

**ANÁLISE E CONTROLE DE SOLUÇÕES
ROTATIVAS EM UM SISTEMAPENDULAR**

RAFAEL MELO TEIXEIRA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROGRAMA DE PÓSGRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

**ANÁLISE E CONTROLE DE SOLUÇÕES ROTATIVAS
EM UM SISTEMAPENDULAR**

RAFAEL MELO TEIXEIRA

ORIENTADORA: ALINE SOUZA DE PAULA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM – 212A/2014

BRASÍLIA/DF: MARÇO - 2014

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓSGRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**ANÁLISE E CONTROLE DE SOLUÇÕES ROTATIVAS
EM UM SISTEMAPENDULAR**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

**Prof^a. Aline Souza de Paula, Doutora (ENM-UNB)
(Orientadora)**

**Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes, Doutor (ENM-UNB)
(Examinador Interno)**

**Prof. Suzana Moreira Avila, Doutora (FGA-UNB)
(Examinador Externo)**

BRASÍLIA/DF, 21 DE MARÇO DE 2014.

FICHA CATALOGRÁFICA

TEIXEIRA, RAFAEL MELO

Análise e Controle de Soluções Rotativas em um Sistema Pendular [Distrito Federal] 2014. xvi, 62p.210x297mm (PPGCM/FT/Unb, Mestre, Ciências Mecânicas, 2014).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas.

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 1. Sistema Pendular | 2. Pêndulo Paramétrico |
| 3. Conversão de Energia | 4. Método de Controle |

I.ENM/FT/Unb

II.Brasília

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

TEIXEIRA, R.M., Análise e Controle de Soluções Rotativas em um Sistema Pendular. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas. Publicação ENM.DM – 212A/2014, Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas, Universidade de Brasília – Faculdade de Tecnologia, Brasília, DF, 62p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Rafael Melo Teixeira

TÍTULO: Análise e Controle de Soluções Rotativas em um Sistema Pendular

GRAU: Mestre **ANO:**2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Rafael Melo Teixeira

Rua Lauro Jaques, Qd.04, Lt.20, Setor Negrão de Lima
74650-170 Goiânia – GO – Brasil.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que durante estes dois anos de desenvolvimento de trabalho estiveram sempre ao meu lado dando força e apoio para o meu desenvolvimento. Aos meus familiares que compreenderam e aceitaram minha ausência em função dos estudos, em especial a minha mãe Margareth, ao meu pai Marcelo e a minha irmã Danielle que sempre me incentivaram e me serviram como referência. A minha namorada Karen Ferreira que também sempre esteve ao meu lado apoiando e torcendo pelo meu desenvolvimento. Agradeço aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília pelo compromisso em compartilhar os seus conhecimentos, em especial a professora Aline por ser uma excelente professora e uma orientadora sempre muito presente, dedicada e comprometida com o desenvolvimento desta pesquisa, muito obrigado por todo apoio e compreensão. À todos os colegas de estudo que trabalharam comigo e me ajudaram a esclarecer dúvidas. Também não posso deixar de agradecer pela amizade e companheirismo do grupo de Vibrações: Hugo, Daniel, Wilker, Álvaro e ao Vanderlino. Agradeço ao *Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás* (PRH-PB/MCT) pelo suporte e apoio financeiro.

Rafael Melo Teixeira

*Dedico este trabalho a todos aqueles
que me incentivaram a prosseguir.*

Rafael Melo Teixeira

RESUMO

ANÁLISE E CONTROLE DE SOLUÇÕES ROTATIVAS EM UM SISTEMA PENDULAR

Autor: Rafael Melo Teixeira

Orientadora: Aline Souza de Paula

Departamento de Engenharia Mecânica

Brasília, 21 de Março de 2014.

A busca por fontes alternativas de energia cresce cada vez mais no cenário mundial. A última década tem registrado progressos consideráveis a nível global na investigação e desenvolvimento de tecnologias associadas ao aproveitamento da energia proveniente do oceano. Fatores importantes que contribuíram para potencializar a busca por combustíveis renováveis foram: a pressão crescente da sociedade por combustíveis renováveis e menos poluentes e a certeza de que o petróleo vai acabar. As ondas do mar são geradas pelo atrito e pressão entre o vento e a água do oceano, devido ao seu movimento oscilatório possuem grande potencial como fonte renovável de energia. Uma proposta de colheita de energia a partir de ondas do mar consiste na conversão de oscilações verticais em movimento rotativo utilizando um pêndulo excitado parametricamente. Sendo este movimento rotativo, então utilizado para alimentar um gerador elétrico. Neste contexto, é importante analisar a dinâmica de um pêndulo não-linear excitado parametricamente. Sem ação de controle, o pêndulo pode apresentar diferentes tipos de comportamento, indo de simples oscilações periódicas ao comportamento caótico. Embora diversos autores tenham verificado soluções rotativas, é importante mencionar que o pêndulo excitado parametricamente apresenta bifurcações que podem desestabilizar este tipo de resposta. Torna-se, então, interessante controlar bifurcações com objetivo de manter soluções rotativas estáveis. Inicialmente, este trabalho apresenta uma análise da dinâmica de um pêndulo não-linear excitado parametricamente, considerando um sistema com e sem a existência de ruídos (dinâmico e de observação) e diferentes valores de frequência e amplitude de forçamento, o com enfoque na identificação de soluções rotativas. Em seguida, emprega-se o método de controle *Extended Time-Delayed Feedback* (ETDF) de forma a evitar as bifurcações que desestabilizam as soluções rotativas desejadas.

ABSTRACT

ANALYSIS AND CONTROL OF ROTATIONAL SOLUTIONS IN A PENDULAR SYSTEM

Author: Rafael Melo Teixeira

Advisor: Aline Souza de Paula

Department: Mechanical Engineering

Brasília, 21 de Março de 2014.

The search for alternative energy sources grows increasingly in the world nowadays. In the last decade, significant progress in a global level has been observed in research and development associated with harvesting energy from ocean. Important factors that contributed to enhance the search for renewable fuels were: increasing pressure from society for renewable and cleaner fuels and the certain that the oil will phase out. Sea waves are generated by friction and pressure between the wind and the ocean water, due to its oscillatory motion that has great potential as a renewable energy source. One concept of harvesting energy from ocean waves consists in converting vertical oscillations into rotary motion oscillations using a parametrically excited pendulum. This rotational behavior can be used to power an electric generator. In this context, it is important to analyze the dynamics of a nonlinear pendulum excited parametrically. Without control, the pendulum can exhibit different types of behavior, from simple periodic oscillations to chaotic behavior. Although several authors have observed rotating solutions, it is important to mention that the parametrically excited pendulum presents bifurcations that can destabilize this type of response. In this context, it is interesting to avoid bifurcation in order to maintain rotational solutions stable. At first, this work presents an analysis of the dynamics of a parametrically excited nonlinear pendulum, considering the system with and without noise (dynamic and observation) and different values for forcing frequency and amplitude, focusing on the identification of rotating solutions. Then, the Extended Time-Delayed Feedback (ETDF) control method is used to avoid bifurcations that destabilize the desired rotational solutions.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS.....	XI
LISTA DE FIGURAS.....	XII
LISTA DE SIMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES.....	XVI
1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - OBJETIVO	2
1.2 - METODOLOGIA.....	3
1.3 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	3
2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
2.1 - SISTEMAS DE EXTRAÇÃO DE ENERGIA APROVENTANDO AS ONDAS DO MAR.....	5
2.1.1 - COLUNA DE ÁGUA OSCILANTE - CAO.....	6
2.1.2 - OSCILAÇÃO DE MASSAS	7
2.1.3 - PLATAFORMA FLUTUANTE	7
2.1.4 - PLACA ARTICULADA NO FUNDO	7
2.1.5 - BOMBEAMENTO DE ÁGUA	9
2.1.6 - DESLOCAMENTO RELATIVO	9
2.1.7 - ALONGADOS	12
2.1.7 - POR GALGAMENTO.....	13
2.1.7 - PENDULAR.....	14
2.2 - FERRAMENTAS DE ANÁLISE DA DINÂMICA NÃO LINEAR	16
3 - SISTEMA PENDULAR E MÉTODO DE CONTROLE	21
3.1 -SISTEMA PÊNDULO-SHAKER	21
3.2 -RUÍDO.....	23
3.3 -MÉTODO DE CONTROLEPOR REALIMENTAÇÃO COM ESTADOS DEFADOS ESTENDIDOS.....	24
3.3.1 -EXPOENTE DE LYAPUNOV DE OPI	27

4 - RESULTADOS.....	30
4.1 - SISTEMA PÊNDULAR.....	30
4.2 - SISTEMA PÊNDULO-SHAKER	35
4.2.1 -AUMENTO DA AMPLITUDE DE FORÇAMENTO	36
4.2.2 -DIMINUIÇÃO DA AMPLITUDE DE FORÇAMENTO	43
4.2.3 -DIMINUIÇÃO DA FREQUENCIA DE FORÇAMENTO	49
5- CONCLUSÕES	57
5.1 - TRABALHOS FUTUROS.....	59
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Parâmetros do sistema pendular	32
Tabela 4.2 - Parâmetros do sistema pêndulo- <i>shaker</i> identificados experimentalmente (Xu <i>et al.</i> ,2007).....	36

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1- Desenho esquemático de um pêndulo excitado parametricamente (Xu, 2005).....	2
Figura 2.1- Sistema de Coluna de Água Oscilante(IEA-OES, 2003).....	6
Figura 2.2- Sistema de Oscilação de Massas (IEA-OES, 2003)	7
Figura 2.3- Sistema com Placa Articulada no fundo (Fitzgeral& Bergdahl,2008)....	8
Figura 2.4- Sistema BioWave(Saulnier, 2004).....	9
Figura 2.5- Sistema de Bombeamento de Água (ETSU, 1999).....	9
Figura 2.6- Sistema de Deslocamento Relativo (Nielsen &Meyer,1998).....	10
Figura 2.7- Sistema de Roldanas (Saulnier, 2004).....	12
Figura 2.8- Sistema de Alongados (Brown, 2005).....	12
Figura 2.9- Sistema de Galgamento(Chaplin &Aggidis, 2007).....	14
Figura 2.10- Sistema Waveplane(Chaplin &Aggidis, 2007).....	14
Figura 2.11- Modelo Físico do Sistema Pendular excitado parametricamente (Xu <i>et al</i> , 2007).....	15
Figura 2.12- Espaço de fase.....	17
Figura 2.13- Construção da Seção de Poincaré (Moon, 1992).....	17
Figura 2.14- Seção de Poincaré indicando um comportamento caótico.....	19
Figura 2.15- Diagrama de Bifurcação.....	20
Figura 3.1- Pêndulo (na esquerda) montado sob uma base fixada ao Shaker eletrodinâmico (na direita).....	21
Figura 3.2- Modelo físico do sistema pêndulo-shaker com os componentes mecânicos e elétricos.....	22
Figura 4.1- Comparação do deslocamento do pêndulo obtido a partir de simulação numérica (em vermelho) e da resposta experimental (em preto)....	31
Figura 4.2- Bacia de atração para $Y=0,05m$ e $\Omega=20rad/s$	32
Figura 4.3- (a) Espaço de fase (preto) e Seção de Poincaré(vermelho) da órbita rotativa de período 1 para $Y_0=0.05$ e condições iniciais $x_0 = \{-2.4416, 20\}$; (b) Diagrama de Bifurcação aumentando a amplitude de forçamento....	33
Figura 4.4- Resposta do sistema para $Y_0=0.6m$. (a) Espaço de fase; (b) Seção de Poincaré.....	33

Figura 4.5- (a) OPI de período-1 e (b) expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle para $Y_0=0.6m$	34
Figura 4.6- Expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle com $Y_0=0.125m$	34
Figura 4.7- Resposta do sistema em regime permanente com ação de controle para $Y_0=0.125$ ($K=1.2$, $R=0.0$). (a) Espaço de fase (preto) e Seção de Poincaré (vermelho) para $x_0 = \{-1.5447, 23.7718\}$. (b) Espaço de fase e Seção de Poincaré (vermelho) com controle iniciado na vizinhança da OPI de interesse.....	35
Figura 4.8- (a) Diagrama de Bifurcação construído com $\Omega = 9rad/s$ aumentando a amplitude de forçamento. (b) Seção de Poincaré com $\Omega = 9rad/s$ e $E_0 = 115V$	37
Figura 4.9- (a) OPI de período-1 e (b) expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle.....	37
Figura 4.10- Detalhe da estabilização para $E_0 = 115V, R=0, K=1.2$ (a) espaço de fase com regime permanente destacado em vermelho; (b) ação de controle.....	38
Figura 4.11- Diagrama de bifurcação para $\Omega = 9rad/s$ sem ação de controle (preto) e com controle (vermelho): (a) $R=0, K=0.6$ e (b) $R=0, K=1.2$	38
Figura 4.12- Ação de controle quando o parâmetro de forçamento é variado, incluindo $E_0 = 115V$	39
Figura 4.13- Diagrama de bifurcação para $\Omega=9rad/s$ com ruído dinâmico, sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0, K=1.2$. (a) 2% de ruído, (b) 5% de ruído, (c) 8% de ruído, (d) 10% de ruído.....	40
Figura 4.14-Detalhe da estabilização para $E_0 = 115V, R=0, K=1,2$ 10% de ruído dinâmico. (a)ação de controle variando o forçamento, (b) espaço de fase; (c) ação de controle para $E_0 = 115V$	41
Figura 4.15- Diagrama de bifurcação para $\Omega=9rad/s$ com ruído de observação, sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0, K=1.2$. (a) 2% de ruído, (b) 5% de ruído, (c) 8% de ruído, (d) 10% de ruído.....	42
Figura 4.16- Detalhe da estabilização para $E_0 = 115V, R=0, K=1.2$ e 10% de ruído de observação. (a) espaço de fase; (b) ação de controle.....	42
Figura 4.17- Diagrama de Bifurcação construído para $\Omega=9rad/s$ diminuindo-se a amplitude forçamento.....	43
Figura 4.18- (a) OPI de período-1 e (b) expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle.....	44

Figura 4.19- Detalhe da estabilização para $E_0 = 31.5V, R=0, K=1.2$ (a) espaço de fase com regime permanente destacado em vermelho; (b) ação de controle.....	44
Figura 4.20- Diagrama de bifurcação para $\Omega = 9\text{rad/s}$ sem ação de controle (preto) e com controle (vermelho): (a) $R=0, K=0.6$ e (b) $R=0, K=1.2$	45
Figura 4.21- Diagrama de bifurcação para $\Omega=9\text{rad/s}$ com ruído dinâmico, sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0, K=1.2$. (a) 2% de ruído, (b) 5% de ruído, (c) 8% de ruído, (d) 10% de ruído... ..	46
Figura 4.22- Detalhe da estabilização para $E_0 = 31.5V, R=0, K=1.2$ e 10% de ruído dinâmico. (a) espaço de fase; (b) ação de controle.....	47
Figura 4.23- Diagrama de bifurcação para $\Omega=9\text{rad/s}$ com ruído de observação, sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0, K=1.2$. (a) 2% de ruído, (b) 5% de ruído, (c) 8% de ruído, (d) 10% de ruído.....	48
Figura 4.24- Detalhe da estabilização para $E_0 = 31.5V, R=0, K=1.2$ e 10% de ruído de observação. (a) espaço de fase; (b) ação de controle.....	49
Figura 4.25- Diagrama de bifurcação construído com $E_0 = 85V$ diminuindo-se a frequência Ω	49
Figura 4.26- (a) OPI de período-1 e (b) expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle.....	50
Figura 4.27- Detalhe da estabilização para $\Omega = 10,27 \text{ rad/s}, R=0, K=1.2$ (a) espaço de fase com regime permanente destacado em vermelho; (b) ação de controle	50
Figura 4.28- Diagrama de bifurcação para $E_0 = 85V$ sem ação de controle (preto) e com ação de controle (vermelho): $R=0, K=1.2$	51
Figura 4.29- Diagrama de bifurcação para $E_0 = 85V$ com ruído dinâmico, sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0, K=1.2$. (a) 2% de ruído, (b) 5% de ruído, (c) 8% de ruído, (d) 10% de ruído	52
Figura 4.30- Detalhe da estabilização para $\Omega = 10,27 \text{ rad/s}, R=0, K=1.2$ e 10% de ruído dinâmico. (a) espaço de fase; (b) ação de controle....	52
Figura 4.31- Diagrama de bifurcação para $E_0 = 85V$ com ruído de observação, sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0, K=1.2$. (a) 2% de ruído, (b) 5% de ruído, (c) 8% de ruído, (d) 10% de ruído.....	53
Figura 4.32- Detalhe da estabilização para $\Omega = 10,27 \text{ rad/s}, R=0, K=1.2$ e 10% de ruído de observação. (a) espaço de fase; (b) ação de controle....	54

Figura 4.33- Diagrama de bifurcação para $E_0 = 85V$ com ruído dinâmico, sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0$, $K=1.2$. (a) 2% de ruído, (b) 5% de ruído, (c) 8% de ruído, (d) 10% de ruído..... 55

Figura 4.34- Detalhe da estabilização para $\Omega = 12 \text{ rad/s}$, $R=0$, $K=1.2$ e 10% de ruído de dinâmico. (a) espaço de fase; (b) ação de controle..... 56

LISTA DESIMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÖES

ETDF	<i>Extended Time-Delay Feedback</i>
TDF	<i>Time-Delay Feedback</i>
DDE	<i>Delay Differencial Equation</i>
CAO	Coluna de Água Oscilante
OPI	Órbita Periódica Instável
EDO	Equação Diferencial Ordinária
L	Comprimento de onda
T	Período
C	Celeridade
Y_0	Amplitude de forçamento
k	Número de onda
θ	Fase
Ω	Frequência de forçamento
t	Instante de tempo
d	Profundidade da água
η	Elevação da superfície
H	Altura de onda
ω_n	Frequência natural
S_0	Coefficiente de perturbação
N	Número de ondas
k_0	Rigidez hidrostática
c	Amortecimento
M	Massa
M_a	Massa do conjunto da armadura
M_b	Massa do corpo do shaker
F_{em}	Força axial eletromagnética
l	Comprimento do pêndulo
T_c	Atuação do parâmetro de controle
E_0	Tensão de amplitude de forçamento
μ_d	Ruído dinâmico
μ_o	Ruído de observação
I_n	Intensidade de ruído
R_n	Número inteiro aleatório
K	Matriz ganho
ξ	Coefficiente de atrito viscoso
g	Gravidade

1. INTRODUÇÃO

Os desafios impostos pela necessidade de implementar políticas que asseguram um desenvolvimento sustentável são particularmente pertinentes no domínio da energia. Cada vez mais somos confrontados com a exigência de encontrar nas energias renováveis uma alternativa real e viável às formas convencionais de produção de energia elétrica, responsáveis por sérias ameaças ao meio ambiente. As obrigações legais impostas pelas diretivas comunitárias e pelo protocolo de Quioto apenas reforçam esta necessidade. Os oceanos, contendo o maior de todos os recursos naturais, abrigam um potencial energético enorme, que pode contribuir de forma significativa para as necessidades crescentes de energia a um nível global (CRES, 2002).

A energia contida nos oceanos pode ter origens diferentes, o que origina diferentes sistemas de extração de energia (Pontes e Falcão, 2001). As mais relevantes são a energia das marés, fruto da interação dos campos gravitacionais da lua e do sol, a energia das correntes marítimas, cuja origem está nos gradientes de temperatura e salinidade e na ação das marés, e finalmente a energia das ondas, que resulta do efeito do vento na superfície do oceano (CRES, 2002). Esta última forma de energia pode ser considerada uma forma concentrada da energia solar, pois é esta que, pelo aquecimento desigual da superfície terrestre, é responsável pelos ventos. Uma vez criadas, as ondas podem viajar milhares de quilômetros no alto mar praticamente sem perdas de energia (Sarmiento e Cruz, 2003).

Neste contexto, Wiercigroch (2003) propõe um conceito de colheita de energia a partir de ondas do mar, como abordado por Xu (2005) e Horton & Wiercigroch (2008). A proposta é baseada na conversão de oscilações verticais em movimento rotativo utilizando um pêndulo excitado parametricamente. A ideia é que a oscilação vertical de uma estrutura, devido às ondas do mar, possa gerar um comportamento rotativo do pêndulo que, por sua vez, forneça o torque para um gerador elétrico. Visando ilustrar essa ideia, a Figura 1.1 mostra um pêndulo pivotado montado rigidamente sob uma base que oscila em um plano vertical.

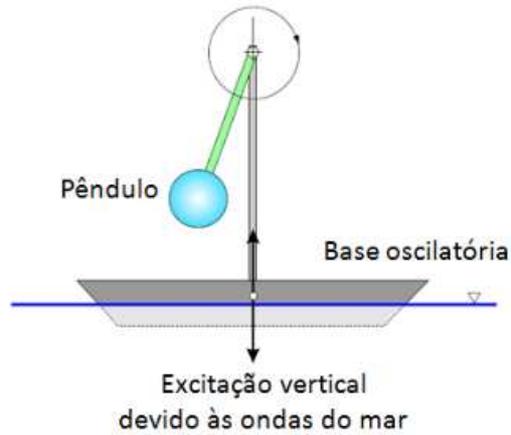


Figura. 1.1: Desenho esquemático de um pêndulo excitado parametricamente (Xu, 2005).

Sem a ação de controle, o pêndulo pode apresentar diferentes tipos de comportamento, indo de simples oscilações periódicas ao comportamento caótico, como verificado por Xu (2005). O comportamento apresentado depende das condições iniciais, frequência e amplitude de forçamento. Embora diversos autores tenham verificado soluções rotativas, é importante mencionar que o pêndulo excitado parametricamente apresenta bifurcações que podem desestabilizar este tipo de resposta. Desta forma, torna-se interessante controlar bifurcações com o objetivo de manter soluções rotativas estáveis (De Paula, 2010).

1.1 OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo manter soluções rotativas de um pêndulo excitado parametricamente quando variam-se as condições de forçamento. Em outras palavras, busca-se evitar bifurcações apresentadas na resposta dinâmica do sistema que desestabilizam a solução desejada. Três situações distintas são avaliadas: aumentando-se a amplitude de forçamento; diminuindo-se a amplitude de forçamento; e, por último, diminuindo-se a frequência de forçamento. Nas três etapas, avalia-se também a influência da presença de ruídos dinâmico e de observação no desempenho do controlador, sempre com o objetivo de verificar a eficácia do método ETDF em manter o sistema em órbita rotativa de periodicidade 1, sendo este comportamento desejável para o mecanismo de geração de energia utilizando o pêndulo parametricamente

excitado. A análise do desempenho do controlador na presença de ruído tem por objetivo avaliar a robustez do método de controle empregado. Vale mencionar que De Paula *et al.* (2012) também aplica o método controle ETDF para manter soluções rotativas do mesmo pêndulo estudado. Nesta dissertação, no entanto, mais situações são consideradas. Além disso, apresenta-se uma análise na presença de ruídos. Essa análise é extremamente importante para aplicações reais, tendo em vista as variações das características das ondas do mar com o tempo.

1.2 METODOLOGIA

Em cada uma das três etapas, a mesma metodologia é empregada e o controle é realizado a partir de simulações numéricas. Inicialmente, identifica-se uma solução rotativa desejada, estável antes da ocorrência de bifurcações. Para a órbita escolhida determinam-se valores adequados para os ganhos do controlador a partir do cálculo do expoente de Lyapunov máximo. Em seguida, o método de controle de caos contínuo Método por Realimentação com Estados Defasados (*Extended Time-Delayed Feedback* - ETDF) é empregado de forma a manter a órbita rotativa desejada estável quando o forçamento externo é variado em cada uma das três situações consideradas.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho é dividido em 5 capítulos. Este primeiro capítulo apresenta uma introdução ao trabalho, abordando as suas motivações, objetivos, metodologia e organização. No Capítulo 2, apresenta-se uma revisão da literatura acerca dos estudos desenvolvidos sobre os diversos tipos de sistemas existentes para extração de energia provenientes das ondas do mar, com destaque aos trabalhos que envolvem sistemas pendulares. Além disso, apresentam-se algumas ferramentas apropriadas para a análise dinâmica de sistemas não-lineares.

Embora o controle seja empregado a partir de simulações numéricas, o modelo do sistema pendular principal estudado é baseado em um aparato experimental, que consiste em um pêndulo fixado sob um *shaker*. No Capítulo 3, apresentam-se o sistema pêndulo-*shaker* e sua modelagem, modelos matemáticos que representam ruídos dinâmico e de observação e a lei de controle do método empregado, ETDF.

No Capítulo 4, inicialmente apresenta-se uma análise da dinâmica de um modelo simplificado do pêndulo excitado parametricamente, no qual a dinâmica do

shaker é desconsiderada. Inicialmente, o sistema é avaliado sem ação de controle, considerando-se diferentes condições iniciais e diferentes valores de forçamento buscando-se identificar soluções rotativas. Em seguida, emprega-se o método de controle ETDF com objetivo de estabilizar a Órbita Periódica Instável (OPI) rotativa desejada. Após a análise com o modelo simplificado, considera-se o modelo completo do sistema pêndulo-*shaker* e emprega-se o método ETDF com objetivo de evitar bifurcações que desestabilizam o comportamento rotativo desejado. Três situações são analisadas: aumento e diminuição da amplitude de forçamento e diminuição da frequência de forçamento. Em todas as situações, avalia-se também a influência da presença de ruídos dinâmico e de observação no desempenho do controlador.

Finalmente, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões referentes ao trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.

2.1 SISTEMAS DE EXTRAÇÃO DE ENERGIA APROVEITANDO AS ONDAS DO MAR.

A tecnologia de conversão de energia das ondas do mar tem tido um desenvolvimento relevante nos últimos anos, com o aparecimento de novas tecnologias. Este fato deve-se à procura crescente da exploração desta fonte de energia.

Este estado de dinâmica crescente dificulta o estabelecimento de padrões e categorias que permitam agrupar e classificar de forma simples os dispositivos existentes. Contudo, existe um consenso quanto ao número possível de critérios que podem ser usados para classificar um dispositivo de aproveitamento de energia das ondas. A classificação destes dispositivos tem por base os seguintes aspectos:

- Distância à linha da costa;
- Dimensão e/ou orientação do dispositivo;
- Modo geral de funcionamento.

Analisando as informações encontradas relativas aos dispositivos existentes, é feita uma sistematização que procura descrever o estado de desenvolvimento e funcionamento de cada tecnologia. São então propostas as seguintes classes, cuja descrição detalhada será efetuada mais adiante:

- Coluna de Água Oscilante (CAO);
- Oscilação de Massas;
- PSP – Plataforma Flutuante;
- Placa Articulada no Fundo;
- Bombeamento de Água;
- Deslocamento Relativo;
- Sistema de Alongados;
- Por Galgamento;
- Sistema Pendular.

2.1.1. COLUNA DE ÁGUA OSCILANTE - CAO

O Sistema CAO – Coluna de Água Oscilante é constituído por três componentes principais: a câmara, a turbina e o gerador. A câmara, cheia de ar, é aberta na base e parcialmente submersa, de modo a não haver fugas de ar interior pela abertura. A turbina, que faz atuar o gerador, está, numa extremidade, ligada ao topo da câmara e, na outra extremidade, aberta para a atmosfera, conforme Figura 2.1. Quando uma onda atinge as imediações da câmara, o nível de água sobe (devido ao efeito dos vasos comunicantes) e o ar no seu interior é comprimido, forçando a sua saída pela turbina. Quando o nível de água desce, forma-se uma depressão e o ar exterior são aspirados para a câmara, mais uma vez através da turbina. A circulação do ar pela turbina causa a sua atuação e, estando esta ligada ao gerador, produz eletricidade.

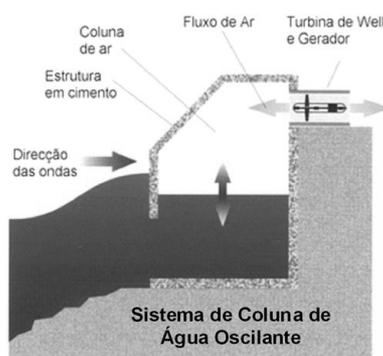


Figura 2.1 Sistema Coluna de Água Oscilante (IEA-OES, 2003).

Para aumentar o rendimento do sistema usam-se turbinas em que o sentido de rotação é independente do sentido do escoamento, sendo o modelo mais divulgado o da turbina Wells. Este dispositivo pode estar rigidamente fixado ou ser flutuante, ficando ancorado, estar na costa, em estruturas de defesa, ou similares, ou ser mesmo instalado *offshore* (CRES, 2002).

Um dos sistemas mais conhecidos do tipo CAO já instalados é o MRC 1000. A particularidade deste dispositivo é o fato de possuir múltiplas câmaras de ar. Cada câmara tem uma frequência de ressonância distinta, o que permite ao aparelho operar com bons rendimentos sob condições variadas. O MRC 1000 apresenta, neste aspecto, uma vantagem relativamente à CAO tradicional. Este dispositivo deverá ficar instalado

a profundidades maiores que 50 m e poderá gerar uma potência próxima de 1 MW (IEA-OES, 2003).

2.1.2. OSCILAÇÃO DE MASSAS

Outro tipo de sistema existente é o de Oscilação de Massas, mostrado na Figura 2.2. Estes dispositivos flutuam na superfície presos por cabos. Os movimentos da ondulação sob o dispositivo (vertical, horizontal, inclinado, etc.), provocam a oscilação de determinadas massas relativamente ao restante dispositivo. O movimento destas massas (de forma linear, pendular, rotacional, etc.) é aproveitado para produção de energia elétrica (IEA-OES, 2003).

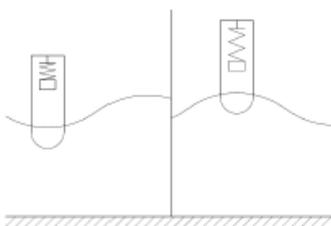


Figura 2.2 Sistema de Oscilação de Massas (IEA-OES, 2003).

2.1.3. PLATAFORMA FLUTUANTE – PSP

O sistema de Plataforma Flutuante PSP (Cruz, 2004) consiste numa plataforma flutuante celular, em que as células, cheias de ar, têm o fundo aberto para o mar. A passagem da onda pela estrutura cria sobre pressões nas zonas de crista e depressões nas zonas de cava. A diferença de pressão entre as células adjacentes é usada para criar a circulação de ar entre elas, circulação essa que, numa turbina, produz eletricidade. A principal diferença entre este sistema e a CAO típica está no fato de a turbina estar ligada a duas câmaras de pressões diferentes e variáveis, em vez de estar ligada a uma câmara de pressão variável e à atmosfera.

2.1.4. PLACA ARTICULADA NO FUNDO

Desenvolvido por vários fabricantes, como *Aqua Marine Power*, *Biopower Systems AW-Energy* e outros, o sistema de placa articulada no fundo, mostrado na

Figura 2.3, é constituído por uma placa, total ou parcialmente submersa, vertical quando em repouso, que roda em torno de um eixo horizontal existente na sua base. A placa está orientada paralelamente à frente de onda e está assente no fundo do mar. A passagem de uma onda pelo dispositivo cria um campo de velocidades na sua envolvência que causa a sua rotação. Como este dispositivo funciona aproveitando a energia da componente horizontal da velocidade é vantajosa a sua instalação em águas pouco profundas, logo a pequenas distâncias à costa. Nesta região, as órbitas das partículas excitadas pela onda tendem a achatar-se e a ficar elípticas e, portanto, com componente horizontal dominante. A rotação da placa faz atuar sistemas de produção de energia, acionando geralmente mecanismos hidráulicos que bombeiam água do mar sob pressão para turbinas (quer em terra, quer nas imediações do dispositivo), que acionam o gerador elétrico. Há também sistemas que bombeiam óleo num circuito fechado, em vez de água do mar (Fitzgerald & Bergdahl, 2008).

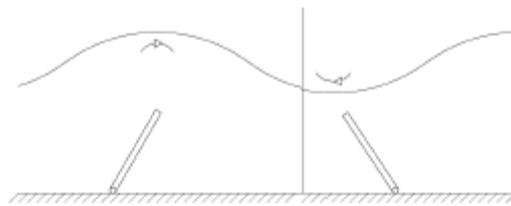


Figura 2.3 – Sistema com Placa Articulada no Fundo (Fitzgerald & Bergdahl,2008).

Com maior capacidade de geração de energia apresentado pelo sistema de Placas articuladas no fundo, o sistema *BioWave* em vez de ser constituído por placas de grandes dimensões, é constituído por traves verticais flexíveis, que se estendem a toda a altura, desde a base até à superfície da água. O princípio de funcionamento é o mesmo dos restantes, com a diferença de as traves não oscilarem em fase, mas sim num movimento semelhante ao de longas algas, fenómeno que, aliás, inspirou o mecanismo, ilustrado na Figura 2.4. A rotação das traves faz atuar diretamente o gerador, na base, em vez de excitar algum fluido sob pressão que faria atuar um gerador ou uma turbina distante (Saulnier, 2004).



Figura 2.4- Sistema *BioWave* (Saulnier, 2004).

2.1.5. BOMBEAMENTO DE ÁGUA

Um sistema bastante comum é o sistema de Bombeamento de Água (ETSU, 1999), mostrado na Figura 2.5. Estes sistemas utilizam flutuadores que se movem sob a ação das ondas, acionando bombas. As bombas fazem circular água do mar sob pressão, que aciona turbinas que produzem eletricidade. A turbina pode fazer parte do próprio dispositivo, ou existir numa central em terra, caso em que é necessária uma canalização adequada entre o dispositivo e a central.

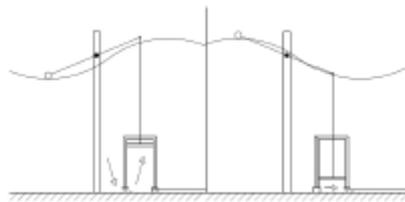


Figura 2.5- Sistema de Bombeamento de Água (ETSU, 1999).

2.1.6. DESLOCAMENTO RELATIVO

Sistemas de Deslocamento Relativo, conforme mostrado na Figura 2.6, são constituídos por um flutuador, emersos ou submersos, com grande liberdade de movimento e por uma componente com reduzida ou nula liberdade de movimento. A passagem da onda pelo dispositivo causa o deslocamento relativo entre o corpo com grande liberdade e o fixo, sendo este deslocamento aproveitado para produzir energia (geralmente através de geradores elétricos lineares ou sistemas hidráulicos que fazem atuar um motor que, por sua vez, aciona um gerador elétrico). O que distingue este

sistema dos de bombeamento é o fato de a energia ser obtida diretamente sob a forma elétrica, sem bombeamento intercalar (Nielsen & Meyer,1998).

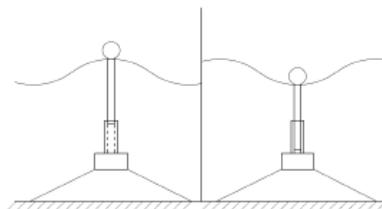


Figura 2.6- Sistema de Deslocamento Relativo (Nielsen & Meyer,1998).

Três grandes exemplos de sistemas de geração de energia que utilizam o deslocamento relativo de flutuantes são: *AquaBuoy*; *Sloped IPS Buoy*; AWS e Sistema de Roldanas

O sistema conhecido como *AquaBuoy* (Bloomer, 2000) é composto por quatro componentes principais: o flutuador, o tubo de aceleração, as mangueiras-bomba e o disco-pistão. O flutuador localiza-se à superfície, ligado no fundo ao tubo de aceleração, vertical, cheio de água e aberto nas duas extremidades. No interior do tubo estão duas mangueiras-bomba e o disco-pistão: uma mangueira fixada à parte superior do tubo de aceleração, estendendo-se até meio comprimento deste tubo, onde termina no disco-pistão. A outra mangueira está suspensa do disco-pistão, estendendo-se até à extremidade inferior do tubo. Quando o flutuador se move devido à ação das ondas, movimentando verticalmente o tubo de aceleração que, por ser aberto, tenderia a mover-se de acordo com o volume de água no seu interior. No entanto, o disco-pistão, devido à sua área, oferece resistência ao movimento relativo da água. Como consequência, no caso de um movimento ascendente, a mangueira superior é esticada e a inferior encurtada (o contrário acontece no caso de movimento descendente). Estando as mangueiras preparadas para reduzir o seu volume quando esticadas e aumentar quando encurtadas, verifica-se a sucção de água do mar quando a mangueira é encurtada e o bombeamento quando a mangueira é esticada. A água bombeada é usada para acionar um grupo turbina-gerador, produzindo assim eletricidade.

Desenvolvido pela Universidade de Edimburgo o sistema *Sloped IPS Buoy* (Bloomer, 2000) tem um funcionamento semelhante ao sistema *AquaBuoy*, com a diferença fundamental de ser inclinado em vez de vertical. Este dispositivo é uma estrutura planar, isto é, com uma dimensão substancialmente menor do que as outras duas, semi-submersa, instalada com uma dada inclinação relativamente à horizontal,

oferecendo, desta forma, grande resistência a movimentos puramente verticais ou horizontais. Os grandes deslocamentos apenas são permitidos na direção correspondente ao seu plano inclinado. No interior da estrutura existem dois tubos, paralelos, com a mesma inclinação, que a atravessam a todo o comprimento. Os dois tubos estão abertos para o mar nas duas extremidades, estando, portanto, cheios de água. No interior de cada tubo existe um pistão ligado a sistemas hidráulicos. Quando uma onda passa pelo dispositivo e causa o seu movimento ao longo do seu plano, por causa dos tubos serem abertos para o mar, o dispositivo tenderia a deslocar-se relativamente ao volume de água no seu interior (que permaneceria relativamente imóvel). No entanto, os pistões oferecem resistência a este movimento relativo, fazendo atuar os sistemas hidráulicos que bombeiam óleo para um motor que, por sua vez, faz atuar um gerador elétrico.

Instalado em profundidades entre 40 e 100 metros, o Sistema AWS é basicamente constituído por dois cilindros verticais: um interior, rigidamente fixado ao fundo do mar e um exterior que se desloca verticalmente ao longo do interior. Dentro dos cilindros existe ar com uma pressão que equilibra a pressão da coluna de água que lhes está sobrejacente em condições estáticas, mantendo os cilindros numa posição neutra. Quando uma onda passa sobre o dispositivo, a crista provoca o aumento da pressão sobre os cilindros. Para equilibrar este aumento de pressão, o cilindro exterior desce, comprimindo o ar interior. A cava, por sua vez, reduz a pressão em relação ao nível neutro, causando a expansão do ar interior e a subida do cilindro. O movimento relativo entre os dois cilindros aciona sistemas hidráulicos que, por sua vez, acionam um grupo motor-gerador elétrico (Cruz, 2004).

Concluindo os sistemas de deslocamento relativo de flutuadores, os sistemas de Roldanas, mostrado na Figura 2.7, utilizam um flutuador pesado, ligado por um cabo a um contra-peso. O cabo é suspenso de uma roldana, fixa (de formas mais ou menos complexas) a um eixo, geralmente horizontal. O movimento do flutuador sob ação das ondas (e conseqüentemente do contra peso) faz girar a roldana, a roldana faz girar o eixo e este, por sua vez, aciona o sistema de produção de energia. Estes sistemas, devido à sua natureza, são emersos, suportados por estruturas rigidamente fixadas ao fundo do mar (Saulnier, 2004).

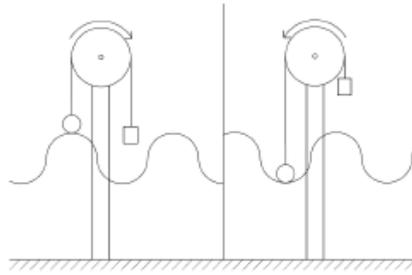


Figura 2.7- Sistema de Roldanas (Saulnier, 2004).

2.1.7. ALONGADOS

Mais um modelo de sistema de extração de energia das ondas do mar é o sistema de alongados, que são construídos em dimensões da mesma ordem de grandeza que o comprimento da onda incidente, estando orientados perpendicularmente à frente de onda, como identificado na Figura 2.8. O seu funcionamento está associado à passagem da onda ao longo de todo o seu comprimento. Quando uma onda atinge o dispositivo, devido à sua (elevada) dimensão, este fica sujeito a diferentes ações ao longo do seu desenvolvimento, conforme cada secção esteja sob ação de uma crista ou de uma cava. É este gradiente de ações entre as várias secções do dispositivo que é usado para recolher energia, por exemplo, provocando deslocamentos diferenciais ao longo do sistema, que fazem atuar os geradores elétricos (Brown, 2005).



Figura 2.8- Sistema de Alongados (Brown, 2005).

Para os dispositivos de alongados, os sistemas mais conhecidos são: Pelamis; *WaveBlankete* *Wave Master*.

O sistema Pelamis (Brown, 2005), é um sistema articulado semi-submerso, localizado em *offshore*, composto por segmentos cilíndricos ligados entre si por rótulas. A passagem da onda ao longo do dispositivo eleva ou rebaixa as rótulas, conforme se trate da crista ou da cava, causando a rotação relativa entre segmentos adjacentes, quando estes se adaptam às inclinações das diferentes faces da onda. A rotação das

rótulas faz atuar sistemas hidráulicos que acionam os geradores existentes em cada segmento.

Outro sistema é o *WaveBlanket*. Um dispositivo celular, flexível, semelhante a uma manta (daí o nome *Blanket*), que repousa na superfície livre da água. A passagem das ondas sob a membrana provoca a sua deformação por flexão, de modo a adaptar-se à curvatura da onda. Como consequência, tendo em conta a geometria das deformações que ocorrem em flexão, conforme a sua posição em relação ao eixo neutro, parte das células expande-se, reduzindo a sua pressão interior, e parte das células contrai-se, aumentando a sua pressão interior. A diferença entre a pressão das células é usada para criar um escoamento de ar entre elas que, passando por uma turbina existente no dispositivo, produz energia (Brown, 2005).

Concluindo os sistemas de alongados, o sistema *Wave Master* é um dispositivo localizado em *offshore*, flutuante, que fica completamente submerso a pouca profundidade. É formado por duas câmaras (uma de alta pressão e outra de baixa pressão) cheias de água, que se dispõem paralelamente entre si e perpendicularmente à frente de onda. As câmaras estão ligadas por turbinas que permitem a passagem de água das câmaras de alta para as câmaras de baixa pressão. A superfície superior das câmaras é coberta por válvulas de retenção: sobre a câmara de alta pressão apenas permitem a entrada de água (quando a pressão exterior é superior à interior) e sobre a câmara de baixa pressão apenas permitem a saída de água (quando a pressão exterior é inferior à interior). A passagem da onda sobre o dispositivo cria zonas de sobre pressão relativamente ao nível estático sob as cristas e zonas de depressão sob as cavas. Como consequência, verifica-se a entrada de água na câmara de alta pressão nas zonas sob as cristas, que sai pela câmara de baixa pressão nas zonas sob as cavas, depois de passar pelas turbinas (Falcão, 2004).

2.1.8. POR GALGAMENTO

Os sistemas de funcionamento por Galgamento (Figura 2.9) recolhem energia das ondas através da circulação da água por turbinas, do mesmo modo que se verifica em centrais hidroelétricas, isto é, transformando energia potencial gravitacional em eletricidade. A designação de dispositivos por de galgamento vem do fato de para transformar a energia da onda em energia potencial gravitacional (e seguidamente em eletricidade), parte, ou toda a estrutura, tem de ser galgada pela onda. Geralmente, estes

sistemas têm uma rampa, ou algo semelhante, que recolhe a onda incidente. A energia da onda quer potencial, quer cinética, é assim convertida em energia potencial gravitacional. O reservatório alimenta, por sua vez, uma turbina que produz eletricidade e descarrega no mar. Estes dispositivos podem ser rigidamente fixados ou flutuantes e estar instalados na costa, próximos dela ou mesmo em *offshore* (Chaplin & Aggidis, 2007).

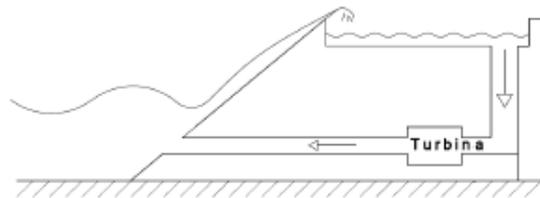


Figura 2.9- Sistema de Galgamento(Chaplin & Aggidis, 2007).

Como exemplo de estrutura de galgamento, o *Waveplane* é um sistema *offshore* ou *nearshore*. Na sua parte frontal existe uma rampa que recebe as ondas e conduz a massa de água a um reservatório, como mostra a Figura 2.10. O reservatório é dividido por lamelas inclinadas umas relativamente às outras, que escoam a água para um tubo, que corre ao longo da sua base. A inclinação das lamelas destina-se a encaminhar a água de forma que a água entre tangencialmente, ou aproximadamente, no tubo, provocando um escoamento rotacional no seu interior. O tubo conduz a água a uma turbina axial que, devido ao carácter rotacional do escoamento, tem a sua ação facilitada. A água é posteriormente descarregada no mar (Chaplin & Aggidis, 2007).

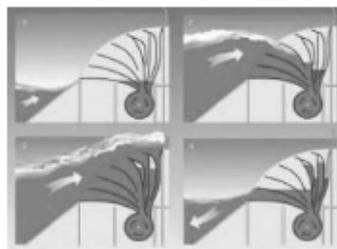


Figura 2.10- Sistema *Waveplane* (Chaplin & Aggidis, 2007).

2.1.9. PENDULAR

O pêndulo excitado parametricamente tem despertado interesse científico por um período de tempo considerável. O pêndulo paramétrico, que consiste em um sistema

vibracional, pode ser analisado por meio de diferentes métodos. Aplicação de técnicas de perturbação, originalmente proveniente da mecânica à problemas paramétricos e vibração não-linear, foi estudada por Watt & Cartmell (1994). Um bom exemplo utilizando o método da perturbação de escalas múltiplas para análise do oscilador paramétrico foi apresentado por Watt & Cartmell (1994), que desenvolveram investigações numéricas e experimentais e discutiram um sistema com tomada de força capaz de fazer o trabalho mensurável.

Recentemente Bishop & Clifford (2006) foram envolvidos na investigação desse sistema. Bishop propõe análises incluindo dinâmica simbólica, variedades invariantes e método de tranças, bem como a teoria de energia potencial. O limite aproximado da zona de escape foi calculado analiticamente e uma descrição detalhada das órbitas rotativas foi apresentada por Bishop & Clifford (2006). Órbitas oscilatórias também foram identificadas.

O Pêndulo com excitação vertical de base (forçamento paramétrico) também exhibe um comportamento dinâmico rico e têm sido extensivamente estudado a partir de duas perspectivas teóricas e aplicado (Leven & Koch, 1981).

Leven (1981) mostra que a resposta de um sistema aparentemente simples e com as equações de governo conhecidas como um sistema de oscilador não-linear, é fortemente dependente da amplitude e da frequência de excitação, assim como da frequência natural e do amortecimento presente.

Mais recentemente, a ideia de extração de energia aproveitando as ondas do mar foi abordada por Xu (2007), Horton & Wiercigroch (2008) e Horton (2009), que investigam a dinâmica de um pêndulo paramétrico forçado harmonicamente, Figura 2.11. A ideia se baseia na conversão de oscilações verticais de uma base, devido às ondas do mar, em movimento rotativo utilizando um pêndulo excitado. Este movimento rotativo é, então, utilizado para alimentar um gerador elétrico.

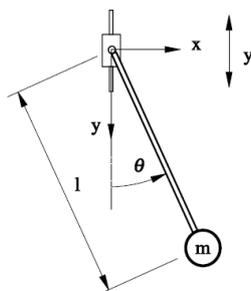


Figura 2.11 – Modelo físico do sistema pendular excitado parametricamente (Xu *et al.*, 2007).

Xu *et al.* (2007) realiza a análise de um pêndulo excitado parametricamente por um *shaker* eletro-dinâmico. O sistema principal estudado neste trabalho é o mesmo analisado por Xu *et al.*

2.2 FERRAMENTAS DE ANÁLISE DA DINÂMICA NÃO-LINEAR

As respostas de sistemas não lineares com forçamento são complexas, e para a melhor análise do comportamento do sistema é necessário a aplicação de algumas ferramentas de dinâmica não-linear. As ferramentas utilizadas neste trabalho são o espaço de fase, diagrama de bifurcação e a seção de Poincaré.

O espaço de fase ou espaço de estado pode ser definido com o espaço vetorial de um sistema dinâmico, representado pelas suas variáveis dependentes. Cada ponto do espaço de fase representa um estado do sistema, e por esse ponto, passa apenas uma trajetória. À medida que o sistema evolui no tempo, os sucessivos pontos representativos traçam uma curva no espaço de fase, definindo uma trajetória.

Quando o sistema exibe um comportamento periódico, o sistema visita repetidas vezes o mesmo conjunto de pontos, originando, assim, uma curva fechada. No entanto, no caso de sistemas em regime caótico, devido a falta de periodicidade, as trajetórias nunca se fecham. Cabe ressaltar que sistemas quase-periódicos também apresentam como trajetória uma curva aberta.

A Figura 2.12 mostra o espaço de fase de um pêndulo paramétrico em comportamento rotativo, representado por posições e velocidades angulares, considerando a variação de posições de $-\pi$ a π .

Uma solução periódica é aquela que se repete em um dado intervalo de tempo denominado período. Se T é o período de um movimento periódico, então kT também é, onde k é qualquer número inteiro.

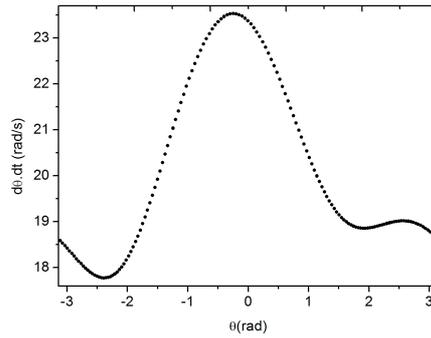


Figura 2.12 – Espaço de fase.

Uma ferramenta muito utilizada na análise de sistemas não-lineares é a seção de Poincaré. Este procedimento possibilita uma melhor compreensão da dinâmica global do sistema, identificando o comportamento no espaço de fase. Este procedimento permite que um sistema dinâmico contínuo no tempo (fluxo) seja modelado como um sistema discreto (mapa), reduzindo-se, desta forma, dimensões do sistema.

A construção do mapa baseia-se na determinação dos pontos de interseção da trajetória do sistema com um hiperplano. Este é definido por um ponto escolhido arbitrariamente no espaço de fase e pela condição de perpendicularidade desse hiperplano com a trajetória que passa pelo plano escolhido. O conjunto desses pontos de interseção constitui um mapa de Poincaré do sistema e o hiperplano escolhido é chamado de seção de Poincaré (Otani e Jones, 1997).

Não existe um método geral para a construção de uma seção de Poincaré. No entanto, para sistemas sujeitos a um forçamento periódico, é comum a adoção como seção de Poincaré uma superfície relacionada a uma determinada fase de forçamento, como mostrado na Figura 2.13. Portanto, a trajetória é amostrada a cada intervalo discreto de tempo, dando origem à seção de Poincaré. Desta forma, a variável de tempo é eliminada.

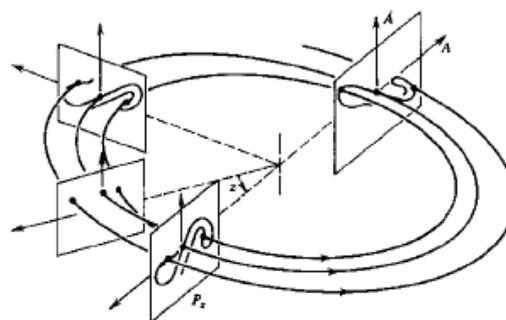


Figura 2.13 – Construção da Seção de Poincaré(Moon, 1992).

Desse modo, o intervalo de tempo entre cada amostragem é igual ao período de forçamento $T = 2\pi/\omega$. Neste caso, pode-se ter algumas representações em uma seção de Poincaré:

- Um único ponto para casos de órbitas de período-1, com frequência igual a ω .
- Um conjunto de pontos para o caso de órbitas com uma frequência múltipla de ω . Por exemplo, dois pontos para órbitas de período-2 e três pontos para órbitas de período-3.
- Uma curva fechada para o caso de quase-periodicidade.
- Um conjunto infinito de pontos organizados, usualmente possuindo uma geometria fractal com regiões vazias e regiões densas, organizadas em lamelas. Esse conjunto pode representar um atrator estranho, para o caso de movimento caótico; ou uma sela caótica, para o caso de caos transiente.

Embora a sela caótica possua um número infinito de pontos, para o caso de caos transiente tem-se apenas um número finito de pontos na seção de Poincaré, considerando que essas selas caóticas são repulsoras.

Usualmente os sistemas caóticos possuem uma natureza fractal exibida no atrator estranho. Essa mesma característica fractal pode ser observada em uma sela caótica, para sistema que apresenta caos transiente. No entanto, enquanto o atrator estranho é atrativo, a sela caótica é repulsiva.

O atrator caótico é definido como um conjunto fechado, invariante e ergódico que atrai todas as órbitas que se iniciam em alguma vizinhança. A ergodicidade significa que cada ponto neste conjunto é visitado em algum momento da evolução do sistema. A existência de uma órbita densa, geralmente em forma de ferradura, implica que o sistema é ergódico (Otani e Jones, 1997).

A Figura 2.14 apresenta uma seção de Poincaré de um pêndulo paramétrico mostrando um comportamento tipicamente caótico, onde se verifica a presença de lamelas, que consiste em um atrator estranho.

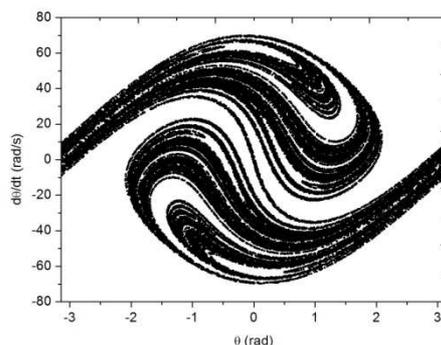


Figura. 2.14 – Seção de Poincaré indicando um comportamento caótico.

Outra ferramenta muito utilizada na análise de sistemas não-lineares é o Diagrama de Bifurcação.

O termo bifurcação está associado a uma mudança qualitativa na natureza da resposta do sistema, como consequência da variação de qualquer um de seus parâmetros. Os diagramas de bifurcação são bastante utilizados para analisar o comportamento global do sistema, avaliando onde e como ocorrem mudanças na resposta do sistema.

As variações na resposta de um sistema que conduzem ao surgimento do comportamento caótico são chamadas de rotas para o caos, e podem ser divididas em duas categorias:

- Bifurcações locais, que incluem as sequências de bifurcações, como por exemplo, duplicação de período.
- Bifurcações globais, que são caracterizadas por mudanças bruscas de comportamentos regulares para caóticos e vice-versa, como no caso de ocorrência de crise, fenômeno que ocasiona mudanças repentinas na dinâmica caótica.

O fenômeno da bifurcação está estreitamente relacionado com a existência do caos no sentido de que um sistema dinâmico que não apresenta algum tipo de bifurcação não apresenta uma resposta caótica. Deve-se destacar, no entanto, que a recíproca não é verdadeira, ou seja, um sistema que apresente bifurcações não necessariamente apresenta uma resposta caótica (Savi, 2003).

A representação do diagrama de bifurcação é feita através de um gráfico que relaciona alguma variável do sistema na seção de Poincaré, como posição ou velocidade

em um sistema mecânico, *versus* algum parâmetro do sistema, que é variado de forma quase estática.

A Figura 2.15 mostra um diagrama de bifurcação aumentando-se o parâmetro E_0 , que está relacionado com a amplitude de forçamento de um pêndulo excitado parametricamente. Inicialmente, verifica-se um comportamento periódico de período 1, que se estende até aproximadamente $E_0=95V$, em seguida, o comportamento passa a ser periódico de período 2, após a ocorrência de uma bifurcação. Depois de outras bifurcações, o sistema apresenta um comportamento caótico, que é interrompido em uma faixa forçamento por uma janela periódica. Cabe mencionar que o diagrama de bifurcação apresentado na Figura 2.15 foi obtido a partir do sistema estudado e será apresentado novamente nos resultados deste trabalho.

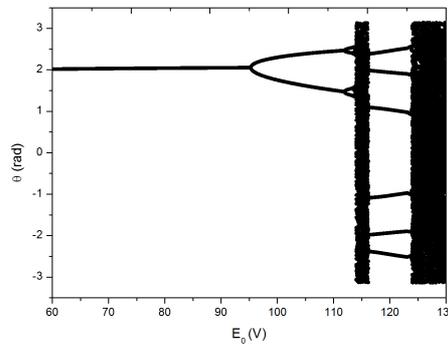


Figura 2.15 – Diagrama de Bifurcação.

3. SISTEMA PENDULAR E MÉTODO DE CONTROLE

Embora neste trabalho o controle seja avaliado a partir de simulações numéricas, o modelo matemático do sistema pendular estudado se baseia em um aparato experimental que consiste em um pêndulo fixado sob um *shaker*. Sendo o *shaker*, o componente responsável pela excitação paramétrica. Neste capítulo, inicialmente o sistema pêndulo-*shaker* é estudado e sua modelagem matemática é apresentada. Em seguida, apresentam-se os modelos matemáticos utilizados para representar o ruído dinâmico e de observação. Por último, apresenta-se o método de controle empregado, ETDF. Vale ressaltar que esse estudo baseado em um modelo matemático validado a partir de resultados experimentais é importante para uma futura implementação experimental do controle.

3.1 SISTEMA PÊNDULO-SHAKER

A ideia de extração de energia aproveitando as ondas do mar utilizando um pêndulo paramétrico forçado harmonicamente foi abordada anteriormente por diversos autores (Xu, 2005; Horton & Wiercigroch, 2008; Horton, 2009). Um sistema equivalente ao utilizado nas referências citadas é apresentado na Figura 3.1. Esse aparato experimental está disponível no Laboratório de Vibrações da Universidade de Brasília.



Figura 3.1 – Pêndulo (na esquerda) montado sob uma base fixada ao *Shaker* eletrodinâmico (na direita).

O *Shaker* é a ferramenta responsável por simular o efeito das ondas do mar, excitando verticalmente a base do pêndulo e o pêndulo representa o sistema mecânico responsável pela transferência de energia. A Figura 3.2 mostra o desenho esquemático das partes mecânica e elétrica do sistema. A parte mecânica (Figura 3.2 (a)) é composta por 3 massas: a massa do pêndulo, M , a massa do conjunto da armadura M_a , e a massa do corpo do *Shaker*, M_b . A excitação é fornecida por uma força axial eletromagnética, F_{em} , que é gerada por uma corrente alternada em um campo magnético constante representado por um circuito elétrico.

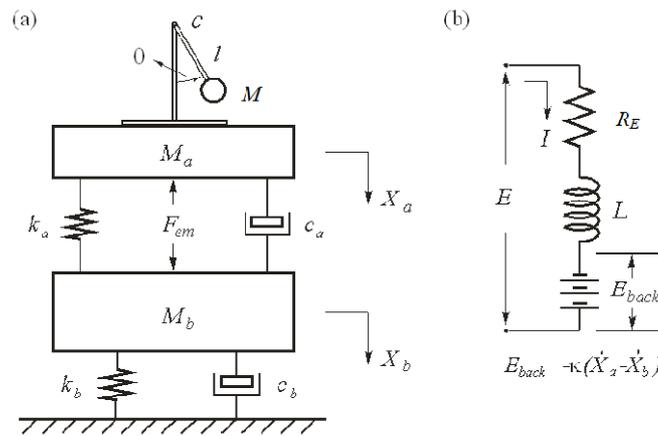


Figura 3.2 – Modelo físico do sistema pêndulo-*shaker* com os componentes mecânico e elétrico.

A parte mecânica do sistema pêndulo-*shaker* é descrita por três coordenadas generalizadas: deslocamento angular do pêndulo, θ , e deslocamentos vertical do corpo e da armadura, X_b e X_a , respectivamente. O sistema elétrico é descrito por uma carga elétrica q , que está relacionada com a corrente através de sua derivada: $I = dq/dt$. A equação de movimento de cada grau de liberdade do sistema pêndulo-*shaker* é dada por:

$$\begin{aligned}
 \theta: & Ml\ddot{\theta} + c_l\dot{\theta} + Mg\sin\theta = M\ddot{X}_a\sin\theta + T_c/l \\
 X_a: & (M_a + M)\ddot{X}_a + c_a(\dot{X}_a - \dot{X}_b) + k_a(X_a - X_b) \\
 & = (M_a + M)g + Ml\ddot{\theta}\sin\theta + Ml\dot{\theta}^2\cos\theta - kl \\
 X_b: & M_b\ddot{X}_b + c_b\dot{X}_b - c_a(\dot{X}_a - \dot{X}_b) + k_bX_b - k_a(X_a - X_b) \\
 & = M_bg + kl
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$I: R_E I + L \frac{dI}{dt} - k(X_a - X_b) = E_0 \cos(\Omega t)$$

onde T_c corresponde a atuação do parâmetro de controle e consiste em um torque aplicado diretamente ao pêndulo. Considerando-se as variáveis de estado $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} = \{\theta, \dot{\theta}, X_a, \dot{X}_a, X_b, \dot{X}_b, I\}$, as equações de movimento podem ser reescritas como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{(T_c/l - clx_2)(M_a + M) - [c_a(x_4 - x_6) + k_a(x_3 - x_5) + kx_7]M \sin x_1 + M^2 l \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta}{Ml(M_a + M - M \sin^2 x_1)} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{(M_a + M)g + Ml\dot{\theta}^2 \cos \theta - kx_7 - c_a(x_4 - x_6) - k_a(x_3 - x_5) - clx_2 \sin x_1 - mgsin^2 x_1}{M_a + M - M \sin^2 x_1} \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= \frac{M_b g + kx_7 - c_b x_6 + c_a(x_4 - x_6) - k_b x_5 + k_a(x_3 - x_5)}{M_b} \\ \dot{x}_7 &= \frac{E_0 \cos(\Omega t) - R_E x_7 + k(x_4 - x_6)}{L} \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2 RUÍDO

Sistemas dinâmicos influenciados por ruídos externos, μ_d e μ_o , podem ser expressos pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + \mu_d \\ \dot{y} &= h(x, t) + \mu_o \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde x representa as variáveis de estado, y representa a resposta observada do sistema e $f(x, t)$ e $h(x, t)$ são funções não-lineares. Os processos estocásticos aleatórios μ_d e μ_o são determinados ruído dinâmico e ruído de observação ou medição, respectivamente.

Os ruídos dinâmicos podem ser interpretados como sendo perturbações na dinâmica do sistema, ou seja, o sistema é perturbado aleatoriamente, enquanto que ruídos de observação só possuem influência na observação das variáveis de estado do sistema (De Paula, 2010).

Para as aplicações deste trabalho, os ruídos são modelados como ruído branco gaussiano, sendo adicionado à uma série temporal gerada numericamente.

Neste trabalho, a resposta do sistema será avaliada para os dois casos de ruídos. No primeiro caso, o ruído será adicionado a uma das variáveis de estado, influenciando a dinâmica do sistema e caracterizando-se como um ruído dinâmico. Posteriormente, o ruído será aplicado como uma contaminação na leitura de uma variável de estado, portanto o ruído não irá influenciar na dinâmica do sistema, caracterizando-se como um ruído de observação.

O ruído aplicado no sistema é expresso pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}\mu_d &= E \cdot In \cdot Rn \\ \mu_o &= E_{max} \cdot In \cdot Rn\end{aligned}\tag{3.4}$$

onde E é um valor associado a variável de estado ou parâmetro contaminado por ruído, In é a intensidade de ruído e Rn é um número aleatório que varia de -1 a 1.

No caso da análise da influência de ruído dinâmico, duas situações distintas são consideradas: em primeiro aplica-se o ruído na amplitude de forçamento, E_0 , e depois aplica-se o ruído na frequência de forçamento, Ω . Nesses casos, o valor de E é o próprio valor do parâmetro, que é contaminado com um ruído de intensidade In .

Na análise da influência de ruído de observação, as quantidades contaminadas são as variáveis de estado. Neste caso, o valor de E é calculado para cada variável de estado, sendo igual a variação máxima obtida para cada variável após observar a resposta do sistema sem presença de ruído.

3.3 MÉTODO DE CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO COM ESTADOS DEFASADOS ESTENDIDOS

Os métodos de controle de caos possuem algumas propriedades características que os distingue das abordagens de controle convencionais. Essencialmente, o controlador explora a sensibilidade a pequenas perturbações e o conjunto denso de órbitas periódicas instáveis que os sistemas caóticos possuem. Essas propriedades não são encontradas em sistemas lineares ou não caóticos. Neste contexto, o controlador é projetado para estabilizar uma órbita periódica instável de período qualquer e, conjuntamente, permitir que o sistema possa transitar dentre as diversas órbitas conforme a necessidade do usuário, conferindo grande flexibilidade ao sistema.

Além disso, na concepção inicial das técnicas de controle de caos, o projeto do controlador não é baseado no modelo matemático do sistema e sim nas propriedades geométricas do atrator. Portanto, podem-se estimar os parâmetros do controlador a partir de séries temporais caóticas provenientes de sistemas físicos reais, não sendo necessário o conhecimento das equações de governo do sistema. Finalmente, tem-se que a abordagem do problema é no espaço de estado.

O método de controle por realimentação com estados defasados (TDF), foi proposto por Pyragas (1992) e consiste em um controle contínuo no tempo capaz de estabilizar sistemas que apresentam comportamento caótico. Esta técnica de controle se aplica a sistemas dinâmicos que podem ser modelados por um conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares, como apresentado na equação abaixo:

$$\dot{x}(t) = Q(x, t) + B(t) \quad (3.5)$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ é o **vetor** que contém as variáveis de estado, $Q(x, t) \in \mathfrak{R}^n$ define a dinâmica do sistema, enquanto $B(t) \in \mathfrak{R}^n$ está associado a ação de controle. A perturbação do sistema é dada pela lei de controle apresentada na equação (3.6):

$$B(t) = K(x_\tau - x) \quad (3.6)$$

onde $K \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é a matriz de ganho, τ é a defasagem de tempo. A estabilização da órbita pode ser alcançada a partir da escolha de valores apropriados para a matriz de ganho K .

Embora o controle TDF tenha sido implementado com sucesso em diferentes sistemas (Hikiyama & Kawagoshi, 1996; Ramesh & Narayanan, 2001; Gauthier *et al.*, 1994; Pyragas & Tamasevicius, 1993, Bielawski *et al.*, 1993), o procedimento falha para a estabilização de OPI's de elevada periodicidade.

De forma a contornar as limitações do método de controle TDF, uma generalização da lei de controle foi proposta por Socolar *et al.* (1994), que consiste no método de controle por realimentação com estados defasados estendidos (ETDF). Esta estratégia de controle considera não apenas a informação de um estado do sistema defasado no tempo, mas de vários estados anteriores do sistema, como representado na equação (3.7).

$$B(t) = K[(1 - R)S_\tau - x]$$

$$S_\tau = \sum_{m=1}^{\infty} R^{m-1} x_{m\tau} \quad (3.7)$$

onde $K \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é a matriz de ganho, $0 \leq R < 1$ é um parâmetro do controlador, $x_{m\tau} = x(t - m\tau)$ e $x = x(t)$. Para qualquer valor de R , a perturbação apresentada na Equação (3.7) se anula quando a trajetória do sistema esta sobre uma OPI do sistema uma vez que $x(t - m\tau) = x(t)$ para todo m se $\tau = T_i$, onde T_i é a periodicidade da i -ésima OPI. A estabilização do sistema em uma de suas OPIs pode ser alcançada a partir da escolha de parâmetros do controlador, R e K , adequados. Além disso, cabe ressaltar que quando $R = 0$, a equação de controle, equação (3.7), se reduz a lei de controle original equação (3.6) representada por Pyragas (1992) para o método TDF.

A partir da lei de controle do método ETDF apresentada na equação (3.7) considerando apenas a informação da velocidade angular, $x_2 = \dot{\theta}$, e $M = 3$, a atuação T_c , mostrada na equação (3.2), é expressa pela equação:

$$T_c = \frac{Ml^2(M_a + M - M \sin^2 x_1)}{(M_a + M)} k[(1 - R)(x_2(t - \tau) + Rx_2(t - 2\tau) + R^2x_2(t - 3\tau)) - x_2] \quad (3.8)$$

onde k é um escalar que corresponde ao único elemento não nulo da matriz K , o elemento K_{22} .

Embora o sistema dinâmico seja descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs) de 1ª ordem, como apresentado na equação (3.5), o sistema dinâmico com o controlador – composto pelas equações (3.5) e (3.6) no caso do método TDF e pelas equações (3.5) e (3.7) no caso ETDF. Para encontrar a solução desse conjunto de equações diferenciais com atraso é necessário considerar uma função inicial $x_0 = x_0(t)$ no intervalo $[-m\tau, 0]$. Esta função pode ser estimada a partir da expansão em série de Taylor como apresentado na equação (3.9) (Cunningham, 1954).

$$x_{m\tau} = x - m\tau \dot{x} \quad (3.9)$$

Com isso, obtém-se o sistema a seguir:

$$\dot{x} = Q(x, t) + K[(1 - R)S_\tau - x]$$

$$\text{onde} \begin{cases} S_\tau = \sum_{m=1}^{\infty} R^{m-1} (x - m\tau\dot{x}), \text{ para } (t - m\tau) < 0 \\ S_\tau = \sum_{m=1}^{\infty} R^{m-1} x_{m\tau}, \text{ para } (t - m\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Note que, enquanto EDOs contêm derivadas que dependem apenas da solução do sistema no instante presente, as DDEs, em contrapartida, contêm derivadas que dependem também da solução do sistema em tempos anteriores. Desta forma, além do tratamento especial realizado para $(t - m\tau) < 0$, é necessário lidar com os estados defasados no tempo durante a integração do sistema. Neste trabalho, a integração numérica do sistema dinâmico com o controlador proposto pelos métodos por realimentação é realizada a partir da utilização do método Runge-Kutta de quarta ordem com interpolação linear das variáveis defasadas no tempo, conforme sugerido por Mensour & Longtin (1997).

Além da identificação das OPIs, são determinados os valores dos seguintes parâmetros do controlador: R e K para o controle ETDF. Estes parâmetros são definidos para cada OPI a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov da órbita correspondente.

3.3.1. EXPOENTE DE LYAPUNOV DE OPI

No controle por realimentação com estados defasados constrói-se uma perturbação contínua no tempo conforme proposto por Kittel *et al.*(1994) ou por Pyragas (1993), como apresentado nas equações (3.6) e (3.7) respectivamente. A ideia dessa estratégia de controle é que a OPI de interesse, contida no sistema, não seja modificada mas apenas seus expoentes de Lyapunov. A mudança no sinal do expoente modifica as características da órbita instável, tornando-a estável (Kittel *et al.*, 1995). Esta mudança é conseguida escolhendo-se os parâmetros do controlador de forma que todos os expoentes de Lyapunov se tornem negativos. No entanto, considerando-se um sistema não-autônomo, para a análise de estabilidade de OPIs é suficiente determinar apenas o maior expoente de Lyapunov (Pyragas, 1995). Desta forma, a partir apenas do maior expoente de Lyapunov é possível obter um intervalo de valores da matriz K , considerando-se um R constante, onde o controle pode ser alcançado. Portanto, é necessário buscar situações onde o expoente de Lyapunov máximo seja negativo, $\lambda(K, R) < 0$. Além disso, segundo Pyragas (1995) tem-se que o valor mínimo de

$\lambda(K, R)$ fornece uma taxa de convergência maior das órbitas próximas para a OPI desejada e torna o método mais robusto na presença de ruído.

O cálculo do expoente de Lyapunov de DDEs é mais complicado do que de EDOs. Além disso, estados defasados no tempo que transformam a equação dinâmica do sistema em DDEs aparecem devido a lei de controle do ETDF, o mesmo que ocorre no caso do TDF. Considerando-se o método ETDF com 3 estados defasados no tempo, a última equação do sistema apresentado na equação (3.10) consiste em uma DDE do tipo apresentado na equação (3.11).

$$x(t) = Q(x, \dot{x}) + B(t, x, x_\tau, x_{2\tau}, x_{3\tau}) \quad (3.11)$$

Desta forma, para o cálculo de $x = x(t)$ num instante maior que t é necessário conhecer a função $x_i(t), i = 1, \dots, n$ no intervalo $(t - 3\tau, t)$. Equações deste tipo consistem em sistemas de dimensões infinitas e devem apresentar infinitos expoentes de Lyapunov, dos quais apenas uma quantidade finita pode ser determinada a partir de uma análise numérica (Vincentet *al.*, 2005). No entanto, para a análise de estabilidade de OPIs em sistemas não-autônomos é suficiente determinar apenas o maior expoente de Lyapunov.

Neste trabalho, o cálculo do expoente de Lyapunov é conduzido aproximando-se a evolução contínua do sistema de dimensão infinita por um número finito de elementos cujos valores mudam em passos discretos no tempo (Farmer, 1982). Neste contexto, as funções $x_i(t), i = 1, \dots, n$ no intervalo $(t - 3\tau, t)$ podem ser aproximadas por N amostras espaçadas entre si por intervalos de tempo de $\Delta t = 3\tau/(N - 1)$. Desta forma, ao invés de n variáveis de estado, apresentadas na equação (3.11), agora considera-se $n(N + 1)$ variáveis. Estas variáveis são representadas pelo vetor z , onde as componentes $z_{n+1}, \dots, z_{n(N+1)}$ estão relacionados aos estados defasados no tempo $x(t)$ como apresentado na equação (3.12).

$$(z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+(n-1)N+1}, \dots, z_{n(N+1)} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_1(t - \Delta t), \dots, x_1(t - N\Delta t), \dots, x_n(t - \Delta t), \dots, x_n(t - N\Delta t)) \quad (3.12)$$

Existem diversas formas de realizar esse tipo de aproximação. Neste trabalho, baseado no procedimento utilizado por Sprott (2007), a DDE é substituída por um

conjunto de EDOs. A partir desta consideração, o sistema contínuo de dimensão infinita apresentado na equação (3.11), é representado por $N + 1$ EDOs de dimensão finita como apresentado na equação (3.13).

$$\begin{aligned}
\dot{z}_j &= Q_j(z_1, z_2, \dots, z_n) + B_j(t, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n(N+1)}), \quad \text{para } 1 \leq j \leq n \\
\dot{z}_{n+1+(j-1)N} &= N(z_j - z_{n+2+(j-1)N})/2\tau, \quad \text{para } 1 \leq j \leq n \\
\dot{z}_{n+i+(j-1)N} &= \frac{N(z_{n+i+(j-1)N-1} - z_{n+i+(j-1)N+1})}{2\tau}, \quad \text{para } 2 \leq i \leq (N-1) \text{ e } 1 \\
&\leq j \leq n \\
\dot{z}_{n+jN} &= N(z_{n+jN-1} - z_{n+jN})\tau, \quad \text{para } 1 \leq j \leq n
\end{aligned} \tag{3.13}$$

onde $N = 3\tau/\Delta t + 1$. Este sistema pode ser resolvido a partir da utilização de qualquer método indicado para solução de EDOs não lineares, como Runge-Kutta de quarta ordem (De Paula, 2010). A partir da representação obtida anteriormente, os expoente de Lyapunov podem ser calculados a partir do algoritmo clássico proposto por Wolf *et al.* (1985). Além disso, de forma a calcular o expoente de uma OPI, o sistema é integrado ao longo da órbita de interesse. Considerando-se sistemas não autônomos, os parâmetros do controlador que correspondem ao valor mínimo do expoente de Lyapunov máximo são, então, escolhidos para estabilizar a OPI analisada.

4. RESULTADOS

Neste capítulo, realiza-se uma análise da dinâmica do sistema pendular. Inicialmente sem ação de controle e, em seguida, com ação de controle, onde o método ETDF é empregado de forma a manter o movimento rotativo do pêndulo em três situações distintas: aumentando-se a amplitude de forçamento, diminuindo-se a amplitude de forçamento e, por último, diminuindo-se a frequência de forçamento. Nas três etapas, avalia-se também a influência da presença de ruídos dinâmico e de observação no desempenho do controlador.

O capítulo é dividido em duas partes. Primeiro são discutidos os resultados do modelo simplificado, onde a dinâmica do *Shaker* não é considerada. Em seguida, e com maior enfoque, são discutidos os resultados para o sistema pêndulo-*shaker*.

4.1 SISTEMA PÊNDULAR

Inicialmente considera-se um modelo simplificado do sistema pendular, onde a dinâmica do *shaker* é desconsiderada. A equação de movimento que rege esse sistema é apresentada a seguir:

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\text{sen}\theta + \frac{\mu \cdot \text{sgn}(\dot{\theta})}{ml^2} = -\frac{Y_0\Omega^2 \cos(\Omega t) \text{sen}\theta}{l} + T_c \quad (4.1)$$

onde ω_n é a frequência natural do sistema linearizado, g é a aceleração gravitacional, l é o comprimento do pêndulo, ξ é o coeficiente de atrito viscoso, Y_0 a amplitude de forçamento, Ω a frequência de forçamento e T_c é a ação do controle.

Esse sistema simplificado é considerado com objetivo de validar parcialmente o programa desenvolvido a partir da comparação entre a resposta do sistema obtido numérica experimentalmente. A Figura 4.1, apresenta o deslocamento angular do pêndulo no tempo obtido a partir de simulação numérica (em vermelho) juntamente com os dados experimentais (em preto). Os resultados experimentais foram obtidos a partir do aparato mostrado na Figura 3.1 (esquerda). Os parâmetros utilizados na simulação numérica, obtidos a partir dos dados experimentais, são apresentados na Tabela 4.1. Vale mencionar que como fonte de dissipação de energia considerou-se uma combinação de amortecimento viscoso linear e atrito seco. Os coeficientes de

amortecimento viscoso e atrito seco foram obtidos a partir de decrementos logarítmicos e linear, respectivamente, conforme metodologia proposta por De Paula *et al.* (2006).

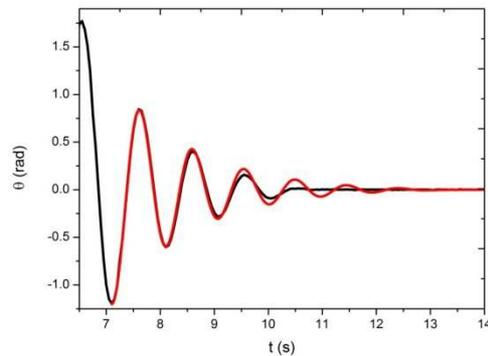


Figura 4.1: Comparação do deslocamento do pêndulo obtido a partir de simulação numérica (em vermelho) e da resposta experimental (em preto).

A partir da Figura 4.1 verifica-se uma boa concordância entre os resultados numérico e experimental.

O pêndulo excitado parametricamente pode apresentar diferentes comportamentos, dependendo das condições iniciais e parâmetros de forçamento. Neste momento, buscam-se soluções rotativas para o sistema a partir da construção da bacia de atração. A bacia de atração identifica, através de cores, os diferentes comportamentos apresentados por um sistema para um mesmo conjunto de parâmetros e diferentes condições iniciais. O conjunto de pontos de cada cor está associado a um atrator. Desta forma, a construção da bacia de atração do pêndulo permite a identificação de possíveis soluções rotativas.

A Figura 4.2 apresenta a bacia de atração considerando-se uma faixa de posições iniciais de $-\pi$ até π e velocidade iniciais de 10 rad/s até 30rad/s. O método de integração Runge-Kutta de 4ª ordem é utilizado na integração numérica, sendo o algoritmo implementado na linguagem C. Além disso, utiliza-se $Y_0 = 0.05m$ e $\Omega = 20 \text{ rad/s}$ para os parâmetros de forçamento e os valores para os demais parâmetros, identificados experimentalmente, seguem identificados na Tabela 4.1. Os pontos em vermelho correspondem às condições iniciais que resultam em uma órbita rotativa de período 1, mostrada no espaço de fase na Figura 4.3 (a). Já os pontos em preto estão associados a condições iniciais em que o pêndulo fica parado em regime permanente.

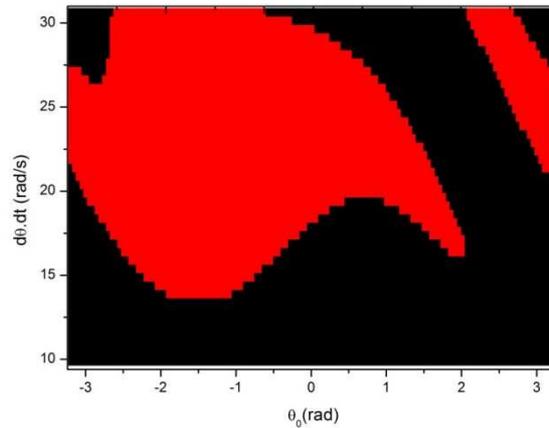


Figura 4.2: Bacia de atração para $Y_0 = 0.05\text{m}$ e $\Omega = 20\text{rad/s}$.

Tabela 4.1: Parâmetros do sistema pendular

M_a	0.128 Kg	l	0.2216 m
g	9.81	ξ	0.0985
μ	0.000914368		

De forma a avaliar a região em que a solução rotativa identificada permanece estável, constrói-se um diagrama de bifurcação aumentando-se a amplitude de forçamento, conforme mostrado na Figura 4.3 (b). Pode-se observar que, inicialmente, o sistema apresenta um comportamento periódico rotativo de período 1. Com o aumento da amplitude de forçamento, o sistema sofre bifurcações com duplicação de período, além de outras bifurcações que levam a diferentes comportamentos periódicos, assim como uma região que indica comportamento caótico.

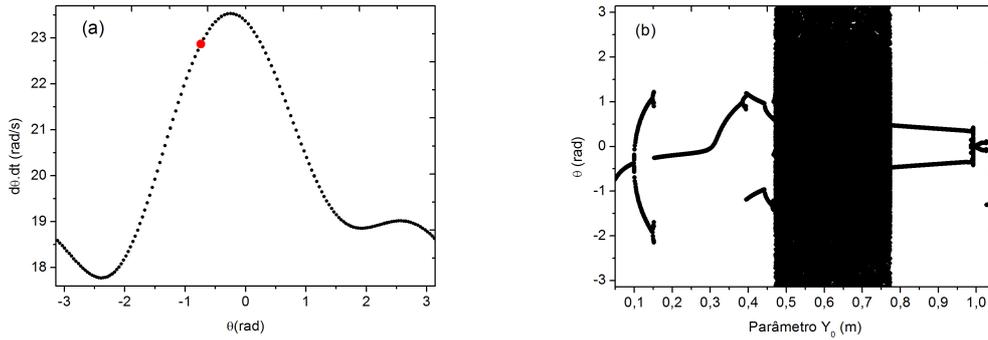


Figura 4.3: a) Espaço de fase (preto) e Seção de Poincaré (vermelho) da órbita rotativa de período 1 para $Y_0=0.05\text{m}$ e condições iniciais $\mathbf{x}_0=\{-2.4416, 20\}$; b) Diagrama de bifurcação aumentando-se a amplitude de forçamento.

Buscando avaliar melhor o comportamento do sistema identificado pelo diagrama de bifurcação como possível comportamento caótico, a Figura 4.4 mostra o espaço de fase (a) e a Seção de Poincaré (b) do sistema para uma amplitude de forçamento de $Y_0 = 0.6\text{m}$.

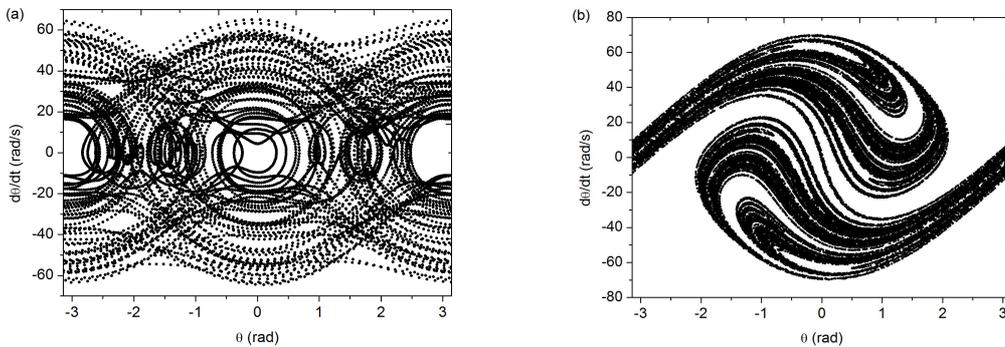


Figura 4.4: Resposta do sistema para $Y_0=0.6\text{m}$. (a) Espaço de fase; (b) Seção de Poincaré.

Neste momento, o método de controle ETDF é empregado buscando controlar o sistema em uma solução rotativa quando $Y_0 = 0.6\text{m}$ e $\Omega = 20\text{rad/s}$. A Figura 4.5 (a) apresenta a órbita de período-1 identificada a partir do diagrama de bifurcação para $Y_0 = 0.6\text{m}$, antes das bifurcações que levam ao comportamento caótico. Como verificado no diagrama de bifurcação, essa órbita perde estabilidade, se tornando uma Órbita Periódica Instável (OPI). Para avaliar se o método de controle é capaz de estabilizar essa OPI, calcula-se o expoente de Lyapunov máximo da OPI considerando diferentes ganhos para o controlador, conforme mostrado na Figura 4.5 (b) para

$Y_0 = 0.6m$ $\Omega = 20$ rad/s. Nenhum expoente negativo é encontrado, mostrando que o método de controle não é capaz de estabilizar a OPI.

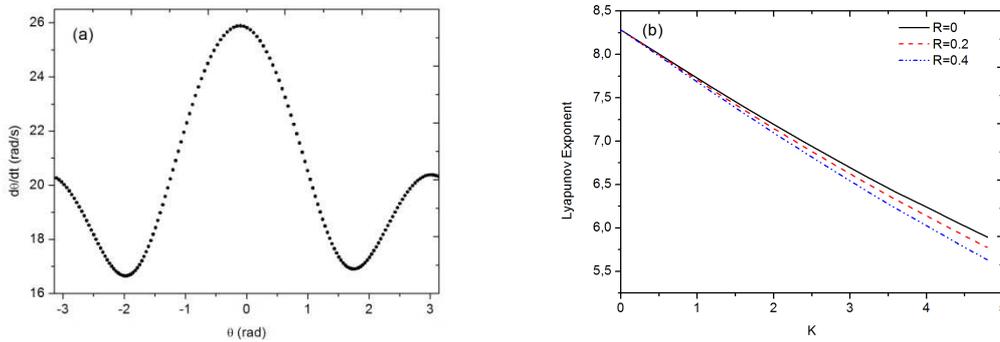


Figura 4.5: (a) OPI de período-1 e (b) expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle para $Y_0 = 0.6m$.

Como o controlador não é capaz de estabilizar a OPI de interesse na condição anterior, é feita uma nova análise considerando $Y_0 = 0.125m$, onde o sistema apresenta um comportamento periódico de período 2 sem ação de controle. A Figura 4.6 mostra o expoente de Lyapunov máximo desta órbita considerando-se diferentes valores para os parâmetros de controle. O cálculo do expoente mostra que o controlador é capaz de estabilizar a OPI desejada nessa nova amplitude de forçamento considerada, tendo em vista a obtenção de expoentes negativos.

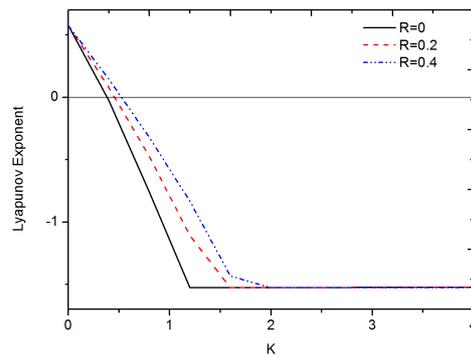


Figura 4.6: Expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle com $Y_0=0.125m$

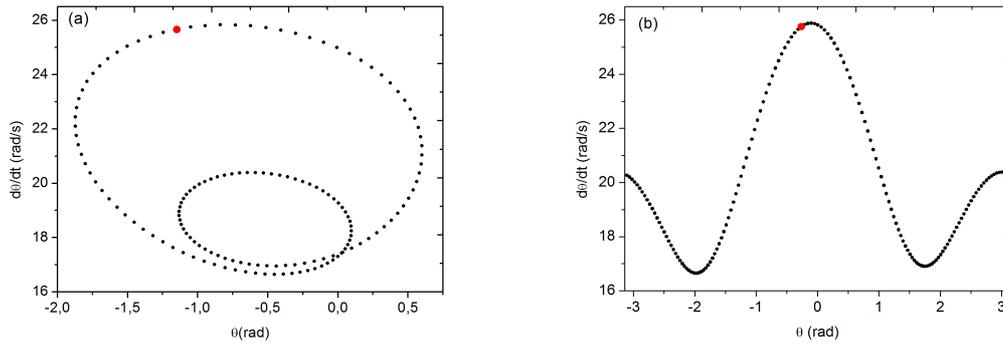


Figura 4.7: Resposta do sistema em regime permanente com ação de controle para $Y_0=0.125$, $K=1.2$ e $R=0.0$. (a) Espaço de fase (preto) e Seção de Poincaré (vermelho) para $\mathbf{x}_0 = \{-1.5447, 23.7718\}$ (b) Espaço de fase (preto) e Seção de Poincaré (vermelho) com controle iniciado na vizinhança da OPI de interesse.

A Figura 4.7 (a) mostra o comportamento do sistema em regime permanente considerando ação de controle com $K=1.2$, $R=0.0$ e $\mathbf{x}_0 = \{-1.5447, 23.7718\}$. Pode-se perceber que a órbita estabilizada não é a OPI desejada. Em seguida, conforme sugerido por De Paula *et al.* (2010), a ação de controle é iniciada na vizinhança da OPI de interesse. Nesse caso, o controlador é capaz de estabilizar a OPI de interesse, conforme mostrado pela resposta do sistema apresentada na Figura 4.7 (b).

Essa primeira análise mostrou a dificuldade de estabilização da órbita rotativa na região em que o sistema apresenta comportamento caótico. Os resultados obtidos não foram satisfatórios para a estabilização de comportamentos rotativos do pêndulo, no entanto, a análise realizada foi importante para familiarização com o método de controle e a metodologia de identificação dos ganhos do controlador.

4.2 SISTEMA PÊNDULO X SHAKER

Neste momento, busca-se avaliar numericamente o desempenho do controlador considerando um modelo matemático mais fiel ao aparato experimental apresentado na Figura 3.1. Xu *et al.* (2007) apresentam uma análise numérica e experimental da dinâmica de um sistema pêndulo-*shaker* semelhante ao aparato experimental apresentado. O modelo proposto, apresentado na equação 3.2, e os parâmetros experimentais identificados, apresentados na Tabela 4.2, são utilizados nessa dissertação. Cabe mencionar que na análise desse modelo completo, os parâmetros não

foram calibrados a partir de resultados experimentais obtidos no Laboratório de Vibrações, por isso são utilizados os parâmetros apresentados por Xu *et al.* (2007). Cabe ressaltar, no entanto, que a importância dessa análise, em comparação à análise apresentada na subseção anterior, é incluir a influência do *shaker* na dinâmica do sistema.

Tabela 4.2: Parâmetros do sistema pêndulo-*shaker* identificados experimentalmente (Xu *et al.*, 2007)

M	0.845 kg	l	0.3166 m	c	0.0475 kg/s
M_a	68.38 kg	K_a	86175.9 kg/s ²	C_a	534.05 kg/s
M_b	820 kg	K_b	244284 kg/s ²	C_b	679.35 kg/s
R	0.3 Ω	L	2.626 x 10 ⁻³ H	K	130 N/A

Os resultados considerando a ação de controle são discutidos em três momentos neste capítulo. Inicialmente realiza-se uma análise da dinâmica do sistema considerando que a amplitude de tensão de forçamento é aumentada. Em seguida, discutem-se os resultados da análise da dinâmica do sistema considerando que a amplitude de forçamento é diminuída. Por fim, apresentam-se os resultados obtidos quando a frequência de forçamento é diminuída. Para cada uma dessas situações, o sistema é analisado sem e com ação de controle e na presença e ausência de ruído dinâmico e ruído de observação.

4.2.1. AUMENTO DA AMPLITUDE DE FORÇAMENTO

Inicialmente, realiza-se uma análise do comportamento do sistema sem controle. Para a construção do diagrama de bifurcação em função do aumento da amplitude de forçamento, considera-se $\Omega = 9\text{rad/s}$, um valor inicial de $E_0 = 60\text{V}$ e um aumento quase-estático do parâmetro. Para gerar o diagrama, os primeiros 200 períodos são descartados, considerando apenas a resposta do sistema em regime permanente. O diagrama, apresentado na Figura 4.8 (a) mostra bifurcações com duplicação de período que levam ao comportamento caótico e, depois, uma janela periódica relacionada a uma resposta de período 6. O atrator caótico para $E_0 = 115\text{V}$ também é apresentado na Figura 4.8 (b) considerando-se o espaço de fase restringido a $(-\pi, +\pi)$.

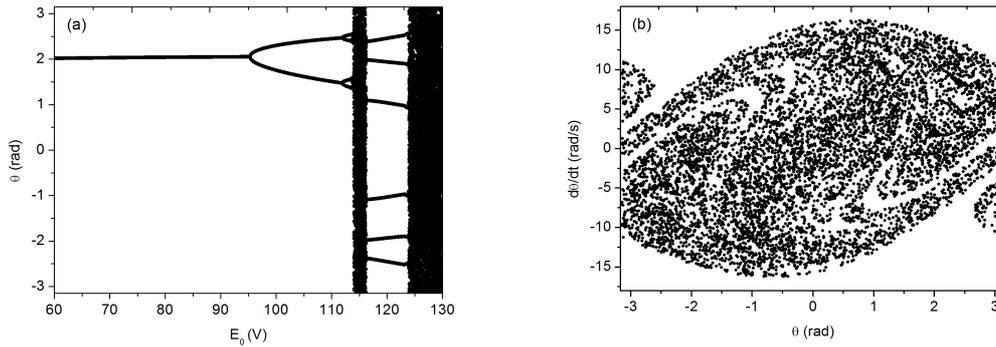


Figura 4.8: (a) Diagrama de Bifurcação para $\Omega = 9\text{rad/s}$ aumentando a amplitude de forçamento. (b) Seção de Poincaré para $\Omega = 9\text{rad/s}$ e $E_0 = 115\text{V}$.

Antes de empregar o método de controle de caos contínuo ETDF é necessário identificar a OPI rotativa de interesse, assim como determinar ganhos para o controlador adequados para a estabilização dessa OPI. A Figura 4.9 (a) apresenta uma OPI de período-1 identificada pelo método dos pontos recorrentes próximos (Auerbach *et al*, 1987) para $\Omega = 9\text{ rad/s}$ e $E_0 = 115$, comportamento relacionado à seção de Poincaré apresentada na figura 4.8 (b). A Figura 4.9 (b) mostra o expoente de Lyapunov máximo para essa órbita considerando-se diferentes valores para os parâmetros de controle. A análise mostra que existem diferentes alternativas para valores negativos do expoente de Lyapunov máximo que podem ser utilizados para alcançar a estabilização do sistema.

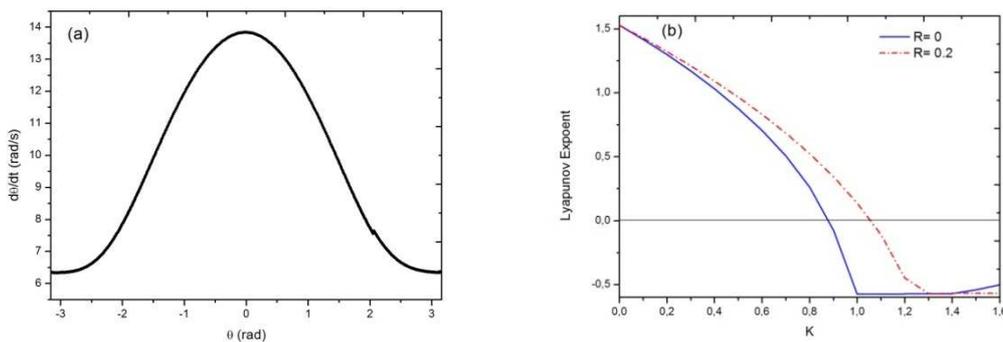


Figura 4.9: (a) OPI de período-1 e (b) expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle.

Neste ponto, o controle é aplicado com o objetivo de estabilizar a OPI de período-1 identificada, que consiste em um movimento rotativo, assumindo-se $R=0$ e $K=1.2$. A Figura 4.10 (a) apresenta o espaço de fase do pêndulo durante o controle,

considerando as condições iniciais $x_0 = \{-3,0,0,0,0,0\}$, com o estado permanente ressaltado em vermelho e (b) a ação de controle. Podemos notar valores maiores da ação de controle no início do controle, que consiste no esforço de levar a trajetória do sistema para a OPI desejada. Em seguida, o sinal de controle cai significativamente, sendo necessárias baixas atuações para manter o controle. Isso ocorre, pois o comportamento desejado é uma órbita do sistema.

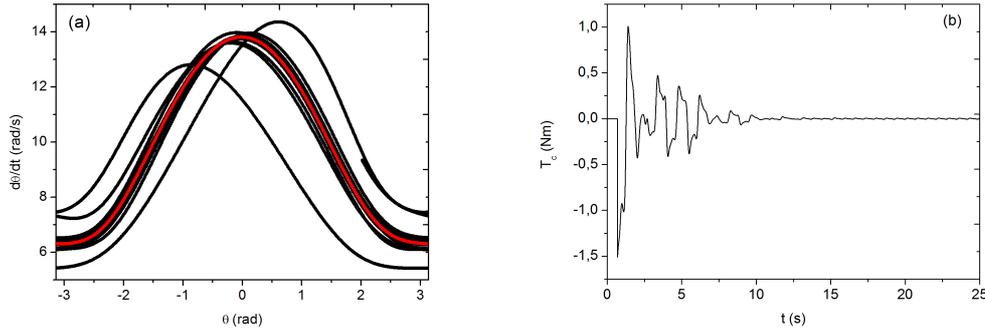


Figura 4.10: Detalhes da estabilização para $E_0 = 115V$, $R=0$, $K=1.2$. (a) espaço de fase com regime permanente destacado em vermelho; (b) ação de controle.

A Figura 4.11 mostra o diagrama de bifurcação para $\Omega = 9 \text{ rad/s}$ sem a ação de controle (em preto) e com a ação de controle (em vermelho) para dois conjuntos distintos de ganho do controlador: $R=0$, $K=0.6$ e $R=0$, $K=1.2$. Note que, no primeiro caso, Figura 4.11 (a), a bifurcação com duplicação de período ocorre apenas para um valor mais elevado de E_0 e o comportamento caótico é suprimido. Já no segundo caso, Figura 4.11 (b), a órbita rotativa de período-1 é mantida estável em toda a faixa de amplitude analisada.

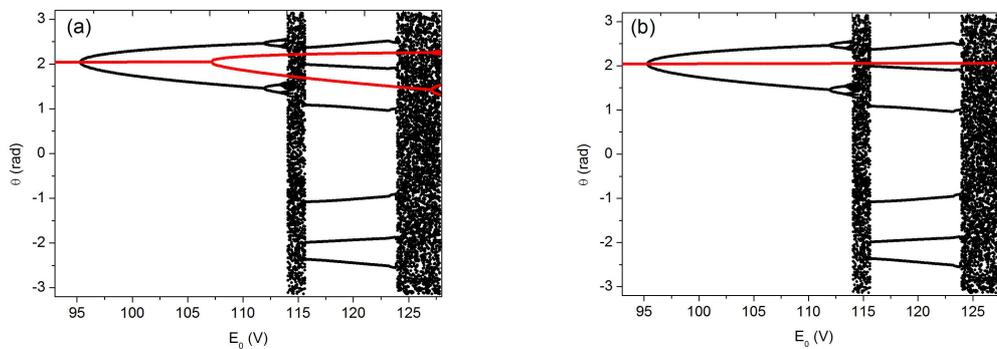


Figura 4.11: Diagrama de bifurcação para $\Omega = 9 \text{ rad/s}$ sem ação de controle (preto) e com controle (vermelho): (a) $R=0$, $K=0.6$ e (b) $R=0$, $K=1.2$.

Analisando os diagramas podemos verificar a eficácia do controlador em manter a órbita rotativa estável.

A Figura 4.12 mostra detalhes da ação de controle englobando duas variações de E_0 . Em 209s a amplitude de tensão de forçamento é aumentada para 115V, quando nota-se um ligeiro pico na ação de controle. Depois, em 418s ocorre novo aumento de E_0 para 115.1V, onde outro ligeiro pico na ação de controle é observado. A cada variação do parâmetro de forçamento, observa-se um pico no torque de controle, necessário para manter órbita de interesse estável.

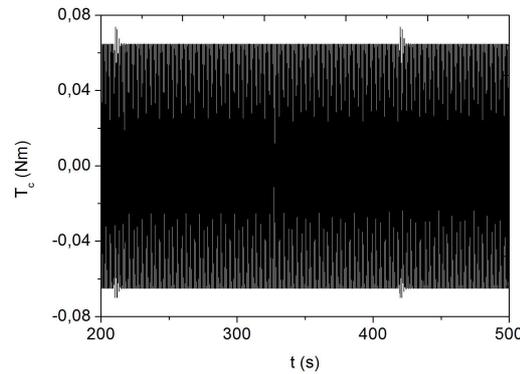


Figura 4.12: Ação de controle quando o parâmetro de forçamento é variado, incluindo $E_0 = 115V$.

Vale mencionar que a ação de controle apresentada na Figura 4.12 é consideravelmente menor que a obtida na Figura 4.10(b), isso ocorre, pois no caso do controle no diagrama de bifurcação, o sistema já está na vizinhança da órbita desejada quando o parâmetro é variado.

Ainda considerando o aumento da amplitude de forçamento, a Figura 4.13 (a-d) mostra os diagramas de bifurcação do sistema sem a ação de controle (preto) e com a ação de controle em vermelho, construídos a partir do sistema contaminado com ruído dinâmico em diferentes níveis. A contaminação de ruído no sistema foi aplicada na amplitude de tensão de forçamento E_0 e são considerados níveis de ruídos dinâmicos com intensidade de 2, 5, 8 e 10%. Esse ruído tem como objetivo representar uma variação na amplitude de forçamento decorrente da variação do tamanho das ondas, ou seja, da variação entre as distâncias entre cristas e cavas.

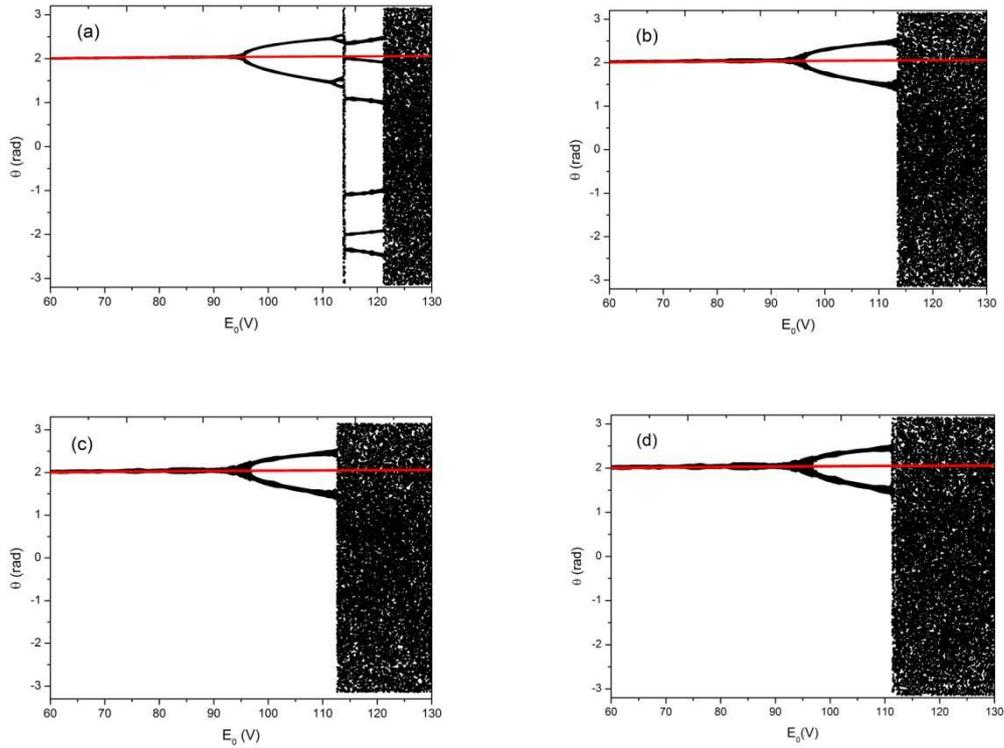


Figura 4.13: Diagrama de bifurcação para $\Omega = 9rad/s$, com ruído dinâmico sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0eK=1.2$. (a) 2% de ruído; (b) 5 de ruído %; (c) 8% de ruído; (d) 10% de ruído.

Sem ação de controle, no caso de 2% de ruído a resposta do sistema é similar ao sistema sem ruído, apresentando bifurcações com duplicação de período que levam ao comportamento caótico e, depois, uma janela periódica relacionada a uma resposta de período 6. Considerando 5, 8 e 10% de ruído dinâmico a janela periódica não é mais observada. Para um nível de ruído de 5% ou mais, percebe-se que o sistema apresenta um comportamento caótico para valores de amplitude de tensão de forçamento, E_0 , menores que os casos sem ruído e com 2%. Considerando a ação de controle, verifica-se que na presença de ruído dinâmico na amplitude de tensão de forçamento, o desempenho do controlador quase não sofre influência, sendo eficaz na estabilização da OPI desejada.

Semelhante ao resultado apresentado na Figura 4.12, a Figura 4.14(a) mostra detalhes da ação de controle englobando duas variações de E_0 para um nível de ruído dinâmico de 10%. Em 209s a amplitude de tensão de forçamento é aumentada para 115V e em 418s ocorre novo aumento. Nesse caso, devido a presença de ruído, não é observada uma mudança no padrão de resposta do controlador quando ocorre variação

do parâmetro de forçamento. A Figura 4.14(b) mostra o espaço de fase quando $E_0 = 115V$ e a Figura 4.14(c) apresenta a ação de controle para essa mesma tensão.

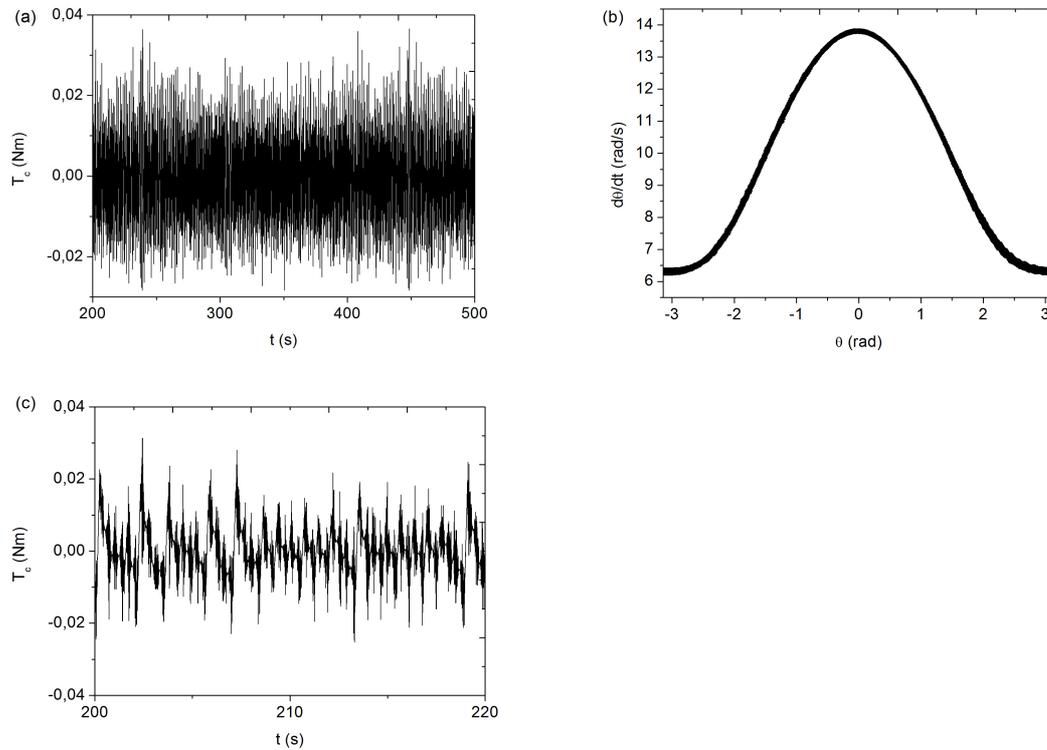


Figura 4.14: Detalhes da estabilização para $E_0 = 115V$, $R=0$, $K=1.2$ e 10% de ruído dinâmico. (a) ação de controle variando o forçamento, (b) espaço de fase; (c) ação de controle para $E_0 = 115V$.

Neste momento, ainda considerando o aumento da amplitude de forçamento, a Figura 4.15 (a-d) mostra os diagramas de bifurcação do sistema sem a ação de controle em preto e com a ação de controle em vermelho, construídos a partir do sistema contaminado com a adição de ruído de observação com diferentes intensidades.

A contaminação de ruído foi adicionada nas variáveis de estado observadas referentes à posição e à velocidade.

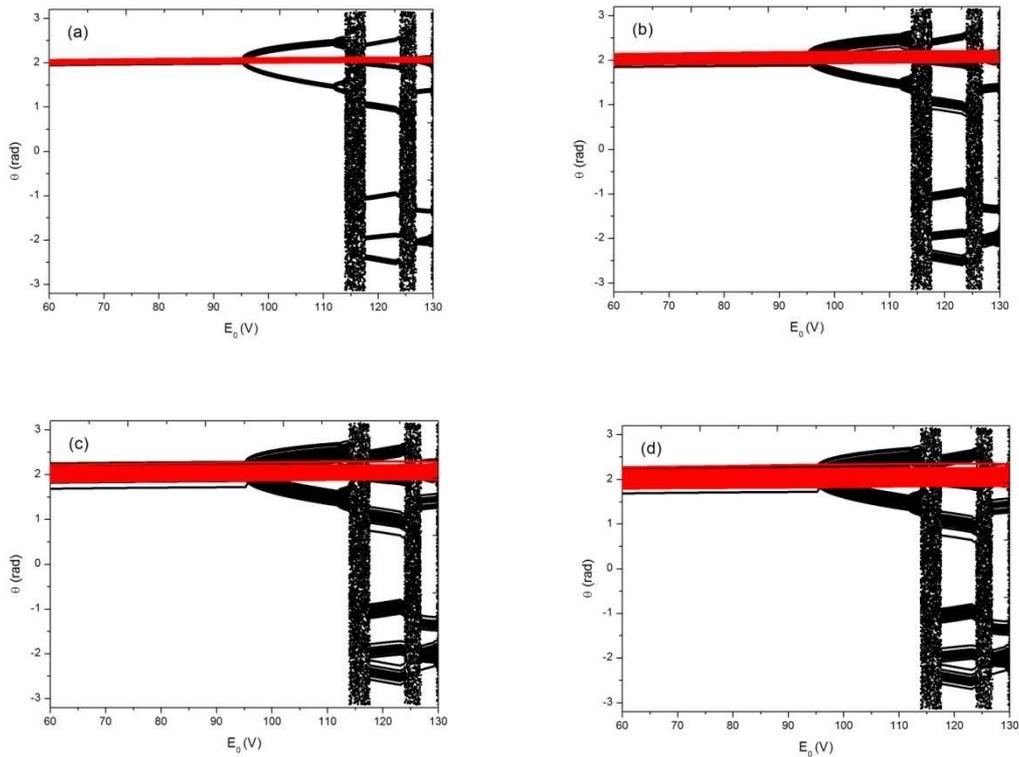


Figura 4.15: Diagrama de bifurcação para $\Omega = 9\text{rad/se}$ com ruído de observação sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0$ e $K=1.2$. (a) 2% de ruído; (b) 5% de ruído; (c) 8% de ruído; (d) 10% de ruído.

A Figura 4.16 mostra detalhes da estabilização do sistema para $E_0 = 115\text{V}$ e um nível de ruído de observação de 10%, incluindo o espaço de fase do sistema pendular, e a ação de controle.

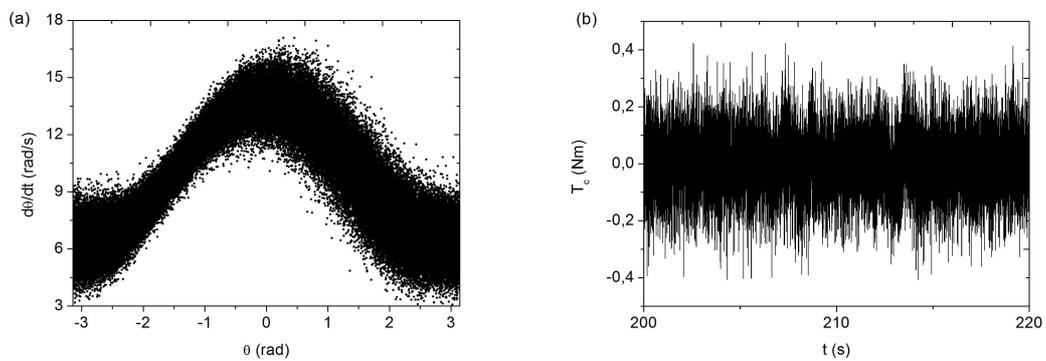


Figura 4.16: Detalhes da estabilização para $E_0 = 115\text{V}$, $R=0$, $K=1.2$ e 10% de ruído de observação. (a) espaço de fase; (b) ação de controle

Pode-se observar que a adição de ruído de observação não interferiu de maneira significativa no desempenho do controlador, pois o comportamento rotativo do pêndulo foi mantido. A influência do ruído, no entanto, pode ser verificada claramente no espaço de fase apresentado na Figura 4.16(a). Vale ressaltar que o ruído de observação não interfere na dinâmica do sistema, no entanto, ele exerce grande influência sob o sinal de controle uma vez que há erro nas informações das variáveis de estado.

4.2.2. DIMINUIÇÃO DA AMPLITUDE DE FORÇAMENTO

No segundo caso de estudo, realiza-se uma análise do comportamento do sistema considerando um decréscimo quase estático da amplitude de tensão, E_0 . A Figura 4.17 apresenta o diagrama de bifurcação sem controle e sem ruído considerando-se $\Omega = 9\text{rad/s}$. Na construção do diagrama os primeiros 200 períodos são descartados, de forma a considerar apenas a resposta do sistema em regime permanente. Pode-se observar que o sistema se mantém em uma órbita rotativa de período 1 até aproximadamente $E_0 = 33\text{V}$. Para forçamentos de intensidade menores que 33V o sistema passa por um comportamento não periódico até parar. A partir do diagrama de bifurcação não é possível distinguir se o comportamento não periódico é quase periódico ou caótico.

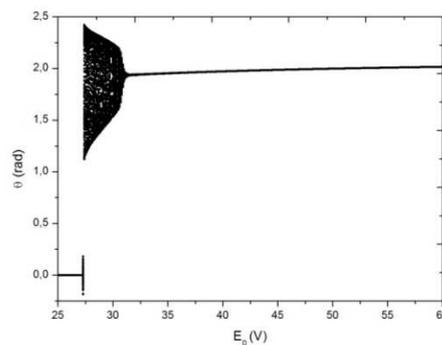


Figura 4.17: Diagrama de Bifurcação construído para $\Omega = 9\text{rad/se}$ diminuindo-se a amplitude de forçamento.

A Figura 4.18 (a) apresenta a OPI de período-1 identificada para $\Omega = 9\text{ rad/s}$ e $E_0 = 32.5\text{V}$, momento antes de a órbita perder estabilidade. A Figura 4.18 (b) mostra o expoente de Lyapunov máximo desta órbita considerando-se diferentes valores para os

parâmetros de controle, mostrando diferentes alternativas para valores negativos do expoente máximo, associados a estabilização a OPI de interesse.

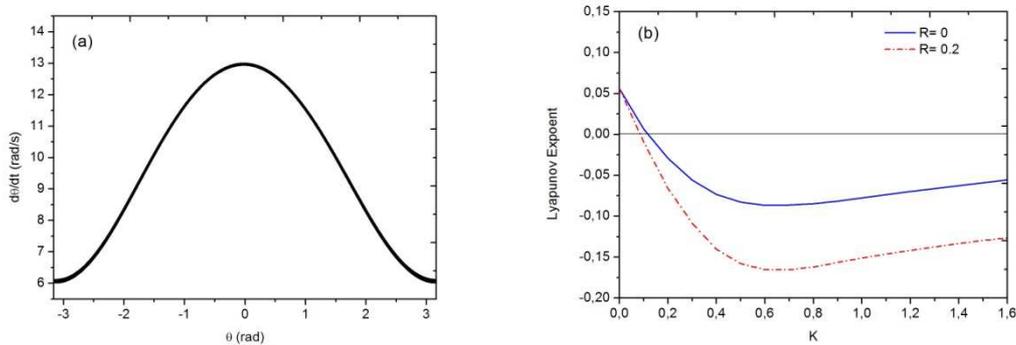


Figura 4.18: (a) OPI de período-1 e (b) expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle.

Inicialmente aplica-se o controle para uma amplitude fixa de $E_0 = 31,5V$, condições iniciais $x_0 = \{2.23, 7.42, 0.03, -0.22, 0.03, -0.007, 3.23\}$ e assumindo-se $R=0$ e $K=1.2$. A Figura 4.19 apresenta o espaço de fase do pêndulo durante o controle, com o regime permanente ressaltado em vermelho, e a ação de controle, mostrando a diminuição do torque com a estabilização do comportamento desejado.

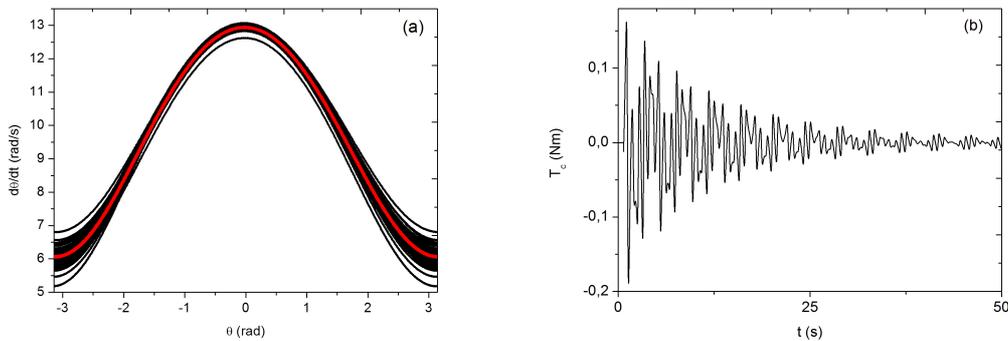


Figura 4.19: Detalhes da estabilização para $E_0 = 31,5V$, $R=0$ e $K=1.2$. (a) espaço de fase, com regime permanente destacado em vermelho; (b) ação de controle.

A Figura 4.20 apresenta o diagrama de bifurcação para $\Omega = 9 \text{ rad/s}$ sem a ação de controle (em preto) e com a ação de controle (em vermelho), considerando-se ganho do controlador de $R=0$, $K=1.2$.

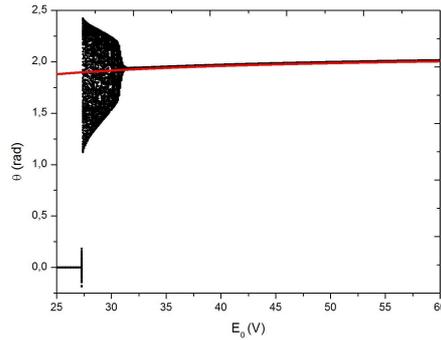


Figura 4.20: Diagrama de bifurcação construído para $\Omega = 9rad/s$ sem ação de controle (preto) e com controle (vermelho): $R=0$, $K=1.2$.

Verifica-se que, com parâmetros de controle selecionados de forma adequada, o controle mostra eficácia na estabilização do sistema, mantendo a órbita rotativa de período-1 em toda a faixa de amplitude analisada, incluindo uma faixa onde o pêndulo estaria parado sem ação de controle.

Continuando a análise, ainda considerando a diminuição da amplitude de forçamento, a Figura 4.21 (a-d) mostra os diagramas de bifurcação do sistema sem ação de controle (preto) e com ação de controle (vermelho), construídos a partir do sistema contaminado com ruído dinâmico em diferentes níveis. Novamente, a contaminação de ruído no sistema foi aplicada na amplitude de tensão de forçamento, E_0 , com níveis de ruídos de 2, 5, 8 e 10%.

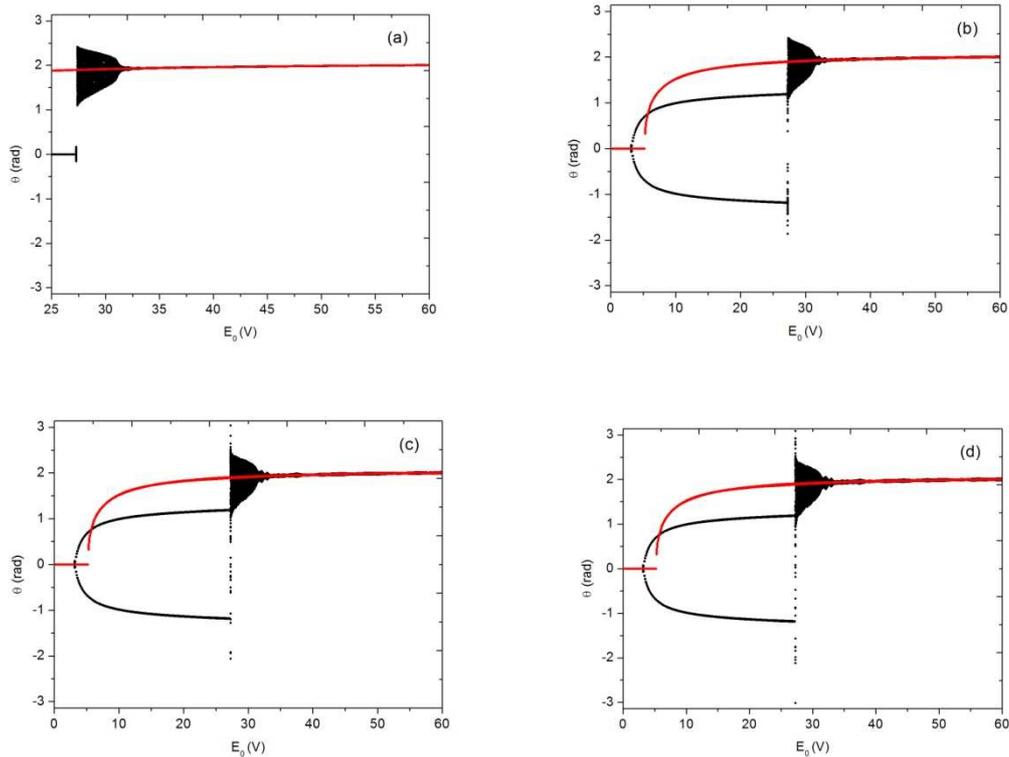


Figura 4.21: Diagrama de bifurcação para $\Omega = 9\text{rad/s}$, com ruído dinâmico sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0$ e $K=1.2$.(a) 2% de ruído; (b) 5% de ruído; (c) 8% de ruído; (d) 10% de ruído;

Considerando o sistema sem controle, na presença de 2% de ruído não há mudança significativa do sistema em relação ao caso sem ruído. Para os outros níveis de ruído analisados, o sistema demora mais a parar, passando por um comportamento oscilatório de período 2 entre o comportamento não periódico e o pêndulo parado.

A Figura 4.22 mostra detalhes da estabilização do sistema para $E_0 = 31.5\text{V}$ e um nível de ruído dinâmico de 10% incluindo o espaço de fase do sistema pendular, e a ação de controle.

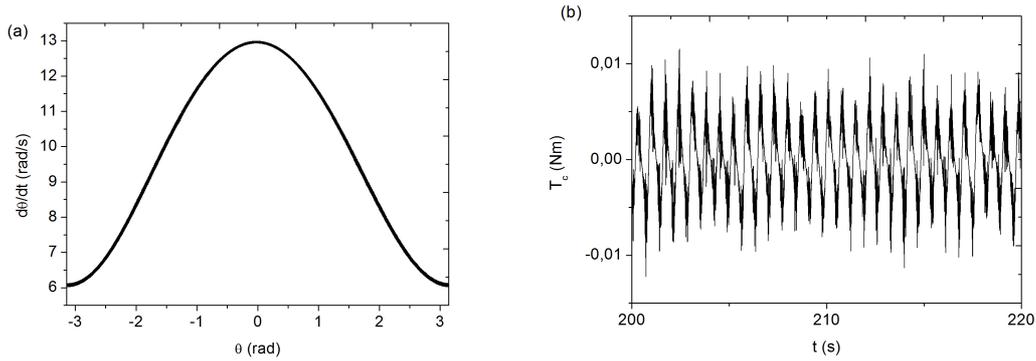


Figura 4.22: Detalhes da estabilização para $E_0 = 31.5V$, $R=0$, $K=1.2$ e 10% de ruído dinâmico. (a) espaço de fase; (b) ação de controle.

Verifica-se no espaço de fase apresentado na Figura 4.22(a), que o controle manteve o sistema em órbita rotativa de período 1 mesmo com a presença de 10% de ruído dinâmico. Aplicando o controle, observa-se que, para qualquer intensidade de ruído considerada, o sistema fica parado para uma tensão de forçamento inferior a aproximadamente 5V.

Neste momento, ainda considerando a diminuição da amplitude de forçamento, a Figura 4.23(a-d) mostra os diagramas de bifurcação do sistema sem a ação de controle em preto e com a ação de controle em vermelho, construídos a partir do sistema contaminado com a adição de ruído de observação com diferentes intensidades.

A contaminação de ruído foi adicionada às variáveis observadas referentes à posição e velocidade.

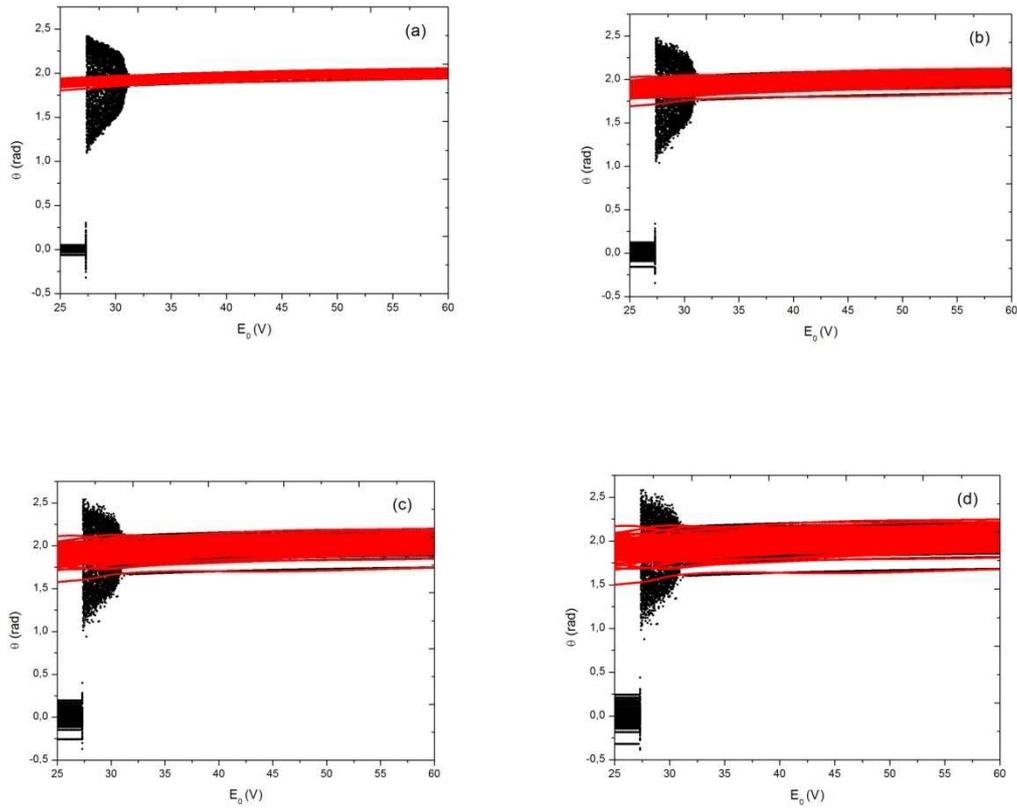


Figura 4.23: Diagrama de bifurcação para $\Omega = 9\text{rad/se}$ com ruído de observação sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0$, $K=1$. (a) 2% de ruído; (b) 5% de ruído; (c) 8% de ruído; (d) 10% de ruído;

A Figura 4.23 mostra que o controle manteve o sistema em orbita rotativa de período 1 em todos os níveis de ruído considerados, mostrando a eficácia e robustez do controlador.

A Figura 4.24, mostra detalhes da estabilização do sistema para $E_0 = 31.5V$ e um nível de ruído de observação de 10%, incluindo o espaço de fase do sistema pendular, e a ação de controle.

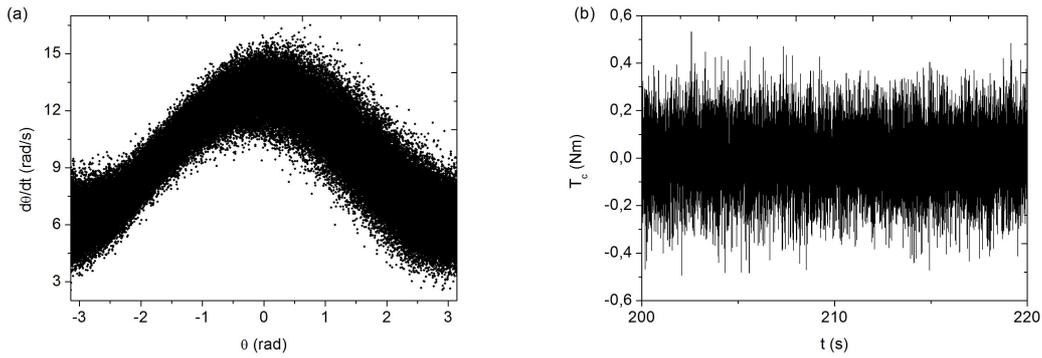


Figura 4.24: Detalhes da estabilização para $E_0 = 31.5V$, $R=0$, $K=1.2$ e 10% de ruído de observação. (a) espaço de fase; (b) ação de controle.

4.2.3. DIMINUIÇÃO DA FREQUÊNCIA DE FORÇAMENTO

Para o terceiro parâmetro de estudo, considera-se a variação da frequência de forçamento, Ω , considerando um decréscimo quase-estático do parâmetro. A tensão de alimentação, relacionada a amplitude de forçamento, é considerada constante e igual a $E_0 = 85V$, partindo de uma frequência de $\Omega = 13\text{rad/s}$. Para gerar o diagrama, os primeiros 200 períodos são descartados, considerando apenas a resposta do sistema em regime permanente.

O diagrama, apresentado na Figura 4.25, mostra que o sistema se mantém em órbita rotativa de período 1 até uma frequência de forçamento de aproximadamente $\Omega = 10.27\text{ rad/s}$. Em $\Omega = 10.27\text{ rad/s}$ o sistema apresenta uma pequena faixa de comportamento caótico e bifurcação para uma orbita oscilatória de periodicidade 2.

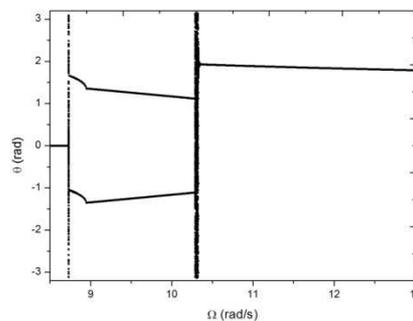


Figura 4.25: Diagrama de Bifurcação construído com $E_0=85V$ diminuindo-se a frequência Ω .

A Figura 4.26 (a) apresenta uma OPI de período-1 identificada para $\Omega = 10,5 \text{ rad/s}$ e $E_0 = 85V$, momentos antes da órbita rotativa desejada perder a estabilidade. A Figura 4.26 (b) mostra o expoente de Lyapunov máximo desta órbita considerando-se diferentes valores para os parâmetros de controle, mostrando que existem diferentes alternativas para valores negativos do expoente de Lyapunov.

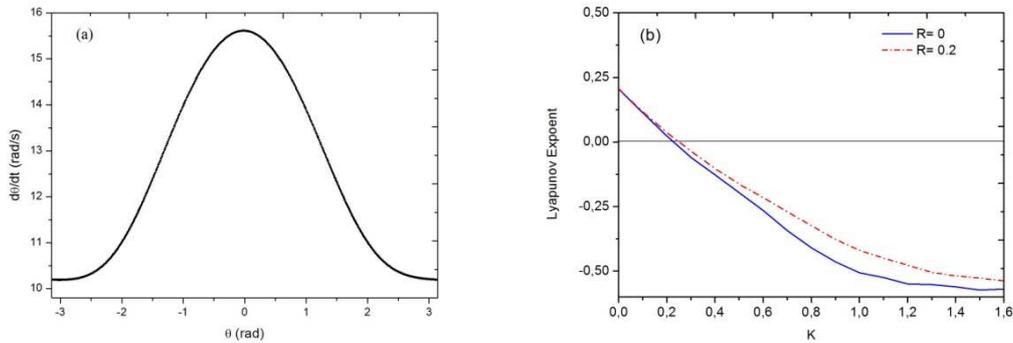


Figura 4.26: (a) OPI de período-1 e (b) expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle.

A Figura 4.27 (a) apresenta o espaço de fase do pêndulo durante o controle, considerando as condições iniciais $x_0 = \{3.13, 2.06, 0.03, -0.664, 0.03, -0.03, 7.31\}$, com o estado permanente ressaltado em vermelho e assumindo-se $R=0$ e $K=1.2$ e (b) a ação de controle.

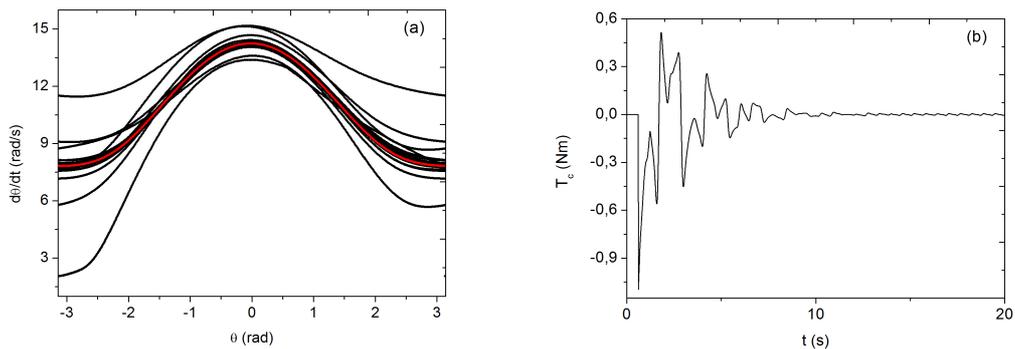


Figura 4.27: Detalhes da estabilização para $\Omega = 10,27 \text{ rad/s}$, $R=0$ e $K=1.2$. (a) espaço de fase, com estado permanente destacado em vermelho; (b) ação de controle.

A Figura 4.28 apresenta o diagrama de bifurcação para $E_0 = 85V$, sem a ação de controle (em preto) e com a ação de controle (em vermelho), considerando-se os ganho do controlador de $R=0$, $K=1.2$. Para os parâmetros de controle selecionados, o

sistema manteve a órbita rotativa de período 1 estabilizada por toda a variação de frequência de forçamento analisada.

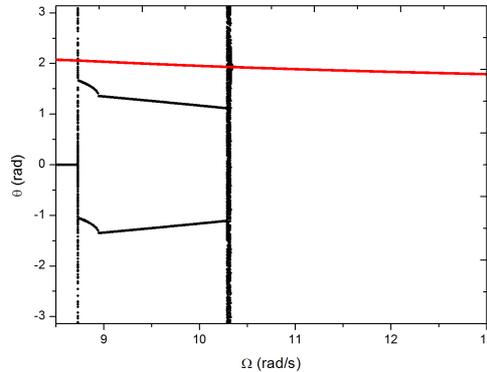


Figura 4.28: Diagrama de bifurcação construído para $E_0 = 85V$ sem ação de controle (preto) e com controle (vermelho): $R=0$, $K=1.2$.

Verifica-se que, assim como para os outros dois casos analisados anteriormente, diminuindo-se a frequência de forçamento o controle também mostra eficácia na estabilização do sistema mantendo em órbita rotativa de período-1 por toda a faixa de frequência analisada.

Continuando a análise, ainda considerando a diminuição da frequência de forçamento, a Figura 4.29 (a-d) mostra os diagramas de bifurcação do sistema sem a ação de controle (preto) e com a ação de controle em vermelho, construídos a partir do sistema contaminado com ruído dinâmico de diferentes níveis. A contaminação de ruído no sistema foi aplicada na amplitude de tensão de forçamento E_0 e também são considerados níveis de ruídos dinâmicos com intensidade de 2, 5, 8 e 10%.

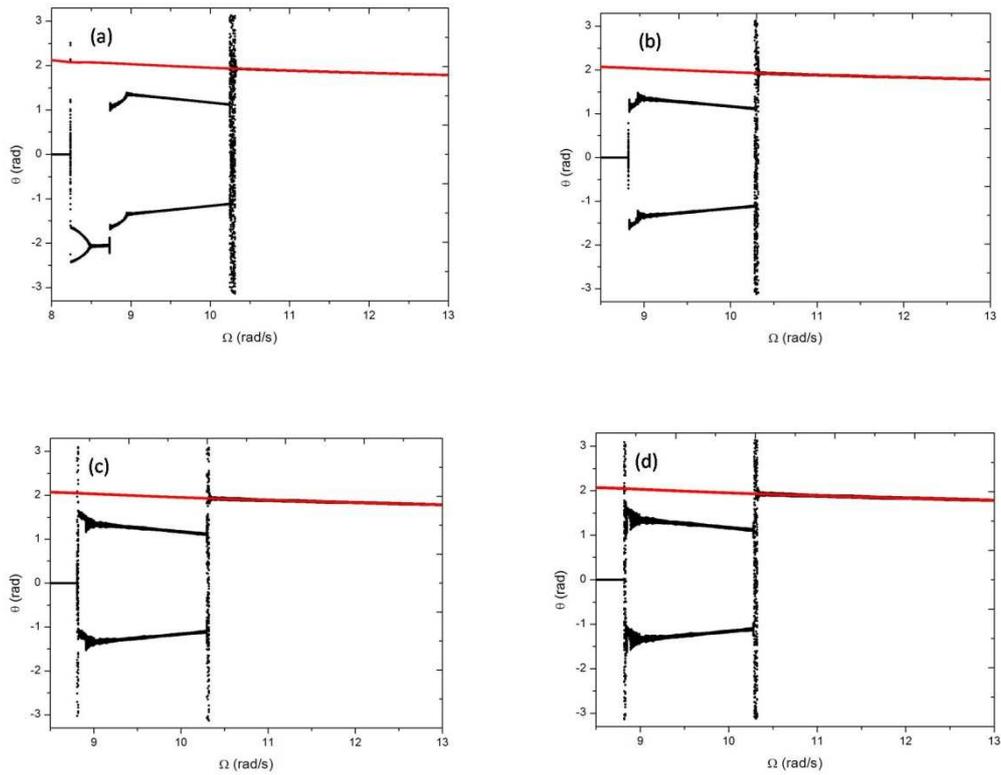


Figura 4.29: Diagrama de bifurcação para $E_0=85\text{V}$, com ruído dinâmico sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0$, $K=1.2$. (a) 2% de ruído; (b) 5% de ruído; (c) 8% de ruído; (d) 10% de ruído;

A Figura 4.30, mostra o espaço de fase do sistema pendular considerando a ação de controle para $\Omega = 10,27 \text{ rad/s}$ considerando o nível de ruído dinâmico de 10% da intensidade de forçamento.

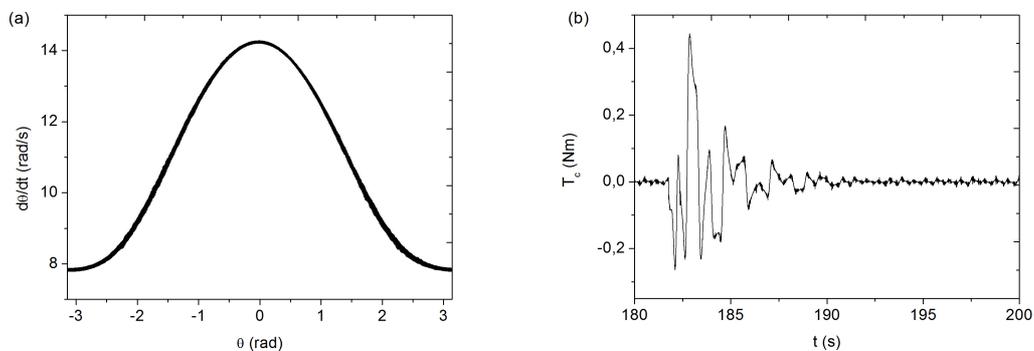


Figura 4.30: Detalhes da estabilização para $\Omega = 10,27 \text{ rad/s}$, $R=0$, $K=1.2$ e 10% de ruído dinâmico. (a) espaço de fase; (b) ação de controle.

Semelhante aos casos analisados anteriormente, a presença de ruído dinâmico na amplitude de forçamento quase não influencia o desempenho do controlador, que é eficaz na estabilização do sistema. A partir do espaço de fase mostrado na Figura 4.30 (a), pode-se observar o comportamento do sistema na órbita rotativa de período 1 desejada.

Neste momento, ainda considerando a diminuição da frequência de forçamento, a Figura 4.31 (a-d) mostra os diagramas de bifurcação do sistema sem a ação de controle em preto e com a ação de controle em vermelho, construídos a partir do sistema contaminado com a adição de ruído de observação de diferentes intensidades.

A contaminação de ruído foi adicionada às variáveis observadas referentes a posição e velocidade.

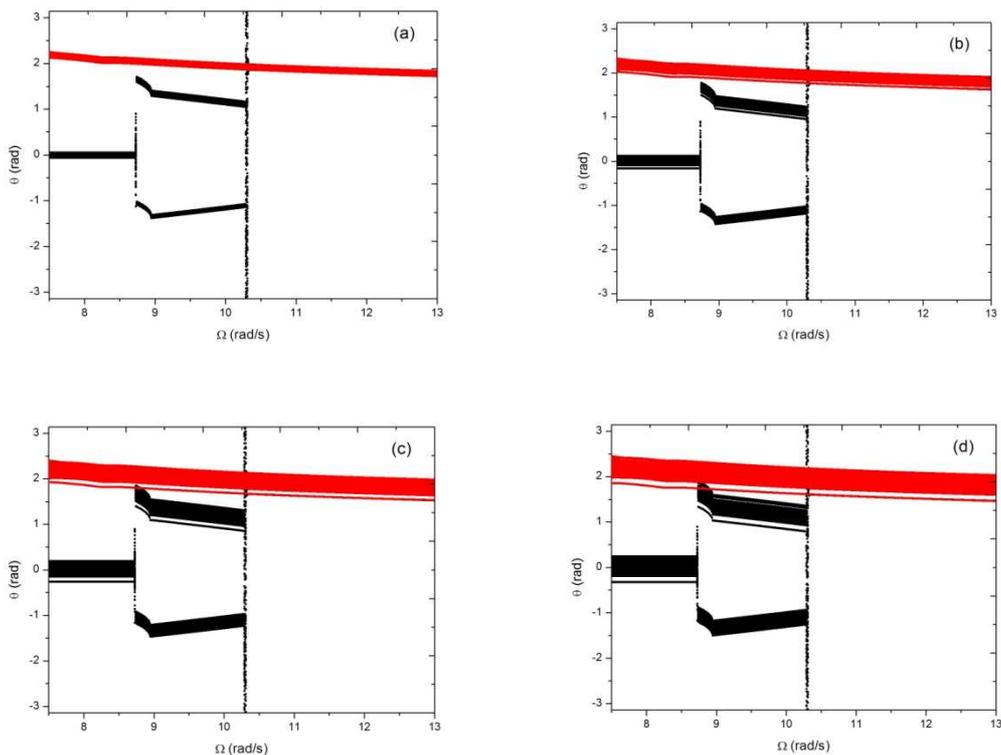


Figura 4.31: Diagrama de bifurcação para $E_0=85V$ com ruído de observação, sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0$, $K=1.2$. (a) 2% de ruído; (b) 5% de ruído; (c) 8% de ruído; (d) 10% de ruído;

A Figura 4.32, mostra detalhes da estabilização do sistema para $\Omega = 10,3 \text{ rad/s}$ e um nível de ruído de observação de 10%, incluindo o espaço de fase do sistema pendular, e a ação de controle.

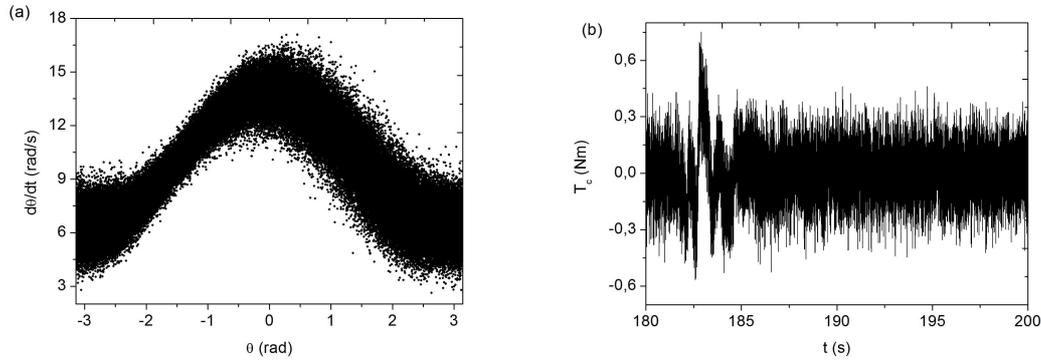


Figura 4.32: Detalhes da estabilização para $\Omega = 10,27 \text{ rad/s}$, $R=0$, $K=1.2$ e 10% de ruído de observação. (a) espaço de fase; (b) ação de controle.

Pode-se observar que na diminuição da frequência de forçamento a adição de ruído de observação também não interferiu de maneira significativa no desempenho do controlador. A influência do ruído pode ser verificada no espaço de fase apresentado na Figura 4.32(a).

Finalizando as análises, agora é considerado um ruído dinâmico na frequência de forçamento e não mais na amplitude. A Figura 4.33 (a-d) apresenta os diagramas de bifurcação sem a ação de controle em preto e com a ação de controle em vermelho. A intensidade da tensão de forçamento considera para este caso é $E_0 = 85V$.

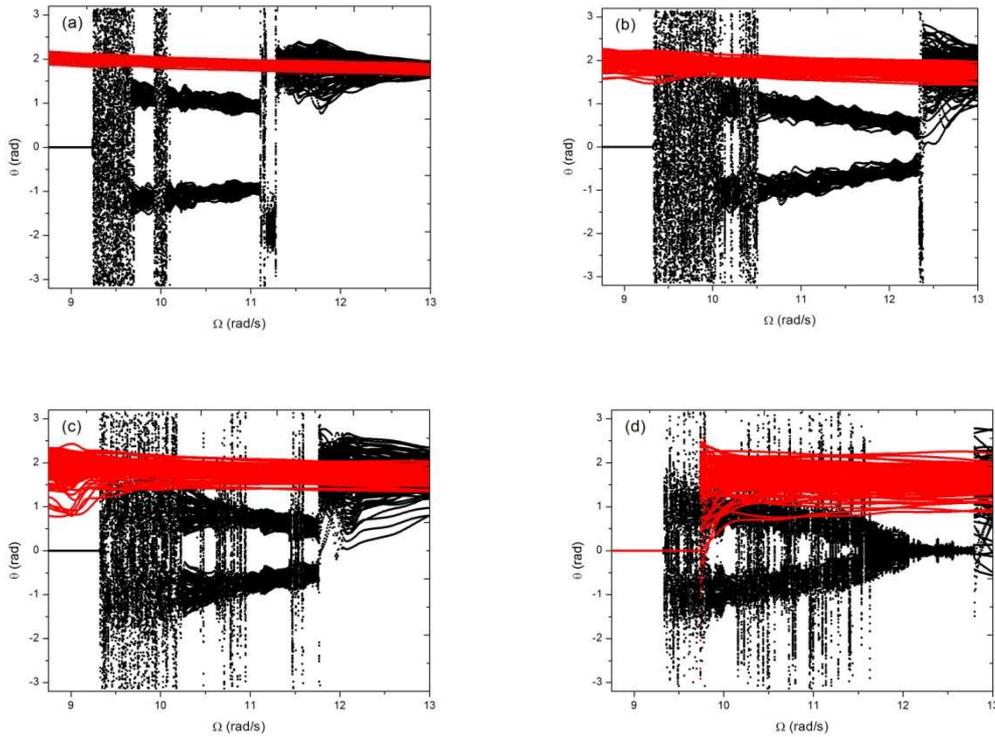


Figura 4.33: Diagrama de bifurcação para $E_0=85V$ com ruído dinâmico sem (preto) e com ação de controle (vermelho) com $R=0$, $K=1.2$.(a) 2% de ruído; (b) 5% de ruído; (c) 8% de ruído; (d) 10% de ruído.

Sem ação de controle, verifica-se que na presença de ruído dinâmico na frequência de forçamento, o comportamento do sistema sofre muita mudança. O comportamento do sistema fica mais complexo na presença do ruído, sendo mais difícil identificar o tipo de resposta através do diagrama de bifurcação. Para níveis de ruído de 2% e 5% o controlador apresenta um bom desempenho, mantendo o pêndulo em comportamento rotativo. Para 8% de ruído, a estabilização do sistema começa a apresentar problemas nas frequências mais baixas, mas o pêndulo continua em comportamento rotativo. Já para 10% de ruído dinâmico na frequência de forçamento, o controlador não é capaz de manter o pêndulo girando para frequências inferiores a aproximadamente 9.8 rad/s.

A Figura 4.34, mostra o espaço de fase do sistema pendular considerando a ação de controle para $\Omega = 12$ rad/s considerando o nível de ruído dinâmico de 10% da frequência de forçamento.

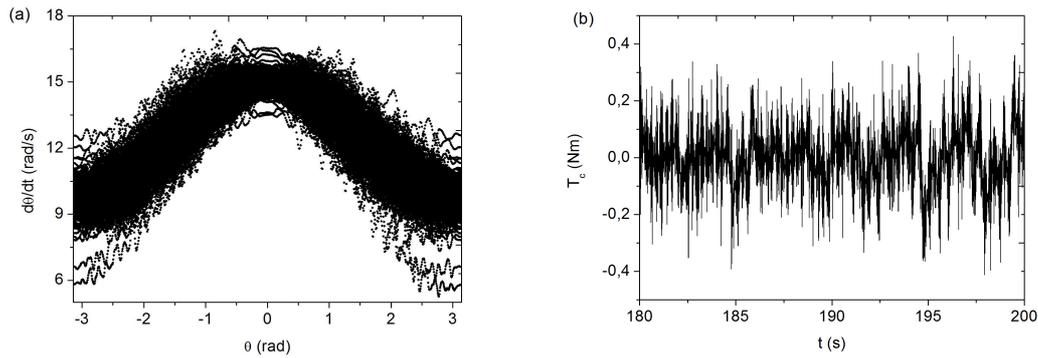


Figura 4.34: Detalhes da estabilização para $\Omega = 12$ rad/s, $R=0$, $K=1.2$ e 10% de ruído dinâmico. (a) espaço de fase; (b) ação de controle.

Vale ressaltar que a ação de controle depende da frequência de forçamento do sistema, que determina o estado defasado que deve ser utilizado na lei de controle. Dessa forma, é coerente o controlador apresentar mais dificuldades em estabilizar o sistema quando há ruído na frequência. No entanto, os resultados mostram uma boa robustez do método de controle, que conseguiu manter o comportamento rotativo do pêndulo em toda a faixa de frequência analisada até um nível de ruído de 8%.

5. CONCLUSÕES

Motivado pela ideia de converter a energia das ondas do mar em energia elétrica através do comportamento rotativo de um sistema pendular parametricamente excitado, torna-se importante controlar soluções rotativas de um pêndulo não linear, assim como evitar bifurcações que desestabilizam as soluções rotativas desejadas. Este trabalho apresenta uma análise e o controle de soluções rotativas, com e sem a presença de ruído dinâmico e ruído de observação.

Inicialmente, é feita uma breve revisão bibliográfica identificando os sistemas existentes de extração de energia das ondas do mar dando maior destaque para os sistemas pendulares. Além disso, são apresentadas algumas ferramentas apropriadas para a análise dinâmica de sistemas não-lineares.

Em seguida, o modelo matemático que descreve o sistema pêndulo-*shaker* estudado é apresentado, assim como a modelagem dos ruídos dinâmico e de observação aplicados e o método de controle por realimentação com estados defasados utilizado.

Para um modelo pendular simplificado, é realizada uma validação parcial através da comparação entre respostas obtidas numérica e experimentalmente, mostrando uma boa concordância entre os resultados para o sistema livre. Nesse modelo simplificado, a dinâmica do *shaker* é desconsiderada.

Para esse modelo simplificado, inicialmente, identifica-se uma solução rotativa desejada e avalia-se a perda de estabilidade dessa resposta quando o forçamento é variado. Em seguida, considera-se uma situação em que o sistema apresenta comportamento caótico e discute-se a sua estabilização em uma OPI rotativa. Considerando condições iniciais longe da OPI de interesse, o método de controle ETDF não foi capaz de estabilizar a OPI desejada. No entanto, iniciando-se a ação de controle na vizinhança da OPI de interesse, o controlador é capaz de estabilizar a órbita do sistema. Nessa primeira análise, os resultados mostram que na ausência de uma dinâmica para a base do pêndulo, o controle ETDF apresenta dificuldades em estabilizar a OPI rotativa de interesse.

Em seguida, inicia-se a análise do sistema completo, onde considera-se uma dinâmica para a base do pêndulo. Tomando como base o sistema estudado por Xu *et al* (2007), que apresenta uma análise numérica e experimental de um sistema pêndulo-

shaker, a dinâmica da base é dada pela dinâmica do *shaker*, que realiza a excitação do sistema.

A análise deste novo modelo é dividida em três casos. Inicialmente é realizada uma análise do sistema considerando o aumento da amplitude de forçamento. Sem controle, verifica-se que o sistema apresenta diversas bifurcações com duplicação de período que levam ao comportamento caótico. Antes do emprego do método de controle ETDF para evitar essas bifurcações, os ganhos R e K são determinados de forma apropriada a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov máximos. Os resultados mostram que o sistema de controle é capaz de manter o sistema na OPI de período-1 rotativa desejada, evitando as bifurcações indesejadas. Em seguida, ainda considerando o primeiro caso analisado, o sistema é avaliado na presença de ruído dinâmico na amplitude de forçamento. Observa-se que o ruído dinâmico não altera muito a resposta do sistema sem ação de controle. Com ação de controle, verifica-se que a presença de ruído dinâmico não prejudica o desempenho do controlador, mostrando sua eficácia e robustez na estabilização do sistema. Em seguida, avalia-se o desempenho do controlador na presença de ruído de observação. Novamente, o controlador é eficaz em manter a solução rotativa desejada estável, evitando as bifurcações em toda a faixa de amplitude de forçamento analisada. Vale ressaltar que esse é um resultado importante do que diz respeito a robustez do controlador, visto que o ruído de observação exerce grande influência sob o sinal de controle uma vez que há erros nas informações das variáveis de estado. Para o primeiro caso de análise com o modelo completo, o sistema de controle mostrou ótimos resultados para estabilização do sistema considerando ou não a existência de ruídos.

No segundo caso, considera-se a diminuição da amplitude de forçamento a partir de uma condição de comportamento rotativo do pêndulo. Novamente, o método de controle ETDF é aplicado buscando evitar bifurcações que desestabilizam o comportamento rotativo desejado do pêndulo, com a mesma metodologia utilizada no primeiro caso. Os resultados mostram que o controlador é eficaz na estabilização do comportamento rotativo do pêndulo sem ruído, na presença de ruído dinâmico na amplitude de forçamento e na presença de ruído de observação. A presença dos diferentes tipos de ruído não impede o bom desempenho do método ETDF.

No terceiro e último caso, considera-se a diminuição da frequência de forçamento. O mesmo objetivo dos casos anteriores é perseguido com a mesma metodologia. Além do ruído dinâmico na amplitude de forçamento e do ruído de

observação nesse caso considera-se também um ruído dinâmico na frequência de forçamento. Na presença dos ruídos analisados nos casos anteriores, o controlador apresenta um ótimo desempenho, mantendo a OPI rotativa de período 1 estável em toda a faixa de frequência analisada. Na presença de ruído dinâmico na frequência de forçamento, o controlador começa a ter dificuldades para um nível de ruído de 8% nas frequências mais baixas, mas é capaz de estabilizar a OPI desejada. Para um nível de 10% de ruído, o controlador não é mais capaz de estabilizar a OPI em frequências mais baixas. Vale ressaltar que a ação de controle depende da frequência de forçamento do sistema, que determina o estado defasado que deve ser utilizado na lei de controle. Dessa forma, é coerente o controlador apresentar mais dificuldades em estabilizar o sistema quando há ruído na frequência. No entanto, os resultados mostram uma boa robustez do método de controle, que conseguiu manter o comportamento rotativo do pêndulo em toda a faixa de frequência analisada até um nível de ruído de 8%.

Comparando-se os resultados do controle obtidos para o modelo simplificado e para o modelo completo, conclui-se que a dinâmica do *shaker* tem papel importante no desempenho do controlador, que não apresentou bom desempenho no modelo simplificado. Dessa forma, é importante considerar a dinâmica da base no pêndulo na análise do sistema.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Considerando a extensão do tema análise e controle de soluções rotativas em um sistema pendular, tem-se um vasto número de possíveis estudos a serem feitos a fim de continuar este trabalho. Como sugestão para trabalhos futuros sugere-se analisar e controlar a dinâmica do sistema pendular ajustando o modelo matemático trabalhado à Teoria Espectro de Pierson-Moskowitz verificando o comportamento do sistema para o somatório dos forçamentos, como sugerido pela teoria.

Também como sugestão, sugere-se o estudo experimental do sistema com os mesmos parâmetros analisados neste trabalho, de forma a comparar as respostas numérica e experimental do sistema.

Como última sugestão tem-se o estudo da capacidade de geração de energia do sistema pendular, assim como da energia que será consumida pelo controlador para manter o sistema em órbita rotativa.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Auerbach, D., Cvitanovic, P., Eckmann, J.P., Gunaratne, G., Procaccia, I., (1987), “Exploring Chaotic Motion Through Periodic Orbits”, *Physical Review Letters*, V.58, n.23, pp.2387-2389.

Bielawski, S., Bouzaoui, M., Derozier, D., Glorieux, P., (1993), “Stabilization and characterization of unstable steady states in a laser”, *Physical Review A*, v.47, pp.3276-3279.

Bishop, S.R., Clifford, M.J., (2006), “Zones of chaotic behavior in the parametrically excited pendulum”. *Journal of Sound and Vibration*, 189(1):142-247.

Bloomer, J.L. (2000), “Practical Fluid Mechanics for Engineering Applications”, Marcel Dekker, inc., New York.

Brown, D.T. (2005), “Mooring Systems. In. Handbook of offshore Engineering”, pp.663-708, Chakrabarti, Amsterdam.

Chaplin, R., Aggidis, A. (2007), “Wave Interactions and Control in a new Pitching – Surge point- Absorber Wave energy Converter”. 7th European Wave and Tidal Energy Conference, Porto.

CRES (2002), “Wave energy Utilization in Europe: Current Status and Perspectives”, Centre of Renewable Energy Sources, Grécia.

Cruz, J. M. B. P., Sarmiento, A. J. N. A. (2004) “*Energia das ondas*”, <http://www.wave-energycentre.org/pagesp/Cruz.pdf>. 18-8-2012.

De Paula, A. S., Savi, M. A. & Pereira-Pinto, F. H. I., 2006, “Chaos and Transient Chaos in an Experimental Nonlinear Pendulum”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 294, n. 3, p. 585-595

De Paula, A.S., Savi, M.A., (2009), “A multiparameter chaos control method based on OGY approach”, *Chaos Solutions and Fractals*, v.40, n.3, pp.1376-1390.

De Paula, A.S., (2010). “Controle de Caos em Sistemas Mecânicos”, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, Brasil.

De Paula, A. S., Savi, M. A., Wiercigroch, M. & Pavlovskaja, E. (2012), “Bifurcation Control of a Parametric Pendulum”. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, v. 22, p. 1250111-1250111.

ETSU. (1999), “New and Renewable Energy: Prospects in the UK for the 21st Century: Supporting Analysis”, R-122, Harwell, Oxon.

Falcão, A.F.O. (2004), “Conversão de Energia das Ondas por corpos oscilantes” – Texto e apoio a disciplina de Energias Renováveis (5ºano), IST, Lisboa.

Farmer, J.D., (1982), “ Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system”, *Physical D*, pp.366-393.

Fitzgerald, J., Bergdahl, L. (2008), “Including moorings in the assessment of a generic offshore wave energy converter: A frequency domain approach”, Elsevier Ltd, Amsterdam.

- Gauthier, D.J., Sukow, D.W., Concannon, H. M., Socolar, J.E.S., (1994), “Stabilizing unstable periodic orbits in a fast diode resonator using continuous time-delay autosynchronization”, *Physical Review E*, v.50, pp.2343-2346.
- Hikihara, T., Kawagosh, T. (1996), “An experimental study on stabilization of unstable periodic motion in magneto-elastic chaos”, *Physics Letters A*, v.211, pp.29-36.
- Horton, B.W., (2009), “Rotation motion of pendular systems for wave energy extraction”, PhD thesis, University of Aberdeen.
- Horton, B., Wiercigroch, M., (2008), “Effects of heave excitation on rotations of a pendulum for wave energy extraction”, *IUTAM Symposium on fluid-structure interaction in ocean engineering*, v.8, pp.117-128.
- IEA-OES.(2003) “*Status and Research and Development Priorities, Wave and Marine Current Energy*”.
- Jeon, S.H., Cho, Y.U., Seo, M.W., Cho, J.R., Jeong, W.B., (2013), “Dynamic response of floating substructure of spar-type offshore wind turbine with catenary mooring cables”.Elsevier Ltd, Amsterdam
- Kittel, A., Pyragas, K., Richter, R., (1994), “Prerecorded history of a system as an experimental tool to control chaos”, *Physical Review E*, v.50, n.1, pp.262-268.
- Kittel, A., Parisi, J., Pyragas, K., (1995), “Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time”, *Physics Letters A*, c.198, pp.433-436.
- Leven, R.W., Koch, B.P., (1981), “Chaotic behavior of a parametrically excited damped pendulum. *Physics Letters A*, 86(2):71-74.
- Mensour, B., Longtin, A., (1997), “Power spectra and dynamical invariants for delay-differential and difference equations”, *Physica D*, v.113, pp.1-25.
- Moon, F.C., (1987), “*Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*”, New York: Jhon Wiley & Sons.
- Nielsen, K., Meyer, N.I. (1998), “The Danish Wave energy Program”,http://www.oecos.com/CEM/cem8-1_nielsen.htm. 19-8-2012.
- Otani, M., Jones, A.J., (1997), “Guiding Chaotic Orbits”, Research Report.
- Paredes, M.P., (2008), “Estudo Experimental de um Sistema Offshore para produção de energia das ondas”, UEUP, Porto, Portugal.
- Pierson, W.J., Moskowitz, J.L., (1964), “A proposed spectral form fully developed wind seas on similarity theory of S.A.”, *Kitaigorodskii, Jornal de pesquisa em Geofísica*, 69 (24), 5181-5190.
- Pillai, T.M.M., Prasad, A.M., (2000), “Fatigue reliability analysis in time domain for inspection strategy of fixed offshore structures. *Ocean Engineering* 27, 167-186.
- Pontes, M.T, Falcão, A.F. (2001), “Ocean Energies: Resources and Utilisation”, 18th World Energy Conference, Buenos Aires, Argentina.
- Pyragas, K., (1992), “Continuous control of chaos by self-controlling feedback”, *Physics Letters A*, v.170, pp.421-428.

Pyragas, K., (1993), "Predictable chaos in slightly perturbed unpredictable chaotic systems", *Physics Letters A*, v.181, pp.203-210.

Pyragas, K., (1995), "Control of chaos via extended delay feedback", *Physics Letters A*, v.206, pp.323-330.

Pyragas, K., Tamasevicius, A., (1993), "Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback", *Physics Letters A*, v.180, pp.99-102.

Ramesh, M., Narayanan, S., (2001), "Controlling Chaotic motions in a two-dimensional airfoil using time-delayed feedback", *Journal of Sound and Vibration*, v.239, pp.1037-1049.

Savi, M.A., (2003), "Dinâmica Não-Linear e Caos", Rio de Janeiro: E-papers, v.1, 304p.

Sarmiento, A.J.N.A. & Cruz, J.M.B.P. (2003), "Wave energy Absorption by a Submerged Sphere of Variable radius in Sway Surge and Heave", 5th European Wave energy Conference, Cork, Irlanda.

Saulnier, J.B, (2004), "Analysis of an OWC buoy (wave energy converter). UCC-HMRC/ECN.

Socolar, J.E.S., Sukow, D.W., Gauthier, D.J., (1994), "Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems", *Physical Review E*, v.50, n.4, pp.3245-3248.

Solak, E., Morgul, O., Ersoy, U., (2001), "Observer-based of a class of chaotic systems", *Physics Letters A*, v.279, PP.47-55.

Sprott, J.C., (2007), "As simple chaotic delay differential equation", *Physics Letters A*, V.366, pp. 397-402.

Vincent, R., Daudén, J., Colet, P., Toral, R., (2005), "Analysis and characterization of the hyperchaos generated by a semiconductor laser subject to a delayed feedback loop", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.41, pp.541-548.

Watt, D., Cartmell, M.P., (1994), "An externally loaded parametric oscillator", *Journal of Sound and Vibration*, 170(3):339-364.

Wiercigroch, M., (2003), "A new concept of energy extraction from waves via parametric pendulum", UK patent application.

Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A., (1985), "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", *Physica D*, v.16, pp.285-317.

Xu, X., (2005), "Nonlinear Dynamics of Parametric Pendulum for Wave Energy Extraction, PhD Thesis, University of Aberdeen.

Xu, X. & Wiercigroch, M., (2007), "Approximate analytical solutions for oscillatory and rotational motion of a parametric pendulum", *Nonlinear Dynamics*, V.47.