T.P., FILHO, A. A., *Otimização de ganhos de um controlador de movimento longitudinal de uma aeronave*. VII Congresso Nacional de engenharia Mecânica, Campina Grande, 2010.

SILVA, J.R.C., *Otimização da Posição de Aerogeradores em Parque Eólico*. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia, Publicação 019A/2014, FGA/ FT/ Universidade de Brasília, DF, 93.p.,2014.

PEREZ, M.M.; WROBEL, L.C., *An integral-equation formulation for anisotropic elastostatics*, J. Appl. Mech., pp.892-902, 1996.