



Universidade de Brasília
Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciências da Informação e
Documentação
Departamento de Economia

MUDANÇAS ESTRUTURAIS E ALOCAÇÃO DE INVESTIMENTOS NUMA
ECONOMIA MULTI-SETORIAL

Roberto Batista dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Silva Azevedo Araujo

Brasília, julho de 2014



Universidade de Brasília
Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciências da Informação e
Documentação
Departamento de Economia

MUDANÇAS ESTRUTURAIS E ALOCAÇÃO DE INVESTIMENTOS NUMA
ECONOMIA MULTI-SETORIAL

Roberto Batista dos Santos
Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Economia
do Departamento de Economia da UnB como requisito parcial
para obtenção do título de Doutor em Economia

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Silva Azevedo Araujo

Brasília, julho de 2014

*À minha esposa, Sílvia.
Aos meus filhos, Pedro e Bia.
Aos meus pais, Pedro e Aparecida.*

AGRADECIMENTOS

À Universidade de Brasília (UnB), pela oportunidade de acesso ao curso de Doutorado em Economia. Aqui pude crescer como aluno através das lições de excelentes professores; pude crescer como professor por meio dos exemplos de grandes mestres que tive e crescer como pessoa através das belas amizades fiz.

À Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), por ter proporcionado esse período de estudo com a licença e apoio financeiro. Aos meus colegas e professores do Departamento de Matemática e Informática, por autorizar e viabilizar meu afastamento das atividades didáticas.

Ao Professor Ricardo Silva Azevedo Araújo, meu orientador, que com seu apoio, sugestões e questionamentos, tornou possível a realização desse trabalho. Estou seguro de que sua orientação transcendeu o ambiente acadêmico, são lições que também levo pra minha vida. Foi um privilégio tê-lo como parte desta tão importante fase da minha vida.

Aos professores componentes da banca de defesa do exame de qualificação e da tese, Professores Joanelio Rodolpho Teixeira, Helmar Nunes Moreira, Heglehyschynton Valério Marçal, Tito Belchior Silva Moreira e Vander Mendes Lucas pelos seus valiosos comentários avaliativos/corretivos, essenciais ao aperfeiçoamento do estudo.

Aos professores Antônio Magon Barros, Francisco Francineide Granjeiro e Mauro Guterres Barbosa que foram parceiros e incentivadores nessa minha empreitada.

À minha esposa, Sílvia, por ter aceitado a minha ausência reconhecendo a importância do tempo dedicado aos meus estudos.

À minha família e principalmente aos meus pais, Pedro e Aparecida, os sacrifícios de outrora são agora recompensados. Sintam-se como legítimos co-autores deste trabalho.

Por fim, agradeço ao meu bom Deus. Nas horas mais difíceis, aquelas em que parece que não há mais ninguém a recorrer, ainda podemos contar com Ele. Seja feita vossa vontade!

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar mudança estrutural e alocação de investimento em uma economia fechada e multi-setorial, tendo como principal motivação os artigos de Ngai & Pissarides de (2007) e Feldman (1928). A maioria dos modelos faz uma abordagem em que a mudança estrutural surge como resultado da interação do progresso tecnológico e da existência de preferências não homotéticas devido à Lei de Engel. O nosso modelo trata da questão de acumulação de capital como uma possível fonte a mais da mudança estrutural.

Nesse sentido, obtivemos os níveis de investimento ótimos para cada setor da economia quando a economia está em estado estacionário. A taxa de investimento no setor de capitais depende diretamente da taxa de crescimento da população e do fator da alocação de capital no setor de capital e depende inversamente da taxa de desconto intertemporal. As taxas de investimento dos outros setores (setores de consumo) dependem diretamente da propensão marginal a consumir do respectivo setor e da taxa de desconto intertemporal, e depende inversamente da taxa de investimento do setor de capitais. Encontramos os níveis de estoque de capital para cada setor e concluímos que, em estado estacionário, a taxa de crescimento do estoque de capital tende para uma constante que depende da taxa de progresso técnico e do fator de alocação de capital. No que diz respeito à mão de obra, os resultados nos mostram que o setor de bens de capital absorve a maior parte da mão de obra. Também mostramos que os mercados descentralizados tendem a imitar o comportamento dinâmico da economia centralizada planificada.

Considerando uma economia com três setores e sem progresso tecnológico, mostramos que as equações de movimento dos estoques de capitais são localmente estáveis. Esse é um resultado que não se verifica no modelo de Feldman (1928) onde as equações têm soluções instáveis. Também, numa ilustração numérica, observamos que se a economia está em estado estacionário, a alocação de mão de obra obedece a seguinte distribuição: 5% para o setor 1 (agricultura), 7% para o setor 2 (industrial) e 88% para o setor 3 (serviços).

Palavras-chave: Alocação de Investimento, Crescimento, Mudança Estrutural, Multi-Sector

ABSTRACT

The objective of this work is to study structural change and allocation of investment a closed and multi-sectoral economy, whose main motivation articles by Ngai & Pissarides of (2007) and Feldman (1928). Most models is an approach where structural change arises as a result of the interaction of technological progress and the existence of preferences not homothetic due to Engel's Law. Our model addresses the issue of capital accumulation as a possible additional source of structural change.

Accordingly, we obtained the optimal investment levels for each sector of the economy when the economy is in steady state. The rate of investment in the sector capital depends directly on the rate of population growth and factor allocation capital in the sector and depends inversely on the intertemporal discount rate. Investment rates of other sectors (consumer of sectors) directly depend on the marginal propensity to consume of the respective sector and the intertemporal discount rate, and depends conversely the rate of investment in the capital sector. Find stock levels capital for each sector and concluded that, at steady state, the growth rate capital stock tends to a constant that depends on the rate of technical progress and capital allocation factor. With respect to labor, the results in show that the capital goods sector absorbs most of the labor force. We also show that decentralized markets can mimic the dynamic behavior of the economy centralized planned.

Considering an economy with three sectors and no technological progress, we show that the equations movement of capital stocks are locally stable. This is a result not is verified in Feldman (1928) where the model equations have unstable solutions. Also, a numerical illustration, we observe that if the economy is in steady state, the allocation of labor obeys the following distribution: 5% for sector 1 (agriculture), 7% for Sector 2 (industrial) and 88% for the third sector (services).

Keywords: Allocation of Investment, Growth, Structural Change, Multi-Sector

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão da Literatura	10
3	Economia com Vários Setores	28
3.1	O Modelo	28
3.2	Investimento Ótimo	33
3.3	Equivalência ente Comando Ótimo e Equilíbrio Competitivo	41
4	Economia com Três Setores	44
4.1	Introdução	44
4.2	Estudo de Estabilidade	46
4.3	Evidências Empíricas	52
4.4	Ilustração Numérica do Modelo	55
5	Conclusão	63
A	Anexo ao Capítulo 2	71

A.1	O Hamiltoniano	71
A.2	Equação de Capital	73
A.3	Força de Trabalho no Setor m	74
A.4	Nível Ótimo de Investimento	75
A.5	Os Valores Ótimos	77
A.6	Correspondente Modelo de Uzawa	79
B	Anexo ao Capítulo 3	81
B.1	Equivalência	81
B.2	O Problema da Firma	82
C	Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz	83

Lista de Figuras

1.1	Participação do Emprego Setorial no Emprego Total (%)	5
1.2	Participação dos Três Setores na Produção	6
1.3	Distribuição de Renda em 1970	8
1.4	Distribuição de Renda em 2000	9
4.1	Participação do Emprego nas Economias dos Estados Unidos e Alemanha .	54
4.2	Participação de cada Setor no Agregado Econômico	55
4.3	Evolução do Estoque de Capital (Parâmetros da Literatura)	59
4.4	Participação de mão-de-obra	61
4.5	Evolução do Estoque de Capital (Parâmetros Ngai & Pissarides (2007)) . .	62
4.6	Modelo Ngai & Prissarides	62
4.7	Modelo da tese	62

Capítulo 1

Introdução

Mudança estrutural se refere a variações na composição setorial de uma economia. Essas variações podem ser medidas através da participação de cada setor no produto nacional, ou alternativamente, através da parcela da mão-de-obra empregada em cada um dos setores. É menos comum se mensurar a mudança estrutural se referindo a outros fatores de produção como bens de capital, por exemplo. Essas mudanças podem ocorrer devido a uma série de fatores, entre eles choques exógenos na economia. Porém, em geral, esse termo se refere a variações na composição setorial devido à existência de progresso tecnológico e de variação da demanda particulares a cada um dos setores.

Segundo Arena e Porta (2012), tem se usado muitos conceitos de mudanças estruturais na economia. Alguns deles têm um significado claro, enquanto outros são vagos. O uso mais comum refere-se a alteração persistente a longo prazo na composição de um agregado. No desenvolvimento e na história econômica, a mudança estrutural geralmente refere-se à importância relativa dos setores na economia, as mudanças na localização da atividade econômica, e de outros aspectos concomitantes de industrialização referidas conjuntamente como a transformação estrutural. Kruger (2008) escreve um artigo que é um levantamento de pesquisas existentes sobre mudança estrutural. Os artigos que fizeram parte de sua pesquisa definem mudança estrutural como sendo as mudanças na composição setorial dos agregados econômicos a longo prazo. Em Ngai & Pissarides (2007), mudança estrutural é definida como o estado em que pelo menos uma porção de trabalhadores sofre alteração entre os diversos setores da economia ao longo do tempo.

Mudança Estrutural está presente desde a Idade Média, na transição do feudalismo para o sistema capitalista, até os dias atuais. Contudo, é um tema da economia o qual ainda não foi dada devida importância. É suficiente folhear a literatura econômica para se tornar ciente do estado insatisfatório sobre a atenção dispensada à mudança estrutural. Vamos citar apenas dois, mas significativos e importantes exemplos que demonstram a ausência de atenção com esta variável tão importante para o crescimento: o primeiro faz referência a um levantamento das teorias de crescimento econômico encomendado pelos editores do *Economic Journal* aos professores Hahn e Matthews (Hahn & Matthews, (1964)). Essa pesquisa não contém absolutamente nenhuma referência a mudança estrutural. Pelo contrário, no final do trabalho (veja p. 890) os autores dedicam uma seção a respeito das perspectivas de pesquisa em economia. Nela, eles concluem que crescimento econômico é uma área saturada e portanto desencorajando novos pesquisadores a ingressar nessa tema. O segundo exemplo refere a Kruger (2008):

“The topic of structural change is frequently neglected in economic research, despite its high relevance for growth theory, business cycle theory and labor market theory as well as for economic policy. Admittedly, to date there exists no general theory of structural change, but there exist a variety of theoretical approaches that are concerned with the explanation of structural shifts between the three broad sectors of the private economy and among the industries within these sectors. These theoretical approaches have their roots in appreciative verbal theorizing, modern formal economic growth theory and evolutionary innovation theory.”

Dietrich & Keuger (2010) afirmam que um dos motivos que levou a teoria do crescimento econômico formal a dar pouca atenção ao tratamento de crescimento desigual entre os setores é que ela sempre foi mais focada na evolução demográfica e formação de capital humano do que na mudança estrutural¹. Apenas uma pequena literatura está preocupada com a integração do desenvolvimento desigual dos setores e, portanto, de modelos de crescimento com mudança estrutural. Esse quadro, no entanto, parece estar mudando e depois do artigo de Ngai & Pissarides (2007) tem-se visto um maior interesse dos

¹ Ver Galor (2005) para um aprofundamento dessa literatura.

economistas relacionados ao tema.

Podemos perceber mudança estrutural no final do feudalismo quando o incremento de novas técnicas de produção agrícola e a descoberta da tecnologia possibilitaram aos senhores feudais, juntamente com a economia europeia, uma maior produção e, então, muitos feudos começaram a produzir excedentes de maneira que puderam vender estas sobras ou excessos. A partir das trocas e do aparecimento da moeda, houve um grande desenvolvimento e, quanto maior o volume de trocas, maior eram as sobras em dinheiro. Diante desse cenário foi que surgiram as cidades, oriundas das feiras medievais, e as figuras dos comerciantes e artesãos, que vendiam e faziam muitos produtos apreciados pelos nobres. Neste período, entre os séculos XVI e XVIII, surgiu uma nova prática comercial e a maior parte do lucro ficava nas mãos dos comerciantes e atravessadores e não nas mãos de quem realmente produzia, essa é conhecida como a fase primitiva da acumulação de capital, e também pode ser considerada como uma fase de “especulação”. Esse período nos revela uma mudança na composição setorial da economia, pois uma vez que a maior parte dos lucros estavam nas mãos dos comerciantes e atravessadores é natural que os produtores comecem a migrar para o setor mais lucrativo.

Com o sistema feudal chegando ao fim, nasce o capitalismo industrial em meados do século XVIII na Inglaterra, que se espalhou no século XIX por toda Europa, Estados Unidos e Japão e finalizou sua fase de expansão no século XX, alcançando as outras nações. Ele é caracterizado pela aplicação de capital no setor industrial. O trabalho assalariado se fixa, e então fica nítida a separação de classes: a primeira classe que é formada pelos donos dos meios de produção e a segunda, pelos trabalhadores que tem apenas sua força de trabalho.

Com a revolução industrial a maioria das economias ocidentais experimentaram um aumento sem precedentes no nível de produto e na taxa de crescimento econômico. O crescimento econômico aqui é entendido como o período no qual se verifica um rápido e sustentado aumento no produto real per capita ou, em outras palavras, quando o produto cresce a uma taxa maior do que a população e proporciona um aumento do bem-estar econômico. Ou ainda, para North (1974, p.7) - crescimento econômico significa essencialmente um aumento na produtividade, isto é, o que faz um país crescer e aumentar o seu bem-estar é que ele produz mais produtos e serviços em termos per capita.

A partir desse período, segundo Dietrich & Kruger (2010), podemos observar um padrão

muito específico na mudança estrutural da economia. Eles observam que se a economia for dividida em três setores, o setor primário (agricultura, mineração) estava dominando a economia antes do início da industrialização; o setor secundário (indústria transformadora, construção) começava a ganhar em importância e cresceu até que o setor terciário (serviços) começava a decolar. Isso leva ao declínio da participação característica do setor primário, a participação crescente do setor terciário e a participação em forma côncava do setor secundário que pode ser observado para muitos países desde o século XIX. O artigo de Teignier (2011) apresenta dados da economia de alguns países que corroboram com a observação de Dietrich & Kruger (2010). Segundo Teignier (2011) os Estados Unidos tinham mais de 80% da força de trabalho no setor agrícola em 1810, cerca de 50% em 1870, e foi para 20% em 1920. Enquanto no Japão as participações foram de 80% em 1870 para 50% em 1920. Para o Reino Unido, no entanto, a força de trabalho agrícola em 1810 era de 35%, e o seu rendimento foi semelhante ao do Estados Unidos, em 1850. Maddison (1987) documenta a enorme redistribuição de trabalho em seis países mais industrializados (França, Alemanha, Japão, Holanda, Reino Unido e E.U.A.). Como mostra a Figura 1.1, a participação média de emprego na agricultura foi em torno de 46% em 1870 e diminuiu para 5,5 % por volta de 1984. Durante o mesmo período, a percentagem média de emprego no setor de serviços aumentou de 26,4 % para 62,2 %. Essa dinâmica do emprego entre os setores de serviços e agricultura já havia sido observada por Clark (1940) e por Kuznets (1966).

Os deslocamentos da mão de obra do setor agrícola para o setor de serviços, relacionados aos seus países, nos mostram a clara relação entre mudança estrutural e desenvolvimento econômico. Os países para os quais houve a migração da mão de obra dos setores primário e secundário para o setor terciário são justamente os países mais desenvolvidos. McMillan & Rodrik (2011) mostram que o fluxo de trabalho do setor de baixa produtividade para atividades de alta produtividade são o principal motor do desenvolvimento. Eles também defendem a tese de que, em países com uma proporção relativamente alta de recursos naturais na exportação, a mudança estrutural é muito lenta e o crescimento é reduzido. Um outro fator que faz diferença na velocidade da transformação estrutural é o fato de a economia ser aberta ou fechada. Para Teignier (2011) a economia fechada contribui para uma transformação mais lenta. Em seu artigo ele analisa os efeitos que o comércio internacional de produtos agrícolas tem sobre o ritmo da transformação estrutural. Países

Figura 1.1: Participação do Emprego Setorial no Emprego Total (%)

Mudança Estrutural (1870 - 1984)								
		França	Alemanha	Japão	Holanda	R. Unido	E.U.A	Média
Agricultura	1870	49.2	49.5	67.5	37.0	22.7	50.0	46.0
	1913	37.4	34.6	64.3	26.5	11.0	32.3	34.4
	1950	28.5	22.2	48.3	13.9	5.1	13.0	21.8
	1984	7.6	5.5	8.9	4.9	2.6	3.3	5.5
Industria	1870	27.8	28.7	13.8	29.0	42.3	24.4	27.7
	1913	33.8	37.8	13.9	33.8	44.8	29.3	32.2
	1950	34.8	43.0	22.6	40.2	46.5	33.3	36.7
	1984	32.0	40.5	34.8	26.4	32.4	28.0	32.4
Serviços	1870	23.0	21.8	18.7	34.0	35.0	25.6	26.4
	1913	28.8	27.6	21.8	39.7	44.2	38.4	33.4
	1950	36.7	34.8	29.1	45.9	48.4	53.7	41.4
	1984	60.4	54.0	56.3	68.7	65.0	68.7	62.2

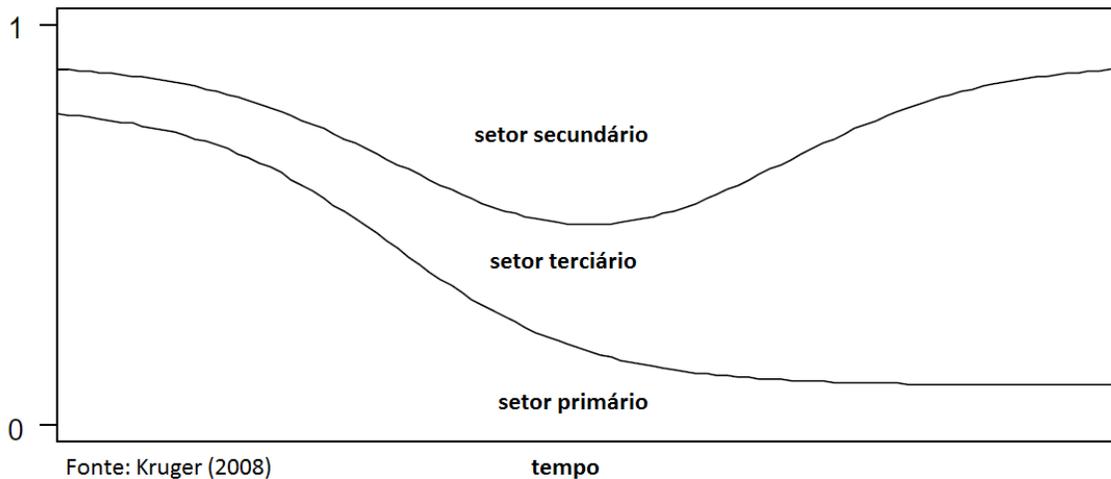
Fonte: Maddison (1987)

fechados ao comércio têm que produzir a totalidade dos alimentos que consomem. Como resultado, um país com baixa produtividade agrícola é forçado a alocar uma fração maior dos seus recursos produtivos para esse setor. Por outro lado, se a economia é aberta, o comércio internacional pode acelerar essa transição para os países com baixa produtividade agrícola, pois permite-lhes importar alimentos e, assim, reduzir o seu emprego agrícola, acelerando assim a sua transformação estrutural. Esta realocação de trabalho aumenta a produtividade agregada, aumentando assim acumulação de capital e a taxa de crescimento da renda. Como Matsuyama (1992) explica a industrialização precoce da Bélgica e da Nova Inglaterra foi possível por causa de suas importações agrícolas da Holanda e do Sul dos Estados Unidos, respectivamente. Contudo, para mostrar que nem tudo funciona perfeitamente em economias abertas, Mbiekop (2010) desenvolve um modelo de transformação estrutural para agricultura baseado em pequenas economias abertas. O autor conclui que a liberação do comércio inicialmente promove a mudança estrutural, mas pode comprometer o processo mais tarde, se a oferta qualificada do trabalho não beneficia

o setor agrícola exportador.

Não apenas a participação da mão de obra teve o comportamento de mudar do setor primário para o secundário e depois para o terciário. A participação da produção de cada setor no produto agregado também teve uma movimentação bem semelhante. O artigo de Kruger (2008) mostra como se deu a participação dos setores na produção agregada. A Figura 1.2 mostra o desenvolvimento de uma economia em que a produção foi dividida em três setores. Observe que a ordenada denota as ações acumuladas dos três setores quer em termos de emprego ou em termos de valor agregado. É fácil constatar pela figura que no começo da medição o setor primário tem a maior participação, enquanto os outros dois setores têm participação pequena. Num segundo momento, o setor secundário tem a maior participação e por último, o setor terciário está dominando.

Figura 1.2: Participação dos Três Setores na Produção



Entender a teoria do crescimento econômico pode fazer diferença positiva na tomada de decisão para o caminho do desenvolvimento de uma nação. À medida que um país avança no caminho do crescimento econômico ele aumenta a disponibilidade de bens para o consumo; facilita a distribuição de renda e do produto; aumenta o padrão de vida da população; proporciona condições para melhorias na educação, saúde e outros serviços sociais; pode

gerar benefícios para o meio ambiente devido ao aumento na eficiência econômica; gera potencial para aumentar o bem-estar social (suporte para idosos, órfãos, carentes etc.).

Apresentaremos três figuras, cujo objetivo é auxiliar no entendimento de como o desenvolvimento está relacionado com uma maior renda per capita e também mostrar como o desenvolvimento tem contribuído para uma melhor distribuição de renda e, assim, diminuindo o índice de pobreza. Para identificar a relação positiva entre desenvolvimento e renda per capita, considere a Tabela 1.1 que representa a distribuição de renda per capita de alguns países relativa aos Estados Unidos. É notório que o nível de renda per capita está diretamente associado ao nível de desenvolvimento de cada país. Basta observar que a ordem da disposição dos países na tabela segue, quase que fielmente, dos países mais desenvolvidos para os menos desenvolvidos.

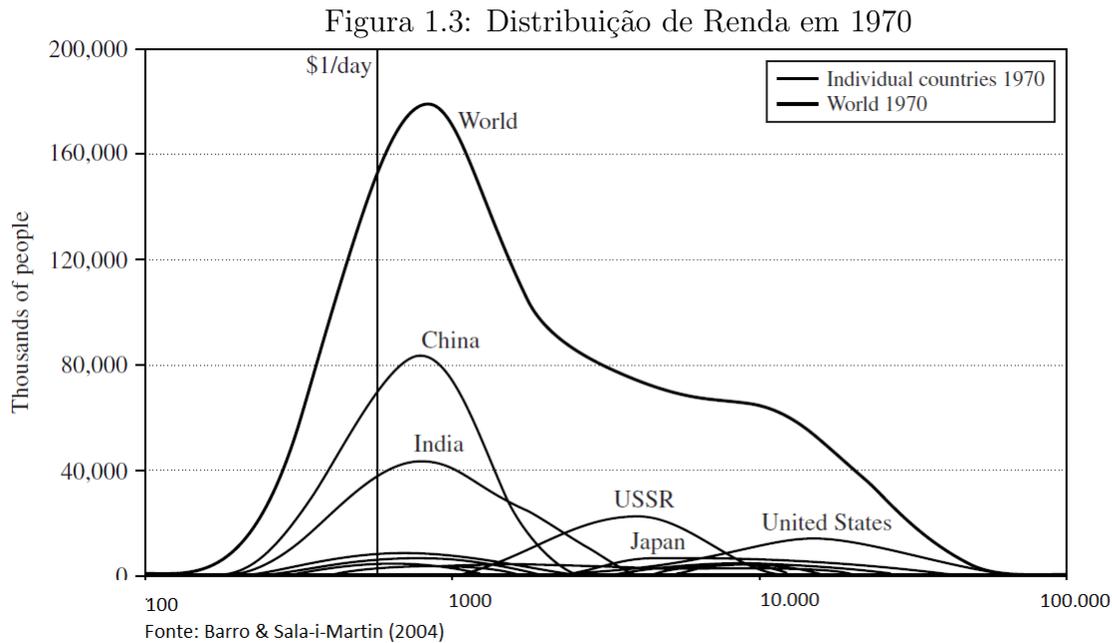
Tabela 1.1: Renda Per Capita Relativa aos EUA (2000)

País	Renda Relativa	País	Renda Relativa
EUA	100,00	Argentina	33,06
Singapura	87,48	Chile	29,81
Noruega	81,20	Brasil	21,60
Canadá	80,81	Tailândia	20,60
Hong Kong	80,19	Turquia	20,32
Irlanda	79,24	Bolívia	8,18
Japão	79,22	Senegal	4,87
Austrália	76,77	Mali	2,91
França	67,15	Uganda	2,83
Reino Unido	66,65	Chad	2,73
Itália	65,42	Malawi	2,35
Kuwait	64,08	Ningéria	2,12
Oman	51,62	Serra Leoa	1,91
Portugal	47,63	Rep. Dem. Congo	0,69

Fonte: Weil (2004)

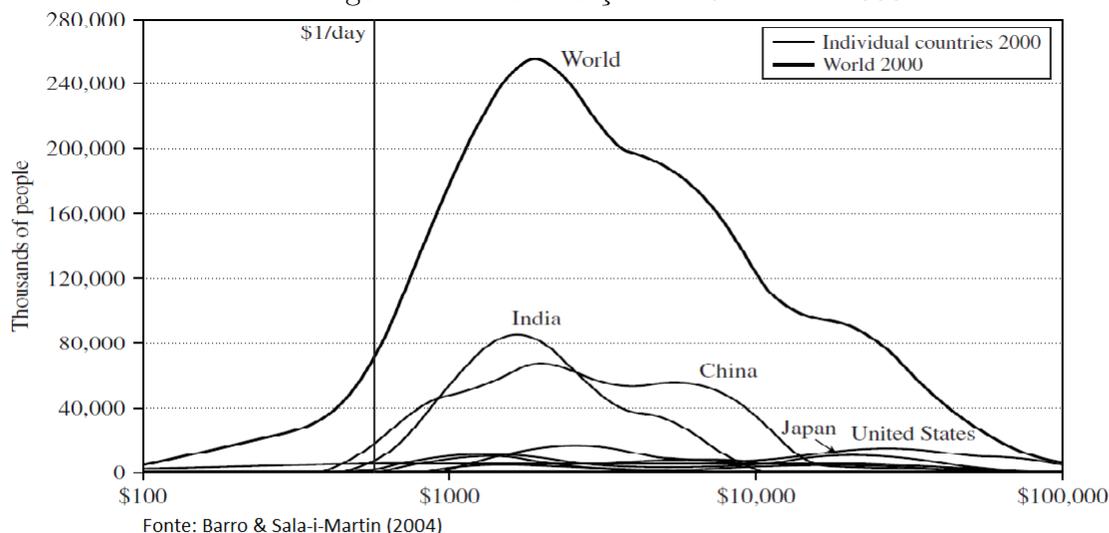
Para mostrar como o desenvolvimento afeta a distribuição de renda, considere os dois gráficos abaixo (Figuras 1.3 e 1.4). Ambos têm no eixo horizontal o nível de renda (em

escala logarítmica) e no eixo vertical o número de pessoas. As linhas finas correspondem às distribuições de renda de cada país e a linha grossa representa a distribuição de renda mundial. Note as diferenças nas Figuras 1.3 e 1.4. A Figura 1.3 as linhas estão bem mais para a esquerda do que na Figura 1.4. Esse deslocamento corresponde ao crescimento acumulado do PIB per capita e também significa que em 1970 havia uma distribuição mais expressiva de pessoas que ganhavam menos de um dólar por dia do que em 2000; outra diferença entre os dois gráficos é que a dispersão das distribuições para alguns países, em especial a China, tem aumentado ao longo desse período. Em outras palavras, a desigualdade de renda aumentou em alguns países grandes. Contudo, esses aumentos na desigualdade dentro de alguns países não tem sido suficiente para compensar o crescimento agregado per capita, de modo que a fração da população mundial cujos rendimentos se encontram abaixo da linha de pobreza (menos de um dólar por dia - definido pelo Banco Mundial) diminuiu drasticamente.



Diante dos fatos observados acima, é justificável a preocupação de se estudar mudança estrutural e tentar trazer novas perspectivas para a discussão acerca do tema. Nosso modelo foi desenvolvido objetivando estudar as variações na composição setorial de uma economia, investigando, principalmente, que variáveis são responsáveis por provocar a

Figura 1.4: Distribuição de Renda em 2000



mudança estrutural na economia. É justamente nesse ponto que temos uma das principais contribuições: enquanto a maioria dos modelos estudam mudança estrutural via demanda ou progresso tecnológico, nosso modelo faz uma abordagem de mudança estrutural via estoque de capital e alocação de investimento. Através dessa abordagem tentamos mostrar que estoque de capital também é uma possível fonte de mudança estrutural.

O restante desse trabalho está dividido da seguinte forma: no capítulo 2 foi feita uma breve revisão da literatura. Analizamos os modelos de Feldman (1928) e Ngai & Pissarides (2007), inspiradores dessa tese, e também discutimos os modelos de Baumol (1967) - um dos primeiros a fazer a conexão entre crescimento e mudança estrutural - e o modelo de Pasinetti (1993); no capítulo 3 construímos o modelo considerando a estratégia de Feldman (1928) sobre alocação de investimento e a abordagem multi-setorial sugerida pelo modelo de Ngai & Pissarides (2007). Resolvemos o problema do planejador central quando a economia está em estado estacionário; na seção 3.3 mostramos a equivalência entre o comando ótimo e o equilíbrio competitivo descentralizado; no capítulo 4, considerando uma economia dividida em três setores, mostramos que as equações de movimento do capital são localmente estáveis e exibimos uma ilustração numérica do modelo. Por fim, fazemos uma conclusão geral e apresentamos os cálculos nos apêndices.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Um dos primeiros trabalhos que fazem a conexão entre crescimento e mudança estrutural é o artigo de Baumol (1967). Neste artigo ele supõe uma economia dividida em dois setores: um que utiliza capital e novas tecnologias e cresce a uma taxa constante (r) e outro que usa apenas o trabalho como a único insumo e produz serviços como resultado final. Para explicar este último setor Ngai & Pissarides (2007) citam dois exemplos que facilitam o nosso entendimento (os profissionais das artes ou profissões jurídicas). Assim, temos os produtos Y_{1t} e Y_{2t} gerados nos dois setores no tempo t :

$$Y_{1t} = aL_{1t}$$

$$Y_{2t} = bL_{2t}e^{rt}$$

em que L_{1t}, L_{2t} são as quantidades de trabalho empregado nos setores 1, 2, respectivamente, e a e b são constantes positivas. Ele também considera que o salário w é igual em ambos setores e cresça igual a produtividade do setor 2, isto é,

$$w_t = we^{rt},$$

em que w é uma constante positiva.

Então ele mostra que o custo por unidade de produção do setor 1 cresce indefinidamente ($C_1 \uparrow \infty$), enquanto que o custo unitário do setor 2 permanece constante ($C_2 = const$) como pode ser facilmente observado pelas equações:

$$C_1 = \frac{w_t L_{1t}}{Y_{1t}} = \frac{we^{rt} L_{1t}}{aL_{1t}} = \frac{w}{a} e^{rt}$$

$$C_2 = \frac{we^{rt}L_{2t}}{bL_{2t}e^{rt}} = \frac{w}{b}.$$

Também percebeu que a mão de obra se desloca para o setor em que não há tecnologia, através das equações:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Lrke^{rt}}{kre^{rt}} = L,$$

$$L_2 = \frac{L}{1 + ke^{rt}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} L_2 = 0.$$

Ou seja, com o tempo, o setor que não utiliza tecnologia deve atrair mais mão de obra para atender a demanda, se a demanda é elástica sobre a renda ou inelástica sobre os preços, mas deve desaparecer caso contrário. Diante disso Baumol (1967) afirma que devido à mobilidade dos fatores e aos custos de produção, os preços do setor estagnado devem subir indefinidamente. Esse processo é conhecido como “doença de custos de Baumol”. Também afirma que se o setor estagnado não desaparece, a taxa de crescimento da economia estará em uma tendência de queda, uma vez que mais peso é deslocado para o setor estagnado. Na literatura empírica mais recente, há duas explicações para a coexistência dos setores durante a mudança estrutural: na explicação de Ngai & Pissarides (2007) é o chamado “progresso técnico” porque às vezes ele atribui mudança estrutural a diferenças nas taxas de produção total dos fatores (PTF) no crescimento setorial; a outra é baseada na utilidade, que requer diferentes elasticidades-renda para diferentes bens e pode produzir uma mudança estrutural mesmo com igual crescimento da PTF em todos os setores.

Outro modelo que é referência no estudo de mudanças estruturais é o de Pasinetti. Suas ideias sobre o tema foram cultivadas desde seu Ph.D e em 1981 resultou na publicação de um livro (veja Pasinetti (1981)) que continha o modelo que trata de mudança estrutural. A importância deste trabalho é bem descrita por Harris (1982, p. 42):

“ This work is one of the most impressive products to date to have come out of the so-called Anglo-Italian school. It is, also, perhaps the finest achievement in the Ricardian tradition since Sraffa’s edition of Ricardo’s Works and Sraffa’s 1960 treatise. The landmarks and the groundwork had already been laid along the way by Sraffa. But this book represents the development of the logic of one line of reasoning within that tradition. At the same time, by being so explicit and thorough in elaborating this particular position, it enables us to see more clearly the distinct route that Marx took, away from Ricardo. ”

Ele considera como meios de produção a mão de obra e bens de capitais. Contudo, em 1993, ele publicou outro livro contendo uma versão simplificada do modelo, mais preocupada com a didática e por isso o estudo foi feito usando apenas mão de obra (esta restrição é chamada pelos economistas clássicos de “natural”). Com o objetivo de dar uma ideia do modelo, vamos concentrar nossa atenção na segunda versão publicada em Pasinetti (1993). Ele o apresenta numa versão de setores verticalmente integrados. O termo “setores verticalmente integrados” é um termo antigo que pode ser encontrado nos trabalhos de Petty e Smith. Contudo, uma definição mais clara só é feita em Pasinetti (1973), que usa a noção de subsistema apresentada por Sraffa (1960). Uma boa definição é encontrada em Costa & Teixeira (2010):

“Um setor verticalmente integrado é uma forma compacta de representar um subsistema, já que sintetiza cada subsistema em um único coeficiente de trabalho, l_i , e uma única mercadoria composta b_i ”

Mudança estrutural aqui é entendida com sendo qualquer alteração nas proporções e relações existentes entre grandezas observáveis num ponto no tempo e no espaço. A discussão se concentra em duas questões principais: a evolução dos preços relativos governados pelas atividades produtivas simultaneamente operando com retornos constantes de escala e a dificuldade extra na realização do equilíbrio macroeconômico que vem das mudanças estruturais. O modelo investiga o desenvolvimento ao longo do tempo de uma economia com trabalho puro. Isto é, uma economia na qual a atividade de produção é realizada somente por trabalho - trabalho desassistido por uma mercadoria intermediária. O funcionamento da economia do trabalho puro é muito simples. Ele é perfeitamente

homogêneo. Produzir uma unidade do bem i requer apenas l_i unidades de trabalho ($i = 1, 2, \dots, m$): a produtividade do trabalho na produção desse bem é $1/l_i$, onde $l_i > 0$.

Adicionalmente, considere as m quantidades físicas de bens produzidos como Q_1, Q_2, \dots, Q_m , os respectivos m preços como p_1, p_2, \dots, p_m , o preço do trabalho ou taxa de salário w e a quantidade total de trabalho Q_T (inicialmente não se faz qualquer distinção entre o total de população e população ativa. Entretanto, esta simplificação é abandonada mais tarde (no capítulo IV), assim que tal distinção tornar-se importante).

Considerando estas grandezas segundo Leontief, o sistema é composto por dois sistemas de $m + 1$ equações lineares e homogêneas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_m \\ -l_1 & -l_2 & \cdots & -l_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_m \\ Q_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -l_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -l_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -l_m \\ -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Como o sistema é linear e homogêneo, a condição necessária para haver solução diferente da trivial (solução nula) é que o determinante da matriz dos coeficientes seja igual a zero. Portanto, como é fácil de verificar, esta condição equivale a:

$$\sum_{i=1}^m c_i l_i = 1. \quad (2.3)$$

Observe que esta condição é a mesma para ambos os sistemas.

As soluções dos sistemas (2.1) e (2.2) determinam apenas as quantidades reais e os preços relativos, respectivamente. Estas soluções são:

$$Q_i = c_i Q_T \quad (2.4)$$

e

$$p_i = l_i w, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.5)$$

O valor de uma unidade do bem i é igual ao valor do “trabalho incorporado”.

A partir desse ponto, Pasinetti faz uma análise progressiva; isto é, parte de hipóteses bem simples e vai incrementando-as de modo a chegar em hipóteses mais complexas. A medida que vai sofisticando suas hipóteses, suas análises vão ficando mais elaboradas. Aqui, vamos reproduzir apenas dois casos intermediários. Para tanto, considere algumas hipóteses sobre as condições iniciais e sobre a trajetória temporal das variáveis exógenas ao modelo:

1 - Primeiro caso:

- as condições iniciais são aquelas que correspondem ao instante de tempo definido como zero; supõe-se que nesse momento há pleno emprego da força de trabalho e plena utilização dos meios de produção;
- todos os coeficientes técnicos e todos os coeficientes do consumo permanecem inalterados ao longo do tempo e a única grandeza que varia é a população. É suposto que a população cresce a uma taxa $n > 0$, ou seja:

$$N(t) = N(0)e^{nt}, \quad (2.6)$$

onde $N(t)$ é população total no instante t ;

- as condições técnicas não variam, ou seja, todos os coeficientes técnicos permanecem constantes ao longo do tempo;
- as preferências dos consumidores não variam, o que significa que os coeficientes de demanda permanecem constantes com o decorrer do tempo;
- o total da população corresponde ao total da mão de obra disponível, ou seja:

$$Q_T(t) = N(t). \quad (2.7)$$

Com a hipótese (2.6), o sistema de preços (2.2) e tudo relacionado a ele não se altera ao longo do tempo. A correspondente condição necessária para soluções de equilíbrio é dada

pela equação (2.3) e as soluções são (2.5). No sistema de grandeza física (2.1), todos os coeficientes permanecem constantes. Também continua inalterada a condição necessária para soluções de equilíbrio (2.3), que é a mesma para ambos os sistemas. Mas, no vetor de quantidade física, a população trabalhadora $Q_T(t)$ cresce ao longo do tempo na taxa n . Logo, pelas hipóteses anteriores:

$$Q_i(t) = c_i Q_T = c_i N(0) e^{nt}. \quad (2.8)$$

Portanto, todas as quantidades físicas crescem ao longo do tempo exatamente na mesma taxa de crescimento n .

Diante disso percebe-se que uma assimetria surge entre a quantidade física e o sistema de preços (os preços continuam inalterados ao longo do tempo enquanto as quantidades físicas crescem a uma taxa constante n). Esta assimetria pode ser eliminada redefinindo as quantidades físicas em termos per capita, denotando por $q_i(t)$:

$$q_i(t) = \frac{Q_i(t)}{N(t)}, \quad (2.9)$$

Agora, $Q_i(t)$ e $N(t)$ crescem, em equilíbrio, exatamente na mesma taxa percentual, n , de modo que $q_i(t)$ permanece absolutamente constante ao longo do tempo. Por conseguinte, o sistema de quantidades físicas pode ser reescrito com base em (2.7) e (2.9), isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_m \\ -l_1 & -l_2 & \cdots & -l_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_m(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

A condição necessária para que o sistema anterior tenha solução continua a mesma, isto é:

$$\sum_{i=1}^m c_i l_i = 1, \quad (2.11)$$

e a solução para as quantidades físicas:

$$q_i(t) = c_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.12)$$

Ainda não há uma simetria formal perfeita. Mas se agora definir $w = 1$ em outro sistema de equações (o de preços), ou seja, se todos os preços forem expressados em termos da taxa

de salário, então o sistema de preços pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_m \\ -l_1 & -l_2 & \cdots & -l_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_m(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

A solução para esse sistema de equações homogêneas, quando a condição necessária (2.11) é satisfeita, será:

$$p_i(t) = l_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.14)$$

Os dois sistemas de equações (de grandezas físicas e de preços), reescrito desta forma, são duplamente simétrica com respeito ao outro. Nota-se que os dois sistemas e suas soluções são absolutamente invariável ao longo do tempo. Isto significa que o “hipotético” sistema econômico, uma vez que atingiu a posição de equilíbrio no tempo zero, vai ficar em equilíbrio para o bem, por simplesmente não fazer nenhuma mudança em suas proporções. Todas quantidades físicas $Q_i(t)$ crescem na mesma taxa percentual n . Toda a economia, por assim dizer, expande em termos absolutos, sem variar suas proporções.

Até aqui Pasinetti está considerando um simples tipo de crescimento econômico em que coeficientes técnicos são constantes e, portanto, retornos constantes de escala. Um crescimento que se deve apoiar ao crescimento populacional. Portanto, há uma completa ausência de mudança estrutural.

Para estudar mudança estrutural no modelo, considere a próxima abordagem.

2 - Segundo caso:

Aqui é levado em conta que há progresso técnico e crescimento populacional. Pasinetti adota um crescimento populacional chamado “quasi-proporcional” que mantém as proporções entre os diversos setores de produção inalteradas ao longo do tempo. A hipótese é que a população e o progresso técnico crescem à mesma taxa n_i e o consumo cresce a uma taxa constringente r_i . Ambos referentes aos respectivos setores.

- Crescimento populacional

$$l_i(t) = l_i(0)e^{-n_i t}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.15)$$

onde:

$$n_i \neq n_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, (i \neq j). \quad (2.16)$$

Veremos que com estas taxas do progresso técnico, $n_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$, Pasinetti está considerando que elas variam de um bem para outro. Então, é natural supor que, conforme o tempo passa, a produtividade de trabalho do bem i aumente a uma taxa n_i . Portanto, a mão de obra requisitada na produção do bem i está diminuindo à mesma taxa.

- Crescimento no consumo

$$c_i(t) = c_i(0)e^{r_i t}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.17)$$

onde:

$$r_i \neq r_k, \quad i, k = 1, 2, \dots, m, (i \neq k). \quad (2.18)$$

Substituindo as equações (2.15) e (2.17) no sistema 2.10, a condição necessária para haver solução é:

$$\sum_{i=1}^m c_i(0)l_i(0)e^{(r_i - n_i)t} = 1. \quad (2.19)$$

Como Pasinetti assume que em $t = 0$ a economia está em pleno emprego (veja equação (2.3)) então a condição para haver solução do sistema é válida para $t = 0$. Logo, a questão é verificar o que ocorre para $t > 0$. Nesse caso, o sistema terá solução diferente da trivial somente quando

$$n_i = r_i. \quad (2.20)$$

A última equação diz que, dentro de cada setor, a taxa de crescimento da produtividade coincide com a taxa de crescimento da demanda per capita para o produto correspondente, mesmo se ambas as taxas de crescimento forem diferentes de um setor para outro.

No caso mais geral, quando $n_i \neq r_i$, pode-se ter:

•

$$\sum_{i=1}^m c_i(0)l_i(0) < 1. \quad (2.21)$$

Então,

$$\sum_{i=1}^m l_i(0)Q_i < Q_T, \quad (2.22)$$

ou seja, a quantidade de trabalho empregada é menor do que a disponível.

- No caso contrário, $\sum_{i=1}^m c_i(0)l_i(0) > 1$, há a situação em que a oferta de emprego é maior do que procura.

A mudança estrutural ocorre porque os m coeficientes l_i definindo os requisitos do trabalho diminuem como consequência do que pode ser chamado também de progresso técnico ou “aprendizagem humana”.

O nosso modelo, que trata de crescimento, mudança estrutural e alocação de investimento, tem como base os modelos de Feldman (1928) e Ngai & Pissarides (2007).

O modelo de Feldman (1928) é uma referência para o estudo dos efeitos de alocação de investimento no crescimento de uma economia. Dutt (1990) considera que não há discussão completa sobre modelos de investimentos e setores de bens de consumo sem considerar as contribuições de Feldman. A idéia de tal modelo é bem simples: basicamente tenta explorar a alocação de investimentos entre os diferentes setores da economia. Sobre o esse modelo temos dois fatos históricos importantes: primeiro, em 1953, um indiano chamado Mahalanobis publicou um resultado semelhante ao de Feldman (1928) e acredita-se que foi uma descoberta independente. A principal diferença entre os dois modelos é que o de Feldman é em tempo contínuo enquanto o de Mahalanobis é em tempo discreto; segundo, o modelo de Feldman (1928) serviu de justificativa para o Terceiro Plano Quinquenal da antiga URSS e o de Mahalanobis (1953) foi utilizado nos bastidores do Segundo Plano Quinquenal da Índia. O modelo de Feldman (1928) é para uma economia fechada e foi criado com base nas seguintes hipóteses:

- Hipótese - 1

A economia está dividida em dois setores, que chamaremos aqui de setor 1 e setor

2. O primeiro produz bens de capital que podem ser instalados em qualquer dos dois setores. Uma vez instalados, entretanto, eles não podem ser transferidos de um setor para outro. O segundo produz bens de consumo. Uma proporção $\lambda \in [0, 1]$ do produto corrente da indústria de bens de capital é alocada para o setor 1; logo $(1 - \lambda)$ é alocada para o setor 2. Então,

$$I_1 = \lambda I = \lambda Y_1, \quad (2.23)$$

$$I_2 = (1 - \lambda)I = (1 - \lambda)Y_1, \quad (2.24)$$

em que I é o investimento total, I_i ($i = 1, 2$) são os investimentos dos setores 1, 2 respectivamente, Y_1 é o produto do setor 1 e Y_2 é o produto do setor 2.

- Hipótese - 2

Ambos os setores têm tecnologia com coeficientes fixos, isto é,

$$Y_1 = \min \left[\frac{K_1}{v_1}, \frac{L_1}{u_1} \right], \quad (2.25)$$

$$Y_2 = \min \left[\frac{K_2}{v_2}, \frac{L_2}{u_2} \right], \quad (2.26)$$

onde K_1 e K_2 são as quantidades de capital instaladas nos setores 1 e 2 respectivamente, L_1 e L_2 são as quantidades de trabalho empregadas nos setores 1 e 2, e v_1, v_2, u_1, u_2 são os coeficientes fixos. Entretanto, o capital é considerado como o único fator que limita o processo de crescimento. Logo, a tecnologia é descrita por

$$Y_1 = \frac{K_1}{v_1} \quad \text{e} \quad Y_2 = \frac{K_2}{v_2}, \quad (2.27)$$

e a força de trabalho L , não precisa entrar no modelo de nenhuma forma explícita. Esta hipótese corresponde grosseiramente aos fatos estilizados da realidade econômica da antiga União Soviética dos anos 20 e 30.

- Hipótese - 3

O estoque de capital não deprecia¹, e como consequência, \dot{K} , a taxa de mudança do estoque total de bens de capital, é igual a I , o investimento que por sua vez, é igual ao produto de bens de capital do setor 1. Logo:

$$\dot{K} = I = Y_1. \quad (2.28)$$

¹Esta hipótese é meramente conveniente: ela não é necessária para a análise e a maior parte dos modelos do estilo Feldman (1928) incorpora depreciação.

- Hipótese - 4

A economia é fechada e, portanto, bens de capital não podem ser importados de fora. Esta era, claramente, uma hipótese razoável para a União Soviética dos anos 20 e 30 dada a situação política.

- Hipótese - 5

A produção de bens do setor 1 é completamente independente da produção de bens do setor 2. Isto é, mesmo que a produção de bens de consumo caia a zero, a produção de bens de capital pode continuar inalterada.

Das hipóteses 1 e 2, temos:

$$I = Y_1 = \frac{K_1}{v_1}. \quad (2.29)$$

Mas, a taxa de variação do estoque de capital no setor 1 depende da proporção do produto total de bens de investimento que é alocada para o setor 1. Então.

$$\dot{K}_1 = I_1 = \lambda I. \quad (2.30)$$

Logo, das equações (2.29) e (2.30), temos:

$$\dot{K}_1 = \frac{\lambda}{v_1} K_1. \quad (2.31)$$

A equação diferencial acima tem solução dada por

$$K_1(t) = K_1(0)e^{\frac{\lambda}{v_1}t}. \quad (2.32)$$

A produção do setor 2 é toda para o consumo e, portanto, satisfaz:

$$C = Y_2 = \frac{K_2}{v_2} \quad (2.33)$$

e a taxa de mudança do produto de bens de consumo é,

$$\dot{C} = \dot{Y}_2 = \frac{1}{v_2} \dot{K}_2. \quad (2.34)$$

Por definição, temos:

$$\dot{K}_2 = I_2 = (1 - \lambda)I. \quad (2.35)$$

Então, das equações (2.29) e (2.32), podemos escrever esta última como:

$$\dot{K}_2 = (1 - \lambda) \frac{1}{v_1} K_1(0) e^{\frac{\lambda}{v_1} t} \quad (2.36)$$

Portanto, temos aqui uma equação diferencial em que a variável K_2 depende apenas do tempo. Resolvendo,

$$K_2(t) = \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} K_1(0) e^{\frac{\lambda}{v_1} t} + c, \quad (2.37)$$

onde c é uma constante.

Logo,

$$\frac{\dot{K}_2}{K_2} = \frac{(1 - \lambda) \frac{1}{v_1} K_1(0) e^{\frac{\lambda}{v_1} t}}{\frac{(1 - \lambda)}{\lambda} K_1(0) e^{\frac{\lambda}{v_1} t} + c} \quad (2.38)$$

$$= \frac{\lambda}{v_1} \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda c}{(1 - \lambda) K_1(0) e^{\frac{\lambda}{v_1} t}}} \right). \quad (2.39)$$

Donde se conclui que em geral

$$\frac{\dot{K}_1(t)}{K_1(t)} \neq \frac{\dot{K}_2(t)}{K_2(t)}, \quad (2.40)$$

mas

$$\frac{\dot{K}_1(t)}{K_1(t)} = \frac{\lambda}{v_1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\dot{K}_2(t)}{K_2(t)} \right). \quad (2.41)$$

Ou seja, no modelo de crescimento de Feldman (1928), a taxa de crescimento de consumo não é, em geral, igual à taxa de crescimento do investimento. Contudo, à medida que o tempo passa, a taxa de crescimento do consumo aumenta até atingir a taxa de crescimento de longo prazo que é dada pela taxa de crescimento do investimento. A mesma conclusão vale para a taxa global de crescimento da renda nacional e a taxa de crescimento do produto total de investimento, isto é, a primeira tenderá para a segunda à medida que o tempo passa. Esse é um resultado verificado através de uma simulação em Jones (1979, pag.134) e que foi demonstrado também por Domar (1957).

O modelo postula ainda que, para alcançar padrões mais elevados de consumo e de maior crescimento no setor de bens de consumo, deve-se primeiro estimular o setor de bens

de capital, canalizando mais investimentos nesse setor. Uma economia tem de desenvolver a capacidade para a produção de bens de capital antes de se concentrar no setor de bens de consumo. Em curto prazo, a questão é estimular o setor de bens de capital. No entanto, com o aumento da capacidade de longo prazo no setor de bens de capital se expande também a capacidade para a produção de bens de consumo.

O modelo de Ngai & Pissarides (2007) faz parte de um pequeno conjunto de modelos multi-setoriais que tratam de crescimento e mudança estrutural. Contudo, depois da publicação do artigo de Ngai & Pissarides (2007) temos visto o número de trabalhos relacionados com este tema aumentar.

Nesse artigo, os autores propõem uma forma geral de modelo de crescimento de equilíbrio em que diferentes taxas exógenas de crescimento da produtividade total dos fatores (PTF) são enfatizadas como a principal causa da mudança estrutural. O modelo consiste de uma economia dividida em um número arbitrário de m setores. Os primeiros $m - 1$ setores produzem somente bens de consumo enquanto o m -ésimo setor produz tanto bens de consumo quanto bens de capital. As soluções de equilíbrio são encontradas através do problema do planejador social,

$$U = \int_0^{\infty} v(c_1, \dots, c_m) e^{-nt} dt, \quad (2.42)$$

onde $n > 0$, $c_i \geq 0$ são os níveis de consumo per capita e a função de utilidade instantânea, $u(\cdot)$, é côncava e satisfaz as condições de Inada²

$$u(c_1, \dots, c_m) = \frac{\Phi(\cdot)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}; \quad \Phi(\cdot) = \left(\sum_{i=1}^m w_i c_i^{(\epsilon-1)/\epsilon} \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}, \quad (2.43)$$

onde $\theta, \epsilon, w_i > 0$ e $\sum_{i=1}^m w_i = 1$.

A força do trabalho é exógena e cresce a uma taxa constante. Tudo que é produzido nos $m - 1$ primeiros setores é consumido mas o que é produzido no m -ésimo setor pode ser

²O nome condições de Inada, homenagem ao economista japonês Ken-Ichi Inada, são suposições sobre a forma de uma função de produção que garantem a estabilidade de uma trajetória de crescimento econômico em um modelo de crescimento neoclássico. As condições como tal tinham sido introduzido por Hirofumi Uzawa. As seis condições para uma dada função $f(x)$ são: $f(0) = 0$, $\partial f(x)/\partial x_i > 0$, $\partial^2 f(x)/\partial x_i^2 < 0$, $\lim_{x_i \rightarrow 0} \partial f(x)/\partial x_i = +\infty$ e $\lim_{x_i \rightarrow +\infty} \partial f(x)/\partial x_i = 0$.

consumido ou investido. Portanto, o problema do planejador social tem ainda as seguintes restrições:

$$c_i = F^i(a_i k_i, a_i) \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (2.44)$$

$$\dot{k} = F^m(a_m k_m, a_m) - c_m - (\delta + n)k, \quad (2.45)$$

onde

$$\sum_{i=1}^m a_i = 1; \quad \sum_{i=1}^m a_i k_i = k; \quad a_i, k_i \geq 0,$$

$\delta > 0$ é a taxa de depreciação do capital, n taxa de crescimento da força de trabalho, a_i é a parcela de mão-de-obra empregada no setor i e a função de produção é do tipo Cobb-Douglas,

$$F^i(a_i k_i, a_i) = A_i k_i^\alpha a_i, \quad (2.46)$$

em que α representa a elasticidade do capital.

Um dos resultados mostra que a taxa de variação do preço relativo do bem i para o bem j é igual a diferença entre as taxas de crescimento da PTF do setor j e do setor i . Nos setores produtores de bens de consumo, as porções de emprego relativo crescem em proporção aos preços relativos, com o fator de proporcionalidade dado por um menos a elasticidade de substituição entre bens.

A dinâmica da participação do trabalho individual satisfaz:

$$\frac{\dot{a}_i}{a_i} = \frac{\left(\frac{\dot{c}}{y}\right)}{\frac{c}{y}} + (1 - \epsilon)(\bar{v} - v_i); \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (2.47)$$

$$\frac{\dot{a}_m}{a_m} = \left[\frac{\left(\frac{\dot{c}}{y}\right)}{\frac{c}{y}} + (1 - \epsilon)(\bar{v} - v_m) \right] \frac{\left(\frac{c}{y}\right)\left(\frac{x_m}{X}\right)}{a_m} + \left(\frac{\left(1 - \frac{c}{y}\right)}{\left(1 - \frac{c}{y}\right)} \right) \left(\frac{1 - \frac{c}{y}}{a_m} \right), \quad (2.48)$$

onde $\frac{\dot{A}_i}{A_i} = v_i$, $\frac{p_i c_i}{p_m c_m} = x_i$, $\sum_{i=1}^m x_i = X$ e $\bar{v} \equiv \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{X}\right) v_i$ é a média ponderada das taxas de crescimento da PTF.

Outro resultado mostra que se $v_i = v_m \quad \forall i = 1, \dots, m-1$, uma condição necessária e suficiente para haver mudança estrutural é $\frac{\dot{c}}{c} \neq \frac{\dot{y}}{y}$. A mudança estrutural nesse caso é entre o agregado do setor de consumo e o setor manufatureiro. Se $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{y}}{y}$, a condição necessária

e suficiente para haver mudança estrutural é que $\epsilon \neq 1$ e $\exists i \in \{1, \dots, m-1\}$ tal que $v_i \neq v_m$. A mudança estrutural neste caso é entre todos os pares do setor com diferentes taxas de crescimento da PTF.

Ngai & Pissarides (2007) também mostram que as condições necessárias e suficientes para a existência de uma trajetória de crescimento agregado em equilíbrio com mudança estrutural são:

$$\theta = 1, \tag{2.49}$$

$$\epsilon \neq 1; \text{ e } \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tal que } v_i \neq v_m. \tag{2.50}$$

O resultado acima confirma algumas afirmações de Baumol (1967) sobre a mudança estrutural. Baumol (1967) afirma que, devido à mobilidade dos fatores e os custos de produção, os preços do setor estagnado devem subir indefinidamente. Com o tempo, o setor estagnado deve atrair mais mão de obra para atender a demanda, se a demanda é elástica em relação a renda ou inelástica quanto os preços, mas deve desaparecer caso contrário. A controversa de Baumol também afirma que se o setor estagnado não desaparece, a taxa de crescimento da economia estará em uma tendência de queda, uma vez que mais peso é deslocado para o setor estagnado.

Ngai & Pissarides (2007) confirma a primeira parte da afirmação de Baumol (1967), isto é: quando a demanda é inelástica em relação aos preços ($\epsilon < 1$), os setores com menor taxa de crescimento da produtividade atrai uma parcela maior do trabalho, apesar do aumento de seus preços. Quanto menor for a elasticidade da demanda, menor a queda na demanda, que acompanha o aumento de preço, e assim maior será a transferência de emprego necessário para manter o consumo de relativa alta. Contudo, Ngai & Pissarides (2007) considera a segunda parte da afirmação muito pessimista e que a taxa de crescimento da economia não está, indefinidamente, numa tendência de queda por causa da existência de bens de capital. Em toda a economia, a PTF cresce a uma taxa \bar{v} , no entanto, caindo ao longo do tempo quando $\epsilon < 1$.

Ngai & Pissarides (2007) argumentam que embora os custos aumentem e os recursos mudem dos setores de baixo crescimento durante a mudança estrutural, a taxa de crescimento do agregado na economia é delimitada abaixo de uma taxa positiva que depende da taxa de crescimento de Baumol (1967) do setor progressivo. O resultado é

possível porque eles incluem capital em sua análise, um fator deixado de fora na análise por Baumol (1967) para facilidade de exposição, mas que é essencial para o argumento. Ngai & Pissarides (2007) ainda mostram que a inclusão de capital é essencial para os resultados de crescimento mais otimistas, embora não para mudança estrutural ³

Dietrich & Kruguer (2010) observam, por meio de explorações numéricas, que o modelo original de Ngai & Pissarides (2007) apresenta uma limitação para explicar o padrão característico de mudanças estruturais em um mercado de economia competitiva privada com três setores: primário, secundário e terciário (agricultura, indústria e serviços). A principal deficiência é que o modelo não é capaz de explicar a trajetória em forma côncava do setor secundário. Esta deficiência está provavelmente ligada ao contrafactualmente grande parte inicial do setor secundário que se é devido a taxa de poupança que, efetivamente, é um limite inferior para esta participação do setor no modelo. Assim, enquanto a parcela inicial do setor terciário for razoável, a parcela inicial do setor primário será excessivamente pequena. A introdução de convergência de taxas de crescimento da PTF entre os três setores combinados com a introdução de preferências não homotéticas⁴ produzem melhorias essenciais do modelo. Preferências não homotéticas adicionam uma segunda força motriz de mudança estrutural do lado da demanda. Isso intensifica a mudança estrutural e também altera a direção da mudança estrutural. Com essas modificações, o modelo não apenas replica o declínio monotônico da participação do setor primário e o aumento contínuo da participação do setor terciário, mas principalmente o desenvolvimento em forma côncava da participação do setor secundário, apesar de apenas numa versão muito estilizada. O modelo ainda tem a desvantagem que a parcela do setor secundário é muito grande, mesmo no final do desenvolvimento. Portanto, a introdução da acumulação de capital humano é uma forma razoável de reduzir a participação do secundário e de aumentar a participação do setor terciário.

O artigo de Acemoglu & Guerrieri (2008), embora estudando mudança estrutural numa economia com dois setores, diferentemente de Ngai & Pissarides (2007), apresenta um

³Veja em Ngai & Pissarides (2007), pág. 430

⁴Segundo Varian (1992), página 146, a função $f : R^n \rightarrow R$ é homotética se $f(x) = g(h(x))$ onde g é uma função estritamente crescente e h é uma função que é homogênea de grau 1. Se um consumidor tem preferências que podem ser representadas por uma função de utilidade homotética, então diz o consumidor tem preferências homotética.

ganho em relação a este último: não só permite as diferentes taxas de progresso técnico, mas também as diferenças de intensidade de capital em todos os setores. Em um modelo de crescimento de dois setores com elasticidade de substituição constante, de preferências e tecnologias de produção do tipo Cobb-Douglas mostram que, desde que a elasticidade de substituição seja inferior a um, a convergência para o equilíbrio limitante pode ser lenta e ao longo do caminho de transição (quando há mudanças de estrutura setorial). As partes de capital e a taxa de juros variam apenas por quantidades relativamente pequenas, portanto, conciliam mudança estrutural com os fatos estilizados do crescimento de Kaldor. Kaldor (1961)⁵ listou uma série de fatos estilizados que ele pensou que tipificava o processo de crescimento econômico. Esses fatos foram:

1. O produto per capita cresce ao longo do tempo, e sua taxa de crescimento não tende a diminuir;
2. O capital físico por trabalhador cresce ao longo do tempo;
3. A taxa de retorno do capital é praticamente constante;
4. A razão do capital físico pelo produto é praticamente constante;
5. As participações do trabalho e do capital físico na renda nacional são quase constante;
6. A taxa de crescimento do produto por trabalhador difere substancialmente entre países.

Alicerçado sobre o arcabouço dos artigos de Feldman (1928) e Ngai & Pissarides (2007), construímos um modelo que tenta capturar a essência desses dois modelos. Do modelo de Feldman (1928) nosso modelo captura a idéia sobre alocação de investimento e do modelo de Ngai & Pissarides (2007) nosso modelo traz a composição de uma economia dividida em m setores. Aqui vale observar uma diferença do nosso modelo com o de Ngai & Pissarides(2007). Enquanto nesse os primeiros $m - 1$ setores produzem bens de consumo

⁵Posteriormente Kuznets (1973, 1981) traz à tona outras características de crescimento econômico moderno. Ele observa a rápida taxa de mudança estrutural, que inclui mudanças provenientes da agricultura para a indústria para os serviços. Ele também argumenta que o crescimento moderno envolve um papel mais importante para o comércio exterior e que o progresso tecnológico implica dependência reduzida sobre os recursos naturais.

e o m -ésimo setor produz bens de capital e de consumo, nosso modelo os primeiros $m - 1$ setores produzem bens de consumo e o m -ésimo setor produz apenas bens de capital. Com uma abordagem diferenciada, em que o estudo de mudança estrutural se dá por meio de alocação de investimento, nosso modelo tenta mostrar que estoque de capital é uma variável que contribue para mudança estrutural.

Capítulo 3

Economia com Vários Setores

3.1 O Modelo

Neste capítulo vamos estudar uma economia fechada sob a hipótese de um número genérico de setores. O modelo aqui desenvolvido teve influência dos modelos de Feldman (1928) e Ngai & Pissarides (2007). Com uma abordagem diferenciada de se estudar crescimento e mudança estrutural, nosso modelo fornece as taxas de investimento ótimo em cada setor e os níveis de estoque de capital quando a economia está em estado estacionário.

Nessa seção, trataremos do desenvolvimento do modelo; na seção seguinte, resolveremos o problema do planejador central e na última mostraremos que existe uma equivalência entre o equilíbrio ótimo do mercado centralizado e equilíbrio competitivo.

Vamos considerar uma economia fechada com m setores em que os primeiros $m - 1$ setores produzem bens de consumo e o m -ésimo produz bens de capital, os quais são usados como investimento nos m setores que, depois de instalados, não podem ser transferidos de um setor para outro. A proporção λ_i da produção corrente do setor m corresponde ao investimento alocado no setor i (observe que cada $0 \leq \lambda_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$). Vamos assumir, para cada setor, uma função de produção do tipo Cobb-Douglas

$$F_{it}(K_{it}, L_{it}) = A_{it} K_{it}^{\alpha_i} L_{it}^{1-\alpha_i},$$

onde K_{it} é o estoque de capital físico, L_{it} é a força de trabalho, A_{it} é o progresso tecnológico

e os subscritos i, t indicam o setor e o instante de tempo, respectivamente. A elasticidad dos fatores (α_i) empregada na produção em cada setor pode ser diferente. Com isso temos uma função de produção um pouco mais geral do que a usada em Ngai & Pissarides (2007).

Vamos considerar também que cada setor i a taxa de progresso tecnológico seja igual a v_i , ou seja,

$$\frac{\dot{A}_{it}}{A_{it}} = v_i,$$

ou ainda,

$$A_{it} = A_{i0}e^{v_i t}.$$

O progresso tecnológico é em geral responsável pelo aumento da produtividade do trabalho. O efeito mais imediato desse processo é a diminuição do emprego nos setores onde o progresso tecnológico incide em função de sua natureza poupadora de trabalho. Mas essa não é toda a história. Nesses setores, há a tendência para a diminuição de preços em função da diminuição dos custos de produção. Em virtude de preços mais baixos, o poder aquisitivo dos consumidores aumenta e, como consequência, há um aumento do consumo. Mas esse aumento de consumo não ocorre de forma uniforme entre os diversos setores. Nem sempre um setor onde ocorreu forte incidência de progresso tecnológico será o mesmo setor que vai se beneficiar de um forte aumento da demanda em virtude do aumento de renda.

Isso se dá porque em geral há uma hierarquia na evolução das preferências dos consumidores a medida que a renda per capita aumenta. Se o nível de renda per capita se encontra em níveis muito baixos, um aumento da renda tende a privilegiar setores que produzem mercadorias com baixa elasticidade renda da demanda. Mas, à medida que a renda per capita continua subindo e as necessidades básicas são supridas, o aumento da demanda se desloca para setores que produzem bens mais sofisticados, que em geral possuem maior elasticidade renda da demanda. Nesse sentido, a demanda desempenha um papel central no estudo das mudanças estruturais, pois apesar de o progresso tecnológico ser responsável pelo aumento da renda per capita, a evolução dos padrões de consumo, decorrente da Lei de Engel¹, é na verdade o fator responsável pelas variações na cesta de

¹A Lei de Engel é um princípio enunciado pelo economista alemão Engel e baseado na constatação de

consumo dos consumidores, que se traduz em variações na composição setorial da economia.

Nesse sentido, é que economias com renda per capita e distribuição de renda semelhantes devem ter composição setorial semelhantes, refletindo o fato de que essa composição mimetiza o padrão de consumo dos consumidores.

Sejam $\{a_{it}, i = 1, 2, \dots, m\}$, a fração de trabalhadores em cada setor i no instante t . Então o número de trabalhadores no setor i e instante t , L_{it} , é proporcional ao número de trabalhadores na economia total, L_t , ou seja, $L_{it} = a_{it}L_t$. O crescimento populacional é assumido exógeno e cresce a uma taxa n :

$$\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n \implies L_t = L(t) = L(0)e^{nt}. \quad (3.1)$$

Aqui não estamos fazendo distinção entre o total da população e o total da força de trabalho. Logo, a força de trabalho total no instante t é a soma do trabalho em cada setor, isto é:

$$L_t = L_{1t} + L_{2t} + \dots, + L_{mt} \quad (3.2)$$

$$L_t = a_{1t}L_t + a_{2t}L_t + \dots, + a_{mt}L_t \quad (3.3)$$

com

$$\sum_{i=1}^m a_{it} = 1$$

Das equações (3.1)-(3.3) é possível concluir que a força de trabalho total cresce a uma taxa constante n . Contudo, como estamos supondo que a proporção de trabalhadores em cada setor pode variar com o tempo, então a taxa de variação da mão de obra em cada setor será a taxa de variação da força de trabalho total (n) mais a taxa de variação da proporção de trabalhadores de cada setor correspondente. De outra forma,

$$\frac{\dot{L}_{it}}{L_{it}} = \frac{\dot{a}_{it}}{a_{it}} + n \quad (3.4)$$

A produção no setor 1 no instante t é dada por $Y_{1t} = A_{1t}K_{1t}^{\alpha_1}L_{1t}^{1-\alpha_1}$. Então, a produção per

que existe uma relação entre os rendimentos das famílias e a respectiva estrutura do consumo. De acordo com esta lei, quanto menor for o rendimento de uma família, maior tenderá a ser a proporção dos seus rendimentos gasta em alimentação e menor será a proporção dos rendimentos gasta em saúde, cultura, lazer, habitação, entre outros.

capita é obtida como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{Y_{1t}}{L_t} &= \frac{A_{1t}K_{1t}^{\alpha_1}L_{1t}^{1-\alpha_1}}{L_t} \Rightarrow \\
\frac{Y_{1t}}{L_t} &= \frac{A_{1t}K_{1t}^{\alpha_1}(a_{1t}L_t)^{1-\alpha_1}}{L_t} \Rightarrow \\
\frac{Y_{1t}}{L_t} &= A_{1t} \left(\frac{K_{1t}}{L_t} \right)^{\alpha_1} [a_{1t}]^{1-\alpha_1} \Rightarrow \\
y_{1t} &= A_{1t}k_{1t}^{\alpha_1}a_{1t}^{1-\alpha_1}, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

onde $y_{1t} = \frac{Y_{1t}}{L_t}$ é a produção per capita do setor 1 no instante t e $k_{1t} = \frac{K_{1t}}{L_t}$ é o estoque de capital per capita no instante t .

De forma análoga tem-se a produção per capita dos outros setores

$$y_{2t} = A_{2t}k_{2t}^{\alpha_2}a_{2t}^{1-\alpha_2}, \tag{3.6}$$

...

$$y_{mt} = A_{mt}k_{mt}^{\alpha_m}(a_{mt})^{1-\alpha_m}. \tag{3.7}$$

A variação do capital no setor 1 depende da proporção de investimento da produção total do setor m subtraindo-se a depreciação do estoque de capital do próprio setor 1:

$$\dot{K}_{1t} = \lambda_1 Y_{mt} - \delta K_{1t}. \tag{3.8}$$

Dividindo a equação (3.8) por L_t ,

$$\frac{\dot{K}_{1t}}{L_t} = \frac{\lambda_1 Y_{mt}}{L_t} - \frac{\delta K_{1t}}{L_t}. \tag{3.9}$$

Observe que na equação (3.9) sabemos que $\frac{Y_{mt}}{L_t} = y_{mt}$ e $\frac{K_{1t}}{L_t} = k_{1t}$, faltando apenas conhecer $\frac{\dot{K}_{1t}}{L_t}$. Essa expressão é encontrada derivando a equação $\frac{K_{1t}}{L_t} = k_{1t}$ em relação a t . Ou seja:

$$\begin{aligned}
\dot{k}_{1t} &= \frac{\dot{K}_{1t}L_t - \dot{L}_t K_{1t}}{(L_t)^2} \\
\dot{k}_{1t} &= \frac{\dot{K}_{1t}}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \frac{K_{1t}}{L_t} \\
\dot{k}_{1t} &= \frac{\dot{K}_{1t}}{L_t} - nk_{1t} \\
\frac{\dot{K}_{1t}}{L_t} &= \dot{k}_{1t} + nk_{1t}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (3.10) em (3.9) e rearrumando os termos, segue-se:

$$\dot{k}_{1t} = \lambda_1 y_{mt} - (n + \delta)k_{1t}. \quad (3.11)$$

A variação do estoque de capital no setor 2 depende da proporção da produção total do setor m subtraindo-se a depreciação do estoque de capital do setor 2, isto é:

$$\dot{K}_{2t} = \lambda_2 Y_{mt} - \delta K_{2t}. \quad (3.12)$$

Dividindo a equação (3.12) por L_t tem-se:

$$\frac{\dot{K}_{2t}}{L_t} = \frac{\lambda_2 Y_{mt}}{L_t} - \frac{\delta K_{2t}}{L_t}. \quad (3.13)$$

Observe que na equação (3.13) sabemos que $\frac{Y_{mt}}{L_t} = y_{mt}$ e $\frac{K_{2t}}{L_t} = k_{2t}$ faltando apenas conhecer $\frac{\dot{K}_{2t}}{L_t}$. Isto será encontrado derivando $\frac{K_{2t}}{L_t} = k_{2t}$ em relação a t . Então, derivando de ambos os lados em relação a t :

$$\begin{aligned} \dot{k}_{2t} &= \frac{\dot{K}_{2t}L_t - \dot{L}_t K_{2t}}{(L_t)^2} \\ \dot{k}_{2t} &= \frac{\dot{K}_{2t}}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \frac{K_{2t}}{L_t} \\ \dot{k}_{2t} &= \frac{\dot{K}_{2t}}{L_t} - nk_{2t} \\ \frac{\dot{K}_{2t}}{L_t} &= \dot{k}_{2t} + nk_{2t}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Portanto, substituindo (3.14) em (3.13) e rearrumando os termos

$$\dot{k}_{2t} = \lambda_2 y_{mt} - (n + \delta)k_{2t}. \quad (3.15)$$

Prosseguindo como nos dois primeiros setores podemos encontrar as equações de movimento dos estoques de capitais per capita em cada setor:

$$\begin{aligned} \dot{k}_{1t} &= \lambda_1 y_{mt} - (n + \delta)k_{1t} \\ \dot{k}_{2t} &= \lambda_2 y_{mt} - (n + \delta)k_{2t} \\ \dot{k}_{3t} &= \lambda_3 y_{mt} - (n + \delta)k_{3t} \\ &\dots \\ \dot{k}_{mt} &= \lambda_m y_{mt} - (n + \delta)k_{mt} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Uma das características deste modelo é que, no curto prazo, uma maior taxa de alocação de investimento no setor de bens de capital, implica numa maior taxa de crescimento desse setor e uma menor taxa de crescimento dos setores de bens de consumo. Contudo, no longo prazo, uma maior taxa de alocação de investimentos implica uma maior taxa de crescimento de todos os setores. Essa dinâmica é fácil de ser verificada, pois, dado um aumento na taxa de investimento do setor de bens de capital, o resto permanecendo constante, isso implica num aumento do estoque de capital do setor m . Logo, pela equação (3.7), tem-se um aumento na produção do setor. Como os estoques de capital de todos os setores variam diretamente com a produção do setor m em cada tempo t , no longo prazo isso quer dizer um aumento no estoque de capital de todos os setores e, portanto, um aumento na produção dos mesmos. Então, uma questão interessante é determinar a taxa de investimento que proporciona maior consumo intertemporal. Esta pergunta será respondida na próxima seção!

3.2 Investimento Ótimo

Para resolver esse trade-off entre consumo atual e consumo futuro, vamos representá-lo num problema de otimização dinâmica que nos permitirá escolher a taxa ótima de alocação de investimentos que maximizam o consumo intertemporal. Para encontrar esta taxa ótima vamos supor que a economia admite um planejador central que quer maximizar o bem-estar da família representante. Aqui vamos um pouco além de determinar a taxa de alocação de investimento que maximiza a produção de bens de consumo, vamos determinar também o caminho ótimo de estoque de capital que o setor atingirá em estado estacionário e como será o comportamento da mão de obra em cada setor.

Então, o planejador central tem que resolver o seguinte problema:

$$\max \int_0^{\infty} u(c_{1t}, c_{2t}, \dots, c_{(m-1)t}) e^{-(\rho-n)t} dt$$

$$\dot{k}_{1t} = \lambda_1 y_{mt} - (n + \delta)k_{1t} \quad (3.17)$$

$$s.a. \quad \dot{k}_{2t} = \lambda_2 y_{mt} - (n + \delta)k_{2t} \quad (3.18)$$

\vdots

$$\dot{k}_{mt} = \lambda_m y_{mt} - (n + \delta)k_{mt} \quad (3.19)$$

onde $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ e a produção per capita, y_{mt} , é dada pela equação (3.7). Também estamos supondo que toda produção dessa economia ou é consumida ou é investida. Isso quer dizer que:

$$y_{1t} = c_{1t}, \quad y_{2t} = c_{2t}, \quad \dots, \quad y_{(m-1)t} = c_{(m-1)t}, \quad e \quad y_{mt} = I,$$

onde I é o investimento total.

A função de utilidade é do tipo:

$$u(c_{1t}, c_{2t}, \dots, c_{(m-1)t}) = \sum_{i=1}^{m-1} w_i \ln c_{it}$$

com $\sum_{i=1}^{m-1} w_i = 1$

Adicionando as variáveis de co-estado μ_i , $i = 1, \dots, m$ ao investimento em todos os setores, temos o seguinte Hamiltoniano:

$$H = \sum_{i=1}^{m-1} w_i \ln c_{it} + \sum_{i=1}^m \mu_i [\lambda_i y_{mt} - (n + \delta)k_{it}] \quad (3.20)$$

Usando a igualdade, $\lambda_m = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i$, provamos no apêndice A.1 página 71, que as variáveis de co-estados são todas iguais, isto é:

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = \mu \quad (3.21)$$

Considerando as derivadas do Hamiltoniano em relação às frações dos trabalhadores, a_{it} , obtivemos no apêndice A.1, página 72:

$$a_{it} = \frac{w_i(1 - \alpha_i)}{w_j(1 - \alpha_j)} a_{jt}, \quad i = 1, \dots, m - 1 \quad (3.22)$$

ou

$$a_{it} = \frac{w_i(1 - \alpha_i)}{\mu A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m} (1 - \alpha_m) a_{mt}^{-\alpha_m}}, \quad i = 1, \dots, m - 1 \quad (3.23)$$

e

$$a_{mt} = 1 - \frac{1}{\mu A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m} (1 - \alpha_m) a_{mt}^{-\alpha_m}} \sum_{i=1}^{m-1} w_i (1 - \alpha_i) \quad (3.24)$$

ou

$$a_{mt} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} w_i \alpha_i}{\mu A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m} (1 - \alpha_m) a_{mt}^{-\alpha_m}} + \left(1 - \frac{1 - w_m}{\mu A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m} (1 - \alpha_m) a_{mt}^{-\alpha_m}} \right) \quad (3.25)$$

As equações de Euler podem ser escritas como:

$$\dot{\mu} = -\frac{\alpha_i w_i}{k_{it}} + (\rho + \delta)\mu, \quad i = 1, 2, \dots, m - 1 \quad (3.26)$$

$$\dot{\mu} = -A_{mt} \alpha_m k_{mt}^{\alpha_m - 1} a_{mt}^{1 - \alpha_m} \mu + (\rho + \delta)\mu. \quad (3.27)$$

Senão veja no apêndice A.1, página 72.

Das equações

$$\dot{\mu} = -\frac{\alpha_i w_i}{k_{it}} + (\rho + \delta)\mu \quad i = 1, 2, \dots, m - 1,$$

podemos encontrar uma relação entre os capitais dos setores $i = 1, \dots, m - 1$

$$\frac{w_i \alpha_i}{k_{it}} = \frac{w_j \alpha_j}{k_{jt}} \quad j = 1, 2, \dots, m - 1. \quad (3.28)$$

Como em estado estacionário $\frac{\dot{\mu}}{\mu}$ é constante, então, dividindo a equação (3.26) por μ e derivando em relação a t ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(-\frac{w_i \alpha_i}{k_{it} \mu} + \rho + \delta \right) &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{\dot{k}_{it}}{k_{it}} &= \frac{\dot{\mu}}{\mu}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Da equação (3.28) podemos concluir que $\frac{\dot{k}_{it}}{k_{it}} = \frac{\dot{k}_{jt}}{k_{jt}}$, $i, j = 1, \dots, m - 1$. Contudo, em estado estacionário podemos assumir uma condição mais geral em que:

$$\frac{\dot{k}_{it}}{k_{it}} = \frac{\dot{k}_{jt}}{k_{jt}}, \quad i, j = 1, \dots, m \quad (3.30)$$

Logo, dividindo equação (3.27) por μ e a restrição (3.19) por k_{mt} , temos

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -A_{mt}\alpha_m k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} + (\rho + \delta) \quad (3.31)$$

$$\frac{\dot{k}_{mt}}{k_{mt}} = \lambda_m A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} - (n + \delta) \quad (3.32)$$

A partir das igualdades (3.29) e (3.30) e das equações (3.31) e (3.32) podemos expressar a equação de estoque de capital do setor m da seguinte forma:

$$k_{mt} = \left(\frac{A_{mt} a_{mt}^{1-\alpha_m} (\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}}. \quad (3.33)$$

Observe que a equação de estoque de capital do setor m ainda está em função do tempo e da porção de trabalho do próprio setor. Nosso objetivo é deixá-la variando em função apenas do tempo, e é o que faremos adiante.

De forma análoga ao que fizemos para encontrar a equação de estoque de capital do setor m podemos fazer para os outros setores, dando como equação:

$$k_{it} = \frac{\lambda_i}{\lambda_m} \left(\frac{\rho - n}{A_{mt} a_{mt}^{1-\alpha_m} (\alpha_m - \lambda_m)} \right)^{\frac{1}{\alpha_m-1}}, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (3.34)$$

Ela ainda pode ser escrita em função do estoque de capital do setor m , isto é:

$$k_{it} = \frac{\lambda_i}{\lambda_m} k_{mt}, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (3.35)$$

Substituindo a equação (A.19) na equação (A.9), veja apêndice A.1, páginas 72-73, podemos mostrar que o estoque de capital do setor m depende simplesmente da variável tempo:

$$k_{mt} = \left(\frac{A_{mt} (\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} - \frac{1}{\mu(1-\alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i (1 - \alpha_i) \quad (3.36)$$

Para determinar o nível ótimo de investimento da economia em estado estacionário que maximiza a utilidade do consumidor, veja apêndice A.4 página 75, vamos fazer $D = \frac{(\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n}$ e derivar a equação (A.28) em relação a t . Então:

$$\lambda_m^* = \frac{\alpha_m [v_m + (1 - \alpha_m)(n + \delta)]}{v_m + (\rho + \delta)(1 - \alpha_m)} \quad (3.37)$$

e

$$\lambda_i^* = (1 - \lambda_m^*) \left(\frac{w_i \alpha_i}{w_1 \alpha_1 + w_2 \alpha_2 + \dots + w_{m-1} \alpha_{m-1}} \right) \text{ para } i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.38)$$

A solução para $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*\}$ é semelhante à solução encontrada por Domar (1957). Portanto, estas taxas de investimentos são as taxas que proporcionam que as famílias maximizem o seu consumo intertemporal.

Veja ainda que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_m^*}{\partial \rho} &= - \frac{(1 - \alpha_m) \alpha_m [v_m + (1 - \alpha_m)(n + \delta)]}{[v_m + (\rho + \delta)(1 - \alpha_m)]^2} < 0, \\ \frac{\partial \lambda_i^*}{\partial \rho} &= - \frac{\partial \lambda_m^*}{\partial \rho} \frac{w_i \alpha_i}{(\sum_{t=1}^m w_t \alpha_t)^2} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, um aumento na taxa de desconto intertemporal causa uma redução na taxa de investimento no setor m , setor de produção de bens de capital. Contudo, um aumento na taxa de desconto intertemporal provoca um aumento na taxa de investimento nos setores $\{1, \dots, m-1\}$, setores de bens de consumo. A análise se verifica, pois, um aumento na taxa de desconto intertemporal faz com que o planejador central irá *dar mais valor no hoje do que no amanhã*; com isso tende a consumir mais hoje do que amanhã, o que vai demandar mais investimento nos setores de consumo. Observe ainda que dada a taxa de investimento do setor que produz bens de capitais, todas as taxas de investimentos dos setores de bens de consumo são proporcionais a essa e o que diferencia uma das outras é a propensão marginal a consumir ou a taxa de utilização dos fatores de produção.

Para calcular o estoque de capital ótimo do setor m , basta substituir o valor de λ_m^* , equação (A.33), em $k_m(t)$, equação (A.28). Isto é:

$$k_{mt}^* = A_{mt}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \left(\frac{\alpha_m (1 - \alpha_m)}{v_m + (\rho + \delta)(1 - \alpha_m)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} - \frac{1}{\mu(1 - \alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i (1 - \alpha_i) \quad (3.39)$$

ou ainda,

$$k_m^*(t) = e^{\left(\frac{v_m}{1-\alpha_m}\right)t} \left[\left(\frac{A_{m0} \alpha_m (\rho - n)(1 - \alpha_m)}{[v_m + (\rho + \delta)(1 - \alpha_m)](\rho - n)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} - \frac{1}{\mu(0)(1 - \alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i (1 - \alpha_i) \right]. \quad (3.40)$$

Para chegar na última equação foi usado o fato de que $\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\frac{v_m}{1 - \alpha_m}$ (veja equação (A.38), página 77).

Pela equação anterior, podemos concluir que o progresso tecnológico contribui continuamente para o crescimento dessa economia. Também podemos perceber que se aumentar o fator de utilização do capital no setor de bens de investimento, isso resultará num maior estoque de capital. Na verdade, analisando a equação logo a seguir, (3.51), é fácil ver que uma maior taxa de variação do estoque de capital do setor m é causada por aumento na taxa de progresso tecnológico ou por aumento no fator de utilização do capital. O estoque de capital terá um choque negativo caso haja um aumento no desconto intertemporal ou um aumento na taxa de depreciação.

No caso do estoque de capital ótimo do setor 1, consideremos as equações (A.19), (3.30),(A.30) e (A.36). Então, dividindo a restrição (3.17) por k_1 , tem-se:

$$k_{1t}^* = \lambda_1^* a_{mt} \left(\frac{A_{mt} \alpha_m (1 - \alpha_m)}{v_m + (\rho + \delta)(1 - \alpha_m)} \right)^{\frac{\alpha_m}{1 - \alpha_m}} \left(\frac{A_{mt} (1 - \alpha_m)}{v_m + (n + \delta)(1 - \alpha_m)} \right). \quad (3.41)$$

Reorganizando os termos podemos escrever k_{1t}^* em função de k_{mt}^* , ou seja:

$$\begin{aligned} k_{1t}^* &= \lambda_1^* \left(\frac{\alpha_m (1 - \alpha_m)}{v_m + (\rho + \delta)(1 - \alpha_m)} \right)^{-1} \left(\frac{1 - \alpha_m}{v_m + (n + \delta)(1 - \alpha_m)} \right) k_{mt}^* \Rightarrow \\ &= \frac{\lambda_1^*}{\lambda_m^*} k_{mt}^*. \end{aligned} \quad (3.42)$$

O resultado acima pode ser generalizado para o estoque de capital ótimo do setor $i = 2, 3, \dots, m - 1$. Isto é, o estoque de capital do setor i é dado por:

$$k_{it}^* = \lambda_i^* a_{mt} \left(\frac{A_{mt} \alpha_m (1 - \alpha_m)}{v_m + (\rho + \delta)(1 - \alpha_m)} \right)^{\frac{\alpha_m}{1 - \alpha_m}} \left(\frac{A_{mt} (1 - \alpha_m)}{v_m + (n + \delta)(1 - \alpha_m)} \right). \quad (3.43)$$

Ou ainda:

$$k_{it}^* = \lambda_i^* \left(\frac{\alpha_m (1 - \alpha_m)}{A_{m0} v_m + (\rho + \delta)(1 - \alpha_m)} \right)^{-1} \left(\frac{1 - \alpha_m}{A_{m0} v_m + (n + \delta)(1 - \alpha_m)} \right) k_{mt}^* \Rightarrow (3.44)$$

$$= \frac{\lambda_i^*}{\lambda_m^*} k_{mt}^*. \quad (3.45)$$

No que diz respeito aos estoques de capitais nos setores de consumo, um aumento na taxa de investimento do setor i proporcionará um aumento no estoque de capital nesse setor, embora isso só seja sentido num primeiro momento. O que causa um crescimento contínuo é o progresso tecnológico, que aumenta o estoque de capital do setor de investimento e este empurra para cima o estoque de capital no setor de consumo.

O modelo aqui estudado é semelhante ao modelo de Uzawa (1961). Considerando que a alocação dos fluxos dos bens de capital vai se transformar em alocação de estoques de bens de capital é possível mostrar que, a longo prazo, nosso modelo converge para o modelo de Uzawa. Para tanto, observe que a partir da equação (3.45) podemos concluir que a longo prazo,

$$\frac{k_{mt}^*}{k_{it}^*} = \frac{\lambda_m^*}{\lambda_i^*} \quad (3.46)$$

e

$$\frac{k_{it}^*}{k_{jt}^*} = \frac{\lambda_i^*}{\lambda_j^*}. \quad (3.47)$$

Logo, podemos escrever:

$$k_{1t}^* = \lambda_1^* k_t^*, \quad k_{2t}^* = \lambda_2^* k_t^*, \quad \dots, \quad k_{mt}^* = \lambda_m^* k_t^*,$$

onde

$$k_t^* = k_{1t}^* + k_{2t}^* + \dots + k_{mt}^*.$$

Portanto, a longo prazo, as funções de produção (3.5), (3.6) e (3.7) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$y_{1t} = A_{1t} (\lambda_1 k_t)^{\alpha_2} a_{2t}^{1-\alpha_2}, \quad (3.48)$$

$$y_{2t} = A_{2t} (\lambda_2 k_t)^{\alpha_2} a_{2t}^{1-\alpha_2}, \quad (3.49)$$

...

$$y_{mt} = A_{mt} (\lambda_m k_t)^{\alpha_m} a_{mt}^{1-\alpha_m}. \quad (3.50)$$

Esse sistema, numa economia com dois setores e função de produção Cobb-Douglas, corresponde ao modelo de Uzawa.

Também é fácil ver que a taxa de crescimento dos estoques de capitais, em estado estacionário, se movimentam a uma taxa constante. Para ver isto, derive a equação A.39

em relação a t e dividida por k_{mt}^* . Em seguida use a equação (3.29) para encontrar:

$$\frac{\dot{k}_{mt}^*}{k_{mt}^*} = \frac{v_m}{1 - \alpha_m}. \quad (3.51)$$

Da equação (3.44), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{k}_{it}^*}{k_{it}^*} &= \frac{\dot{k}_{mt}^*}{k_{mt}^*} \\ &= \frac{v_m}{1 - \alpha_m}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Agora podemos encontrar a expressão das porções de mão de obra em cada setor quando a economia está no caminho ótimo. Para a fração de mão de obra no setor m , vamos substituir a equação (A.39) na equação (A.9), ou seja:

$$\begin{aligned} a_{mt}^* &= 1 - \frac{1}{\mu A_{mt} a_{mt}^{\alpha_m} A_{mt}^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} E^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} (1 - \alpha_m) a_{mt}^{-\alpha_m}} \sum_{i=1}^{m-1} w_i (1 - \alpha_i), \\ a_{mt}^* &= 1 - \frac{1}{\mu(0) A_{m(0)}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} E^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} (1 - \alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i (1 - \alpha_i). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Para a mão de obra nos outros setores vamos usar a equação (A.39) na equação (A.8), e então teremos:

$$a_{it}^* = \frac{w_i (1 - \alpha_i)}{\mu(0) A_{m(0)}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} E^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} (1 - \alpha_m)}, \quad (3.54)$$

onde $E = \frac{\alpha_m (\rho - n) (1 - \alpha_m)}{[v_m + (\rho + \delta) (1 - \alpha_m)] (\rho - n)}$.

Está explícito como as parcelas de mão-de-obra dependem da propensão marginal a consumir de cada setor e das taxas de utilização dos fatores de produção. A parcela de trabalhadores do setor de capital vai aumentar se, pelo menos em um dos setores de consumo, a propensão marginal a consumir diminuir ou a taxa de utilização dos fatores de capital aumentar. E vai aumentar quando ocorrer o contrário. A parcela de mão-de-obra do setor de consumo tem a mesma direção da propensão marginal a consumir do respectivo setor e direção oposta à taxa de utilização dos fatores de capital. Em outras palavras, a_{it}^* tende a diminuir se w_i diminuir ou α_i aumentar.

Observe que, mesmo em estado estacionário, ainda há mudanças estruturais, pois,

$$\begin{aligned}
y_{it} &= A_{it}k_{it}^{\alpha_i}a_{it}^{1-\alpha_i} \Rightarrow \\
\dot{y}_{it} &= \dot{A}_{it}k_{it}^{\alpha_i}a_{it}^{1-\alpha_i} + A_{it}\alpha_i k_{it}^{\alpha_i-1}\dot{k}_{it}a_{it}^{1-\alpha_i} + A_{it}k_{it}^{\alpha_i}(1-\alpha_i)a_{it}^{-\alpha_i}\dot{a}_{it} \Rightarrow \\
\frac{\dot{y}_{it}}{y_{it}} &= \frac{\dot{A}_{it}}{A_{it}} + \alpha_i \frac{\dot{k}_{it}}{k_{it}} + (1-\alpha_i)\frac{\dot{a}_{it}}{a_{it}}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Dos resultados obtidos sabemos que fração de mão de obra alocada em cada setor é constante (então, $\frac{\dot{a}_{it}}{a_{it}} = 0$) e a taxa de variação do estoque de capital per capita é dada por $\frac{\dot{k}_{it}}{k_{it}} = \frac{v_m}{1-\alpha_m}$. Logo, a equação anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\dot{y}_{it}}{y_{it}} = v_i + \alpha_i \frac{v_m}{1-\alpha_m}. \tag{3.56}$$

Portanto, tanto o progresso técnico quanto o fator de produtividade do capital podem implicar em diferentes taxas de produto de um setor para outro.

3.3 Equivalência ente Comando Ótimo e Equilíbrio Competitivo

Nesta seção, vamos mostrar que existe uma equivalência entre o equilíbrio ótimo do mercado centralizado e equilíbrio competitivo. Para isso, primeiro considere o seguinte conjunto de restrições que está relacionado com as restrições do consumidor representativo:

$$\dot{k}_{1t} = \lambda_1 A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m} a_{mt}^{1-\alpha_m} - (n + \delta)k_{1t} \tag{3.57}$$

$$\dot{k}_{2t} = \lambda_2 A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m} a_{mt}^{1-\alpha_m} - (n + \delta)k_{2t} \tag{3.58}$$

⋮

$$\dot{k}_{(m-1)t} = \lambda_{m-1} A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m} a_{mt}^{1-\alpha_m} - (n + \delta)k_{(m-1)t} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
\dot{k}_{1t} + \dot{k}_{2t} + \cdots + \dot{k}_{(m-1)t} + \dot{k}_{mt} &= [r_m - (n + \delta)]k_{mt} + [r_{m-1} - (n + \delta)]k_{(m-1)t} + \cdots + \\
&\quad [r_2 - (n + \delta)]k_{2t} + [r_1 - (n + \delta)]k_{1t} + w - C,
\end{aligned} \tag{3.60}$$

onde $C = \sum_{i=1}^{m-1} p_i y_{it}$ e r_i , $i = 1, \dots, m$ são as rentabilidades do capital em cada setor.

Substituindo as equações (3.57), (3.58), (3.59) na equação (3.60) temos

$$\dot{k}_{mt} = -A_{mt}k_{mt}^{\alpha_m}a_{mt}^{1-\alpha_m} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \right) + \sum_{i=1}^{m-1} r_i k_{it} - (n + \delta)k_{mt} + w - \sum_{i=1}^{m-1} p_i A_{it} k_{it}^{\alpha_i} a_{it}^{1-\alpha_i} \quad (3.61)$$

Então, considerando que existe muitas famílias idênticas, o representante tem que resolver o seguinte problema:

$$\max \int_0^{\infty} u(c_{1t}, \dots, c_{(m-1)t}) e^{-(\rho-n)t} dt$$

sujeito às condições formadas pelas equações (3.57), (3.58), (3.59) e (3.61).

Observe que na economia descentralizada, a família representante enfrenta uma restrição orçamentária dinâmica em que aloca sua poupança em qualquer um dos m setores. Observe também que a família representativa enfrenta uma nova restrição técnica dada pela equação (3.61). O Hamiltoniano correspondente é dado por:

$$\begin{aligned} H = & \sum_{i=1}^{m-1} q_i [\lambda_i A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m} a_{mt}^{1-\alpha_m} - (n + \delta)k_{it}] + q_m \left[\sum_{i=1}^m r_i k_{it} - A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m} a_{mt}^{1-\alpha_m} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \right] - \\ & q_m \left[\sum_{i=1}^{m-1} p_i A_{it} k_{it}^{\alpha_i} a_{it}^{1-\alpha_i} - (n + \delta)k_{mt} + w \right] + \sum_{i=1}^{m-1} w_i \ln c_{it}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Derivando as condições de primeira ordem,

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = q_i (A_m k_m^{\alpha_m} a_m^{1-\alpha_m}) - q_m (A_m k_m^{\alpha_m} a_m^{1-\alpha_m}) = 0 \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (3.63)$$

Das condições acima, concluímos que

$$q_1 = \dots = q_m = q. \quad (3.64)$$

As equações de Euler, já usando o fato de que as variáveis de co-estados são todas iguais (veja apêndice B.1, página 81), podem assim serem escritas:

$$\dot{q} = -\frac{w_i \alpha_i}{k_i} - q[r_i - (\rho + \delta) - p_i A_i \alpha_i k_i^{\alpha_i-1} a_i^{1-\alpha_i}] \quad (3.65)$$

$$\dot{q} = q[-r_m + (\rho + \delta)] \quad (3.66)$$

O problema da firma em cada setor i com $i = 1, \dots, m-1$ será maximizar Π_i , onde

$$\Pi_i = p_i Y_i - r_i K_i - w L_i. \quad (3.67)$$

Resolvendo o problema da firma para cada setor, temos:

$$r_i = p_i A_i \alpha_i k_i^{\alpha_i - 1} a_i^{1 - \alpha_i}, \quad \text{para } i = 1, \dots, m - 1$$

e

$$r_m = A_m \alpha_m k_m^{\alpha_m - 1} a_m^{1 - \alpha_m}.$$

Então, substituindo a expressão de r_i nas equações (B.3) e (B.4) encontramos o sistema

$$\dot{q} = -\frac{w_i \alpha_i}{k_i} + q(\rho + \delta), \quad (3.68)$$

$$\dot{q} = q[-A_m \alpha_m k_m^{\alpha_m - 1} a_m^{1 - \alpha_m} + (\rho + \delta)], \quad (3.69)$$

que é o mesmo sistema (equações 3.26-3.27) do problema do planejador central. Logo terá a mesma solução, ficando assim provado a equivalência entre as economias.

Capítulo 4

Economia com Três Setores

4.1 Introdução

Neste capítulo, sob a hipótese de que a economia será dividida em três setores, vamos estudar o comportamento do sistema quanto a sua estabilidade e também faremos uma ilustração numérica do modelo. Na seção 4.2, sob a hipótese de que não há progresso tecnológico, veremos que o sistema de equações diferenciais que representa as equações de movimento dos estoques de capitais é localmente estável. Na seção 4.4, considerando os resultados do capítulo 3 para uma economia com apenas três setores, isto é $m = 3$, vamos realizar uma ilustração numérica do modelo.

No capítulo anterior a economia foi dividida em um número arbitrário m de setores e aqui vamos considerá-la dividida em apenas três. Dividir a economia em um número fixo de setores sempre foi motivo de crítica. Um dos problemas é que quando se coloca um número representando uma quantidade de setores, não há uma fórmula geral que indique o que considerar como parte de cada setor. Dependendo da forma com que é composto cada setor, pode-se ter diferentes interpretações teóricas para o desenvolvimento econômico. Portanto, encontrar uma forma que melhor representasse a economia dividida em um número fixo de setores foi uma parte da economia que ocupou a mente dos pensadores por algum tempo.

Inicialmente, a literatura teórica sobre a hipótese de três setores estava preocupada

com a discussão de diferentes critérios para a classificação dos setores primário, secundário e terciário. Fisher (1939) divide os setores segundo uma hierarquia de necessidades, começando com os bens que satisfaçam as necessidades básicas no setor primário, produtos padronizados no setor secundário (especialmente de fabricação), e novos produtos no setor terciário. Fisher (1952, pag. 828) associa os três setores com particulares elasticidades renda da demanda por seus respectivos produtos. Clark (1957) faz uma lista puramente enumerativa de indústrias com base em características comuns e atribui a agricultura, silvicultura e pesca para o setor primário; todos bens de produção e processamento de indústrias para o setor secundário e as indústrias restantes para o setor terciário. As últimas indústrias consistem em construção, transportes, comunicação, finanças, administração pública, serviços pessoais, etc. Wolfe (1955) reúne indústrias com o mesmo fator dominante de produção que promove o seu crescimento. Assim, as indústrias que dependem principalmente de fatores de crescimento naturais são atribuídas ao setor primário, as indústrias que dependem, principalmente, de fatores de crescimento mecânico são atribuídas ao setor secundário, e as indústrias que dependem principalmente da habilidades humanas são atribuídas ao setor terciário. Esses fatores dominantes são assumidos para serem responsáveis pela limitação do aumento de produtividade no trabalho dos respectivos setores. A classificação de Fourastié (1949/1969), enfim, depende do progresso tecnológico, operacionalizada pela taxa de crescimento da produtividade do trabalho, como o critério de classificação central. Em sua classificação, indústrias com uma taxa média de inovação tecnológica são atribuídas ao setor primário considerando que as indústrias com um nível relativamente elevado taxa de progresso tecnológico são atribuídas ao setor secundário. As indústrias restantes com taxa relativamente baixa do progresso tecnológico são consideradas como parte do setor terciário. Fourastié desenvolve uma ampla teoria do desenvolvimento econômico, envolvendo elementos de psicologia e sociologia que complementam as considerações econômicas. Com o progresso tecnológico, o resultado é um aumento da produtividade do trabalho, o que implica que os custos trabalhistas reais vão diminuir o que por sua vez permite reduções de preços. Considerando que Fourastié assume diferentes taxas de crescimento de produtividade do trabalho nos três setores e, mais, assumindo uma concorrência suficiente, esse mecanismo leva à evolução de diferentes preços nos três setores. Como consequência, a longo prazo, o progresso tecnológico reduz as rendas e os lucros em todos os setores, embora com uma força diferente. Segundo a visão de Fourastié, o desenvolvimento de rendas e lucros determinariam o ritmo e direção

da mudança estrutural do emprego e da produção. Assim, a estrutura de preços relativos, medida pelo seu efeito no desenvolvimento de rendas e lucros, determinariam a alocação dos fatores de produção entre os setores.

4.2 Estudo de Estabilidade

É importante demonstrar a estabilidade (assintótica) em qualquer modelo de crescimento com um único caminho de crescimento equilibrado, porque tal estabilidade é necessária para a relevância de qualquer resultado para o crescimento equilibrado de tal modelo. O nosso estudo se dará levando em consideração que não há progresso tecnológico.

O modelo considera três setores: dois produzem bens de consumo e serão denotados pelos subscritos 1 e 2 e um terceiro que produz bens de capital, denotado pelo subscrito 3. Os bens de capital são usados como investimento nos três setores e depois de instalados, eles não podem ser transferidos para outro setor. A proporção λ_i da produção corrente do setor 3 corresponde ao investimento alocado no setor i (ou seja, a porcentagem do que é produzido no setor 3 que será investida no setor i). Observe que cada $0 \leq \lambda_i \leq 1$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

Vamos assumir, para cada setor, uma função de produção do tipo Cobb-Douglas

$$F_{it}(K_{it}, L_{it}) = A_i K_{it}^{\alpha_i} L_{it}^{1-\alpha_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

onde $A_i > 0$.

Sejam $\{a_{it}, \quad i = 1, 2, 3\}$ a fração de trabalhadores em cada setor i no instante t . Então o número de trabalhadores no setor i é $L_{it} = a_{it}L_t$. O crescimento populacional é assumido exógeno e cresce a uma taxa n :

$$\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n \implies L_t = L(t) = L(0)e^{nt}.$$

Logo, a força de trabalho total é a soma do trabalho em cada setor:

$$\begin{aligned} L_t &= L_{1t} + L_{2t} + L_{3t} \\ L_t &= a_{1t}L_t + a_{2t}L_t + a_{3t}L_t. \end{aligned}$$

A produção no setor 1 é

$$\begin{aligned}
Y_{1t} &= A_1 K_{1t}^{\alpha_1} L_{1t}^{1-\alpha_1} \Rightarrow \\
\frac{Y_{1t}}{L_t} &= \frac{A_1 K_{1t}^{\alpha_1} L_{1t}^{1-\alpha_1}}{L_t} \Rightarrow \\
\frac{Y_{1t}}{L_t} &= \frac{A_1 K_{1t}^{\alpha_1} (a_{1t} L_t)^{1-\alpha_1}}{L_t} \Rightarrow \\
\frac{Y_{1t}}{L_t} &= A_1 \left(\frac{K_{1t}}{L_t} \right)^{\alpha_1} a_{1t}^{1-\alpha_1} \Rightarrow \\
y_{1t} &= A_1 k_{1t}^{\alpha_1} a_{1t}^{1-\alpha_1}, \tag{4.1}
\end{aligned}$$

onde $y_{1t} = \frac{Y_{1t}}{L_t}$ é a produção per capita do setor 1 e $k_{1t} = \frac{K_{1t}}{L_t}$ é o estoque de capital per capita.

De forma análoga tem-se a produção per capita dos outros dois setores

$$y_{2t} = A_2 k_{2t}^{\alpha_2} a_{2t}^{1-\alpha_2}, \tag{4.2}$$

$$y_{3t} = A_3 k_{3t}^{\alpha_3} a_{3t}^{1-\alpha_3}. \tag{4.3}$$

A variação do estoque de capital no setor 1 depende da proporção de investimento da produção total do setor 3 subtraindo-se a depreciação ($\delta > 0$) do estoque de capital do próprio setor 1:

$$\dot{K}_{1t} = \lambda_1 Y_{3t} - \delta K_{1t}. \tag{4.4}$$

Dividindo a equação (4.4) por L_t ,

$$\frac{\dot{K}_{1t}}{L_t} = \frac{\lambda_1 Y_{3t}}{L_t} - \frac{\delta K_{1t}}{L_t}. \tag{4.5}$$

Observe que na equação (4.5) sabemos que $\frac{Y_{3t}}{L_t} = y_{3t}$ e $\frac{K_{1t}}{L_t} = k_{1t}$, faltando apenas conhecer $\frac{\dot{K}_{1t}}{L_t}$. Prosseguindo com a derivação de $\frac{K_{1t}}{L_t} = k_{1t}$ em relação a t , temos:

$$\begin{aligned}
\dot{k}_{1t} &= \frac{\dot{K}_{1t} L_t - \dot{L}_t K_{1t}}{(L_t)^2}, \\
\dot{k}_{1t} &= \frac{\dot{K}_{1t}}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \frac{K_{1t}}{L_t}, \\
\dot{k}_{1t} &= \frac{\dot{K}_{1t}}{L_t} - n k_{1t}, \\
\frac{\dot{K}_{1t}}{L_t} &= \dot{k}_{1t} + n k_{1t}. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (4.6) em (4.5) e rearrumando os termos

$$\dot{k}_{1t} = \lambda_1 y_{3t} - (n + \delta)k_{1t}. \quad (4.7)$$

A variação do estoque de capital no setor 2 depende da proporção da produção total do setor 3 subtraindo-se a depreciação do estoque de capital do setor 2, isto é:

$$\dot{K}_{2t} = \lambda_2 Y_{3t} - \delta K_{2t}. \quad (4.8)$$

Dividindo a equação (4.8) por L_t tem-se:

$$\frac{\dot{K}_{2t}}{L_t} = \frac{\lambda_2 Y_{3t}}{L_t} - \frac{\delta K_{2t}}{L_t}. \quad (4.9)$$

Observe que na equação (4.9) sabemos que $\frac{Y_{3t}}{L_t} = y_{3t}$ e $\frac{K_{2t}}{L_t} = k_{2t}$, faltando apenas conhecer $\frac{\dot{K}_{2t}}{L_t}$. Derivando $\frac{K_{2t}}{L_t} = k_{2t}$ em relação a t tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{k}_{2t} &= \frac{\dot{K}_{2t}L_t - \dot{L}_t K_{2t}}{(L_t)^2}, \\ \dot{k}_{2t} &= \frac{\dot{K}_{2t}}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \frac{K_{2t}}{L_t}, \\ \dot{k}_{2t} &= \frac{\dot{K}_{2t}}{L_t} - nk_{2t}, \\ \frac{\dot{K}_{2t}}{L_t} &= \dot{k}_{2t} + nk_{2t}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Portanto, substituindo (4.10) em (4.9) e rearrumando os termos

$$\dot{k}_{2t} = \lambda_2 y_{3t} - (n + \delta)k_{2t}. \quad (4.11)$$

Já a variação do estoque de capital no setor 3 é a diferença entre a parcela de investimento recebido do setor 3 e a depreciação (δ) do estoque de capital (K_{3t}):

$$\dot{K}_{3t} = \lambda_3 Y_{3t} - \delta K_{3t}. \quad (4.12)$$

Dividindo a equação (4.12) por L_t ,

$$\frac{\dot{K}_{3t}}{L_t} = \frac{\lambda_3 Y_{3t}}{L_t} - \frac{\delta K_{3t}}{L_t}. \quad (4.13)$$

Observe que na equação (4.13) sabemos que $\frac{Y_{3t}}{L_t} = y_{3t}$ e $\frac{K_{3t}}{L_t} = k_{3t}$, faltando apenas conhecer $\frac{\dot{K}_{3t}}{L_t}$. Derivando $\frac{K_{3t}}{L_t} = k_{3t}$ em relação a t , obtem-se:

$$\begin{aligned}\dot{k}_{3t} &= \frac{\dot{K}_{3t}L_t - \dot{L}_t K_{3t}}{(L_t)^2}, \\ \dot{k}_{3t} &= \frac{\dot{K}_{3t}}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \frac{K_{3t}}{L_t}, \\ \dot{k}_{3t} &= \frac{\dot{K}_{3t}}{L_t} - nk_{3t}, \\ \frac{\dot{K}_{3t}}{L_t} &= \dot{k}_{3t} + nk_{3t}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Portanto, substituindo (4.14) em (4.13) e rearrumando os termos

$$\dot{k}_{3t} = \lambda_3 y_{3t} - (n + \delta)k_{3t}\tag{4.15}$$

Substituindo (4.3) nas equações (4.7), (4.11) e (4.15), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\dot{k}_{1t} = \lambda_1 A_3 k_{3t}^{\alpha_3} a_{3t}^{1-\alpha_3} - (n + \delta)k_{1t}\tag{4.16}$$

$$\dot{k}_{2t} = \lambda_2 A_3 k_{3t}^{\alpha_3} a_{3t}^{1-\alpha_3} - (n + \delta)k_{2t}\tag{4.17}$$

$$\dot{k}_{3t} = \lambda_3 A_3 k_{3t}^{\alpha_3} a_{3t}^{1-\alpha_3} - (n + \delta)k_{3t}\tag{4.18}$$

O estudo da estabilidade do sistema, representado pelas equações 4.16-4.18, se dará em torno dos pontos críticos. Vamos utilizar aqui o critério de classificação de estabilidade Rout-Hurwitz (ver apêndice C) cujo resultado relaciona o comportamento do sistema não linear ao redor dos seus pontos críticos com o sistema linearizado. Para isso vamos calcular os pontos críticos do sistema, linearizá-lo em torno desses pontos e então classificar o sistema quanto à sua estabilidade ao redor dos pontos críticos.

Os pontos críticos (ou estado estacionário) são caracterizados por $\dot{k}_{1t} = \dot{k}_{2t} = \dot{k}_{3t} = 0$. Logo, fazendo $\dot{k}_{3t} = 0$ na equação (4.18), temos:

$$\begin{aligned}\lambda_3 A_3 k_{3t}^{\alpha_3} a_{3t}^{1-\alpha_3} - (n + \delta)k_{3t} &= 0 \Rightarrow \\ k_{3t}[\lambda_3 A_3 k_{3t}^{\alpha_3-1} a_{3t}^{1-\alpha_3} - (n + \delta)] &= 0.\end{aligned}$$

Donde se conclui que $k_{3t} = 0$ ou

$$\begin{aligned}\lambda_3 A_3 k_{3t}^{\alpha_3-1} a_{3t}^{1-\alpha_3} - (n + \delta) &= 0 \Rightarrow \\ k_{3t}^{\alpha_3-1} &= \frac{n + \delta}{\lambda_3 A_3 (1 - a_1 - a_2)^{1-\alpha_3}} \Rightarrow \\ k_{3t}^* &= (1 - a_1 - a_2) \left(\frac{A_3 \lambda_3}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_3}}.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Fazendo $\dot{k}_2 = 0$ e usando (4.19) em (4.17)

$$\begin{aligned}0 &= \lambda_2 A_3 (1 - a_1 - a_2)^{\alpha_3} (1 - a_1 - a_2)^{1-\alpha_3} \left(\frac{A_3 \lambda_3}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha_3}{1-\alpha_3}} - (n + \delta) k_{2t} \Rightarrow \\ k_{2t} &= \frac{\lambda_2 (1 - a_1 - a_2) A_3^{\frac{1}{1-\alpha_3}} \lambda_3^{\frac{\alpha_3}{1-\alpha_3}}}{(n + \delta) (n + \delta)^{\frac{\alpha_3}{1-\alpha_3}}} \Rightarrow \\ k_{2t}^* &= \frac{\lambda_2}{\lambda_3} (1 - a_1 - a_2) \left(\frac{A_3 \lambda_3}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_3}}.\end{aligned}\quad (4.20)$$

De forma análoga,

$$k_{1t}^* = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} (1 - a_1 - a_2) \left(\frac{A_3 \lambda_3}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_3}}.\quad (4.21)$$

Portanto, se considerarmos também o caso em que $k_3 = 0$ teremos como pontos críticos,

$$(k_{1t}^*, k_{2t}^*, k_{3t}^*) = \left\{ (1 - a_1 - a_2) \left(\frac{A_3 \lambda_3}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_3}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, 1 \right), (0, 0, 0) \right\}\quad (4.22)$$

Contudo, observe que o ponto crítico $(0, 0, 0)$ não faz muito sentido nessa economia, pois, não teríamos produção em nenhum dos setores (motivo pelo qual trabalharemos apenas com o outro ponto crítico).

Denotando

$$\begin{aligned}\lambda_1 A_3 k_{3t}^{\alpha_3} a_{3t}^{1-\alpha_3} - (n + \delta) k_{1t} &= F(k_{1t}, k_{2t}, k_{3t}) \\ \lambda_2 A_3 k_{3t}^{\alpha_3} a_{3t}^{1-\alpha_3} - (n + \delta) k_{2t} &= G(k_{1t}, k_{2t}, k_{3t}) \\ \lambda_3 A_3 k_{3t}^{\alpha_3} a_{3t}^{1-\alpha_3} - (n + \delta) k_{3t} &= H(k_{1t}, k_{2t}, k_{3t}),\end{aligned}$$

então, a matriz jacobiana é dada por:

$$J(k_{1t}, k_{2t}, k_{3t}) = \begin{bmatrix} F_{k_{1t}} & F_{k_{2t}} & F_{k_{3t}} \\ G_{k_{1t}} & G_{k_{2t}} & G_{k_{3t}} \\ H_{k_{1t}} & H_{k_{2t}} & H_{k_{3t}} \end{bmatrix}$$

onde $F_{k_{it}}, G_{k_{it}}, H_{k_{it}}$ são as derivadas parciais para $i = 1, 2, 3$. Então, calculando as derivadas parciais,

$$\begin{aligned} F_{k_{1t}} &= -(n + \delta), & F_{k_{2t}} &= 0, & F_{k_{3t}} &= \lambda_1 A_3 \alpha_3 k_{3t}^{\alpha_3 - 1} (1 - a_1 - a_2)^{1 - \alpha_3} \\ G_{k_{1t}} &= 0, & G_{k_{2t}} &= -(n + \delta), & G_{k_{3t}} &= \lambda_2 A_3 \alpha_3 k_{3t}^{\alpha_3 - 1} (1 - a_1 - a_2)^{1 - \alpha_3} \\ H_{k_{1t}} &= 0, & H_{k_{2t}} &= 0, & H_{k_{3t}} &= \lambda_3 A_3 \alpha_3 k_{3t}^{\alpha_3 - 1} (1 - a_1 - a_2)^{1 - \alpha_3} - (n + \delta). \end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais no estado estacionário, $(k_{1t}^*, k_{2t}^*, k_{3t}^*)$, implica

$$F_{k_{3t}}(k_{1t}^*, k_{2t}^*, k_{3t}^*) = \frac{\lambda_1 \alpha_3 A_3 (n + \delta)}{\lambda_3 A_3 (1 - a_2 - a_2)^{1 - \alpha_3}} (1 - a_2 - a_2)^{1 - \alpha_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \alpha_3 (n + \delta) \quad (4.23)$$

$$G_{k_{3t}}(k_{1t}^*, k_{2t}^*, k_{3t}^*) = \frac{\lambda_2 \alpha_3 A_3 (n + \delta)}{\lambda_3 A_3 (1 - a_2 - a_2)^{1 - \alpha_3}} (1 - a_2 - a_2)^{1 - \alpha_3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \alpha_3 (n + \delta) \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} H_{k_{3t}}(k_{1t}^*, k_{2t}^*, k_{3t}^*) &= \frac{\lambda_3 \alpha_3 A_3 (n + \delta)}{\lambda_3 A_3 (1 - a_2 - a_2)^{1 - \alpha_3}} (1 - a_2 - a_2)^{1 - \alpha_3} - (n + \delta) \\ &= (n + \delta)(\alpha_3 - 1). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Logo, a matriz jacobiana avaliada no ponto crítico $k^* = (k_1^*, k_2^*, k_3^*)$ é dada por

$$J(k^*) = \begin{bmatrix} -(n + \delta) & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \alpha_3 (n + \delta) \\ 0 & -(n + \delta) & \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \alpha_3 (n + \delta) \\ 0 & 0 & (n + \delta)(\alpha_3 - 1) \end{bmatrix}.$$

Para verificar a estabilidade do ponto crítico, k^* , será calculado o polinômio característico e aplicado o critério de classificação de estabilidade de Routh-Hurwitz.

Seja $P(\lambda)$ o polinômio característico e I a matriz identidade de ordem 3. Então,

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(J(k^*) - \lambda I) \\ &= [-(n + \delta) - \lambda]^2 [(n + \delta)(\alpha_3 - 1) - \lambda] \\ &= -\lambda^3 + [(n + \delta)(\alpha_3 - 3)]\lambda^2 + [(n + \delta)^2(2\alpha_3 - 3)]\lambda + (n + \delta)^3(\alpha_3 - 1) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Critério de Routh-Hurwitz		
λ^3	-1	$(n + \delta)^2(2\alpha_3 - 3)$
λ^2	$(n + \delta)(\alpha_3 - 3)$	$(n + \delta)^3(\alpha_3 - 1)$
λ^1	$\frac{2(n + \delta)^2}{\alpha_3 - 3}(\alpha_3 - 2)^2$	0
λ^0	$(n + \delta)^3(\alpha_3 - 1)$	0

Como pode ser verificado, os elementos da primeira coluna não mudam de sinal (são todos negativos). Portanto o sistema é localmente estável, ou seja, numa determinada vizinhança do ponto crítico k^* o sistema é estável. Em outras palavras, se considerarmos que uma determinada economia esteja com o nível de capital próximo ao nível de estoque k^* , então, com o passar do tempo, essa economia vai convergir para o nível de estoque de capital k^* . Esse resultado é compatível com a conclusão de Acemoglu & Gerrieri (2005). Eles definem o caminho de crescimento constante (CGP) como um equilíbrio competitivo dinâmico que apresenta o crescimento do consumo agregado constante. Então, mostram que o (CGP) é localmente estável.

Uma outra observação importante é que as equações de movimento de estoque de capital, aqui definidas, têm um comportamento diferente das equações de movimento definidas no modelo de Feldman (1928) onde as equações têm comportamento instável.

4.3 Evidências Empíricas

Dietrich & Kruger (2010) observam que na maioria dos países desenvolvidos o crescimento econômico de longo prazo foi associado com um padrão específico de mudança estrutural entre os três principais setores da economia (setor agrícola, setor industrial e o de serviços). Antes do início da industrialização a atividade econômica que mais teve lugar foi o setor primário que compreende as atividades de extração de recursos agrícolas e naturais (mineração). A produção de bens era limitada ao artesanato que juntamente com serviços ocupavam uma minúscula parte da economia. Com o início da industrialização, a acumulação de capital e a produção de bens em maior escala se tornaram cada vez mais importantes. Após a Segunda Guerra Mundial, mais e mais atividade econômica mudou do setor secundário (indústria) para o setor terciário (serviços) - e em muitos países em desenvolvimento este processo de terciarização parece que ainda está acontecendo¹.

Kuznets (1966) documenta esse padrão para 13 países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE e da URSS entre 1800 e 1960 e

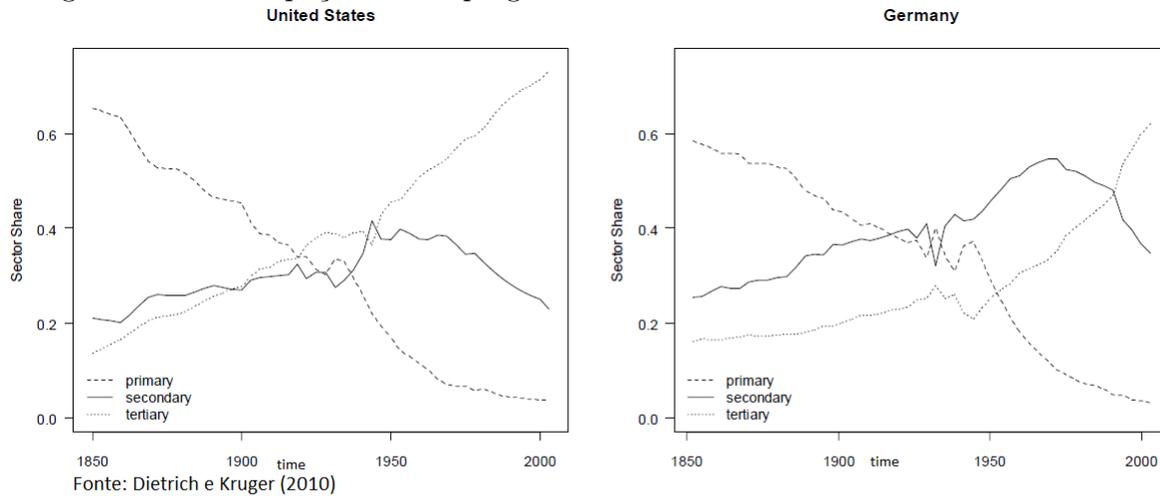
¹Em seu artigo, Dietrich & Kruger (2010) observam que o processo de terciarização ainda está acontecendo, só que numa escala de tempo menor

Maddison (1980) estende este trabalho para 16 países. Ambos encontraram o mesmo padrão geral de desenvolvimento setorial para todos países investigados. Também nessa mesma linha, Teignier (2011) observa em seus estudos que os Estados Unidos tinham mais de 80% da força de trabalho no setor agrícola em 1810, cerca de 50% em 1870, e cerca de 20% em 1920; no Japão as ações foram de 80% em 1870 e cerca de 50% em 1920.

Maddison (1987) documenta a enorme redistribuição de trabalho em seis países mais industrializados (França, Alemanha, Japão, Holanda, Reino Unido e E.U.A.). Seus dados mostram que a participação média de emprego na agricultura foi em torno de 46,0% em 1870 e diminuiu para 5,5% por volta de 1984. Durante o mesmo período, a percentagem média de emprego no setor de serviços aumentou de 26,4% para 62,2%. Diante disso constata-se o grande e importante crescimento do setor de serviços e a diminuição da participação de mão de obra nos outros setores. Contudo, não se deve interpretar que necessariamente apenas um setor *m* sobreviverá, embora isso possa vir a ocorrer. Um determinado setor da economia pode ter a participação da mão de obra diminuindo e havendo, ao mesmo tempo, uma expansão na produção. A diminuição da mão de obra pode ser devido a uma mecanização ou até mesmo uma maior produtividade.

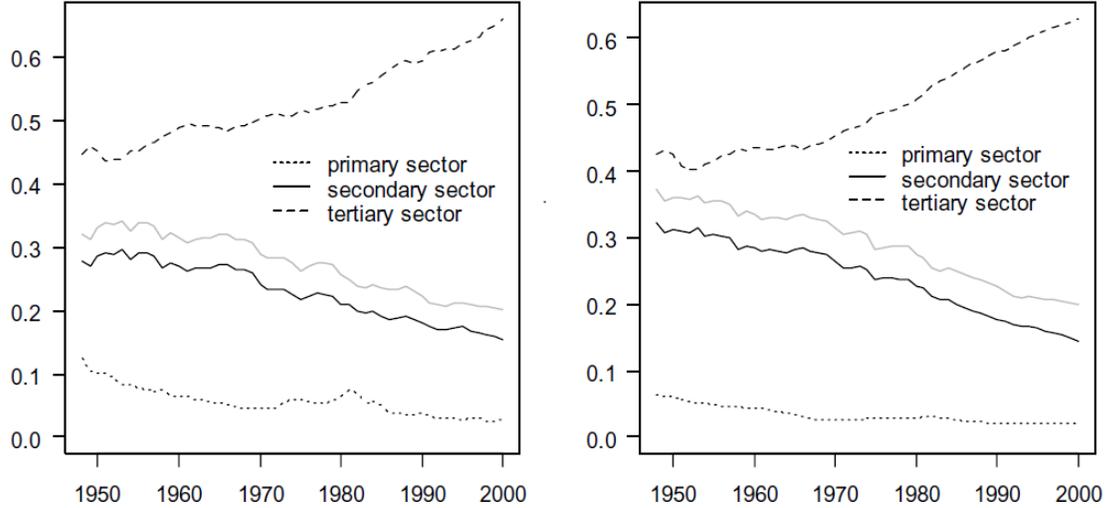
A Figura 4.1 mostra o desenvolvimento das ações de emprego dos três setores (primário, secundário e terciário) na economia dos Estados Unidos e da Alemanha durante o período de 1850 a 2003. Pertencem ao setor primário a agricultura e mineração; ao setor secundário, indústria e construção; e o setor terciário é composto pelos serviços. É interessante notar que a economia alemã parece ficar para trás dos EUA por várias décadas sobre o declínio do secundário e o aumento do setor terciário. Nota-se que nos Estados Unidos o setor terciário passa de vez os outros dois setores por volta de 1950 e isso só vai ocorrer na Alemanha 50 anos depois. A Figura 4.2 mostra a evolução no tempo das participações de cada um dos setores (primário, secundário e terciário) no total da economia dos EUA. Ela é composta de dois gráficos, onde, o do lado esquerdo representa as participações de valor agregado de cada um dos três setores no valor agregado da economia (PIB em dólar americano) e o do lado direito que representa as participações de mão de obra de cada setor na economia. O desenvolvimento durante 1948-2000 inicia-se com a situação em que o principal setor já diminuiu para pouco acima de 10% do valor agregado e menos de 10% de emprego da economia privada, e onde o setor terciário já é o setor dominante, tanto em termos de valor acrescentado e de emprego. A participação do setor secundário diminui de forma constante

Figura 4.1: Participação do Emprego nas Economias dos Estados Unidos e Alemanha



durante o período. A linha preta sólida mostra a participação do setor secundário quando compreendendo apenas as indústrias transformadoras. A linha sólida mais clara representa a participação do setor secundário, incluindo a construção indústrias que segue de perto o desenvolvimento da indústria. Também é visível o forte declínio do setor primário e rápido aumento da participação do setor terciário. Comparando participações de valor agregado e de emprego, a figura revela que o seu desenvolvimento é muito semelhante. Este padrão não é limitado a economia dos EUA, mas se aplica de forma mais geral a maioria dos países desenvolvidos.

Figura 4.2: Participação de cada Setor no Agregado Econômico
Value Added Shares Employment Shares



4.4 Ilustração Numérica do Modelo

Para proceder com a ilustração numérica do modelo, vamos adotar a divisão dos três setores da economia usada por Dietrich e Kruger (2010), isto é, o setor primário representa a agricultura, o setor secundário as indústrias e o setor terciário os serviços. Então, como no capítulo 3, o objetivo é maximizar a função objetivo do valor presente da utilidade derivada do consumo dos bens dos setores

$$\max \int_0^{\infty} u(c_{1t}, c_{2t}) e^{-(\rho-n)t} dt,$$

$$\dot{k}_{1t} = \lambda_1 y_{3t} - (n + \delta) k_{1t}, \quad (4.27)$$

$$s.a. \quad \dot{k}_{2t} = \lambda_2 y_{3t} - (n + \delta) k_{2t}, \quad (4.28)$$

$$\dot{k}_{3t} = \lambda_3 y_{3t} - (n + \delta) k_{3t}, \quad (4.29)$$

onde 1, 2, 3 representam os setores de primário, secundário e terciário, respectivamente,

$\sum_{i=1,2,3} \lambda_i = 1$ e a produção per capita de cada setor é dada pelas equações:

$$y_{1t} = A_{1t} k_{1t}^{\alpha_1} (a_{1t})^{1-\alpha_1}, \quad (4.30)$$

$$y_{2t} = A_{2t} k_{2t}^{\alpha_2} (a_{2t})^{1-\alpha_2}, \quad (4.31)$$

$$y_{3t} = A_{3t} k_{3t}^{\alpha_3} (a_{3t})^{1-\alpha_3}. \quad (4.32)$$

Também estamos supondo que toda produção dos dois setores (1, 2) é consumida e a produção do setor 3 é investida, isto é:

$$y_{1t} = c_{1t}, \quad y_{2t} = c_{2t} \quad \text{e} \quad y_{3t} = I,$$

onde I é o investimento total.

A função de utilidade é do tipo:

$$u(c_{1t}, c_{2t}) = \sum_{i=1,2} w_i \ln c_{it}$$

com $\sum_{i=1,2} w_i = 1$.

Resolvendo o problema de otimização dinâmica temos que, as taxas de investimento ótimo são:

$$\lambda_3^* = \frac{\alpha_3 [v_3 + (1 - \alpha_3)(n + \delta)]}{v_3 + (\rho + \delta)(1 - \alpha_3)} \quad (4.33)$$

e

$$\lambda_i^* = (1 - \lambda_3^*) \left(\frac{w_i \alpha_i}{w_1 \alpha_1 + w_2 \alpha_2} \right) \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (4.34)$$

Os estoques de capital ótimo são:

$$k_{3t}^* = e^{\left(\frac{v_3}{1-\alpha_3}\right)t} \left[\left(\frac{A_{3(0)} \alpha_3 (1 - \alpha_3)}{v_3 + (\rho + \delta)(1 - \alpha_3)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_3}} - \frac{1}{\mu(0)(1 - \alpha_3)} \sum_{i=1,2} w_i (1 - \alpha_i) \right] \quad (4.35)$$

e para $i = 1, 2$

$$k_{it}^* = \lambda_i^* a_{3t} \left(\frac{A_{3t} \alpha_3 (1 - \alpha_3)}{v_3 + (\rho + \delta)(1 - \alpha_3)} \right)^{\frac{\alpha_3}{1 - \alpha_3}} \left(\frac{A_{3t} (1 - \alpha_3)}{v_3 + (n + \delta)(1 - \alpha_3)} \right). \quad (4.36)$$

Ou ainda:

$$k_{it}^* = \lambda_i^* \left(\frac{\alpha_3 (1 - \alpha_3)}{v_3 + (\rho + \delta)(1 - \alpha_3)} \right)^{-1} \left(\frac{1 - \alpha_3}{v_3 + (n + \delta)(1 - \alpha_3)} \right) k_{3t}^* \Rightarrow \quad (4.37)$$

$$= \frac{\lambda_i^*}{\lambda_3^*} k_{3t}^*. \quad (4.38)$$

As expressões das porções de mão de obra em cada setor quando a economia está no caminho ótimo são:

$$a_{3t}^* = 1 - \frac{1}{\mu(0) A_{3(0)}^{\frac{1}{1 - \alpha_3}} E^{\frac{\alpha_3}{1 - \alpha_3}} (1 - \alpha_3)} \sum_{i=1,2} w_i (1 - \alpha_i), \quad (4.39)$$

$$a_{it}^* = \frac{w_i (1 - \alpha_i)}{\mu(0) A_{3(0)}^{\frac{1}{1 - \alpha_3}} E^{\frac{\alpha_3}{1 - \alpha_3}} (1 - \alpha_3)} \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (4.40)$$

onde $E = \frac{\alpha_3 (\rho - n)(1 - \alpha_3)}{[v_3 + (\rho + \delta)(1 - \alpha_3)](\rho - n)}$.

Aqui vale lembrar que as variáveis de co-estado são dadas pela equação (A.30), ou seja,

$$\mu(t) = \mu(0) e^{-\left(\frac{v_m}{1 - v_m}\right)t}. \quad (4.41)$$

Para determinar os parâmetros nós seguimos basicamente dois caminhos: primeiro tentaremos usá-los o mais próximo da literatura; e num segundo momento aproximaremos nossos parâmetros aos usado em Ngai & Pissarides (2007) - isso é justificado principalmente pelo fato de que esse artigo foi um dos inspiradores do nosso modelo e também para comparar os resultados.

Na função de produção Cobb-Douglas a elasticidade do capital (α) é comumente usada em torno de 30% (DeJong e Dave, 2007). Simon (1990) confirma esse valor e assume a participação do trabalho como sendo dois terços em economias desenvolvidas. Ele argumenta que essa participação é rigorosamente constante no tempo. Sokoloff (1986)

confirma esse valor de 0.3 e Gomme & Rupert (2007) calculam que a participação do capital na produção é de 0.283. Esses resultados também são consistentes com os dados do apêndice de Dietrich & Kruger (2010) e também com os resultados de Bernard & Jones (1996). Dietrich & Kruger (2010) usam o valor de 0.3 como base para de suas investigações e uma escala que varia de 0.25 a 0.4. O artigo de Acemoglu & Guerrieri (2008), que divide a economia em dois setores, considera a participação do capital no primeiro setor igual a 0.28 e no segundo setor igual a 0,48. Como nosso modelo considera que as participações do capital podem ser diferentes em cada um dos setores, nos usamos $\alpha_1 = 0.25$, $\alpha_2 = 0.3$ e $\alpha_3 = 0.48$.

Com relação à depreciação (δ), DeJong & Dave (2007) usam valores entre 0.04 e 0.16 para dados anuais. King & Rebelo (1999) confirmam essa faixa de valores e a taxa de depreciação usada e de 0.1. Gomme & Rupert (2007) usam o valor de 0.06. Já Ngai & Pissarides (2007) usam o valor de 0.03 em suas investigações. Dietrich & Kruger (2010) usam uma depreciação de 0.05 como base e variam de 0.025 até 0.1 para checar a robustês de seu modelo. Nós optamos por usar o valor de $\delta = 0.05$.

Segundo Maddison (2007), a taxa de crescimento populacional (n) para o período de 1850 até 2003 foi de 1.66% para os Estados Unidos e cerca de 0.59% para Alemanha. Para os últimos dez anos a taxa de crescimento para os Estados Unidos foi menor do que 1% e muito próximo de zero para Alemanha. Ngai & Pissarides (2007) usam uma taxa de crescimento de 2%. Dietrich & Kruger (2010) usam uma taxa de 1% e também variam essa taxa de zero a 4% para analisar a sensibilidade de seu modelo. Seguiremos Dietrich & Kruger (2010) e usaremos $n = 0.005$ motivados pela tendencia de queda na taxa de crescimento populacional.

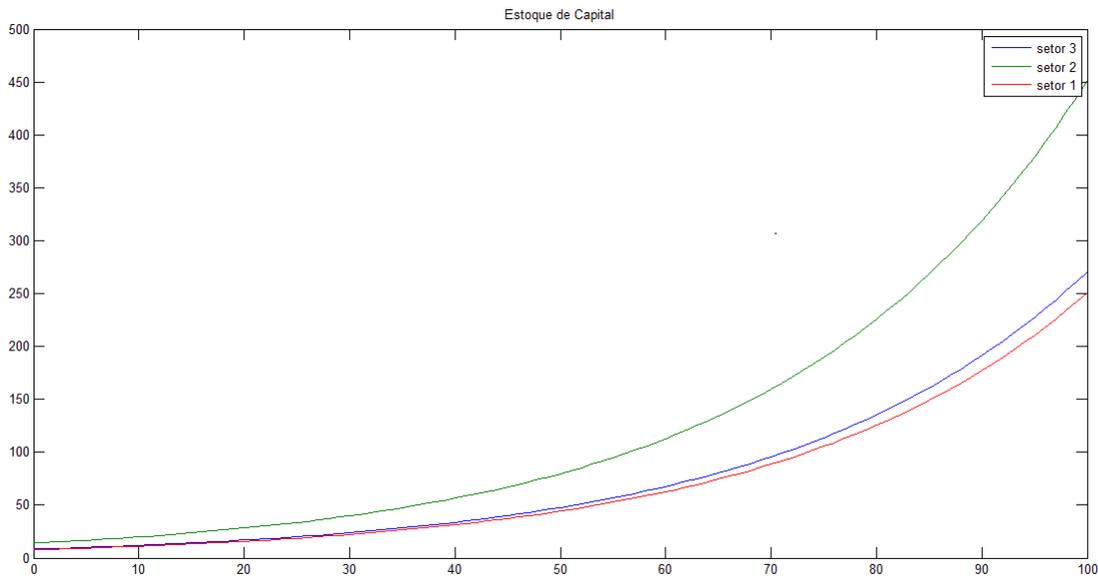
A taxa de desconto intertemporal (ρ) foi assumida entre 0.01 e 0.02 em DeJong & Dave (2007). Ngai & Pissarides (2007) e posteriormete Dietrich & Kruger (2010) usam uma taxa de 0.03. Dietrich & Kruger (2010) também usam uma taxa de desconto intertemporal que varia de 0.01 até 0.07. Nós optamos por usar $\rho = 0.07$.

Os parâmetros de ponderação (w_i) para o peso de cada bem i no consumo agregado não estão explicitamente definidos em Ngai & Pissarides (2007) e a literatura empírica não fornece muitas opções. Kongsamut et al. (2001) utilizam valores de 0.1 para o setor primário, 0.15 para o setor secundário, e 0.75 para o setor terciário. Dietrich & Kruger

(2010) seguem Kongsamut et al. (2001) e ainda considera que as taxas podem variar entre 0.1 e 0.8. Aqui, nós vamos seguir os autores citados e assumir que $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.15$ e $w_3 = 0.75$.

A taxa de progresso tecnológico usada em nosso modelo será a mesma usada em Kongsamut et al. (2001), ou seja, $v_3 = 0.018$.

Figura 4.3: Evolução do Estoque de Capital (Parâmetros da Literatura)



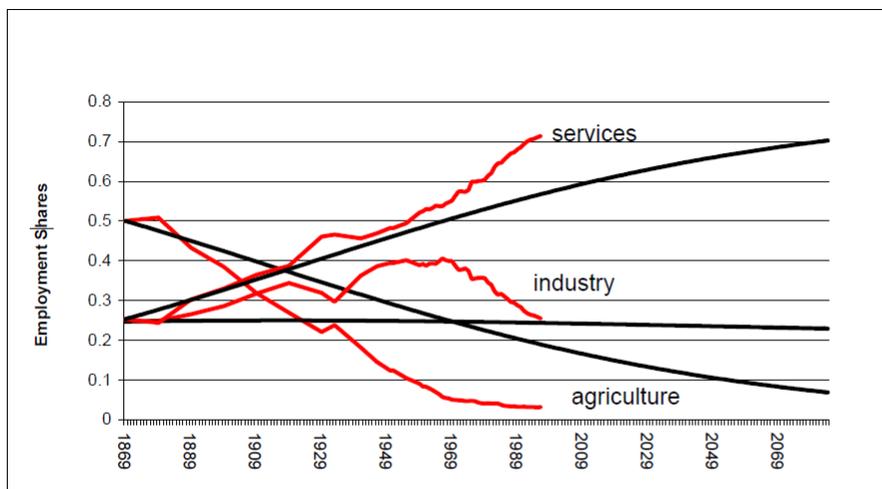
Diante dos parâmetros adotados a distribuição da mão de obra nos setores 1, 2, e 3 têm as seguintes taxas: $a_1 = 0.051$, $a_2 = 0.071$ e $a_3 = 0.878$, respectivamente. Logo, podemos notar que a alocação da mão de obra distribuída nos setores é bem semelhante àquela observada por vários pesquisadores nos países mais desenvolvidos (veja figura 1.1, página 5). Maddison (1987) documenta a enorme distribuição de trabalho em seis países mais industrializados (França, Alemanha, Japão, Holanda, Reino Unido e Estados Unidos). Seus dados mostram que a participação média do emprego na agricultura era cerca de 46% em 1879 e diminuiu para 5,5% em 1984. Nesse mesmo período, a média do emprego no setor de serviços aumentou de 26,4% para 62,2%. O nosso modelo mostra que 5,1% da mão de obra estará empregada na agricultura e 87,8% no setor de serviços. Kruger (2008) observou, numa série histórica de 1948 até 2000, esse mesmo padrão de mudança estrutural

forte. Segundo ele, esse ritmo forte de mudança estrutural é seguido por uma fase estável onde o setor terciário é dominante. Nesse período, a divisão do primário, secundário e terciário são proporcionais a 10, 10 e 80 por cento. Essa fase estável, no entanto, não significa ausência de mudança estrutural. Como na fase anterior, a mudança estrutural intra-setorial ainda continua ocorrendo dentro de cada um dos três setores. No entanto, como mostra a figura 4.2, esta última fase ainda não foi alcançada pela economia dos Estados Unidos até o ano de 2000.

O modelo de Ngai & Pissarides (2007) foi um dos inspiradores para o nosso trabalho. Portanto, é natural a curiosidade de ver o quão perto estão os nossos resultados daqueles obtidos por esses autores. Para tanto, adotamos os parâmetros o mais próximo possível dos usados em Ngai & Pissarides (2007). Alguns parâmetros não estão bem explícitos no modelo de Ngai & Pissarides (2007) e, nesses casos, vamos usar aqueles apresentados pela literatura. O peso que cada bem representa no consumo agregado não está bem claro em Ngai & Pissarides (2007), então vamos usar os mesmos de Kongsamut et al. (2001), isto é, o peso do bem i para $i = 1, 2, 3$ no consumo agregado será $w_1 = 0.1, w_2 = 0.15, w_3 = 0.75$. A participação do capital $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.3$, a taxa de desconto intertemporal $\rho = 0.03$, a taxa de crescimento populacional $n = 0.02$, taxa de depreciação $\delta = 0.03$ e as taxas de progresso técnico $v_1 = 0.024, v_2 = 0.014$ e $v_3 = 0.004$. Com esses parâmetros, a distribuição da mão de obra nos setores 1, 2, e 3 têm as seguintes taxas: $a_1 = 0.052, a_2 = 0.078$ e $a_3 = 0.87$, respectivamente. A figura 4.4 representa a participação da mão-de-obra nos setores de serviços, indústria e agricultura. A linha vermelha representa os dados da economia dos EUA entre os anos de 1869 a 1998 e a linha preta representa a simulação obtida do modelo de Ngai & Pissarides (2007).

Portanto, considerando a data final da série histórica estudada por Ngai & Pissarides (2007), nosso modelo fornece alguns resultados mais próximos dos dados reais do que os de Ngai & Pissarides (2007). Aqui obtivemos que aproximadamente 5,2% da mão de obra está no setor 1, enquanto em Ngai & Pissarides (2007) esse valor pouco abaixo de 20% e a série histórica mostra um valor perto de 5%. No setor de serviços, nosso modelo mostra que esse setor é responsável por cerca de 87% da mão de obra, modelo de Ngai & Pissarides (2007), 65% com forte tendência de alta e os dados da economia dos EUA mostram que esse valor é maior do que 70%. No que diz respeito ao setor 2, nosso resultado diferencia substancialmente do resultado obtido em Ngai & Pissarides (2007). Enquanto o nosso

Figura 4.4: Participação de mão-de-obra



Fonte: Ngai & Pissarides

foi de 7,8% o de Ngai & Pissarides (2007) foi de aproximadamente 24% - um valor bem próximo dos dados reais. Embora este último resultado de Ngai & Pissarides (2007) estar mais próximos dos dados empíricos, nosso resultado vai na direção apontada por Kruger (2008) onde ele afirma que depois desse forte período de mudança estrutural, seguirá uma fase estável com predomínio do setor terciário, cuja divisão da mão de obra dos setores primário, secundário e terciário são de 10%, 10% e 80%, respectivamente.

A evolução do estoque de capital com parâmetros usados em Ngai & Pissarides (2007) é representado pelo gráfico 4.5. Nota-se que os estoques de capital dos três setores aumentam com o passar do tempo e sua taxa de crescimento é dada pela equação $\frac{\dot{k}_{it}}{k_{it}} = \frac{v_3}{1 - \alpha_3}$, adaptada de (3.52). As figuras 4.6 e 4.7 representam a dinâmica do progresso tecnológico dos setores de serviços, indústrias e agricultura relativos aos modelos de Ngai & Pissarides (2007) e desta tese, respectivamente. Podemos perceber que o comportamento de ambos é bem semelhante.

Figura 4.5: Evolução do Estoque de Capital (Parâmetros Ngai & Pissarides (2007))

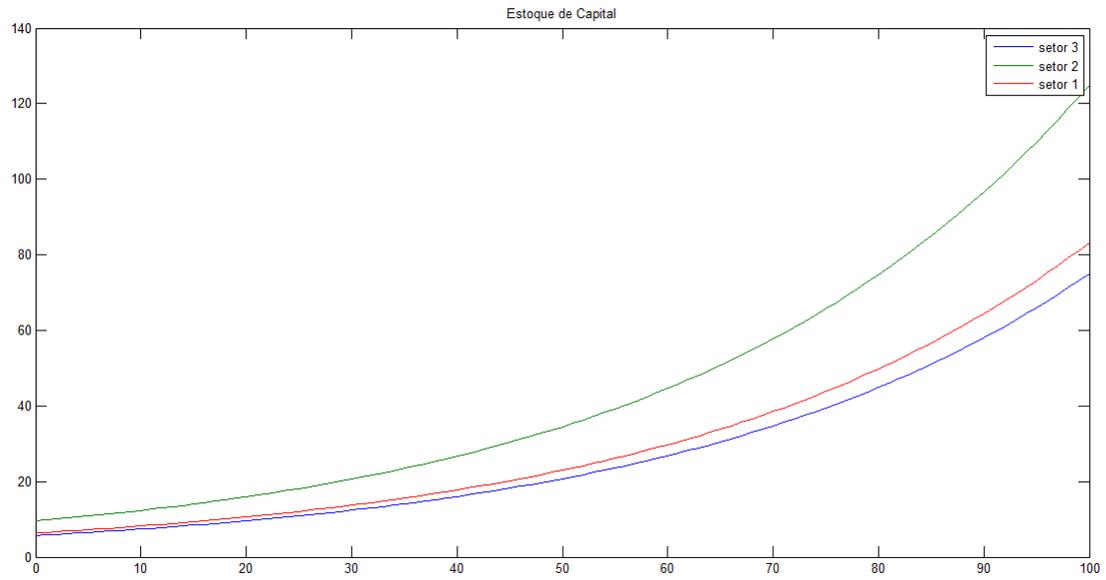


Figura 4.6: Modelo Ngai & Prissarides
Productivity Levels

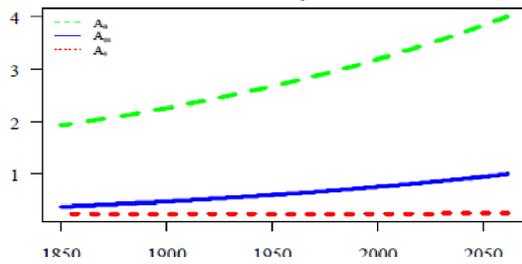
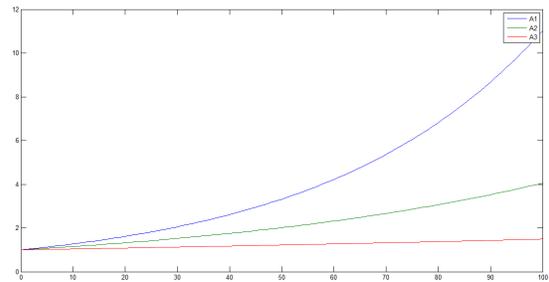


Figura 4.7: Modelo da tese



Capítulo 5

Conclusão

O objetivo dessa tese foi o de desenvolver um modelo multi-setorial, inspirado nos modelos de Feldman (1928) e de Ngai & Pissarides (2007), para estudar mudança estrutural.

Quase na sua totalidade, os modelos que estudam mudanças estruturais o faz via progresso técnico - olhando para o lado da oferta - ou via preferências não homotéticas (devido à Lei de Engel) - olhando para o lado da demanda. O nosso modelo aborda mudanças estruturais levando em conta acumulação de capital e alocação de investimentos e tenta mostrar que essas são mais duas possíveis fontes que contribuem para mudança estrutural. Nesse sentido, pode-se considerar que no caso descentralizado são as firmas que estão fazendo essa alocação enquanto que no caso centralizado é o governo que está resolvendo o problema de alocação de investimento.

Na seção 3.2 encontramos os níveis de estoque de capital numa economia multi-setorial em estado estacionário. Mostramos que as taxas de crescimento dos estoques de capital são constantes e dependem da taxa de progresso tecnológico e da taxa de utilização do fator de produção relacionadas ao setor de bens de capital. Encontramos também as taxas de investimentos de cada setor que proporcionam o maior consumo intertemporal. Esse resultado pode auxiliar o planejador central na tomada de decisão sobre o quanto alocar do setor de bens de capital nos setores de bens de consumo para que tenha um maior consumo intertemporal. Essa análise pode ser verificada pela equação (3.52), pois, quanto maior a taxa de progresso tecnológico, maior será a taxa de crescimento do estoque de

capital em todos os setores. Com isso teremos uma maior produção e, portanto, um maior consumo. Vimos também que a taxa de investimento ótimo do setor m varia inversamente proporcional à taxa de desconto intertemporal e diretamente à taxa de crescimento populacional.

Mostramos também que nosso modelo converge, no longo prazo, para o modelo de Uzawa uma vez que no longo prazo o equilíbrio de estado estacionário vai levar a uma equivalência entre a alocação de fluxos e de estoques de capitais. Uma possível vantagem de nossa abordagem é que nela foi considerado uma economia multi-setorial - o que nos permite estudar mudança estrutural - e que o equilíbrio de crescimento balanceado é determinado sem a hipótese de que o setor de bens de consumo é sempre mais capital intensivo do que o setor de bens de investimento, condição necessária para o modelo de Uzawa.

Na seção 3.3, provamos que as equações (3.68) e (3.69) são idênticas às equações (3.26) e (3.27), onde as duas primeiras representam o comportamento da economia descentralizada e as duas últimas caracterizam o comportamento da economia com planejador central. Assim, o caminho dinâmico da economia descentralizada será o mesmo que o do planejador central. Nesse sentido, mostramos a equivalência entre o comando ótimo e o equilíbrio competitivo descentralizado para o caso do modelo de crescimento de vários setores.

Na seção 4.2 demonstramos a estabilidade local das equações que caracterizam a evolução dos estoques de capitais (estas equações são as restrições do problema). Em qualquer modelo de crescimento equilibrado é importante demonstrar a estabilidade, pois, está é uma condição necessária para a relevância de qualquer resultado para o crescimento em equilíbrio de tal modelo. Acemoglu (2009) mostra, na seção 3.3, que o modelo de Solow aumentado (com a introdução trabalho) é globalmente estável. No entanto, como pode ser observado em nossa revisão (página 18), o modelo de Feldman (1928) não é estável.

Na seção 4.4, considerando uma economia dividida em apenas três setores, mostramos que a distribuição da mão de obra nos diversos setores da economia é semelhante aos resultados obtidos por vários pesquisadores por meio de séries históricas. Com parâmetros usuais da literatura, nossos resultados mostram que aproximadamente 5,1% da mão de obra deve estar alocada na agricultura, 7,1% nas indústrias e 87,8% no setor de serviços. Os dados históricos dos Estados Unidos, no ano de 2003, mostram que a participação da mão de obra no setor primário foi perto de 5%, um pouco mais de 20% para o secundário

e mais de 60% para o setor terciário (veja Figura 4.1).

Um dos objetivos do nosso trabalho era mostrar que alocação de investimento e estoque de capital contribuem para mudança estrutural. A contribuição de alocação de investimento é devido ao fato de que esta variável está em função de parâmetros de oferta e demanda. No que diz respeito aos estoques de capitais podemos concluir que, mesmo em estado estacionário, a taxa de variação do produto de cada setor pode ser diferente. O que indica a presença de mudança estrutural.

Uma extensão natural do nosso trabalho seria usar uma função de utilidade mais geral, considerando θ e ϵ diferentes de 1 (veja Ngai & Pissarides (2007), página 431). No entanto, na otimização dinâmica, as equações provenientes das condições de primeira ordem seriam bem mais difíceis de serem resolvidas. Talvez uma saída para contornar esse problema seria não procurar soluções explícitas para o problema.

Com o interesse de estudar mudança estrutural da óptica da demanda, pode-se considerar uma função de utilidade do tipo Stone-Geary. Essa função tem a característica de adotar um nível de subsistência para um ou mais bens e, quando esse nível é alcançado faz com que as famílias passem a demandar por outros produtos. Portanto, a demanda de um novo bem só vai ocorrer no momento em que um determinado nível de demanda do bem antigo for alcançada. Kongsamut et al. (2001) faz um estudo de mudança estrutural através do uso da função de utilidade Stone-Geary. Definindo a trajetória de equilíbrio balanceado como sendo aquela em que o consumo dos bens dos três setores cresce à mesma taxa, mostra-se que se os parâmetros da função Stone-Geary forem positivos, então a solução ótima implica em que a família representativa estará sempre mudando a composição do consumo, o que dará origem a uma mudança na composição da produção.

Referências Bibliográficas

- [1] Acemoglu, D. (2009), *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [2] Acemoglu, D. & Guerrieri, V. (2008), *Capital Deepening and Nonbalanced Economic Growth*, Journal of Political Economy, 116(3).
- [3] Alvarez-Cuadrado, F. & Long, N. V. (2011), *Capital-Labor Substitution, Structural Change and Growth*, DEPOCEN N° 2012/01.
- [4] Arena, R. & Porta, P.L. (2011), *Structural Dynamics and Economic Growth*, Cambridge.
- [5] Barro, Robert J., & Xavier Sala-i-Martin (2004), *Economic Growth*, ed. 2^a, Cambridge, MA and London, MIT press.
- [6] Baumol, William J. (1967), *Macroeconomics of Unbalanced Growth: Anatomy of Urban Crisis*. The American Economic Review, vol. 57(3), 414-426.
- [7] Bernard, A. B. and Jones, C. I. (1996), *Comparing Apples to Oranges: Productivity Convergence and Measurement across Industries and Counties*, American Economic Review, 86(5), 1216-1238.
- [8] Bose, S. (1967), *Optimal Growth in a Non-Shiftable Capital Model*, Chapter 2, Essays on Development Planning, Ph.D. Thesis, Department of Economics, M.I.T., June.
- [9] Chakravarty, S. (1967), *Optimal Programmes of Capital Accumulation in a Two-Sector Model with Non-Shiftable Capital*, Working Paper No. 17A, Delhi School of Economics.
- [10] Clark, C. (1940), *The Conditions of Economic Progress*, MacMillan, London.

- [11] Costa, Leopoldo Jr. e Teixeira, J. R. (2010), *Mudança Estrutural e Crescimento Econômico no Brasil: Uma Análise do Período 1990-2003 Usando a Noção de Setor Verticalmente Integrado*, Nova Economia 20(1) 85-116.
- [12] DeJong, David. N. and Dave, C. (2007), *Structural Macroeconometrics*, Princeton: Princeton University Press.
- [13] Dietrich, A. and J.J. Kruger (2010), *Numerical Explorations of the Ngai-Pissarides Model of Growth and Structural Change*, Journal of Economic Literature.
- [14] Domar, E. D. (1957), *A Soviet Model of Growth*, Essays in the Theory of Economic Growth, Oxford University Press, New York.
- [15] Dutt, A. K. (1990), *Growth, Distribution, and Uneven Development*, Cambridge University Press.
- [16] Feldman, G. A. (1928), *On the Theory of Growth Rates of National Income* (trans.) in N. Spulber (ed.), *Foundations of Soviet Strategy for Economic Growth*, Indiana University Press, Bloomington.
- [17] Fisher, A. G. B. (1939), *Production, Primary, Secondary and Tertiary*. The Economic Record, 15, 24-38.
- [18] Fisher, A. G. B. (1952), *A note on Tertiary Production*. Economic Journal, 62, 820-834.
- [19] Fourastié, J. (1949/1969), *Le Grand Espoir du XXe Siècle: Progrès Technique, Progrès Économique, Progrès Social*. 1949, Paris: Presses Universitaires de France. German edition: *Die Große Hoffnung des Zwanzigsten Jahrhunderts*, 2nd edn, 1969, Köln: Bund-Verlag.
- [20] Gomme, P. and Rupert, P. (2007), *Theory, Measurement and Calibration of Macroeconomic Models*. Journal of Monetary Economics, 54(2), 460-497.
- [21] Hahn, Frank H. and Mathews, R. C. O. (1964), *The Theory of Economic Growth: a Survey*, The Economic Journal, 74, 779-902.
- [22] Harris, Donald J. (1982), *Structural Change and Economic Growth: a Review Article*. Contributions to Political Economy, 1, 25-45.

- [23] Johansen, L. (1967), *Some Theoretical Properties of a Two-Sector Model of Optimal Growth*, Review of Economic Studies.
- [24] Jones, C. I. (2003), *Growth, Capital Share, and a new Perspective on Production Function*, Miméo, University of Berkeley.
- [25] Jones, H. G. (1975), *An Introduction to Modern Theories of Economic Growth*, McGraw-Hill. London.
- [26] Kaldor, N. (1961), *Capital Accumulation and Economic Growth*. In F.A. Lutz and D.C. Hague (eds), *The Theory of Capital*. New York: St Martin's Press, 177 – 222.
- [27] King, R. G. and Rebelo, S. T. (1999), *Resuscitating Real Business Cycles*. In J. B. Taylor and M. Woodford (Eds.), *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 1, Chapter 14, 927-1007. Elsevier.
- [28] Kongsamut, P., Rebelo, S. and Xie, D. (2001), *Beyond Balanced Growth*, Review of Economic Studies 68 869 – 882.
- [29] Kruger, J.J. (2008), *Productivity and Structural Change: A Review of the Literature*. Friedrich-Schiller-University.
- [30] Kuznets, Simon (1966), *Modern Economic Growth: Rate, Structure and Spread*. New Haven: Yale University Press.
- [31] Kuznets, Simon (1973), *Modern Economic Growth: Findings and Reflections*. American Economic Review, 63, 247-258.
- [32] Kuznets, Simon (1981), *Modern Economic Growth and the Less Developed Countries*. Conference on Experiences and Lessons of Economic Development in Taiwan. Taipei: Institute of Economics, Academia Sinica.
- [33] Maddison, Angus (2007), *The Contours of the World Economy 1-2030*. AD. Oxford: Oxford University Press. (update on the web page <http://www.ggdc.net/maddison/>).
- [34] Maddison, Angus (1987), *Growth and Slowdown in Advanced Economies: Techniques of Quantitative Assessment*. Journal of Economic Literature, 25(2), 317 – 334.

- [35] Maddison, Angus (1980), *Economic Growth and Structural Change in Advanced Countries*. In I. Leveson and W. Wheeler (Eds.), *Western Economies in Transition*. London: Croon Helm.
- [36] Malinvaud E. (1995), *Luigi Pasinetti's Structural Economic Dynamics: a review essay*. *Journal of Evolutionary Economics*, 5(1), 59 – 69.
- [37] Mahalanobis, P. C. (1953), *Some Observations on the Process of Growth of National Income*, *Sankhya*. *The Indian Journal of Statistics*, 12(4), 307 – 312.
- [38] Matsuyama, K. (1992), *Agricultural Productivity, Comparative Advantage, and Economic Growth*. *Journal of Economic Theory* 58(2), 317-334.
- [39] Mbiekop, Flaubert (2010), *A Simple Model of Structural Transformation for Small, Agriculture-based, Open Economies*, *Journal of Economic Literature*.
- [40] McMillan, M. S. e Rodrik, D. (2011), *Globalization, Structural Change and Productivity Growth*, *Journal of Economic Literature* N° 01.
- [41] Ngai, L. R. e Pissarides, C. A. (2007), *Structural Change in a Multi-Sector Model of Growth*, *American Economic Review* 97(1), 429 – 443.
- [42] North, D. C. (1974), *Growth and Welfare in the American Past: A New Economic History*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc.
- [43] Pasinetti, L. (1993), *Structural Economic Dynamics: A Theory of the Economic Consequences of Human Learning*, Cambridge, Cambridge University Press.
- [44] Pontryagin, L. S. et al. (1962), *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley and Sons, New York.
- [45] Ramsey, F. P. (1928), *A Mathematical Theory of Savings*, *Economic Journal*.
- [46] Simon, J. L. (1990), *Great and Almost-Great Magnitudes in Economics*, *Journal Perspectives* 4(1), 149 - 156.
- [47] Sokoloff, K. L. (1986), *Productivity Growth in Manufacturing During Early Industrialization: Evidence from the American Northeast, 1820-1860*. In S. L. Engerman and R. Gallman (Eds.), *Long-Term Factors in American Economic Growth*, Vol. 51, 679 – 736. Chicago: University of Chicago Press.

- [48] Sraffa, Piero (1960), *Production of Commodities by Means of Commodities-Prelude to a Critique of Economic Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [49] Teignier, Mark (2011), *The Role of Trade in Structural Transformation*, Journal of Economic Literature.
- [50] Uzawa, H. (1961), *On a Two-Sector Model of Economic Growth*, The Review of Economic Studies, 29(1), 40 – 47.
- [51] Varian, Hal R. (1992), *Microeconomic Analysis*, Norton & Company, Ltd, 3^a ed., London
- [52] Weil, David N. (2004), *Economic Growth*, Editora: Addison Wesley Longman.
- [53] Wolfe, M. (1955), *The concept of economic sector*, Quarterly Journal of Economics, 69, 402 – 420.

Apêndice A

Anexo ao Capítulo 2

Esse apêndice apresenta as derivações das equações do modelo apresentado no capítulo 2.

A.1 O Hamiltoniano

Para resolver o problema do consumidor associamos a este o Hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^{m-1} w_i \ln c_{it} + \sum_{i=1}^m \mu_i [\lambda_i y_{mt} - (n + \delta)k_{it}] \quad (\text{A.1})$$

Derivando em relação aos λ_i 's, podemos escrever as condições de primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} &= \mu_1 y_{mt} - \mu_m y_{mt} = 0 \Rightarrow \\ & y_{mt}(\mu_1 - \mu_m) = 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_m \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} &= \mu_2 y_{mt} - \mu_m y_{mt} = 0 \Rightarrow \\ & y_{mt}(\mu_2 - \mu_m) = 0 \Rightarrow \mu_2 = \mu_m \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_{m-1}} &= \mu_{m-1} y_{mt} - \mu_m y_{mt} = 0 \Rightarrow \\ & y_{mt}(\mu_{m-1} - \mu_m) = 0 \Rightarrow \mu_{m-1} = \mu_m \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Donde se conclui que $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$.

Derivando o Hamiltoniano em relação às variáveis a_{it} , obtemos :

$$\frac{\partial H}{\partial a_{it}} = \frac{w_i(1 - \alpha_i)}{a_{it}} - A_{mt}k_{mt}^{\alpha_m}(1 - \alpha_m)a_{mt}^{-\alpha_m} \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \lambda_j \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (\text{A.5})$$

onde $a_{mt} = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} a_{it}$.

Então, usando a equação (3.21) na equação equação (A.5),

$$\frac{w_i(1 - \alpha_i)}{a_{it}} - A_{mt}k_{mt}^{\alpha_m}(1 - \alpha_m)a_{mt}^{-\alpha_m} \mu = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (\text{A.6})$$

Da equação acima podemos concluir que para qualquer j fixo,

$$a_{it} = \frac{w_i(1 - \alpha_i)}{w_j(1 - \alpha_j)} a_{jt}, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (\text{A.7})$$

e ainda

$$a_{it} = \frac{w_i(1 - \alpha_i)}{\mu A_{mt}k_{mt}^{\alpha_m}(1 - \alpha_m)a_{mt}^{-\alpha_m}}, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (\text{A.8})$$

e

$$a_{mt} = 1 - \frac{1}{\mu A_{mt}k_{mt}^{\alpha_m}(1 - \alpha_m)a_{mt}^{-\alpha_m}} \sum_{i=1}^{m-1} w_i(1 - \alpha_i) \quad (\text{A.9})$$

Usando o fato de que $\sum_{i=1}^m w_i = 1$, podemos escrever a equação (A.9) como:

$$a_{mt} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} w_i \alpha_i}{\mu A_{mt}k_{mt}^{\alpha_m}(1 - \alpha_m)a_{mt}^{-\alpha_m}} + \left(1 - \frac{1 - w_m}{\mu A_{mt}k_{mt}^{\alpha_m}(1 - \alpha_m)a_{mt}^{-\alpha_m}} \right) \quad (\text{A.10})$$

As equações de Euler, $\dot{\mu}_i - (\rho - n)\mu_i = -\frac{\partial H}{\partial k_{it}}$, $i = 1, 2, \dots, m$ são:

$$\dot{\mu}_i = -\frac{\alpha_i w_i}{k_{it}} + (\rho + \delta)\mu_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{\mu}_m = -A_{mt}\alpha_m k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} \left(\sum_{i=1}^m \mu_i \lambda_i \right) + (\rho + \delta)\mu_m \quad (\text{A.12})$$

Substituindo a equação (3.21) em (A.12), esta pode ser escrita como

$$\dot{\mu}_m = -A_{mt}\alpha_m k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} \mu_m + (\rho + \delta)\mu_m \quad (\text{A.13})$$

Então as equações de Euler se tornam:

$$\dot{\mu} = -\frac{\alpha_i w_i}{k_{it}} + (\rho + \delta)\mu, \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{\mu} = -A_{mt}\alpha_m k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} \mu + (\rho + \delta)\mu \quad (\text{A.15})$$

As condições de transversalidades são:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mu_{it} k_{it} = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.16})$$

com

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_{it} \geq 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.17})$$

A.2 Equação de Capital

O objetivo dessa seção é determinar a função de estoque de capital para a economia que está em estado estacionário. Então, combinando as igualdades (3.29) e (3.30) e as equações (3.31) e (3.32),

$$\begin{aligned} A_{mt}\alpha_m k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} - (\rho + \delta) &= \lambda_m A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} - (n + \delta) \Rightarrow \\ A_{mt}\alpha_m k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} - \rho &= \lambda_m A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} - n \Rightarrow \\ A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} (-\lambda_m + \alpha_m) &= (\rho - n) \Rightarrow \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} k_{mt}^{\alpha_m-1} &= \frac{(\rho - n)}{A_{mt} a_{mt}^{1-\alpha_m} (-\lambda_m + \alpha_m)} \Rightarrow \\ k_{mt} &= \left(\frac{A_{mt} a_{mt}^{1-\alpha_m} (\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Para o estoque de capital do setor 1 o procedimento é análogo ao que foi feito para o setor m , só que considerando a equação de movimento de capital do setor 1, isto é:

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \rho + \delta - A_{mt}\alpha_m k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\dot{k}_{1t}}{k_{1t}} = -(n + \delta) + \lambda_1 \frac{A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m} a_{mt}^{1-\alpha_m}}{k_{1t}} \quad (\text{A.21})$$

Então,

$$-(\rho + \delta) + A_{mt}\alpha_m k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} = -(n + \delta) + \lambda_1 \frac{A_{mt} k_{mt}^{\alpha_m} a_{mt}^{1-\alpha_m}}{k_{1t}} \quad (\text{A.22})$$

Substituindo k_{mt} pela equação (A.19) e depois simplificando a equação acima, temos:

$$k_{1t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_m} \left(\frac{\rho - n}{A_{mt} a_{mt}^{1-\alpha_m} (\alpha_m - \lambda_m)} \right)^{\frac{1}{\alpha_m - 1}} \quad (\text{A.23})$$

Ou seja,

$$k_{1t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_m} k_{mt} \quad (\text{A.24})$$

De maneira análoga podemos mostrar que:

$$k_{it} = \frac{\lambda_i}{\lambda_m} \left(\frac{\rho - n}{A_{mt} a_{mt}^{1-\alpha_m} (\alpha_m - \lambda_m)} \right)^{\frac{1}{\alpha_m - 1}}, \quad i = 1, \dots, m - 1 \quad (\text{A.25})$$

Ou seja,

$$k_{it} = \frac{\lambda_i}{\lambda_m} k_{mt}, \quad i = 1, \dots, m - 1 \quad (\text{A.26})$$

A.3 Força de Trabalho no Setor m

Nesta, vamos determinar a porção de trabalhadores em cada setor da economia. Substituindo a equação (A.19) na equação (A.9), temos:

$$\begin{aligned} a_{mt} &= 1 - \frac{1}{\mu A_{mt} a_{mt}^{\alpha_m} \left(\frac{A_{mt} (\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n} \right)^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} (1 - \alpha_m) a_{mt}^{-\alpha_m}} \sum_{i=1}^{m-1} w_i (1 - \alpha_i) \Rightarrow \\ a_{mt} &= 1 - \frac{1}{\mu A_{mt}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \left(\frac{(\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n} \right)^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} (1 - \alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i (1 - \alpha_i) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Voltando com o valor de a_{mt} na equação (A.19),

$$\begin{aligned} k_{mt} &= a_{mt} \left(\frac{A_{mt} (\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \Rightarrow \\ k_{mt} &= \left(1 - \frac{1}{\mu A_{mt}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \left(\frac{(\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n} \right)^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} (1 - \alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i (1 - \alpha_i) \right) \left(\frac{A_{mt} (\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \Rightarrow \\ k_{mt} &= \left(\frac{A_{mt} (\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} - \frac{1}{\mu (1 - \alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i (1 - \alpha_i) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

A.4 Nível Ótimo de Investimento

Aqui vamos determinar o nível ótimo de investimento de uma economia em estado estacionário que maximiza a utilidade do consumidor . Antes, porém, vamos fazer $D_1 = \left(\frac{\alpha_m - \lambda_m}{\rho - n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}}$, $D_2 = \frac{1}{1-\alpha_m} \sum_{i=1}^{m-1} w_i(1-\alpha_i)$ e derivar a equação (A.28) em relação a t ,

$$\begin{aligned} \dot{k}_{mt} &= \frac{1}{1-\alpha_m} D_1 (A_{mt})^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \dot{A}_{mt} + D_2 \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} \Rightarrow \\ \frac{\dot{k}_{mt}}{k_{mt}} &= \frac{\frac{1}{1-\alpha_m} D_1 (A_{mt})^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} v_m A_{mt} + D_2 \frac{\dot{\mu}}{\mu^2}}{D_1 (A_{mt})^{\frac{1}{1-\alpha_m}} - \frac{1}{\mu} D_2} \Rightarrow \\ \frac{\dot{k}_{mt}}{k_{mt}} &= \frac{\frac{v_m}{1-\alpha_m} + D_2 \frac{\dot{\mu}}{\mu} \frac{1}{\mu} \frac{1}{D_1 (A_{mt})^{\frac{1}{1-\alpha_m}}}}{1 - D_2 \frac{1}{\mu} \frac{1}{D_1 (A_{mt})^{\frac{1}{1-\alpha_m}}}} \Rightarrow \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Então, combinando as equações (3.29), (3.30) e (A.29) temos que, em estado estacionário,

$$\frac{\dot{k}_{mt}}{k_{mt}} = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{v_m}{1-\alpha_m} \quad (\text{A.30})$$

Então, voltando na equação (3.31), temos:

$$A_{mt} \alpha_m k_{mt}^{\alpha_m-1} a_{mt}^{1-\alpha_m} - (\rho + \delta) = \frac{v_m}{1-\alpha_m} \quad (\text{A.31})$$

Substituindo (A.19) em (A.31)

$$A_{mt} \alpha_m a_{mt}^{\alpha_m-1} \frac{(\rho - n)}{A_{mt}(-\lambda_m + \alpha_m)} a_{mt}^{1-\alpha_m} - (\rho + \delta) = \frac{v_m}{1-\alpha_m} \quad (\text{A.32})$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} \alpha_m \frac{(\rho - n)}{\alpha_m - \lambda_m} &= \frac{v_m}{1-\alpha_m} + (\rho + \delta) \Rightarrow \\ \lambda_m &= \frac{-\alpha_m(\rho - n)(1-\alpha_m)}{v_m + (\rho + \delta)(1-\alpha_m)} + \alpha_m \Rightarrow \\ \lambda_m &= \frac{\alpha_m[v_m + (1-\alpha_m)(n + \delta)]}{v_m + (\rho + \delta)(1-\alpha_m)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_m^* = \frac{\alpha_m[v_m + (1 - \alpha_m)(n + \delta)]}{v_m + (\rho + \delta)(1 - \alpha_m)} \quad (\text{A.33})$$

é a taxa de investimento ótimo que proporciona o maior bem estar do consumidor. Da equação (3.30) e das restrições,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_i y_{mt}}{k_{it}} - (n + \delta) &= \frac{\lambda_j y_{mt}}{k_{jt}} - (n + \delta) \Rightarrow \\ \frac{\lambda_i y_{mt}}{k_{it}} &= \frac{\lambda_j y_{mt}}{k_{jt}} \Rightarrow \\ \lambda_i k_{jt} &= \lambda_j k_{it} \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Agora, usando $w_i \alpha_i k_{jt} = w_j \alpha_j k_{it}$ para $i = 1, \dots, m - 1$, a equação acima pode assim ser escrita:

$$\begin{aligned} \lambda_i \frac{w_j \alpha_j}{w_i \alpha_i} k_{it} &= \lambda_j k_{it}, \quad k_{it} \neq 0 \Rightarrow \\ \lambda_i \frac{w_j \alpha_j}{w_i \alpha_i} &= \lambda_j \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Mas, $\lambda_j = 1 - \sum_{t \neq j} \lambda_t$. Então, deixando i variar na equação A.35, temos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{w_j \alpha_j}{w_1 \alpha_1} &= 1 - \sum_{t \neq j} \lambda_t \\ \lambda_2 \frac{w_j \alpha_j}{w_2 \alpha_2} &= 1 - \sum_{t \neq j} \lambda_t \\ &\vdots \\ \lambda_{j-1} \frac{w_j \alpha_j}{w_{j-1} \alpha_{j-1}} &= 1 - \sum_{t \neq j} \lambda_t \\ \lambda_{j+1} \frac{w_j \alpha_j}{w_{j+1} \alpha_{j+1}} &= 1 - \sum_{t \neq j} \lambda_t \\ &\vdots \\ \lambda_{m-1} \frac{w_j \alpha_j}{w_{m-1} \alpha_{m-1}} &= 1 - \sum_{t \neq j} \lambda_t \end{aligned}$$

Como já foi calculado a parcela de investimento do setor m , λ_m^* , o sistema anterior tem $m - 2$ equações e $m - 2$ variáveis. Portanto, temos que resolver o sistema para obter as outras parcelas de investimento em cada setor.

No entanto, veja que

$$\lambda_i^* = (1 - \lambda_m^*) \left(\frac{w_i \alpha_i}{w_1 \alpha_1 + w_2 \alpha_2 + \dots + w_{m-1} \alpha_{m-1}} \right) \text{ para } i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (\text{A.36})$$

é solução do sistema.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{w_j \alpha_j}{w_1 \alpha_1} &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{j-1} - \lambda_{j+1} - \dots - \lambda_m^* \\ \lambda_2 \frac{w_j \alpha_j}{w_2 \alpha_2} &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{j-1} - \lambda_{j+1} - \dots - \lambda_m^* \\ &\vdots \\ \lambda_{j-1} \frac{w_j \alpha_j}{w_{j-1} \alpha_{j-1}} &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{j-1} - \lambda_{j+1} - \dots - \lambda_m^* \\ \lambda_{j+1} \frac{w_j \alpha_j}{w_{j+1} \alpha_{j+1}} &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{j-1} - \lambda_{j+1} - \dots - \lambda_m^* \\ &\vdots \\ \lambda_{m-1} \frac{w_j \alpha_j}{w_{m-1} \alpha_{m-1}} &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{j-1} - \lambda_{j+1} - \dots - \lambda_m^* \end{aligned}$$

A.5 Os Valores Ótimos

Para calcular o estoque de capital ótimo do setor m , basta substituir o valor de λ_m^* , equação (A.33), em $k_m(t)$, equação (A.28). Isto é,

$$\begin{aligned} k_m^*(t) &= \left(\frac{A_{mt}(\alpha_m - \lambda_m^*)}{\rho - n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} - \frac{1}{\mu(1-\alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i(1-\alpha_i) \\ &= \left(\frac{A_{mt} \left(\alpha_m - \frac{\alpha_m [v_m + (1-\alpha_m)(n+\delta)]}{v_m + (\rho+\delta)(1-\alpha_m)} \right)}{\rho - n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} - \frac{1}{\mu(1-\alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i(1-\alpha_i) \\ &= \left(\frac{A_{mt} \left(\frac{\alpha_m(\rho-n)(1-\alpha_m)}{v_m + (\rho+\delta)(1-\alpha_m)} \right)}{\rho - n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} - \frac{1}{\mu(1-\alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i(1-\alpha_i) \\ &= A_{mt}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \left(\frac{\alpha_m(\rho-n)(1-\alpha_m)}{[v_m + (\rho+\delta)(1-\alpha_m)](\rho-n)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} - \frac{1}{\mu(1-\alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i(1-\alpha_i) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Veja que a partir da equação (A.30) podemos concluir que

$$\mu(t) = \mu(0) e^{-\left(\frac{v_m}{1-\alpha_m}\right)t} \quad (\text{A.38})$$

Então, a equação de estoque de capital ótimo do setor m poder ser escrita da forma:

$$k_m^*(t) = A_{m0}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} e^{\left(\frac{v_m}{1-\alpha_m}\right)t} \left[\left(\frac{\alpha_m(\rho-n)(1-\alpha_m)}{[v_m+(\rho+\delta)(1-\alpha_m)](\rho-n)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_m}} - \frac{1}{\mu(0)(1-\alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i(1-\alpha_i) \right] \quad (\text{A.39})$$

No caso do estoque de capital ótimo do setor 1, consideremos as equações (A.19), (3.30), (A.30) e (A.36). Então, dividindo a restrição (3.17) por k_1 , tem-se

$$\begin{aligned} \lambda_1^* A_{mt} a_{mt}^{\alpha_m} \left[A_{mt} \left(\frac{\alpha_m(\rho-n)(1-\alpha_m)}{[v_m+(\rho+\delta)(1-\alpha_m)](\rho-n)} \right)^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} a_{mt}^{1-\alpha_m} k_{1t}^{-1} - (n+\delta) \right] &= \frac{v_m}{1-\alpha_m} \Rightarrow \\ \lambda_1^* a_{mt} A_{mt}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \left(\frac{\alpha_m(\rho-n)(1-\alpha_m)}{[v_m+(\rho+\delta)(1-\alpha_m)](\rho-n)} \right)^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} k_{1t}^{-1} - (n+\delta) &= \frac{v_m}{1-\alpha_m} \Rightarrow \\ \lambda_1^* a_{mt} A_{mt}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \left(\frac{\alpha_m(\rho-n)(1-\alpha_m)}{[v_m+(\rho+\delta)(1-\alpha_m)](\rho-n)} \right)^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} &= \left(n+\delta + \frac{v_m}{1-\alpha_m} \right) k_{1t} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$k_1^*(t) = \lambda_1^* a_{mt} A_{mt}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \left(\frac{\alpha_m(1-\alpha_m)}{v_m+(\rho+\delta)(1-\alpha_m)} \right)^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \left(\frac{1-\alpha_m}{v_m+(n+\delta)(1-\alpha_m)} \right) \quad (\text{A.40})$$

Reorganizando os termos podemos escrever k_1^* em função de k_{mt}^* , ou seja:

$$\begin{aligned} k_1^*(t) &= \lambda_1^* \left(\frac{\alpha_m(1-\alpha_m)}{v_m+(\rho+\delta)(1-\alpha_m)} \right)^{-1} \left(\frac{1-\alpha_m}{v_m+(n+\delta)(1-\alpha_m)} \right) k_{mt}^* \\ &= \lambda_1^* \left(\frac{v_m+(\rho+\delta)(1-\alpha_m)}{\alpha_m[v_m+(n+\delta)(1-\alpha_m)]} \right) k_{mt}^* \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Substituindo a equação A.33 em $k_1^*(t)$, temos

$$k_1^*(t) = \frac{\lambda_1^*}{\lambda_m^*} k_m^*(t) \quad (\text{A.42})$$

O resultado acima pode ser generalizado para o estoque de capital ótimo do setor $i = 2, 3, \dots, m-1$. Isto é, o estoque de capital do setor i é dado por

$$k_i^*(t) = \lambda_i^* a_{mt} A_{mt}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \left(\frac{\alpha_m(1-\alpha_m)}{v_m+(\rho+\delta)(1-\alpha_m)} \right)^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \left(\frac{1-\alpha_m}{v_m+(n+\delta)(1-\alpha_m)} \right) \quad (\text{A.43})$$

Ou ainda:

$$k_i^*(t) = \frac{\lambda_i^*}{\lambda_m^*} k_m^*(t) \quad (\text{A.44})$$

A taxa ótima de alocação de mão-de-obra do setor m é dada substituindo a equação (A.38) em (A.27), o que nos dá:

$$a_{mt}^* = 1 - \frac{1}{\mu(0) A_{m(0)}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \left(\frac{(\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n} \right)^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} (1 - \alpha_m)} \sum_{i=1}^{m-1} w_i (1 - \alpha_i) \quad (\text{A.45})$$

As taxas de alocações de mão-de-obra nos outros setores são dadas por

$$a_{it}^* = \frac{w_i (1 - \alpha_i)}{\mu(0) A_{m(0)}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \left(\frac{(\alpha_m - \lambda_m)}{\rho - n} \right)^{\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} (1 - \alpha_m)} \quad \text{para } i = 1, \dots, m-1 \quad (\text{A.46})$$

A.6 Correspondente Modelo de Uzawa

Vamos mostrar que, no longo prazo, as funções de produção do nosso modelo se assemelham ao modelo de Uzawa e que, numa economia com apenas dois setores, é o próprio. Para isso, primeiramente considere as equações 3.46 e 3.47. Vamos mostrar que

$$k_{1t}^* = \lambda_1^* k_t^*, \quad k_{2t}^* = \lambda_2^* k_t^*, \quad \dots, \quad k_{mt}^* = \lambda_m^* k_t^*$$

Considere k_t definido da seguinte forma:

$$k_t^* = k_{1t}^* + k_{2t}^* + \dots + k_{mt}^*.$$

Então,

$$\lambda_m^* k_{1t}^* = \lambda_1^* k_{mt}^* \Rightarrow \quad (\text{A.47})$$

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^* \right) k_{1t}^* = \lambda_1^* (k_t^* - k_{1t}^* - k_{2t}^* - \dots - k_{(m-1)t}^*) \quad (\text{A.48})$$

Organizando os termos temos:

$$k_{1t}^* = \lambda_1^* k_{1t}^* + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^* k_{1t}^* - \lambda_1^* \sum_{i=1}^{m-1} k_{it}^* \Rightarrow \quad (\text{A.49})$$

$$= \lambda_1^* k_{1t}^* + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^* k_{1t}^* - \lambda_1^* \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i^*}{\lambda_1^*} k_{1t}^* \Rightarrow \quad (\text{A.50})$$

$$= \lambda_1^* k_{1t}^* \quad (\text{A.51})$$

Prosseguindo de forma análoga, podemos mostrar que $k_{it}^* = \lambda_i^* k_t^*$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Agora é só substituir nas funções de produção 3.5, 3.6 e 3.7 os k_{it}^* pelos respectivos $\lambda_i^* k_t^*$ e teremos:

$$y_{1t} = A_{1t}(\lambda_1 k_t)^{\alpha_2} a_{2t}^{1-\alpha_2} \quad (\text{A.52})$$

$$y_{2t} = A_{2t}(\lambda_2 k_t)^{\alpha_2} a_{2t}^{1-\alpha_2} \quad (\text{A.53})$$

...

$$y_{mt} = A_{mt}(\lambda_m k_t)^{\alpha_m} a_{mt}^{1-\alpha_m} \quad (\text{A.54})$$

Donde, numa economia com dois setores, corresponde ao modelo de Uzawa.

Apêndice B

Anexo ao Capítulo 3

B.1 Equivalência

Nessa seção apresentamos algumas contas dos resultados da equivalência entre o equilíbrio ótimo do mercado centralizado e o equilíbrio competitivo. Considerando o Hamiltoniano, relacionado a esse caso, equação 3.62 e página 42, as equações de Euler são:

$$\dot{q}_i = -\frac{w_i \alpha_i}{k_i} + q_i(\rho + \delta) - q_m[r_i - p_i A_i \alpha_i k_i^{\alpha_i - 1} a_i^{1 - \alpha_i}] \quad \text{para } i = 1, \dots, m-1 \quad (\text{B.1})$$

e

$$\begin{aligned} \dot{q}_m = & (\rho - n)q_m - \sum_{i=1}^{m-1} q_i \lambda_i A_m \alpha_m k_m^{\alpha_m - 1} a_m^{1 - \alpha_m} - q_m \left[-A_m \alpha_m k_m^{\alpha_m - 1} a_m^{1 - \alpha_m} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i + r_m \right] \\ & + q_m(n + \delta) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Agora, como já foi mostrado no texto que $q_i = q_m$, $i = 1, \dots, m-1$, veja equação (3.64) na página 42, as equações (B.1) e (B.2) podem ser escritas da seguinte forma

$$\dot{q} = -\frac{w_i \alpha_i}{k_i} - q[r_i - (\rho + \delta) - p_i A_i \alpha_i k_i^{\alpha_i - 1} a_i^{1 - \alpha_i}] \quad (\text{B.3})$$

$$\dot{q} = q[-r_m + (\rho + \delta)] \quad (\text{B.4})$$

B.2 O Problema da Firma

Considerando que o problema da firma é maximizar a equação 3.67 e que preço do m-ésimo bem pode ser normalizando para 1, então:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_i}{\partial K_i} &= p_i A_i \alpha_i k_i^{\alpha_i - 1} a_i^{1 - \alpha_i} - r_i = 0 \\ \Rightarrow r_i &= p_i A_i \alpha_i k_i^{\alpha_i - 1} a_i^{1 - \alpha_i}, \quad \text{para } i = 1, \dots, m - 1\end{aligned}$$

e

$$r_m = A_m \alpha_m k_m^{\alpha_m - 1} a_m^{1 - \alpha_m}$$

Apêndice C

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Existem vários métodos para verificar a estabilidade (ou não estabilidade) de um sistema de equações diferenciais. Entre tantos podemos destacar o método de Nyquist, a Análise temporal e o método de Routh-Hurwitz. Contudo, vale observar que estes métodos não calculam as raízes da equação característica. Para os nossos interesses vamos descrever a aplicação do método de Routh-Hurwitz.

Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

e sua equação característica

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Para verificar a estabilidade do sistema através do método de Routh-Hurwitz é preciso organizar os coeficientes da equação característica da seguinte forma:

$$\begin{array}{l|llll}
\lambda^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
\lambda^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
\lambda^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \\
\lambda^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\lambda^0 & d_{n-1} & & &
\end{array}$$

Em que as duas primeiras linhas são formadas pelos coeficientes da equação característica e as outras linhas são formadas da seguinte maneira:

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{array} \right|$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{array} \right|$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{array} \right|$$

O Critério de Routh-Hurwitz assegura que o número de raízes com parte real positiva é igual ao número de mudança de sinais dos elementos da primeira coluna do arranjo de Routh.

Então a condição necessária e suficiente para o sistema ser estável, é que todos os elementos da primeira coluna tenham o mesmo sinal ¹.

Pode-se considerar quatro casos:

1. Nenhum elemento da primeira coluna é nulo;
2. Há um zero na primeira coluna, porém alguns elementos na linha que ocorre o zero são não nulos
3. Há um zero na primeira coluna e todos os elementos na linha que ocorre o zero são também nulos

¹Generalizações podem ser vistas em: K. J. Khatwani, "On Routh-Hurwitz Criterion". IEEE Transactions on Automatic Control, 26 (2), pp. 583-584, 1981.

4. Caso anterior, com raízes múltiplas no eixo imaginário

Caso 1. Nenhum elemento da primeira coluna é nulo

Exemplo de sistema de 2ª ordem. Para um sistema genérico com equação característica dada por

$$P(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

O arranjo de Routh é

$$\begin{array}{l|ll} \lambda^2 & a_2 & a_0 \\ \lambda^1 & a_1 & 0 \\ \lambda^0 & b_1 & 0 \end{array}$$

onde $b_1 = \frac{(a_1)(a_0) - a_2(0)}{a_1}$.

Portanto, um sistema de 2ª ordem é estável se os coeficientes da equação característica forem todos positivos ou todos negativos.

Exemplo de sistema de 3ª ordem. Para um sistema genérico com equação característica dada por

$$P(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

O arranjo de Routh é

$$\begin{array}{l|ll} \lambda^3 & a_3 & a_1 \\ \lambda^2 & a_2 & a_0 \\ \lambda^1 & b_1 & 0 \\ \lambda^0 & c_1 & 0 \end{array}$$

onde $\begin{cases} b_1 = \frac{(a_2)(a_1) - (a_0)(a_3)}{a_2} \\ c_1 = \frac{(b_1)(a_0)}{b_1} = a_0 \end{cases}$

Logo, para que o sistema seja estável, todos os coeficientes devem ser positivos e $a_2a_1 > a_0a_3$. Caso $a_2a_1 = a_0a_3$, o sistema terá um par de raízes no eixo imaginário, o que resulta em estabilidade marginal.

Caso 2. Zero na primeira coluna, porém alguns elementos na linha que ocorre o zero são não nulos.

Neste caso o zero é substituído por um parâmetro, $\epsilon > 0$, suficientemente “pequeno”, sendo aproximado para zero depois de montado o arranjo de Routh

Exemplo. Para a equação característica

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 11\lambda + 10$$

O arranjo de Routh é

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^5 & 1 & 2 & 11 \\ \lambda^4 & 2 & 4 & 10 \\ \lambda^3 & \epsilon & 6 & 0 \\ \lambda^2 & c_1 & 10 & 0 \\ \lambda^1 & d_1 & 0 & 0 \\ \lambda^0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

onde $\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{4\epsilon - 12}{\epsilon} = \frac{-12}{\epsilon} \\ d_1 = \frac{6c_1 - 10\epsilon}{c_1} \rightarrow 6 \end{array} \right.$

Portanto, o sistema é instável pois há duas mudanças de sinais devido ao valor negativo $-12/\epsilon$ na primeira coluna (e portanto há duas raízes no semi-plano direito...)

Caso 3. Linha com todos os elementos nulos

Essa condição ocorre quando fatores do tipo $(\lambda + \sigma)(\lambda - \sigma)$ ou $(\lambda + j\omega)(\lambda - j\omega)$ aparecem na equação característica. Este problema é transposto usando-se um polinômio auxiliar, $U(\lambda)$, que é a equação da linha que precede a linha de zeros (a ordem do polinômio auxiliar é sempre par e indica o número de pares de raízes simétricas).

Exemplo. Para um sistemas de 3ª ordem genérico com equação característica

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + K$$

O arranjo de Routh é da forma:

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & 4 \\ \lambda^2 & 2 & K \\ \lambda^1 & c_1 & 0 \\ \lambda^0 & K & 0 \end{array}$$

onde $\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{8 - K}{2} \end{array} \right.$

Para que o sistema seja estável é necessário que $0 < K < 8$. Se $K = 8$ tem-se uma linha com apenas zeros, implicando em estabilidade marginal (com duas raízes no eixo imaginário). O polinômio auxiliar nesse caso é

$$U(\lambda) = 2\lambda^2 + K\lambda^0 = 2\lambda^2 + 8 = 2(\lambda^2 + 4) = 2(\lambda + 2j)(\lambda - 2j)$$

Caso 4. Raízes repetidas no eixo imaginário - $j\omega$

É um caso patológico e o critério de Routh-Hurwitz não revela este tipo de instabilidade

...

Exemplo. Para a equação característica:

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + j)^2(\lambda - j)^2 = \lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1$$

O arranjo de Routh é:

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^5 & 1 & 2 & 1 \\ \lambda^4 & 1 & 2 & 1 \\ \lambda^3 & \epsilon & \epsilon & 0 \\ \lambda^2 & 1 & 1 & \\ \lambda^1 & \epsilon & 0 & \\ \lambda^0 & 1 & & \end{array}$$

onde $\epsilon \rightarrow 0$.

Não há mudança de sinais, porém o sistema é marginalmente estável.

Polinômio auxiliar na linha $\lambda^4 \leftrightarrow \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2$

Polinômio auxiliar na linha $\lambda^2 \leftrightarrow \lambda^2 + 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{4\epsilon - 12}{\epsilon} = \frac{-12}{\epsilon} \\ d_1 = \frac{6c_1 - 10\epsilon}{c_1} \rightarrow 6 \end{array} \right.$$